T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

RİEMANN İNVARYANTLARI VE HİPERBOLİK DENKLEM VE DENKLEMLER SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan: **İhsan ÇELİKKAYA**

İSTANBUL, 2011

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

RİEMANN İNVARYANTLARI VE HİPERBOLİK DENKLEM VE DENKLEMLER SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan:

İhsan ÇELİKKAYA

Öğrenci No:

080860006

Danışman:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İstanbul, 2011

YEMİN METNİ

yüksek lisans tezi olarak sunduğum “ Riemann İnvaryantları ve Hiperbolik Denklem ve denklemler Sisteminin çözümleri” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 05/ 05/ 2011

Aday: İhsan ÇELİKKAYA

ÖZET

Tezde 1.basamaktan hiperbolik tür denklemler sisteminin karakteristikler yöntemiyle çözümleri incelenmiştir.Bunun için tezin birinci kısmında 1.basamaktan hiperbolik tür denklem ve denklemler sistemi için hangi koşulların verilebileceği irdelenmiştir.

Tezin ikinci kısmında sabit katsayılı kısmi türevli hiperbolik tür denklemler sisteminin çözümünün bulunması için karakteristikler yöntemi uygulanmış ve bazı sınıf pratik önem taşıyan sabit katsayılı denklemler sisteminin gerçek çözümleri elde edilmiştir.

Tezin sonuncu bölümünde ideal gazların izentropik ve sabit entropili akışını ifade eden non-lineer denklemler sisteminin gerçek çözümünün bulunması için bir yöntem geliştirilmiştir.

ABSTRACT

Riemann Invariants and the Solutions of the Hyperbolic Equations and Systems of Equations

In this thesis, the solutions of the first order hyperbolic systems of equation using characteristics method are examined. To this end, in the first part of the thesis, the conditions which can be set for the hyperbolic equations and systems equations are examined.

In the second part of the thesis, the characteristics method are applied in order to solve the systems of partial differential equations with constant coefficients, the exact solutions are obtained for some class of systems of equation which are of practical importance.

In the final part of the thesis, a method is developed to solve the exact solution of the systems of nonlinear equation which model the isentropic and constant entropic flow of ideal gases.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşmasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim.

İstanbul. 2011

İhsan ÇELİKKAYA

GİRİŞ

Dört bölümden oluşan tezin amacı, lineer ve kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için Riemann invaryantlarının incelenmesi ve Riemann invaryantlarını kullanarak incelediğimiz sistemin çözümleri elde edilmiştir. Literatürden bilindiği üzere, tek denklemler için karakteristikler yönteminin anahtarı, karakteristik eğri kavramı içermek ve verilmiş denklemi bu karakteristik üzerinde tam diferansiyel şeklinde yazmaktır. Böylece, kısmi türevli diferansiyel denklemi adi diferansiyel denklemler sistemine indirgeyip sonra bu adi diferansiyel denklemler sistemini çözerek esas problemin gerçek çözümünü elde edebiliriz.

Karakteristikler yönteminin mantığını kısmi diferansiyel denklemler sistemine direkt uygulamak mümkün değildir. Çünkü, sistemin her bir denklemi, farklı bilinmeyen fonksiyonların çeşitli yönlerde türevlerini içermektedir. Karakteristikler yöntemini diferansiyel denklemler sistemine uygulayabilmemiz için özel şekilde öyle eğriler bulunur ki, bu eğriler üzerinde invaryant kalan ifadeler elde edilmesi mümkün olur. Söz konusu eğrilere denklemler sisteminin karakteristikleri denir ve bu karakteristikler üzerinde sabit kalan ifadelere de Riemann invaryantları adı verilir. Riemann invaryantları dikkate alınarak göz önüne aldığımız sistemin her bir denklemini uygun karakteristikler üzerinde tam diferansiyel şeklinde ifade etmek mümkündür. Dolayısıyla, yine de kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi adi diferansiyel denklemler sistemine indirgenebilir. Söz konusu adi diferansiyel denklemler sistemini çözerek, incelediğimiz kısmi türevli diferansiyel denklemin gerçek çözümünü elde edebiliriz.

Yukarıda söylediklerimizi gerçekleştirmek için tezin birinci bölümünde, skaler lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için hangi başlangıç koşulların verilebileceği problemini inceleyeceğiz. Sonraki bölümlerde ise, Riemann invaryantlarını kullanarak bazı kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümlerini ele alacağız**.**

Şimdi, tezin sonraki bölümlerinde gereken bazı tanım ve kavramları inceleyelim.

1.1 Genel Kavramlar

Serbest değişkenler $(x_1, x_2, ..., x_n)$, bilinmeyen fonksiyon $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve bilinmeyen fonksiyonun türevlerini içeren

$$F(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, ..., u_{x_n}) = 0 \tag{1.1}$$

cinsinden olan denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemin içerdiği kısmi türevlerin en yüksek mertebesine denklemin basamağı denir.

Örnek 1.1 $au_x + bu_y = 0$ a ve b sabitler olmak üzere birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.2 $u_t = k^2 u_{xx}$ ikinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.3 $(1+x^2)u_x + u_y = 0$ birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Örnek 1.4 $u_t + uu_x = u_{xxx}$ üçüncü basamaktan olan denklemdir.

Bazı kavram ve işlemleri gerçekleştirebilemiz için çoğu zaman kısmi türevli diferansiyel denklemleri operatör şeklinde yazmak gerekiyor. Eğer

$$L(.) = a\frac{\partial(.)}{\partial x} + b\frac{\partial(.)}{\partial y} \tag{1.2}$$

olarak göstersek Örnek 1.1 deki denklemi $Lu = 0$ cinsinden yazabiliriz. Örnek 1.2 yi de $Lu = 0$ cinsinden yazmak mümkündür. Bu durumda $L(.) = \frac{\partial(.)}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2(.)}{\partial x^2}$ olmaktadır. Denklemlerin operatör yazılım formunu kullanarak denklemlerin lineer olup olmadığı kontrol edilebilir. Bunun için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 1.1 Aşağıdaki koşulları

1) $L(u+v) = L(u) + L(v)$,

2) $L(au) = aL(u),\ a = sabit$

koruyan L operatörüne lineer operatör denir.

Eğer diferansiyel denklemi oluşturan operatör lineer ise söz konusu denkleme de lineer denklem denir. Lineer olmayan denklemlere nonlineer denklemler denir.

Örnek 1.5 $u_t = k^2 u_{xx}$ ısı dağılım denkleminin lineer olduğunu gösteriniz.

Bunun için aşağıdaki koşulların korunduğunu kontrol edelim. Bu durumda,

$$L(.) = \frac{\partial(.)}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2(.)}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

olmaktadır. Önce $L(u+v)$ ifadesini göz önüne alalım,

$$L(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} - k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \tag{1.4}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L(u) + L(v).$$

Yani, birinci özelliğik sağlanmış oldu. Şimdi ikinci özelliği kontrol edelim. λ nın sabit olduğunu varsayarsak

$$L(\lambda u) = \frac{\partial(\lambda u)}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2(\lambda u)}{\partial x^2} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \lambda L(u) \tag{1.5}$$

elde ederiz. Böylelikle operatörün lineer olduğunu ispatlamış oluruz.

Tezde genelde birinci basamaktan olan denklemler incelendiğinden, genel şekilde yazılmış birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemi

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1.6}$$

göz önüne alalım. Burada F fonksiyonu x, y, u, u_x, u_y değişkenlerine bağlı bilinen fonksiyondur.

F fonksiyonunun u, u_x, u_y değişkenlerine göre lineer olması halinde (1.6) denklemine lineer denklem denir ve genel yazılım formu

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + d(x, y) = 0 \tag{1.7}$$

olmaktadır. Eğer $F(x, y, u, u_x, u_y)$ fonksiyonu yalnız u_x ve u_y göre lineer fonksiyon ise (1.6) denklemine kuazi lineer denklem denir. Kuazi lineer denklemin genel yazılım formu

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y + c(x, y, u) = 0 \tag{1.8}$$

olmaktadır.

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u)$$

şeklinde olan denklemlere ise yarı(hemi) lineer denklem denir.

1.2 Karakteristikler Yöntemi

Kolaylık için önce

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \tag{1.9}$$

denklemini göz önüne alalım. xoy düzleminde parametrik denklemleri $(x = x(s), y = y(s))$ olan öyle bir eğri içerelim ki, bu eğri üzerinde (1.9) denklemi tam diferansiyel şeklinde yazılabilsin. Eğer böyle eğriler bulanabilinir ise, bu tür eğrilere denklemin karakteristik eğrileri denir. Söz konusu karakteristik eğriler

$$\frac{dx}{ds} = a(x,y), \tag{1.10}$$

$$\frac{dy}{ds} = b(x,y) \tag{1.11}$$

adi diferansiyel denklemler sistemini koruduğu taktirde, (1.9) denklemi de

$$\frac{du}{ds} = 0 \tag{1.12}$$

şeklinde yazılabilir. (1.10), (1.11) denklemlerini

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{1.13}$$

şekilde de yazabiliriz. (1.12), (1.13) adi diferansiyel denklemlerinin genel çözümlerini

$$\varphi(x,y) = c_1,\ \psi(x,y) = c_2 \tag{1.14}$$

gibi gösterelim. Bunlara, (1.9) denkleminin 1.aralık integralleri denir.

Teorem 1.1 (1.14) ifadeleri (1.9) denkleminin 1.aralık integralleri olduğu taktirde, f tüm değikenlere göre diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak süretiyle,

$$f(c_1, c_2) = 0 \tag{1.15}$$

ile tanımlanan kapalı fonksiyon (1.9) un genel çözümü olmaktadır.

Genel olarak x, y, z serberst değişkenler olmak üzere, $\phi = \phi(x,y)$ ve $\psi = \psi(x,y)$ fonksiyonları verilsin. f keyfi diferansiyellenebilen fonksiyon olduğu yerde $f(\phi,\psi) = 0$ ise $z = z(x,y)$ fonksiyonu

$$p\frac{D(\phi,\psi)}{D(y,z)}+q\frac{D(\phi,\psi)}{D(z,x)}=\frac{D(\phi,\psi)}{D(x,y)} \tag{1.16}$$

kısmi türevli diferansiyel denklemini sağlar.

Burada, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ olmak üzere

$$\frac{D(\phi,\psi)}{D(x,y)}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.17}$$

dır.

İspat. $f(\phi,\psi)=0$ fonksiyonunu x ve y göre diferansiyelleyebiliriz,çünkü

$$f=[\phi(x,y,z),\psi(x,y,z)] \text{ ve } z=z(x,y)$$

olmaktadır. Bu fonksiyonu x e ve y ye göre diferansiyellersek

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\phi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]+\frac{\partial f}{\partial\psi}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]=0 \tag{1.18}$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\phi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]+\frac{\partial f}{\partial\psi}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0 \tag{1.19}$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz (1.18) ve (1.19) denklemleri bilinmeyen $\frac{\partial f}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial f}{\partial\psi}$ için homojen cebirsel denklem sistemi olmaktadır. Homojen denklemler sisteminin trival olmayan çözümünün varlığı için katsayılarından oluşan determinatın sıfıra eşit olması yeterli ve gerekli koşul olmaktadır. Buradan da hükmün doğrulunu ispatlamış oluruz

$$\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}q\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}q\right)\right]=0\,. \tag{1.20}$$

Örnek 1.6 $xu_x+yu_y=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
Karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{0}$$

olmaktadır. Buradan 1.aralık inteqrali $du=0$ denkleminden $u=c_1$ olarak bulunur. İkinci aralık integrali ise $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$ denkleminden $\frac{y}{x}=c_2$ olarak elde ederiz. Böylelikle gereken aralık integrallerimizi bulmuş olduk. Teorem 1.1 e göre denklemin genel çözümü

$$f(c_1, c_2) = 0 \quad \text{veya} \quad f\left(u, \frac{y}{x}\right) = 0$$

olmaktadır. Sonuncu denklemden

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

alırız, burada φ keyfi diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmaktadır.

Örnek 1.7 $u_x - u_y = 1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

İlk olarak 1. aralık integrallerimizi bulalım. Karakteristik denklemimizi yazalım

$$dx = -dy = du.$$

Buradan

$$dx = -dy, \;\; dx = du$$

yazabiliriz. Sonuncu denklemleri integrallersek

$$c_1 = y + x, \;\; c_2 = u - x$$

alarız. Teorem 1.1 e göre

$$f(y + x, u - x) = 0$$

elde ederiz. Buradan çözüm için aşağıdaki

$$u - x = \varphi(y + x)$$

veya $u = \varphi(y + x) + x$ gibi ifadeyi elde ederiz.

1.3 1. Basamaktan Hiperbolik Tür Denklemler için Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri

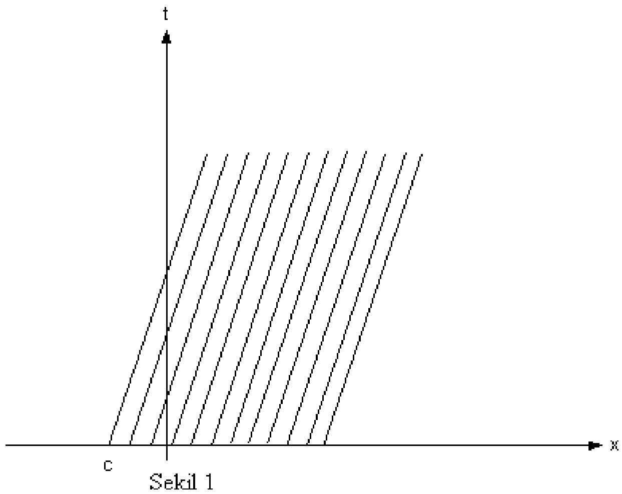
Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \tag{1.21}$$

Bu denklemin çözümünü ele almak için adi diferansiyel denklemler teorisinde olan işlemleri yapalım. *(t,x)* koordinat sisteminde $\frac{dx}{dt} = 1$ denklemi ile tanımlanan doğrular ailesini göz önüne alalım. Bu denklemin çözümleri,

$$x - t = sabit = c \qquad (1.22)$$

olur.



Sekil 1

(1.22) doğrular ailesi ox ekseni üzerinde yerleşen ve keyfi c noktasından geçmekte olan doğrular ailesinin denklemi olmaktadır. Ama her bir doğrunun kendi c si vardır. Bundan dolayı biz $x - t = c$ denklemindeki c nin değerini doğrunun "no.sunu" göstermekte kullanacağız. Herhangi bir $u(x,t)$ fonksiyonunu göz önüne alarak $\frac{du}{dt}$ ifadesini söz konusu doğrular için bulalım.

Varsayalım ki $u(x,t)$ diferansiyellenebilen fonksiyondur. Şimdi $\frac{dx}{dt} = 1$ eğrisi için $\frac{du}{dt}$'yi bulalım,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} . \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Bu ifadeden gözüküyor ki, $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ olması, $u(x,t)$ fonksiyonunun $\frac{dx}{dt} = 1$ doğrusu üzerinde sabit olması anlamına gelir. Ama her doğru için bu sabitler farklı olur. Böylelikle $u(x,t)$ fonksiyonunun (x,t) noktasındaki değeri bu noktanın hangi doğru üzerinde yerleştiğine bağlıdır. Yani

$$u(x,t) = f(x - t = c)$$

(x-t değeri doğrunun no.suna eşit olmaktadır). $u(x,t)$ fonksiyonunun x ve t ye göre türevlerinin mevcut olması için $f(\varsigma)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilen olması gerekiyor. Bu taktirde,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -f^{'}(x-t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f^{'}(x-t).$$

Buradan, açıktır ki pürüzsüz f fonksiyonu,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

denkleminin çözümünü vermektedir. Bu durumda $u = f(x-t)$ fonksiyonuna (1.21) denkleminin genel çözümü denir. Burada f herhangi bir diferansiyellenebilen fonksiyon olmaktadır.

Şimdi biz denklem için hangi problemlerin yazılabileceğini inceleyelim. (1.21) denklemi için problem derken, öyle ilave şartlar dikkate alınır ki, söz konusu şartlar çerçevesinde denklemin tek bir çözümü olsun.

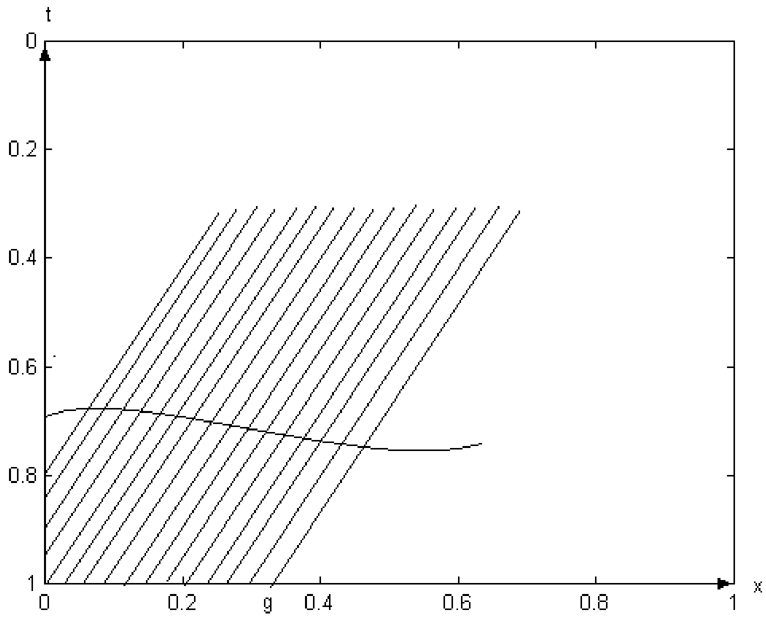
(x,t) uzayında göz önüne alınmış $x-t = sabit$ eğrilerini dikkate alalım. Bu doğrularla yalnız bir kez kesişen γ eğrisini seçelim şekil 2. Farz edelim ki, γ eğrisinin parametrik denklemi $x=\xi$(s), $t=\tau$ (s) olarak verilmiştir. Ayrıca varsayalım ki, γ eğrisi üzerinde $\varphi = \varphi(s)$ fonksiyonu da verilmektedir. Açıktır ki, biz (1.21) denklemini sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonunun

$$u\big|_{\gamma} = \varphi$$

değerini alan çözümünü elde edebiliriz. Yukarıda gösterdik ki (1.21) denkleminin genel çözümü $u = f(x-t)$ gibi verilmektedir. f fonksiyonunun özel şeklini böyle bulalım. Herhangi bir x-t değerini için s parametresini,

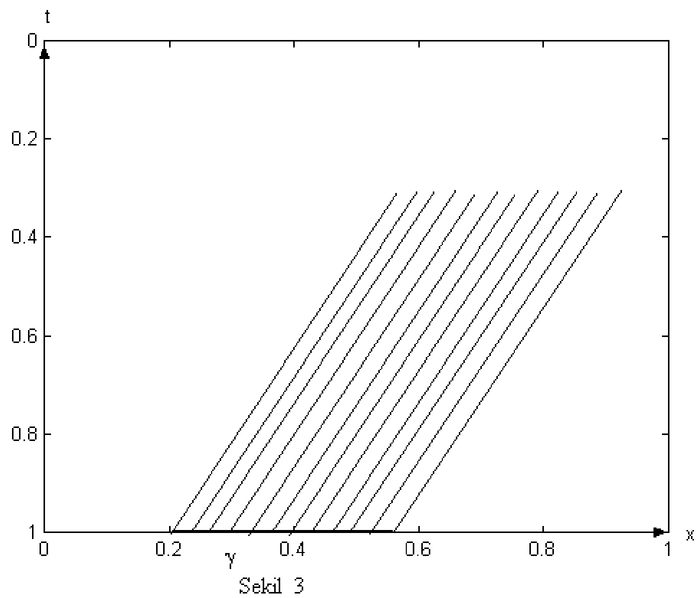
$$x\text{-}t = \xi(s) - \tau(s)$$

ifadesinden bulalım. Söz konusu s noktası x-t=$sabit$ doğrusu ile γ eğrisinin kesiştikleri nokta gibi ele alınabilir. Ve şartlara göre bu nokta tektir. Bundan dolayı $f(x-t) = \varphi(s)$ eşitliği sağlanır.

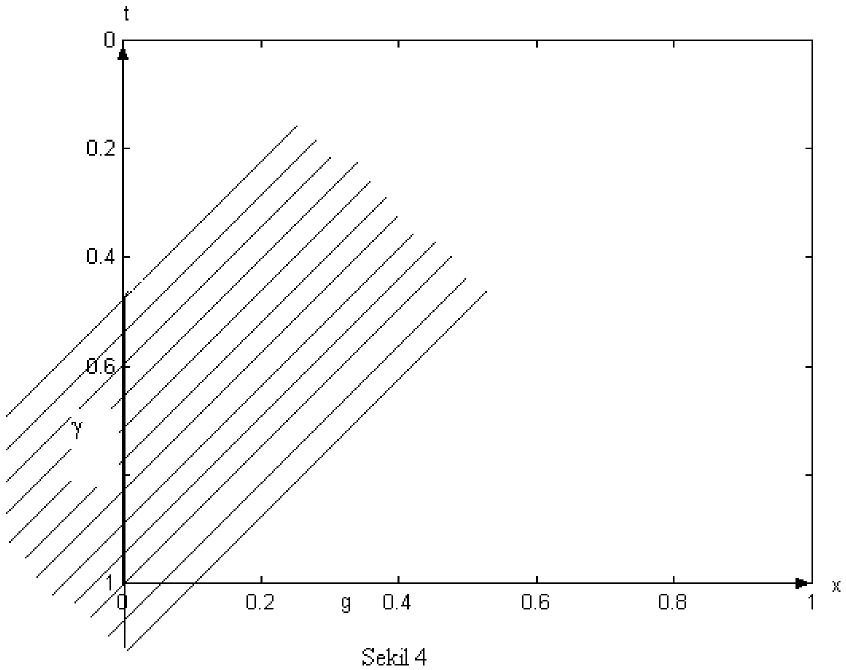


Sekil 2.

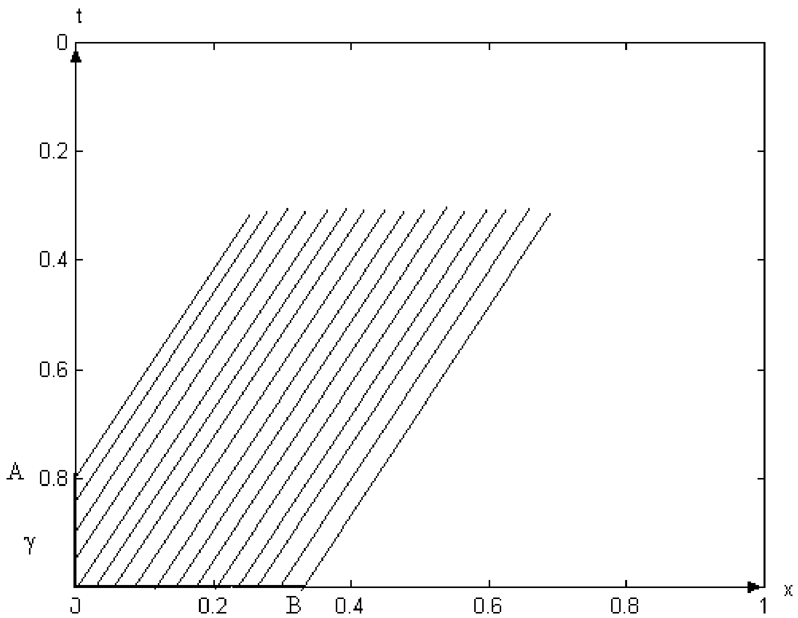
Biz (1.21) denkleminin çözümünü elde ederken söyledik ki, γ eğrisi x-t=sabit doğruları ile yalnız bir kez kesişebilir. Yani, o zaman γ eğrisi olarak, biz şekil 2,3,4 ve 5'de verilen γ eğrilerini de gözönüne alabiliriz.



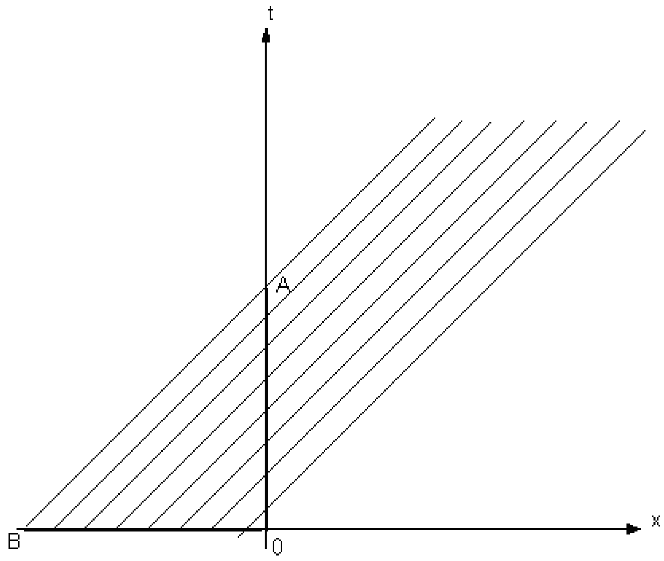
Sekil 3



Sekil 4



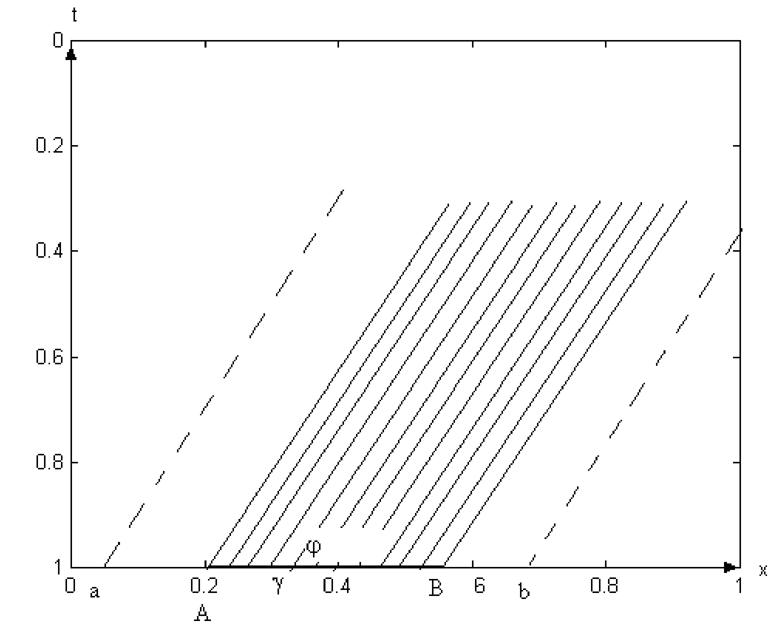
Sekil 5



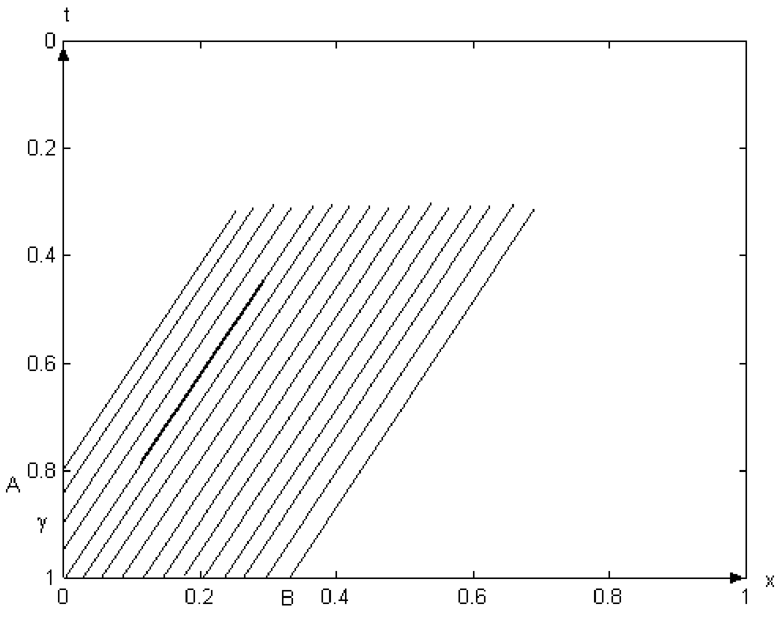
Sekil 6

γ eğrisi şekil 5'deki gibi olduğunda $\varphi(s)$ fonksiyonunu öyle tanımlamak gerekir ki, f(x-t) fonksiyonunun x-t=0 eğrisi üzerinde diferansiyellenebilmesine imkan versin. Eğer γ eğrisi şekil 6'da olduğu gibi verilirse , o zaman (1.21) denkleminin çözümünü elde etmek imkansız olur, çünkü x-t=c doğruları γ eğrisini iki noktada keser.

Şimdi (1.21) denkleminin teklik problemini inceleyelim. Varsayalım ki, $\varphi(s)$ fonksiyonu ox ekseni üzerinde olan AB parçasında verilmiş olsun (Şekil 7). O zaman çözüm AB parçasını kesmekte olan tüm x-t=sabit doğruları için bir değerli ele alınacaktır.
Eğer biz $\varphi(s)$ fonksiyonunun pürüzsüz olarak (Şekil 7) ab parçası için uzantısını ele alırsak, o zaman (1.21) denklemini geniş şeritte bulmuş oluruz. Bu taktirde (1.21) denkleminin geniş şeritte verilmiş $\varphi(s)$ fonksiyonuna göre çözümü AB parçasında bir değerli olarak ele alınmaktadır. x-t=sabit doğrularının AB parçası ile oluşturduğu şerite çözümün teklik bölgesi denir.
Şimdi böyle özel bir durumu göz önüne alalım. Varsayalım ki, γ eğrisi olarak göz önüne aldığımız AB parçası, x-t=sabit doğrularından birinin üzerindedir (Şekil 8), örneğin x-t=0 eğrisinin üzerindedir. Bu durumda , açıktır ki, $\varphi(s)$ fonksiyonu keyfi olarak verilemez, çünkü eğer $u|_\gamma = \varphi(s)$ olursa, diğer taraftan $\frac{du}{dt}$, γ eğrisi için sıfıra eşit olmaktadır, bu ise $\varphi(s)$ 'nin sabit olması demektir. Böylelikle,



Sekil 7



Sekil 8

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (1.23)$$

$$u\big|_{\gamma} = \varphi(s). \qquad (1.24)$$

probleminin hiçbir çözümü olamaz. Eğer $\varphi(s) = \varphi_0$ =sabit kabul edersek, o zaman bu problemin u=f(x-t) çözümünde f(ξ) fonksiyonu f(0)= φ_0 şartını korumak zorundadır. O zaman ise çözümün tekliği yalnız x-t=0 doğruları için korunur.

Böylelikle biz gördük ki, γ eğrisi keyfi verilemez. Söz konusu γ eğrisini verirken onu x-t=sabit doğrularıyla durumunu da incelemek gerekiyor. x-t=sabit doğrularına (1.21) denkleminin karakteristikleri denir. (1.21) denklemi için ilave şart olarak verdiğimiz $u\big|_{\gamma} = \varphi(s)$ koşuluna başlangıç şartı denir. (1.23),(1.24) problemlerine ise başlangıç sınır değer veya Cauchy problemi denir.

Söylediklerimiz birinci basamaktan olan genel kısmi türevli denklemler için de söz konusu olmaktadır.

Şimdi, aşağıdaki gibi birinci basamaktan olan kısmi diferansiyel denklemler sistemini inceleyelim

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 .$$

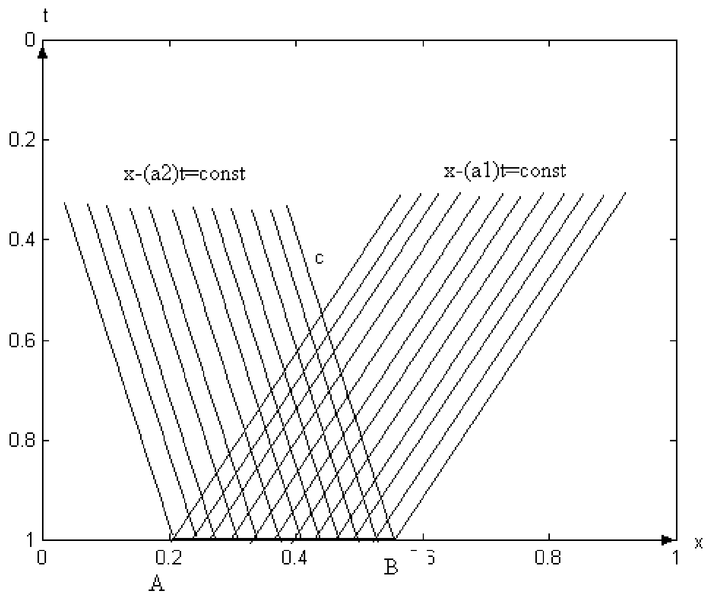
Sistemin birinci denkleminin çözümü $u_1 = f(x - a_1 t)$, ikinci denkleminin çözümü ise $u_2 = f(x - a_2 t)$ dir.

Göz önüne aldığımız sistem için başlangıç şartlarını böyle verelim.($A \le x \le B,$ t=0)

AB parçasını γ ile gösterelim.

Şekil 9′da (x,t) düzleminde öyle bir bölge gösterilmiştir ki bu bölgede biz $u_1(x,t)$ ve $u_2(x,t)$ fonksiyonlarını bulabiliriz. Sadelik için a_1>0 , a_2<0 olarak ele alınmıştır. Böylelikle sistemin yalnız ABC üçgeninde çözümünün varlığı söz konusu olur. x- a_1 t=sabit doğrularına sistemin karakteristikleri denir. ABC üçgenine karakteristik üçgen denir. Göz önüne aldığımız sistemin denklemleri birbirine bağlı değildir.

Şimdi böyle bir denklemler sistemini göz önüne alalım.



Sekil 9

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{p_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + p_0 {c_0}^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad (1.25)$$

Bu sistem sükunet ortamında düzlem dalgalarının (küçük) dağılma olayını modellemektedir. Burada u-hareketlenmiş ortam hızını, p ortamın basınç fonksiyonunu, ρ_0, c_0 sabitleri ise sırası ile yoğunluk ve gazın sıkılmasını gösterirler. (1.25) sistemine akustiğin de denklemi denir. (1.25) sistemini böyle dönüştürelim. İkinci denklemi $\dfrac{1}{p_0 c_0}$ ile çarpalım. Ele aldığımız,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{p_0 c_0}\right) + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

denklemini sistemin birinci denkleminden bir kez çıkarsak ve sonra bir kez toplasak,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{p_0 c_0} \mp u\right) + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(u \mp \frac{p}{p_0 c_0}\right) = 0$$

elde ederiz. Şimdi,

$$u+\frac{p}{p_0c_0}=u_1\ ,\quad u-\frac{p}{p_0c_0}=u_2$$

ifadelerini dahil edersek,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+c_0\frac{\partial u_1}{\partial x}=0\,,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-c_0\frac{\partial u_2}{\partial x}=0.$$

Bu sistemin genel çözümleri,

$$u_1=f(x-c_0t)\ ,\qquad u_2=g(x+c_0t).$$

u_1 ve u_2 fonksiyonlarını u ve p ile ifade edelim,

$$u+\frac{p}{p_0c_0}=f(x-c_0t)$$

$$u-\frac{p}{p_0c_0}=g(x+c_0t)$$

Buradan,

$$u=\frac{1}{2}\left[f(x-c_0t)+g(x+c_0t)\right]$$

ve

$$p=\frac{p_0c_0}{2}\left[f(x-c_0t)+g(x+c_0t)\right]$$

alırız.

Şimdi varsayalım ki, bize p ve u'nun t=0 da değerleri x_1<x<x_2 de verilmiştir. Yukarıda gördük ki, bu başlangıç değerleri sistemin çözümünde bir değerli olarak $(x_{1,}x_2)$ aralığındaki karakteristik üçgeni tanımlayacak. Bu üçgen söyle yazılabilir,

$$t>0\ ,\ x-c_0t>x_1\ ,\ x+c_0t<x_2\ .$$

$u \pm \frac{p}{p_0 c_0}$ ifadelerine Riemann invaryantları denir.

$$u + \frac{p}{p_0 c_0} = f(x\text{-}c_0\, t)$$

gösterir ki Riemann invariantları dağılma zamanı kendi formatını korumaktadır. Böylece c_0'ı ses dalgalarının hızı gibi düşünebiliriz.

$$u - \frac{p}{p_0 c_0} = g(x + c_0\, t)$$

formülü ise Riemann invaryantlarının c_0 hızı ile sola doğru dağıldığını göstermektedir.

f ve g fonksiyonlarını öyle seçelim ki,

$$u(x,0) = u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$p(x,0) = p\big|_{t=0} = \psi(x)$$

koşullarını sağlasın. Başlangıç koşullarını dikkate alırsak

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{p_0 c_0}$$

ve

$$g(x) = \varphi(x) - \frac{\psi(x)}{p_0 c_0}$$

elde ederiz. Sonuncu ifadelerden

$$u + \frac{p}{p_0 c_0} = \varphi(x - c_0 t) + \frac{\psi(x - c_0 t)}{p_0 c_0}$$

ve

$$u - \frac{p}{p_0 c_0} = \varphi(x + c_0 t) - \frac{\psi(x + c_0 t)}{p_0 c_0}$$

olduğunu görürüz ki, $u\ ve\ p$ fonksiyonları buradan son olarak

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - c_0 t) + \varphi(x + c_0 t)}{2} + \frac{\psi(x - c_0 t) - \psi(x + c_0 t)}{2 p_0 c_0}$$

$$p(x,t) = \frac{\psi(x - c_0 t) + \psi(x + c_0 t)}{2} + p_0 c_0 \frac{\varphi(x - c_0 t) - \varphi(x_0 - c_0 t)}{2}$$

bulunur.

2. RIEMANN PROBLEMİ

Biz sabit katsayılı denklemler sistemi için Riemann problemini

$$U_t + AU_x = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{2.1}$$

$$U(x,0) = U^{(0)}(x) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

göz önüne alalım, A $n \times n$ boyutlu sabit bir matris olmaktadır .

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m \tag{2.3}$$

ile A matrisinin özdeğerlerini gösterelim.

Farz edelimki, (2.1) sistemi hiperboliktir yani reel, farklı özdeğerlere sahiptir. Söz konusu özdeğerleri

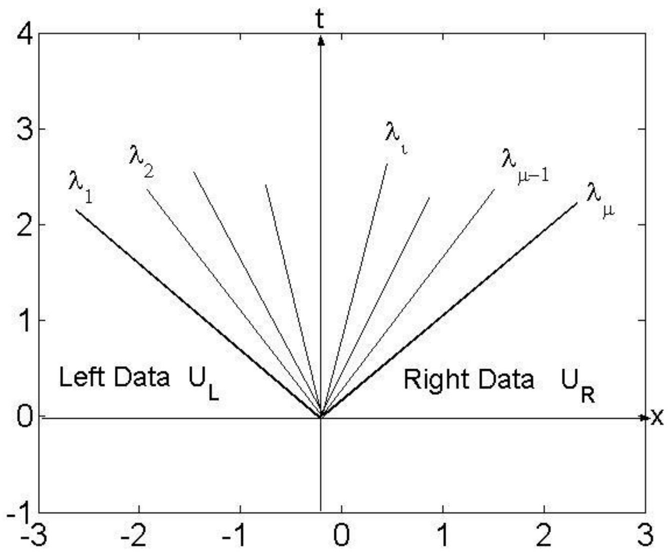
$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots . < \lambda_m$ olarak sıralayalım.

$W = K^{-1}U$ değişken dönüşümünü göz önüne alalım. Ve bu değişken dönüşümü yaptıktan sonra (2.1) denklemini bağımsız denklemler sistemine

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0 \quad , \quad i = 1,2,3,\ldots,m \tag{2.4}$$

parçalanmış olur.

Bu çözümler (x-t) düzleminde gösterilmiştir.



şekil 2.1

$$U = KW$$

eşitliğinde K, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ özdeğerlerine karşılık gelen, $K^{(i)}$, $(i = 1,...,m)$ özvektörlerinden oluşan bir matristir. Bu çözümde $K^{(i)}$ ler lineer bağımlı değildir. Bu durumda biz U_L ve U_R verilerini $K^{(i)}, (i = 1,...,m)$ lere göre aşağıdaki şekilde

$$U_L = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K^{(i)} \quad , \quad U_R = \sum_{i=1}^{m} \beta_i K^{(i)} \tag{2.5}$$

yazabiliriz.

Bu eşitlikte α_i ve β_i ler sabitlerdir, $(i = 1,...,m)$.

(2.5) denkleminin çözümünü şöyle

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_m \end{pmatrix} = W_1 \begin{pmatrix} K_1^{(1)} \\ K_2^{(1)} \\ ... \\ K_m^{(1)} \end{pmatrix} + W_2 \begin{pmatrix} K_1^{(2)} \\ K_2^{(2)} \\ ... \\ K_m^{(2)} \end{pmatrix} + ... + W_m \begin{pmatrix} K_1^{(m)} \\ K_2^{(m)} \\ ... \\ K_m^{(m)} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

veya

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{m} W_i(x,t) K^{(i)} . \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

$$W_i(x,t) = W^{(0)}(x - \lambda_i t)$$

olduğunu da dikkte alırsak

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{m} W_i^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)}. \tag{2.8}$$

olarak yazabiliriz.

Böylelikle, $x - t$ düzleminin her bir (x,t) noktasında $U(x,t)$ fonksiyonu yalnız başlangıç verilerinin m noktasından $(x_0^{(i)} = x - \lambda_i t)$ bağımlı olmaktadır. Bu noktalar λ_i hızına sahip karakteristiklerin x-ekseni ile kesiştiği noktalar olmaktadırlar. (2.8) denkleminin çözümüne m dalganın süper pozisyonu gibi bakılabilir. Öyle ki, bu dalgaların her birisi bağımsız olarak formu değişmeden dağılmaktadır. i nolu dalganın formu $W_i^{(0)}(x) K^{(i)}$ e eşittir ve bu dalganın değişme hızı λ_i dir.

Şimdi (2.1),(2.2) Riemann problemini göz önüne alalım. (2.1),(2.2) problemlemlerinin genel çözümü Şekil 2.1 de verildiği gibi olmaktadır. Bu çözüm her bir

λ_i özdeğerine sahip ve orijinden çıkan m dalgadan oluşmaktadır. Her i dalga U da bulunan süreksizlik sıçrayışlarını λ_i hızı hareket ettirmektedir.

Normalde çözüm λ_1 dalgadan solda sadece U_L başlangıç verisine, λ_m dalgadan sağda ise U_R başlangıç verisine eşit olmaktadır. Problemin çözümü λ_1 ve λ_m dalgaları arasındaki yelpazede bulunmaktadır. $K^{(1)}, K^{(2)}, ..., K^{(m)}$ özvektörleri lineer bağımsız olduklarından sırasıyla U_L ve U_R özvektörleri üzere lineer kombinasyon şeklinde yazabiliriz.

$$U_L = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K^{(i)} \quad , \quad U_R = \sum_{i=1}^{m} \beta_i K^{(i)} \tag{2.9}$$

burada α_i, β_i , $(i = 1,2,...,m)$.

Formal olarak (2.1),(2.2) probleminin (2.8) şeklindeki çözümü karakteristik $W_i^{(0)}(x)$ başlangıç verilerinde ve sağ $K^{(i)}$ özvektörleri terminde ifade edilmektedir.

Belirtelim ki, (2.9) un her bir ifadesi (2.8) in özel durumları olmaktadır. (2.8) ve (2.9) ifadelerinden karakteristik W_i değişkenlerinde m sayıda skaler Riemann problemini elde ederiz.

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0 , \tag{2.10}$$

$$W_i^{(0)}(x) = \begin{cases} \alpha_i , & x < 0 \\ \beta_i , & x > 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

(2.10), (2.11) probleminin çözümü,

$$W_i(x,t) = W_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i , & x - \lambda_i t < 0 \\ \beta_i , & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

şeklinde olmaktadır.

Verilmiş (x,t) için öyle bir λ_i özdeğeri vardır ki,

$$\forall i, i < I \quad ; \quad \lambda_I < \frac{x}{t} < \lambda_{I+1} \quad ; \quad x - \lambda_i t > 0$$

Böylelikle, (2.1), (2.2) probleminin çözümünü son olarak şöyle yazabiliriz.

$$U(x,t) = \sum_{i=I+1}^{m} \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=1}^{I} \beta_i K^{(i)}. \tag{2.13}$$

Burada I $x - \lambda_i t > 0$ eşitliğini koruyan i indislerinin maksimumudur.

Not .

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{2.14}$$

$$| A - \lambda I | = 0$$

L_i sağ vektörler olsun. Yani,

$$L_i A = \lambda L_i$$

Eğer (2.14) denklemini L_i ile sağdan çarparsak

$$L_i(\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x}) = L_i\frac{\partial U}{\partial t} + L_i A\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$L_i(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial}{\partial x})U = 0 \tag{2.15}$$

olur.

2×2 *Sistem İçin Çözüm .*

Örnek olarak 2×2 ölçülü sistem için Riemann problemini göz önüne alalım.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + a_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \tag{2.17}$$

Aşağıdaki notasyonları içerelim

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.19}$$

A matrisini iki tane birbirinden farklı reel özdeğerlerinin olduğunu varsayalım. Bunları sırasıyla λ_1 ve λ_2 olarak gösterelim. $\lambda_1 < \lambda_2$ olduğunu kabul edelim.

$K^{(i)}$ ile λ_i lere karşılık gelen özvektörleri gösterelim. (2.19) denklemini sağdan

$K^{(i)}$ özvektörlere çarpalım.

$$K^{(i)}\frac{\partial U}{\partial t}+K^{(i)}A\frac{\partial U}{\partial x}=0 \tag{2.20}$$

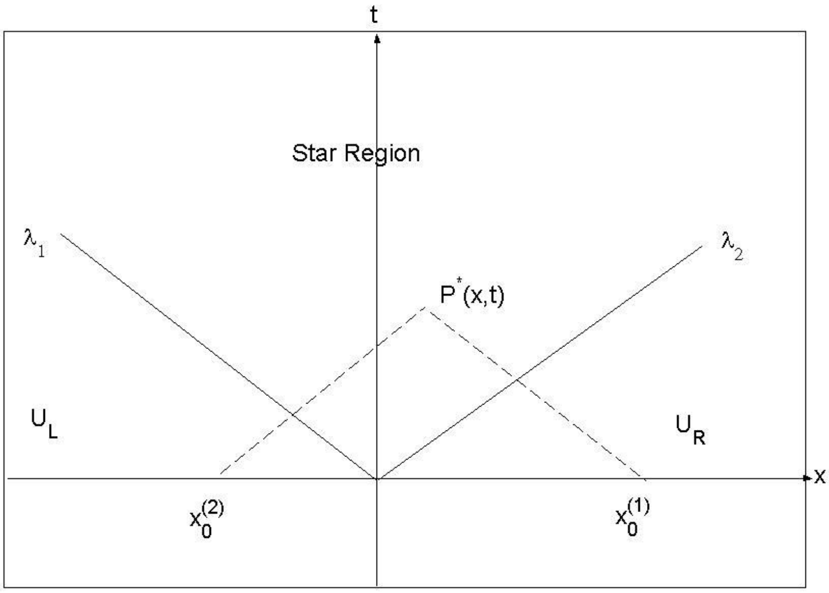
$$K^{(i)}\frac{\partial U}{\partial t}+\lambda_i K^{(i)}A\frac{\partial U}{\partial x}=K^{(i)}(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial}{\partial x})U=0 \tag{2.21}$$

$W = KU$ özel değişkenlerinde (2.19) denklemini,

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial W_i}{\partial x}=0 \quad , \quad (i=1,2) \tag{2.22}$$

Skaler denklemini elde ederiz.

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\lambda_i, \qquad \xi = x-\lambda_i t. \tag{2.23}$$



şekil 2.2

$\frac{dx}{dt}=\lambda_1$ dan solda çözüm.

$$U_L=\alpha_1 K^{(1)}+\alpha_2 K^{(2)} \tag{2.24}$$

ve $\frac{dx}{dt}=\lambda_2$ dan sağda çözüm.

$$U_R=\beta_1 K^{(1)}+\beta_2 K^{(2)} \tag{2.25}$$

λ_1 ve λ_2 dalgaları arasındaki bölgeye yıldız bölgesi denir ve bu bölgede çözümü U^* ile gösteririz. Bu değer süreksiz başlangıç verilerinden oluşan ve orijinden çıkan iki dalganın devamının değeri olmaktadır. Şekil 2.2 de $P^*(x,t)$ noktasından geriye λ_1 ve λ_2 hızıyla karakteristikleri çizelim. Bunlar orijinden çıkan karakteristiklere paralel olur. P^* noktasından çıkan karakteristikler $x_0^{(2)} = x - \lambda_2 t$ ve $x_0^{(1)} = x - \lambda_1 t$ başlangıç noktalarından çıkmaktadırlar.

Böylelikle, (2.8) ile bulunan $U(x,t)$ nin katsayıları tanımlanmaktadır. P^* noktasındaki çözüm (2.8) gibi tanımlanır. Esas problem α_i ve β_i katsayılarını doğru seçmek olmaktadır.

$U(x_L,t^*) = U_L$ eşitliğini koruyan dalgadan solda t^* ve x_L noktasını seçelim. Açıktır ki, x_L, t^* noktasından çıkan dalga

$$U_L = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i K^{(i)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} . \tag{2.26}$$

şeklinde olmaktadır. Yani, açılışının tüm katsayıları α lar olmaktadır. Yani, x_L, t^* noktası her bir dalganın solunda yerleşmektedir. Ne zamanki, horizontal $t = t^*$ doğrusu üzere hareket ediyoruz, $\frac{dx}{dt} = \lambda_1$ dalgasını keseriz. Böylelikle, $x - \lambda_1 t$ negatiften pozitife değişir. Buna göre de α_1 katsayısı β_1 katsayısına çevrilir. O zaman çözüm λ_1 ve λ_2 dalgaları arasındaki yıldız bölgesinde şu şekilde olur.

$$U^*(x,t) = \beta_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} . \tag{2.27}$$

Sağa doğru hareket etmeyi devam ettirdikçe λ_2 dalgasını keseriz ve $x - \lambda_2 t$ negatiften pozitife değişir. (2.27) ifadesindeki λ_2 katsayısı β_2 ye dönüşür ve sonuçta (2.27) ifadesi

$$U_R = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \tag{2.28}$$

şeklini alır.

Aşağıdaki formda dalga denklemini

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \tag{2.29}$$

göz önüne alalım.

(2.29) denklemini birinci basamaktan diferansiyel denklemlere çevirelim. Önce $(c^2 = 1)$ olsun ve aşağıdaki değişken dönüşümünü yapalım.

$$u_t = v \quad , \quad u_x = w. \tag{2.30}$$

Buradan

$$u_{tt} = v_t \quad , \quad u_{xx} = w_x \tag{2.31}$$

olur. Dolayısıyla (2.29) denklemini

$$\begin{cases} v_t - w_x = 0 \\ w_t - v_x = 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

veya

$$u_t + Au_x = 0. \tag{2.33}$$

birinci basamaktan diferansiyel denklemler sistemine indirgemiş oluruz.

Burada

$$u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Şimdi $c^2 \neq 1$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$u_t = v\,, \quad cu_x = w. \tag{2.34}$$

değişken dönüşümünü yapalım. yeni değişkenlerde (2.29)

$$\begin{cases} v_t - cw_x = 0 \\ w_t - cv_x = 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

Şeklinde yazılır.

Sonra şu denklemi göz önüne alalım.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{2.36}$$

(2.36) denklemini şu şekilde

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x}) = 0$$

yazalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_1 \quad , \quad -\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x} = u_2$$

olsun. Buradan,

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

elde ederiz. Böylelikle,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

denklemini aşağıdaki denklem sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \rho_0\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{a^2}{\rho_0}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

veya vektöriyel formda

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \tag{2.38}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ \dfrac{a^2}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2.37) denklemi için başlangıç koşulunu

$$\rho(x,0)=\begin{cases}\rho_L, & x<0\\ \rho_R, & x>0,\end{cases} \tag{2.39}$$

ve

$$u(x,0)=\begin{cases}u_L, & x<0\\ u_R, & x>0,\end{cases} \tag{2.40}$$

veya

$$u(x,0)\equiv u(x,0)=u_0=\begin{cases}u_L, & x<0\\ u_R, & x>0,\end{cases}$$

$$\rho(x,0)\equiv\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1=\begin{cases}\rho_L, & x<0\\ \rho_R, & x>0,\end{cases}$$

gibi yazalım.

olmaktadır. A matrisinin özdeğerlerini

$$\begin{vmatrix}-\lambda & \rho_0\\ \dfrac{a^2}{\rho_0} & -\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow \lambda^2-a^2=0 \quad\Rightarrow \lambda_1=-a,\quad \lambda_2=a.$$

gibi buluruz. Şimdi özvektörleri elde edelim. Öncelikle, $\lambda_1=-a$ olsun.

Burtadan

$$\begin{cases}a\alpha_1+\rho_0\alpha_2=0\\ \dfrac{a^2}{\rho_0}\alpha_1+a\alpha_2=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad a\alpha_1+\rho_0\alpha_2=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha 1=\rho_0 \quad,\quad \alpha_2=-a,$$

yani λ_1 e karşılık gelen özvektör

$$K^{(1)}=(\rho_0,-a)^T \quad\Rightarrow\quad K^{(1)}=\begin{pmatrix}\rho_0\\ -a\end{pmatrix}.$$

Olmaktadır.

Şimdi $\lambda_2 = a$ yı ele alalım.

$$\begin{cases} -a\alpha_1 + \rho_0\alpha_2 = 0 \\ \\ \dfrac{a^2}{\rho_0}\alpha_1 - a\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a\alpha_1 + \rho_0\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha 1 = \rho \quad , \quad \alpha_2 = a,$$

Burada da ikinci özvektörü

$$K^{(2)} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$

gibi yazabiliriz.

Önce, $u_L = (\rho_L, u_L)^T$ sol başlangıç verileri özvektörler üzere ayrılışını yazalım.

$$u_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i K_L^{(i)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} ,$$

olur. Bu sistemin çözümü Cramer yöntemi ile bulunmuştur.

$$\begin{cases} \rho_L = \alpha_1\rho_0 + \alpha_2\rho_0 \\ \\ u_L = -\alpha_1 a + \alpha_2 a \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ -a & a \end{vmatrix} = a\rho_0 + a\rho_0 = 2a\rho_0;$$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho_L & \rho_0 \\ u_L & a \end{vmatrix}}{2a\rho_0} = \frac{\rho_L a - \rho_0 u_L}{2a\rho_0} ,$$

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_L \\ -a & u_L \end{vmatrix}}{2a\rho_0} = \frac{\rho_L u_L + a\rho_L}{2a\rho_0} .$$

Şimdi, $u_R = (\rho_R, u_R)^T$ sağ başlangıç verileri $K^{(i)}$ ler üzere ayrılışını yapalım.

$$u_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \end{pmatrix} = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 \rho_0 + \beta_2 \rho_0 \\ -\beta_1 a + \beta_2 a \end{cases}$$

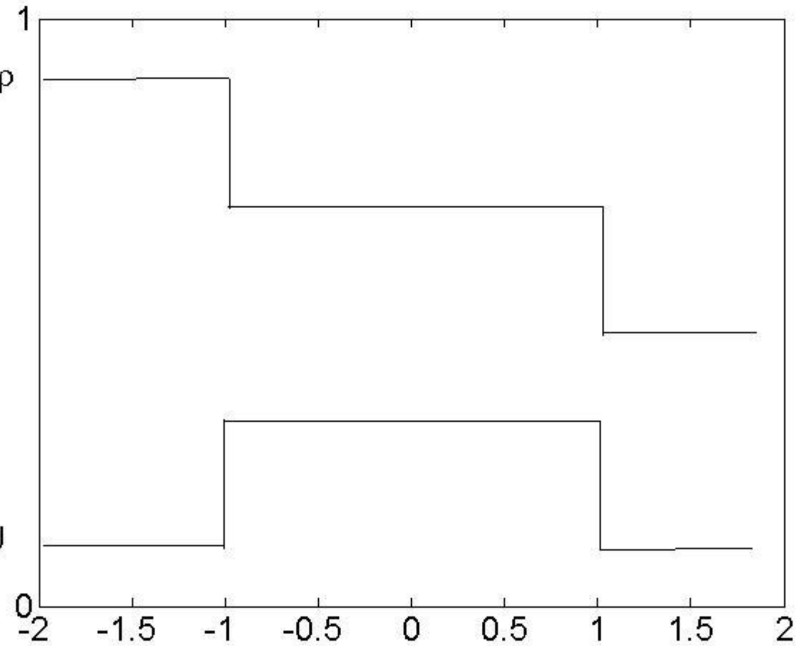
$$\beta_1 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0},$$

$$\beta_2 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0}.$$

Yıldız bölgesinde $u^*(x,t) = \beta_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)}$ olduğunu dikkate alırsak, (2.37)'nin çözümünü

$$u^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ a^* \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$

şeklinde elde ederiz. Söz konusu fonksiyonların grafikleri şekil 2.3'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3

Yani,

$$\rho^* = \beta_1\rho_0 + \alpha_2\rho_0 = \frac{a\rho_2 - u_R}{2a\rho_0}\rho_0 + \frac{\rho_0 u_R + a\rho_R}{2a\rho_0}\rho_0$$

$$= \frac{a\rho_L}{2a} - \frac{\rho_0 u_L}{2a} + \frac{\rho_0 u_R}{2a} + \frac{a\rho_R}{2a}$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{\rho_0}{2a}(u_R - u_L)$$

$$u^* = -\beta_1 a + \alpha_2 a = -\frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0}a + \frac{\rho_0 u_L + a\rho_L}{2a\rho_0}a$$

$$= -\frac{a\rho_R}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 u_R}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 u_L}{2\rho_0} + \frac{a\rho_L}{2\rho_0}$$

$$= -\frac{a}{2\rho_0}(\rho_R - \rho_L) + \frac{1}{2}(u_L + u_R)$$

sonuç olarak,

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{\rho_0}{2a}(u_R - u_L)\,,$$

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L - u_R) - \frac{a}{2\rho_0}(\rho_R - \rho_L)\,.$$

olduğunu görürüz.

3. BİRİNCİ BASAMAKTAN KUAZİ LİNEER K.T.D DENKLEMLER SİSTEMİ

3.1 Hiperbolik Sistemler

Günümüzde bir çok fiziksel problem skaler diferensiyel denklemden ziyade birinci basamaktan kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi şeklinde ifade edilebiliyor. Böyle denklemler bilinmeyen fonksiyonların türevlerine göre lineer olur. Katsayıları ise bilinmeyen fonksiyonlara ve serbest değişenlere bağlı olabilir. Eğer böyle denklemler dalgalar dağılım durumlarını ifade ederse bir çok problemin çözümüne dalga denklemleri çözmekle ulaşabiliriz. Bundan dolayı biz burada iki boyutlu problemleri göz önüne alacağız. Değişkenlerden biri x-ekseni diğeri ise t-zaman değişkenleri olacaktır. Eğer bilinmeyen fonksiyonlar $u_i(x,t)$, $i=1,2,..,n$ olursa, birinci mertebeden kuazi lineer diferensiyel denklemler sisteminin genel yazılım formu şöyle olacaktır

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t}(x,t)+b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}(x,t)+c_i=0 \quad , \quad i=1,2,...,n. \tag{3.1}$$

(3.1) sistemini kolaylık için n=2 durumunda açık şekilde

$$a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t}+a_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t}+b_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x}+c_1=0,$$

$$a_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t}+a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t}+b_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x}+c_2=0, \tag{3.2}$$

yazalım. Burada, $a_{ij}(i,j=1,2)$ x ve t ye bağlı bilinen fonksiyonlardır.

Öncelikle (3.2) sisteminin hiperbolik bir sistem olması için bir koşul bulalım. Ayrıca hiperbolik sistemin bazı sonuçlarını inceleyelim. Birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü ararken öncelikle bu denklemin karakteristiklerini bulup bunu adi diferensiyel denklemler sistemine dönüştürüyorduk. Bazı durumlarda elde ettiğimiz adi diferensiyel denklemlerin çözümünü bulabiliyorduk. En azından ele aldığımız diferansiyel denklemler sistemini sayısal olarak çözmek mümkündür. Her iki durumda da göz önünde bulunan kısmi türevli diferansiyel denklem "yerel" olarak çözülür. Bu ise genelde dalgaların dağılım durumlarına denk gelmektedir. Gerçekten de küçük bir zaman diliminde keyfi bir noktanın hareketine, o noktaya yakın olan noktanın etkisi olabilir. Doğal olarak karşımıza şöyle bir soru çıkar. "(3.1) denklemler sistemi içinde böyle bir yerel hesaplama işlemleri yapılabilir mi ?" Eğer bu işlemleri yapmak mümkün ise o zaman sistem hiperbolik türe ait olur.

Hiperbolik sistemin tanımını vermeden önce bazı bilgilere göz atalım. Genelde (3.1) sisteminde keyfi u_j fonksiyonları $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ ve $\frac{\partial u_j}{\partial x}$ türevlerinin keyfi kombinasyonlarını içermektedir. Yani (3.1) veya (3.2) denklemler sisteminin her bir denklemi U_j fonksiyonunun $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ ve $\frac{\partial u_j}{\partial x}$ türevlerini lineer bağımlı durumda içerir. Bu, şu anlama gelir, denklemler keyfi u_j fonkiyonun çeşitli yerlerdeki değişim hızı hakkında bilgi verir ve bu denklemlerden keyfi u_j fonksiyonunun söz konusu değişim hızlarının bilinen bir yönde değişmesi hakkında herhangi bir bilgi almak mümkün değildir. (3.1) denklemler sistemi üzerinde çeşitli dönüşümler yapsak acaba yukarıda bahsettiğimiz bilgileri elde edebilir miyiz? Bunu araştıralım.

(3.1) denklem sistemini henüz bilinmeyen

$$\vec{l} = (l_1(x,t,y),...,l_n(x,t,u))$$

vektörü ile çarpıp toplayalım

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \left(\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right) + c_i \right) = 0 , \qquad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right] + \sum_{i=1}^{n} l_i c_i = 0 . \qquad (3.4)$$

$n = 2$ için (3.3) şöyle olur

$$l_1 (a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial t} + b_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + b_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x}) +$$

$$l_2 (a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial t} + b_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial t} + b_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x}) + l_1 c_1 + l_2 c_2 = 0 . \qquad (3.5)$$

şimdi $$x = x(\eta) , \qquad t = t(\eta) \qquad (3.6)$$

dönüşümünü yapalım. Buradan,

$$\frac{\partial u_j}{\partial \eta} = t' \frac{\partial u_j}{\partial t} + x' \frac{\partial u_j}{\partial x} \qquad (3.7)$$

elde edilir.

$$\alpha = x'(\eta), \qquad \beta = \tau'(\eta) \tag{3.8}$$

Bu takdirde (3.5) denklemi aşağıdaki forma

$$\sum_{j=1}^{2} m_j \frac{\partial u_j}{\partial \eta} + b_j l_j = 0 \tag{3.9}$$

döner. Gerçekten (3.5) ifadesini düzenlersek

$$(l_1 a_{11} + l_2 a_{21}) + \frac{\partial u_1}{\partial t} + (l_1 b_{11} + l_2 b_{21}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (l_1 a_{12} + l_2 c_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

$$+ (l_1 b_{12} + l_2 b_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial x} + l_1 c_1 + l_2 c_2 = 0 \tag{3.10}$$

(3.10) formunu elde ederiz. Eğer

$$l_1 a_{11} + l_2 a_{21} = m_1 \beta \qquad l_1 a_{12} + l_2 a_{22} = m_2 \beta \tag{3.11}$$

$$l_1 b_{11} + l_2 b_{21} = m_1 \alpha \qquad l_1 b_{12} + l_2 b_{22} = m_2 \alpha \tag{3.12}$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{j=1}^{2} (m_j \beta \frac{\partial u_j}{\partial t} + m_l \alpha \frac{\partial u_j}{\partial x} + l_i c_i) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{2} [m_j (\beta \frac{\partial u_j}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial x}) + l_i c_i] = 0 \tag{3.13}$$

elde ederiz.

(3.11) sisteminde eşitliğin her iki yanını α ile (3.12) sisteminde eşitliğin her iki yanını β ile çarpıp birbirine eşitleyelim

$$\alpha l_1 a_{11} + \alpha l_2 a_{21} = m_1 \alpha \beta,$$

$$\alpha_1 I_1 a_{12} + \alpha l_2 a_{22} = m_2 \alpha \beta, \tag{3.14}$$

$$\beta l_1 b_{11} + \beta l_2 b_{21} = m_1 \beta \alpha,$$

$$\beta l_1 b_{12} + \beta l_2 b_{22} = m_2 \beta \alpha, \tag{3.15}$$

$$\alpha l_1 a_{11} + \alpha l_2 a_{21} = \beta l_1 b_{11} + \beta l_2 b_{21},$$

$$\alpha l_1 a_{12} + \alpha l_2 a_{22} = \beta l_1 b_{12} + \beta l_2 b_{22}. \tag{3.16}$$

veya

$$l_1(\alpha a_{11} - \beta b_{11}) + l_2(\alpha a_{21} - \beta b_{21}) = 0$$

$$l_1(\alpha a_{12} - \beta b_{12}) + l_2(\alpha a_{22} - \beta b_{22}) = 0 \tag{3.17}$$

Sistem şeklinde yazalım.

(3.17) sisteminin bir çözümü olması için

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} - \beta b_{11} & \alpha a_{21} - \beta b_{21} \\ \alpha a_{12} - \beta b_{12} & \alpha a_{22} - \beta b_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.18}$$

olmalıdır. Yani

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

olarak tanımlarsak (3.18) denklemi şöyle

$$| A_{ij} X' - B_{ij} T' | = 0 \tag{3.20}$$

olmalıdır.

3.2 Karakteristikler

Aşağıdaki sistemi göz önüne

$$A_{11}(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1(x,t),$$

$$A_{21}(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_2(x,t). \tag{3.21}$$

alalım. (3.21) sistemini matris formunda yazalım,

$$A = \frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \tag{3.22}$$

burada, A,B,u ve f

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Farz edelim ki, (3.22) sisteminin $(x,t) \in D$ bölgesinde pürüzsüz (türevlenebilir) çözümü vardır.

D bölgesinde bulunan bir (x_0, t_0) noktasını göz önüne alalım. Bu noktadan bir γ eğrisi geçirelim. Bu eğri üzerinde (x_0, t_0) noktasındaki küçük kaydırma vektörlerini (dx,dt) ile gösterelim.

Farz edelim ki, (3.22) sisteminin çözümleri γ eğrisi üzerinde verilmiştir. Amacımız ise u_1 ve u_2 nin γ eğrisi üzerinde verilen değerlerine ve sağladıkları (3.23)sistemine göre tüm D bölgesinde tanımlamak ve ele alarak incelemektedir.

Bilinen γ eğrisinin etrafında verilmiş değerlere göre (3.23) sisteminin çözümünün bulunmasına "Cauchy problemi" diyoruz.

u_1 ve u_2 fonksiyonları γ eğrisi üzerinde bilindikleri için, bu eğri üzerinde türevIeri de bilinmektedir. Dolayısıyla normal türevlerinin değerlerine göre keyfi yön üzerinde olan türevleri

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

γ eğrisi üzerinde bulabiliriz. Tersine bu dört türev biliniyorsa, yön üzerinde türevlerini bulabiliriz. Bu taktirde problemi şöyle ifade edelim, u fonksiyonunun γ eğrisi üzerinde bilinmekte olduğunu varsayarak, bu eğrinin tüm noktalarında $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevlerini buluruz.

Söz konusu olan türevleri (x_0, t_0) noktasında u fonksiyonunun bilindiği durumda (dx,dt) vektörü üzerinde bilindiğini varsayarak hesaplamaya çalışacağız. du diferensiyellerini türevler yardımıyla yazalım.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} dt + \frac{\partial u_1}{\partial x} dx = du_1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}dt + \frac{\partial u_2}{\partial x}dx = du_2 \tag{3.24}$$

Bu sistemdeki diferansiyeller γ eğrisi üzerinde belirlidir. (3.24) ifadelerini (2.64) denklemler sistemine ekleyerek $\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial x}$ bilinmeyen fonksiyonları ele almak için aşağıdaki denklemler sistemini göz önüne alalım.

$$A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1,$$

$$A_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_2$$

$$dt\frac{\partial u_1}{\partial t} + dx\frac{\partial u_1}{\partial x} = du_1 \ ,$$

$$dt\frac{\partial u_2}{\partial t} + dx\frac{\partial u_2}{\partial x} = du_2 \ . \tag{3.25}$$

(3.25) ifadesini matris formunda

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f \ ,$$

veya

$$dtE\frac{\partial u}{\partial t} + dxE\frac{\partial u}{\partial x} = du \tag{3.26}$$

yazalım. Burada,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.(3.26) sisteminin bilinmeyenlerini bulmak için

$$det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.27}$$

olmak zorundadır.

(3.22) denklemi için

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \\ & \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \\ & & & \end{vmatrix} \qquad (3.28)$$

olur.

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \\ & \end{pmatrix} = 0$$

eşitliğini sağlayan eğrilere (2.24) sisteminin karakteristikleri denir.

Farz edelim ki, γ eğrisinin kendisi karakteristik eğridir. (3.26)sisteminin determinantının sıfıra eşit olduğuna bakmadan bu sistemin çözümü vardır.

Varsayımıza göre (3.22) sisteminin γ eğrisi üzerinde tanımlanan bir çözümü vardır. Bu ise genişletilmiş olan

$$\begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \\ & & \end{pmatrix}$$

matrisinin rankının dejenere olan

$$\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \\ & \end{pmatrix}$$

matrisin rankına eşit olması anlamına gelir. Böylelikle du vektörü, karakteristikler boyunca keyfi olamaz ve aşağıdaki koşulu sağlamak zorundadır.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \\ & & \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \\ & \end{pmatrix}. \qquad (3.29)$$

(3.29) ifadesine, karakteristiklerin koşulu denir.

Karakteristikleri daha iyi anlayabilmek için şöyle bir örneğe dikkat edelim. Ses dalgalarını ifade eden denklem sistemini göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{3.30}$$

(3.30) sistemini aşağıdaki gibi düzenleyerek matris şeklinde ifade edelim

$$1\frac{\partial u}{\partial t} + 0\frac{\partial u}{\partial x} + 0\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,,$$

$$0\frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 1\frac{\partial p}{\partial t} + 0\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,, \tag{3.31}$$

veya

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

(3.31) sistemini şu şekilde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ dp \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

yazabiliriz. Karakteristikler denklemi ise aşağıdaki gibi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ 0 & dx & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} + dt\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix}$$

$$= dx\begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 \\ 0 & dx \end{vmatrix} + dt\begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 \\ dt & 0 \end{vmatrix}\frac{1}{\rho_0} = (dx)^2 - c_0^2(dt)^2 = 0. \tag{3.34}$$

olur. Böylelikle karakteristikler için

$$(dx)^2 - c_0^2(dt)^2 = (dx - c_0 dt)(dx + c_0 dt) = 0 \tag{3.35}$$

$$\Rightarrow dx = \mp c_0 dt$$

$$\Rightarrow x \mp c_0 t = sabit \tag{3.36}$$

elde ederiz. Şimdi karakteristikler için olan koşulu ele alalım. Bunun için

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & dp \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı ile bu matrisinin keyfi dört sütunundan düzenlenmiş olan yeni matrisin rankı aynı olsun. Sonucunda da determinantı sıfırdır. Dolayısıyla bu sonucu matrisin keyfi 4×4 minörünün birisi sıfıra eşit olmalıdır. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & dp \end{vmatrix} = 0 \tag{3.37}$$

dır. Buradan,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ 0 & dx & du \\ dt & 0 & dp \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx & du \\ 0 & dp \end{vmatrix} + \rho_0 c_0^2 \begin{vmatrix} 0 & du \\ dt & dp \end{vmatrix} =$$

$$dxdp + dtdu\rho_0 c_0^2 = 0\,. \tag{3.38}$$

Birinci karakteristik üzerinde,

$$\frac{dx}{dt} = c_0 \quad \Rightarrow \quad dx = c_0 dt \, . \tag{3.39}$$

Son ifadeyi (3.38) de yerine yazalım.

$$c_0 dtdp + \rho_0 c_0^2 dudt = 0$$

$$dp + \rho_0 c_0^2 dudt = 0,$$

$$du + \frac{1}{\rho_0 c_0} dp = 0,$$

$$d(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}) = 0,$$

$$u + \frac{\rho}{\rho_0 c_0} = sabit. \tag{3.40}$$

ikinci karakteristik üzerinde

$$\frac{dx}{dt} = -c_0 \quad \text{yani} \qquad dx = -c_0 dt \tag{3.41}$$

elde ederiz. Bu ifadeyi (3.38) de yerine yazarsak

$$d(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}) = 0,$$

$$u - \frac{\rho}{\rho_0 c_0} = sabit \tag{3.42}$$

alırız. Buradaki (3.41) ve (3.42) ifadelerine Riemann invaryantları denir.

İkinci bir örnek olarak Cauchy-Riemann sistemini göz önüne alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3.43}$$

Bu ifadeyi daha geniş şekilde yazarak matris formunda ifade edelim

$$1\frac{\partial u}{\partial x} + 0\frac{\partial u}{\partial y} + 0\frac{\partial v}{\partial x} - 1\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \, ,$$

$$1\frac{\partial u}{\partial x}+0\frac{\partial u}{\partial y}+0\frac{\partial v}{\partial x}+1\frac{\partial v}{\partial y}=0\,, \tag{3.44}$$

veya

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0. \tag{3.45}$$

Şimdi karakteristik determinantı yazalım

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ dx & 0 & dy & 0\\ 0 & dx & 0 & dy\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & dy & 0\\ dx & 0 & dy\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ dx & 0 & dy\\ 0 & dx & 0\end{vmatrix}$$

$$=dy\begin{vmatrix}1 & 0\\ dx & dy\end{vmatrix}-dx\begin{vmatrix}0 & 1\\ dx & dy\end{vmatrix}=(dy)^2+(dx)^2=0,$$

$$\Rightarrow dy=\mp i dx. \tag{3.46}$$

Dolayısıyla cauchy-Riemann sistemi reel karakteristiklere sahip değildir.

Tanım 3.1 Bir kısmi türevli diferansiyel denklemler sisteminin tüm karakteritikleri reel ise, böyle bir sisteme hiperbolik sistem denir.

3.3 Normal Şekilde Yazılmış Hiperbolik Denklemler Sistemi İçin Cauchy Problemi

Hiperbolik denklemler sistemi için Cauchy problemini incelerken, başlangıç verilerinin $t=0$ noktasında bilindiğini varsayacağız. Yani

$$u_i(x,0)=u_i^{(0)}(x). \tag{3.47}$$

Farz edelim ki, ox ekseni karakteristik olmasın. Yani $u(x,0)$ keyfi değerlerine göre sistem, t ye göre türevlerin bulunmasına olanak sağlamaktadır. Buna göre aşağıdaki sistemi göz önüne alalım

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}=f, \tag{3.48}$$

Burada $detA \neq 0$ dır. Bu taktirde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A^{-1}B\frac{\partial u}{\partial x} = A^{-1}f \qquad (3.49)$$

veya $A^{-1}B = C$, $A^{-1}f = g$ olarak ifade edilirse (3.49)' u

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = g$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu sistem için karakteristik determinantı yazalım

$$\begin{vmatrix} E & C \\ dtE & dxE \end{vmatrix}_{2n} = (dt)^n \begin{vmatrix} E & C \\ E & \dfrac{dx}{dtE} \end{vmatrix}$$

$$= (dt)^n \begin{vmatrix} 0 & C - \dfrac{dx}{dtE} \\ E & \dfrac{dx}{dtE} \end{vmatrix} = (-1)^n (dt)^n \, det \begin{vmatrix} C - \dfrac{dx}{dt}E \end{vmatrix}.$$

Böylelikle elde edebileceğimiz karakteristikler

$$\frac{dx_i}{dt} = k_i(x,t) \qquad (3.50)$$

denklemlerini sağlayacaktır. Böyle keyfi karakteristiklerin eğim açısı k_i ler

$$det(C - KE) = 0 \qquad (3.51)$$

denklemin kökleri olur. Bu köklere C matrisinin öz değerleri denir.

Şimdi aşağıdaki kuazi lineer denklem sistemini

$$A(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u) \qquad (3.52)$$

inceleyelim. Bu durumda karakteristikler çözümlere de bağlı olacaktır. Bir çözüm için elde edilen karakteristikler diğer çözüm için uygun olmayacaktır. Örneğin, gaz dinamiğindeki bir sistemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{p'(\rho)}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0. \qquad (3.53)$$

Şimdi bu son sistem için karakteristik denklemi yazalım, bundan dolayı

$$1\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+0\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{p'}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0\,,$$

$$1\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+0\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0\,, \qquad (3.54)$$

veya

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u & \frac{p'}{\rho} \\ \rho & u \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}=0 \qquad (3.55)$$

şeklinde yazalım. Karakteristiklerin denklemi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & \frac{p'}{\rho} \\ 0 & 1 & \rho & u \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix}=0, \qquad (3.56)$$

olmaktadır, buradan

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho & u \\ 0 & dx & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix}+dt\begin{vmatrix} 0 & u & \frac{p'}{\rho} \\ 1 & \rho & u \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix}=0$$

$$0=\begin{vmatrix} dx & 0 \\ 0 & dx \end{vmatrix}+dt\begin{vmatrix} \rho & u \\ dx & 0 \end{vmatrix}+dt[-\begin{vmatrix} u & \frac{p'}{\rho} \\ 0 & dx \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u & \frac{p'}{\rho} \\ \rho & u \end{vmatrix}dt]$$

$$(dx)^2-udxdt+dt[-udx+dt(u^2-p')]=0\,,$$

$$(dx)^2 - udxdt - udxdt + (dt)^2(u^2 - p') = 0\,,$$

$$(dx)^2 - 2udxdt + u^2(dt)^2 - p'(dt)^2 = 0\,,$$

$$(\frac{\partial x}{\partial t})^2 - 2u\frac{\partial x}{\partial t} + (u^2 - p') = 0\,,$$

$$(\frac{\partial x}{\partial t})_{1,2} = u \mp \sqrt{u^2 - (u^2 - p')} = u \mp \sqrt{p'}, \tag{3.57}$$

Sonuncu ifadeden

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{p'}, \tag{3.58}$$

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'}. \tag{3.59}$$

alırız. Şimdi sistemin invaryantlarını bulalım. Bunun için genişletilmiş matrisi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & \frac{p'}{\rho} & 0 \\ 0 & 1 & \rho & u & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & d\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{3.60}$$

yazalım. (3.60) ifadesinde determinant sıfıra eşit olduğu için keyfi 4×4 minörü sıfıra eşit olmalıdır. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & \rho & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{3.61}$$

yani,

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho & 0 \\ 0 & dx & du \\ dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} + dt\begin{vmatrix} 0 & u & 0 \\ 1 & \rho & 0 \\ dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} = 0\,, \tag{3.62}$$

$$dxd\rho + \rho dtdu - udtd\rho = 0 \tag{3.63}$$

Buradan birinci karakteristik üzerinde

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{p'}$$

$$\Rightarrow dx = (u + \sqrt{p'(\rho)})dt \tag{3.64}$$

olur. Bu son ifadeyi (3.63) eşitliğinde'de yerine yazalım

$$d\rho(u + \sqrt{p'(\rho)})dt + \rho dudt - ud\rho dt = 0$$

$$\sqrt{p'(\rho)}d\rho + \rho du = 0$$

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho}$$

alırız. İkinci karakteristik üzerinde yeni

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'(\rho)}$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho} \tag{3.65}$$

elde edilir. Böylelikle göz önüne aldığımız sistemi

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{p'(\rho)}$$

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho} \tag{3.66}$$

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'(\rho)}$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho}. \tag{3.67}$$

adi diferansiyel denklemler sisteminine indirgemiş oluruz.

4. HİDRODİNAMİĞİN MODEL DENKLEMLER SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde amacımız hidrodinamiğin sabit basınçlı sıkıştırılabilen izentropik sıvıların hareketini modelleyen denklemler sistemi için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümünü elde etmek ve çözümün bazı özelliklerini incelemek olacaktır. Bu amaçla aşağıdaki problemi,

$$u_t + uu_x = 0\ , \tag{4.1}$$

$$p_t + (pu)_x = 0\ , \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = f(x)\ , \tag{4.3}$$

$$p(x,0) = g(x)\ . \tag{4.4}$$

gözönüne alalım. Burada $f(x)$ ve $g(x)$ bir kez türevlenebilir bilinen fonksiyonlardır varsayarız.

4.1 Sürekli Başlangıç Koşul

Görüldüğü gibi (4.1) , (4.2) denklemler sisteminin 1.denklemi p bilinmeyeninden bağımsız, ikinci denklem ise $u\ ve\ p$ ye bağlı olmaktadır. İkinci bölümde gösterildiği gibi eğer, $f(x)$ fonksiyonu hem pozitif, hem de negatif eğime sahip fonksiyon ise (4.1) denkleminin $u(x,t)$ çözümü yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olmaktadır. Dolayısıyla (4.1)-(4.4) probleminin klasik anlamda çözümü mevcut değildir. Zayıf çözümlerin tanımını verelim.

Tanım 4.1 (4.3),(4.4) başlangıç koşullarını sağlayan ve $\varphi(x,T) = 0$ koşuluna sahip olan herhangi bir $\varphi(x,t)$ test fonksiyonları için

$$\iint_R \left\{ \varphi_t(x,t)u(x,t) + \varphi_x(x,t)\frac{u^2(x,t)}{2} \right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\varphi(x,0)\,dx = 0 \tag{4.5}$$

$$\iint_{D_T} \{\varphi_t(x,t)u(x,t) + \varphi_x(x,t)u(x,t)p(x,t)\}\, dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} p(x,0)\varphi(x,0)\, dx = 0 \tag{4.6}$$

integral eşitliklerini koruyan $u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonlarına (4.1)-(4.4) probleminin zayıf çözümü denir.

Tanım 4.1 den görüldüğü üzere (4.5),(4.6) denklemlerinde $u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonları süreksizde olabilir.

(4.1)-(4.4) probleminin zayıf çözümünü elde etmek için

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2 = 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{4.8}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \tag{4.9}$$

$$\omega(x.0) = \omega_0(x), \tag{4.10}$$

yardımcı problemini dahil edelim. Burada $v_0(x)$ ve $\omega_0(x)$ sırası ile

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = f(x) \quad , \qquad \frac{d\omega_0(x)}{dx} = g(x)$$

denklemlerinin herhangi bir sürekli çözümü olmaktadır.

Teorem 4.1 Eğer $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ (4.7)- (4.10) probleminin yumuşak çözümleri ise ,

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad , \qquad p(x,t) = \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} \tag{4.11}$$

İle tanımlanan $u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonları esas problemin zayıf çözümleri olmaktadır. (4.11) den

$$v(x,t) = \int u(x,t)dx + c_1(t), \tag{4.12}$$

$$\omega(x,t) = \int p(x,t)dx + c_2(t), \tag{4.13}$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla yardımcı problemin çözümü tek değildir.

[Rasulov,M.A The Finite Differences Scheme For The First Order System Of nonlineer Differential Equations İn A Class Of Discountious Functions. Applied Mathematics Ve Computation.154,pp.671-102,139-154. 1999] adlı makalede

(4.7) , (4.9) probleminin çözümü

$$v(x,t)=\frac{1}{2}u_0^2t+v_0(\xi)\ ,\qquad \xi=x-ut$$

olarak elde edilmiştir. Sade hesaplamalar yolu ile

$$u(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=f(x-ut), \tag{4.14}$$

Elde ederiz. Karakteristikler yöntemini kullanarak (4.8) , (4.10) probleminin çözümünü

$$\omega(x,t)=\omega_0(\xi)$$

şeklinde buluruz. Yukarıdaki teoreme göre

$$p(x,t)=\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}$$

olmaktadır. Buradan

$$p(x,t)=\frac{\partial\omega}{\partial x}=\omega'_\xi\left(1-t\frac{\partial u}{\partial x}\right)=g(\xi)\left(1-\frac{tf'(\xi)}{1+tf'(\xi)}\right)=\frac{g(\xi)}{1+tf'(\xi)} \tag{4,15}$$

elde ederiz. Böylelikle aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 4.2 Eğer $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonları (4.7)-(4.10) yardımcı probleminin çözümleri ise (4.14) ve (4.15) ile tanımlanan $u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonları esas problemin yumuşak çözümleri olmaktadır.

Yardımcı problemin aşağıdaki avantajları vardır;

1. $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonlarının diferansillenebilme özelliği $u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonlarının diferansillenebilme özelliğinden bir mertebe fazladır.

2. Esas problemin çözümlerini u ve p fonksiyonlarının hiçbir değişkene göre türevlerini kullanmaksızın elde etmek mümkündür. Zaten bu türevler sıçrayış noktalarında mevcut değillerdir.

3. fonksiyonlarının hiçbir değişkene göre türevlerini kullanmaksızın elde etmek mümkündür. Zaten bu türevler sıçrayış noktalarında mevcut değillerdir.

4. $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonları mutlak sürekli fonksiyonlardır.

(4.15) ifadesini (4.2) denkleminde

$$\begin{cases} a=a(x,t)=x+ut \\ \tau=t \end{cases} \tag{4.16}$$

değişken dönüşümünü yaparak da elde edebiliriz. Bu dönüşümün jakobiyeninin

$$J=\frac{D(a,\tau)}{D(x,t)}=(1+f'_a t)$$

olduğunu dikkate alarak (4.2) denklemini

$$\frac{dp}{dt} = -p\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt}$$

şeklinde yazabiliriz. Sonuncu denklemden $J(a,0) = 1$ olduğunu varsayarsak, (4.2) denkleminin çözümünü

$$p(x,t) = \frac{p(a,0)}{J(a,t)} = \frac{g(x-ut)}{1+tf'(x-ut)} \tag{4,17}$$

olarak elde ederiz.(4.14) ve (4.15) ifadelerinde $t = -\frac{1}{f'(u)}$ değerlerinde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \infty \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \infty$$

olduğu kolayca görülmektedir. Dolayısıyla (4.1)-(4.4) probleminin klasik çözümü mevcut değildir.$u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonlarındaki sıçrayış noktalarını belirlemek için

$$E_1(t) = \int_R u(x,t)\,dx \;, \tag{4.18}$$

$$E_2(t) = \int_R p(x,t)dx \;, \tag{4.19}$$

enerji integrallerini göz önüne alalım. (4.18) ve (4.19) integralleri hem sürekli, hem de süreksiz fonksiyonlar için mevcut olmaktadır. Ayrıca $E_1(t)$ ve $E_2(t)$ nin zamvean bağımsız olduğu kolayca görülmektedir.

Tanım 4.2 Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$E_1(0) = \int_R u(x,0)dx \;,$$

$$E_2(0) = \int_R p(x,0)dx$$

$E_1(0)$ ve $E_2(0)$ sayılarına $v(x,t)$ ve $\omega(x,t)$ fonksiyonlarının kritik değerleri denir.

Şimdi $u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonlarının süreksizlik noktalarının yerlerini tespit etme problemini ve bu noktaların zamanla değişimini inceleyeceğiz. Daha önce söz edildiği üzere yardımcı problemin çözümü tek değildir. Fiziksel bağlamda yararlı tek bir çözüm elde etmek için bazı ilave koşullar gerekmektedir.

Tanım 4.3 Her t için $v(x,t)$ nin kritik değerler aldığı noktaların geometrik yerine $v(x,t)$ fonksiyonunun cephe noktası diyelim ve $x_f^{(v)}(t)$ şeklinde gösterelim.

Tanım 4.4 Her t için $p(x,t)$ nin kritik değerler aldığı noktaların geometrik yerine $p(x,t)$ fonksiyonunun cephe noktası diyelim ve $x_f^{(p)}(t)$ ile gösterelim.

Tanım 4.3 den

$$v\left(x_f^{(v)}(t),t\right) = \int_{-\infty}^{x_f^{(v)}(t)} u(x,t)dx = E_1(0)$$

elde ederiz. Buradan , $x_f^{(v)}(t)$ için

$$\frac{dx_f^{(v)}(t)}{dt} = \frac{[u^2]}{[u]} \Big|_{x=x_f^{(v)}(t)} \tag{4.20}$$

denklemini elde ederiz. Benzer şekilde, Tanım 4.4 den

$$\frac{dx_f^{(p)}(t)}{dt} = \frac{[up]}{[p]} \Big|_{x=x_f^{(p)}(t)} \tag{4.21}$$

elde ederiz. Burada $[\varphi] \Big|_{x=x_0}$ notasyonu ile $\varphi(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki sıçrayışı gösterilmektedir. Böylece u ve p fonksiyonlarının sıçrayış noktalarının denklemin karakteristikleri üzerinde olduğu görülmektedir.

Tanım 4.5 Aşağıdaki eşitliklerde tanımlanan

$$v_{gen}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & v < E_1(0) \\ E_1(0), & v \geq E_1(0) \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\omega_{gen}(x,t) = \begin{cases} \omega(x,t), & \omega < E_1(0) \\ E_1(0), & \omega \geq E_1(0) \end{cases} \tag{4.23}$$

fonksiyonlarına yardımcı problemin genişletilmiş çözümleri denir. Esas problemin çözümü için aşağıdaki ifadeleri

$$u_{gen}(x,t) = \frac{\partial v_{gen}(x,t)}{\partial x}, \tag{4.24}$$

$$p_{gen}(x,t) = \frac{\partial \omega_{gen}(x,t)}{\partial x}, \tag{4.25}$$

olarak buluruz.(4.24) ve (4.25) den görüldüğü üzere, $\frac{\partial v_{gen}(x,t)}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \omega_{gen}(x,t)}{\partial x}$ türevlerinin sıfıra eşit olduğu noktalar $u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonlarının sıçrayış noktaları olmaktadır. (4.20) den

$$t = \int_0^{x_f(t)} \frac{dx_f(t)}{u} < \infty$$

elde ederiz. Bu ifade $u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonlarında sıçrayışların oluşabilmesi için gerekli ve yeterli bir koşuldur.

5. SONUÇLAR

1. Tezde 1. basamaktan hiperbolik tür denklemler için hangi iyi tanımlanmış başlangıç sınır koşullarının yazılabileceği incelenmiştir.

2. Sabit katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için karakteristikler yöntemi uygulanmıştır.

3. İdeal gazların izentropik ve sabit entropili akışını ifade eden denklemler sisteminin gerçek çözümünü elde etmak için özel bir yöntem önerilmiştir.

6.KAYNAKLAR

1. Toro, E.F, Riemann Solvers Ve Numerical Methods For Fluid Dynamics, Springer, Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

2. Rasulov ,M.A. The Finite Differences Scheme For The First Order System of nonlineer Differential Equations in A Class Of Discountious Functions, Applied Mathematics and Computation.154 ,pp.671-102, 139-154, 1999.

3. Noh, W,F, Protter, M.N, Difference Methods and The Equations of Hydrodynamics,Journal of Math.and mechanics, vol 12 ,no.2, 1963.

ÖZGEÇMİŞ

12.09.1985 tarihinde Batman'da doğdu. 1997 'de Petrol Ofisi İlkokulunu, 2000'de Zübeyde Hanım Orta Okulunu, 2003'de Batman Lisesini bitirdi. 2004 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2008 yılında bitirdi. 2009 yılında girdiği Beykent Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik yüksek lisans programından mezun oldu.