

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**DEJENERE OLABİLEN NONLİNEER PARABOLİK TÜR
DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**
(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan: **Tuğçe AKGÜL**

İSTANBUL, 2011

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**DEJENERE OLABİLEN NONLİNEER PARABOLİK TÜR
DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**
(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan:
Tuğçe AKGÜL

Öğrenci No:
090860002

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2011

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Dejenere Olabilen Nonlineer Parabolik Tür Denklemlerin Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 23\05\2011

TUĞÇE AKGÜL

TEŐEKKÖR

Değerli hocam Prof. Dr. Mahir RESULOV,

Lisans ve yűksek lisans dűnemim boyunca, tezimin fikir aŐamasından sonuçlanmasına kadar olan sűrete bana aŐılamıŐ olduęunuz bilgi birikimine, size her baŐvurduęumda bana vakit ayırmanıza, hoŐgűrűnűze, sabrınıza, desteęinizle iyi kűtű her anımda yanımda olmanıza, benim űzerimdeki tűm emeklerinize sonsuz teŐekkűrlerimi sunarım.

Ayrıca her koŐulda bana verdikleri manevi ve maddi destek olmaksızın, hiçbir Őey yapamayacaęım műkemmek aileme teŐekkűrű bir borç bilirim.

İstanbul, 2011

Tuğçe AKGÖL

DEJENERE OLABİLEN NONLINEER PARABOLİK TÜR DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan: Tuğçe AKGÜL

Özet

Tezde, ikinci basamaktan iki kez dejenere olunan nonlinear (lineer olmayan) parabolik tür denklem için yazılmış başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün yapısı incelenmiştir. Bunun için önce iki fazlı sıvıların tabakalı ortamda mikroskobik hareketini ifade eden denklem çıkarılmış ve özel durumlarda bu denklemin analitik çözümünün özellikleri incelenmiştir.

Tezin 3.bölümünde söz konusu denklemin tüm fiziksel olaylarını düzgün aks ettirebilen, süreksiz fonksiyonlar sınıfında nümerik çözümünün elde edilmesi için esas bir nümerik yöntem önerilmiştir. Bunun yanı sıra nümerik çözümün gerçek çözüme yakınsaklığı da incelenmiştir. Önerilen yöntemin etkinliğini gösterebilmemiz için bazı özel durumlarda bilgisayar testleri de yapılmıştır.

NUMERICAL SOLUTION OF THE NON-LINEAR PARABOLIC TYPE EQUATIONS WITH DEGENERATION

Presented by: Tuğçe AKGÜL

Abstract

In this thesis, the structure of the solution of the nonlinear parabolic equation with two-time degeneration is investigated. In addition, the motion of the two phase fluids in layered denoting the movement of microscopic and analytical solution of this equation features removed and examined special cases. In partical case the exact solution of the maintained problem is found.

In the last section of this thesis the efficient numerical algorithms for finding of the solution in a class of discontinuous functions is suggested. The theorem of convergence of the numerical solution to exact weak solutions is proved.

In order to demonstrate the efficiencies of the proposed algorithm some computer tests have been made in some special cases.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTARCT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Kavramlar	1
1.2 İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	5
1.3 Zayıf Çözüm	13
2. MİKROSKOBİK ORTAMDA İKİ FAZLI SIVILARIN TABAKALI ORTAMDA HAREKETİNİN MATEMATİKSEL MODELİ VE ÇÖZÜMÜ...	15
2.1 Oransal Faz Geçirgenliğinin Teorik Tanımlanması	24
3. İKİ KEZ DEJENERE OLUNAN PARABOLİK TÜR DENKLEMLER	28
3.1 Cauchy Problemi	29
3.2 Yarım Eksende Başlangıç Sınır Değer Problemi	31
3.3 Birinci Tür Başlangıç Sınır Değer Problemi	32
4. SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA NÜMERİK ÇÖZÜMLER İÇİN ALGORİTMALAR	33
4.1 Nümerik Çözümün Özellikleri	34
5. BİLGİSAYAR DENEYLERİ	40
6. SONUÇLAR	48
KAYNAKLAR	49

1. GİRİŞ

Genelde, kısmi türevli diferansiyel denklemler doğadaki temel kanunları matematiksel ifade ederken, uygulamalı matematiğin, fiziğin ve mühendisliğin bir çok önemli problemlerini modellemesi ve çözümlemesi süreçlerinde ortaya çıkmaktadırlar. Bu bilim dalı modern matematiğin tüm alanlarında, özellikle fizik, geometri ve analizde önemli rol oynamaktadır. Fiziksel önem taşıyan bir çok dinamik olaylar kısmi türevli diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemler için yazılmış uygun başlangıç ve başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünün bulunmasına indirgenmektedir. Matematiksel modeller kullanılarak fiziksel olayların dinamiği incelenir, ayrıca zor koşullarda yapılması gereken fiziksel deneyin yerine kolayca ve hızlı bir şekilde sonuca varılabilen bilgisayar deneyleri yapılabilir. Önce tezin sonraki bölümlerinde kullanılabilecek bazı temel kavramları hatırlatalım.

1.1 Temel Kavramlar

Her zaman olduğu gibi R^m ile (x_1, x_2, \dots, x_m) noktalarının Öklid uzayını gösterelim. $Q \subseteq R^m$ bir bölge, $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ise Q da tanımlı ve n .basamaktan sürekli türevlere sahip fonksiyon olsun. n .basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin (KTDD) genel yazılım formu aşağıdaki

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_m^n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

gibi olmaktadır. Burada, x_1, x_2, \dots, x_m bağımsız değişkenler $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ bilinmeyen fonksiyon, F ise tüm argümanlarına göre tanımlı ve bilinen fonksiyon olmaktadır.

Diferansiyel denklemin içerdiği bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin en yüksek mertebesine denklemin mertebesi (veya basamağı) denir.

$n = 1$ olduğu takdirde (1.1) denklemini 1. basamaktan KTDD olmaktadır ve genel yazılım formu

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0 \quad (1.2)$$

şeklini alır.

Genelde biz 2. basamaktan olan KTDD'yi inceleyeceğiz. Kolaylık için $m = 2$ olsun. Yer eksenlerinin sayısı iki olduğu durumda 2. basamaktan olan KTDD genel yazılım formu aşağıdaki

$$F\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 \quad (1.3)$$

gibi olmaktadır. Kolaylık için bazı durumlarda x_1, x_2, x_3 değişkenlerini (x, y, z) gibi göstereceğiz. Zamana bağlı değişen büyüklükleri ifade etmek için zaman değişkenini özel olarak t harfi ile göstereceğiz.

Eğer, F bilinmeyen fonksiyon ve onun tüm türevlerine göre lineer fonksiyon olursa, böyle denklemlere lineer KTDD denir. Diferansiyel denklemlerin lineerlik özelliğini denklemin operatör yazılım formunu kullanarak ifade edelim. Bundan dolayı, aşağıdaki şekilde yazılmış

$$\mathfrak{S}(u) = f(x) \quad (1.4)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada, $\mathfrak{S}(u) = \mathfrak{S}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ değişkenlerine bağlı polinomial bilinen bir fonksiyon ve $(x = x_1, x_2, \dots, x_m)$ olmaktadır.

Aşağıdaki iki koşulu

- 1) $\mathfrak{S}(u + v) = \mathfrak{S}(u) + \mathfrak{S}(v)$,
- 2) $\mathfrak{S}(cu) = c \mathfrak{S}(u)$

sağlayan \mathfrak{S} operatörüne lineer operatör denir. Burada, u ve v fonksiyonları Q da tanımlı, c ise keyfi bir sabit olmaktadır.

Örnek 1

1. $u_x + u_y = 0$,
2. $x u_x + y^2 u_y = \sin x$,
3. $u_t - u_x = u$

1.basamaktan,

4. $u_t + cu_x = \mu u_{xx}$,
5. $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

ikinci basamaktan,

$$6. u_t + cu_x = \mu u_{xxx},$$

$$7. u_{tt} - c^2 u_{xxxx} = 0$$

ise sırasıyla üçüncü ve dördüncü basamaktan lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler olmaktadır.

Birinci ve ikinci basamaktan lineer KTDD lerin genel yazılım formu aşağıdaki

$$a(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + c(x_1, x_2)u = d(x_1, x_2), \quad (1.5)$$

$$A(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + C(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + D(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \\ + E(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + F(x_1, x_2)u = G(x_1, x_2) \quad (1.6)$$

gibi olur.

Doğrusal olmayan denklemlere lineer olmayan denklemler denir. Eğer, F bilinmeyen fonksiyonun yüksek basamaktan olan türevlerine göre lineer olmayan fonksiyon olursa, böyle denklemlere ciddi lineer olmayan KTDD denir.

Örnek 2

$$1. u_x^2 + u_y^2 = 1,$$

$$2. v_t + \frac{1}{2}(v_x)^2 = 0,$$

$$3. (u_x)^2 + yu_y - u = 0,$$

$$4. u_x^2 u_y = 1$$

lineer olmayan denklemlerdir.

Eğer, F bilinmeyen u fonksiyonunun, yüksek basamaktan olan türevlerine göre lineer fonksiyon ise, böyle denklemlere kuazilineer KTDD denir. Örneğin

Örnek 3

1. $\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u^2 = 0,$
2. $u_t + uu_x = u,$
3. $\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

kuazilineer denklemlerdir.

Birinci ve ikinci basamaktan kuazilineer denklemlerin genel yazılım formu sırasıyla

$$a(x_1, x_2, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b(x_1, x_2, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} = d(x_1, x_2, u),$$

$$A\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} +$$

$$C\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = D\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$

olmaktadır.

$$a(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + c(x_1, x_2, u) = 0$$

şeklindeki denklemlere hemi (veya yarı) lineer denklemler denir.

Örnek 4

1. $u_t - u_{xx} = u^2,$
2. $u_t - u_{xx} = u(1 - u)$

yarı lineer denklemler olmaktadır.

Eğer, tüm değişkenlere göre n kez sürekli diferansiyellere sahip $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ fonksiyonu (1.1) de yerine konduğunda denklemi özdeş eşitliğe dönüştürür ise, böyle fonksiyonlara diferansiyel denklemin çözümü (veya integrali) denilir.

Örnek 5

a) $f, g \in C^2(D)$, $(D \subset R^2)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$z = f(x - 2y) + g(x + 2y)$$

yüzey ailesi

$$4z_{xx} - z_{yy} = 0$$

ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer denklemin genel çözümüdür.

b) $z = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$ fonksiyonu $xz_x + yz_y = \frac{3}{2}z$

denklemini sağlar. Bu yüzey keyfi fonksiyon veya parametre kapsamadığından denklemin özel bir çözümüdür.

c) Aynı şekilde $z = \ln(x^2 + y^2)$ fonksiyonu da

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

denklemini sağladığından bu da bir özel çözüm olmaktadır.

1.2 İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

İkinci basamaktan KTDD sınıflandırılması için baş kısmı lineer olan

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.7)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada x, y serbest değişkenler, a, b, c ve F kendi argümanlarına göre bilinen fonksiyonlar olmaktadır.

a, b ve c katsayıları için öyle koşullar bulalım ki, (1.7) denklemi kanonik şekilde yazılmış: ısı dağılımı, dalga ve Laplace denklemlerinden birisiyle aynı olsun. Var sayalım ki, a, b ve c katsayıları aynı zamanda sıfır olamazlar ve $u(x, y)$ fonksiyonu da her iki değişkene göre 2.basamaktan sürekli türevlere sahip olmaktadır.

Amacımıza ulaşmak için x, y değişkenlerinden yeni ξ ve η değişkenlerine aşağıdaki gibi

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (1.8)$$

dönüşümü yapalım. Var sayalım ki , ξ ve η fonksiyonları x ve y göre iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlardır ve ayrıca da aşağıdaki Jakobian tanım bölgesinde

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

olmaktadır. Böyle durumda (1.8) sistemi x ve y değişkenlerine göre çözülebilir ve

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

fonksiyonları da sürekli olmaktadır.

(1.7) denklemini yeni, ξ ve η değişkenlerinde yazalım. Bunun için denkleme dahil olan türevleri ξ ve η cinsinden ifade edelim.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Bu ifadeler (1.7) de yerine konursa

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1.9)$$

alırız. Burada,

$$A = a(x, y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x, y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2,$$

$$B = a(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x, y) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + c(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$C = a(x, y) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x, y) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2.$$

olmaktadır.

$\xi(x, y)$ ve $\eta(x, y)$ öyle seçilebilir ki, (1.9) denklemi Q bölgesinin herhangi bir (x, y) noktasının civarında en basit, yani

$$1) A = C = 0;$$

$$2) A = B = 0;$$

$$3) A = C, B = 0$$

olsun.

Bu amaçla $B^2 - 4AC > 0$; $B^2 - 4AC < 0$; $B^2 - 4AC = 0$ olan durumları ayrı ayrı inceleyelim. $D = B^2 - 4AC$ ifadesine (1.9) denkleminin diskriminantı denilir.

1. $B^2 - 4AC > 0$ olduğu durumda (1.7) denklemi hiperbolik türe ait olmaktadır.

Örnek 6 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ dalga denkleminin hiperbolik tür bir denklem olduğunu gösterelim.

Çözüm Bu durumda $A = 1$, $B = 0$, $C = -a^2$ ve $B^2 - 4AC = 4a^2 > 0$ olduğundan dalga denklemi her yerde hiperboliktir.

2. $B^2 - 4AC = 0$ olduğu durumda (1.7) denklemi parabolik türe aittir.

Örnek 7 $u_t - k^2 u_{xx} = 0$ ($k^2 = \text{sabit}$) ısı veya difüzyon denkleminin parabolik olduğunu gösterelim.

Çözüm Burada $A = 0$, $B = 0$, $C = -k^2$ ve $B^2 - 4AC = 0$ olup, difüzyon denklemi her yerde parabolik olur.

3. $B^2 - 4AC < 0$ olan durum da ise eliptik türe mensuptur.

Örnek 8 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplace denkleminin eliptik olduğunu gösterelim.

Çözüm Burada $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ ve $B^2 - 4AC = -4 < 0$ olduğundan Laplace denklemini her yerde eliptiktir.

Örnek 9 $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$

denkleminin karakteristiklerini yazarak kanonik forma indirgeyiniz.

Çözüm Bu denklem için $A = 1$, $B = -2$, $C = -3$ ve $\Delta = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ olmaktadır, yani denklem hiperbolik tür denklemdir.

Karakteristiklerin denklemini

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3 = 0$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{16})$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y = x + c_1 \Rightarrow c_1 = x - y,$$

$$\frac{dy}{dx} = -3 \Rightarrow y = -3x + c_2 \Rightarrow c_2 = y + 3x$$

karakteristiklerini elde ederiz.

Bu taktirde ξ ve η değişkenlerini x ve y

$$\xi = \varphi(x, y) = x - y,$$

$$\eta = \psi(x, y) = y + 3x$$

şeklinde ifade edelim. Buradan

$$\xi_x = 1, \quad \xi_y = -1, \quad \eta_x = 3, \quad \eta_y = 1,$$

$$\xi_{xx} = 0 \quad \xi_{yy} = 0 \quad \xi_{xy} = 0$$

$$\eta_{xx} = 0 \quad \eta_{yy} = 0 \quad \eta_{xy} = 0$$

olur.

Şimdi denklemdeki x ve y' ye göre olan türevleri ξ ve η' ya göre olan türevler yardımı ile ifade edelim.

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi + 3u_\eta ,$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = -u_\xi + u_\eta ,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} ,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} ,$$

$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta} .$$

Bulunan ifadeler denklemde yerine yazıldığında,

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{16}(u_\xi - u_\eta) = 0$$

sonucu bulunur. Bu denkleme Euler –Darbox denklemi denir.

Örnek 10 $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$

denklemini kanonik forma indirgeyiniz.

Çözüm Bu denklem için $A = x^2$, $B = 0$, $C = -y^2$ ve $\Delta = B^2 - 4AC = (0)^2 - 4x^2(-y^2) = 4x^2y^2 > 0$ olmakla denklem hiperbolik tür denklem olmaktadır.

Karakteristikler denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^2} \left[0 \pm \sqrt{0^2 - 4x^2(-y^2)} \right]$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x}$$

olmaktadır. Buradan iki tane karakteristik elde ederiz, birincisi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c_1$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c_1|, \quad c_1 = \frac{y}{x};$$

ikincisi ise benzer yolla

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + c_2$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c_2|, \quad c_2 = xy$$

gibi elde ederiz. Bulduğumuz karakteristikleri kullanarak

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}$$

yeni değişkenleri dahil edelim. Buradan

$$\xi_x = y, \quad \xi_y = x, \quad \eta_x = -\frac{y}{x^2}, \quad \eta_y = \frac{1}{x}$$

$$\xi_{xx} = 0, \quad \xi_{xy} = 1, \quad \xi_{yy} = 0$$

$$\eta_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \quad \eta_{xy} = -\frac{1}{x^2}, \quad \eta_{yy} = 0,$$

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot y + u_\eta \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = yu_\xi - \frac{y}{x^2}u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot x + u_\eta \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = xu_\xi + \frac{1}{x}u_\eta,$$

$$u_{xx} = y^2u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3}u_\eta,$$

$$u_{yy} = x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}$$

elde ederiz. Bulduğumuz ifadeler ana denklemde yerine yazılır ise

$$\begin{aligned} & x^2y^2u_{\xi\xi} - 2x^2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + x^2\frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} + x^2\frac{2y}{x^3}u_\eta - y^2x^2u_{\xi\xi} - 2y^2u_{\xi\eta} - y^2\frac{1}{x^2}u_{\eta\eta} \\ & = 0, \end{aligned}$$

$$x^2y^2u_{\xi\xi} - 2y^2u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x}u_{\eta} - y^2x^2u_{\xi\xi} - 2y^2u_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} = 0 ,$$

$-4y^2u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_{\eta} = 0$ alırız. Sonuncu denklemin her iki tarafını $-\frac{1}{4y^2}$ ile çarpar isek

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_{\eta} = 0$$

sonucunu buluruz.

Örnek 11 Aşağıdaki denklemi

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

kanonik forma indirgeyiniz

Çözüm Burada $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$ ve $\Delta = B^2 - 4AC = 2^2 - 4.1.1 = 0$ olur, dolayısıyla denklem paraboliktir.

Şimdi karakteristik denklemimizi yazarak denklemi kanonik şekle getirelim.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} = \frac{2}{2.1} = 1.$$

Buradan

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \int dy = \int dx + c_1 \Rightarrow y = x + c_1$$

elde ederiz. Bu durumda ξ değişkeni olarak $\xi = x - y$ gibi yazalım,

η ise $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$ olacak biçimde seçelim. Örneğin, $\eta = x$ olabilir. Gerçektende

bu durumda $J(x, y) \neq 0$

olmaktadır. Şimdi denklemi (ξ, η) koordinatlarında yazalım.

$$\xi = x - y, \quad \eta = x$$

olduğundan

$$\xi_x = 1, \xi_y = -1, \xi_{xy} = 0, \xi_{xx} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 1, \eta_y = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{xx} = 0, \eta_{yy} = 0,$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi 1 + u_\eta 1 = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi(-1) + u_\eta 0 = -u_\xi,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi},$$

$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}.$$

Bulduğumuz ifadeleri denkleme yerine yazarsak,

$$u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi} = 0$$

veya

$$u_{\eta\eta} = 0$$

elde ederiz. Son olarak integralleme işlemi de yapılır ise,

$$u(\xi, \eta) = c_1(\xi) \eta + c_2(\xi)$$

ifadesi elde edilir. Burada c_1 ve c_2 kendi argümanlarına göre diferansiyellenebilen fonksiyonlardır.

Örnek 12 $z_{xx} - 2z_{xy} + 2z_{yy} = 0$

denklemini kanonik şekle indirgeyiniz.

Çözüm Burada $A = 1$, $B = -2$, $C = 2$ ve $\Delta = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ olmakla beraber denklem eliptik tür denklem olmaktadır.

Karakteristikler denklemini

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2A} \left[B \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \right]$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[-2 \pm \sqrt{-4}]$$

olmaktadır. Buradan

$y = (-1 \pm i)x + c$, veya $c = y + x \mp ix$ elde ederiz. Genel teoriye dayanarak ξ ve η değişkenlerini

$$\xi = (x, y) = y + x,$$

$$\eta = \Psi(x, y) = x$$

şeklinde seçelim. Buradan

$$\xi_x = 1, \quad \eta_x = 1 \quad \xi_y = 1, \quad \eta_y = 0$$

ve

$$z_x = z_\xi + z_\eta,$$

$$z_y = z_\xi,$$

$$z_{xx} = z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta},$$

$$z_{yy} = z_{\xi\xi},$$

$$z_{xy} = z_{\xi\xi} + z_{\xi\eta},$$

elde ederiz. Bulduğumuz ifadeleri denklemimizde yerine yazar isek

$$z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} - 2(z_{\xi\xi} + z_{\xi\eta}) + 2(z_{\xi\xi}) = 0$$

veya

$$z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0$$

bulunur.

1.3 Zayıf Çözüm

Bilindiği gibi doğadaki bir çok pratik problemlerin, matematiksel modelleri kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklem sistemi için yazılmış başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün bulunmasına indirgenir. Çoęu zaman problemin

söz konusu verileri süreksiz fonksiyonlar olabilir. Bazı durumlarda ise matematiksel problemin çözümünde zamanın artan değerlerinde bazı özellikler örneğin “blue-up” dediğimiz, iç sıçrayışlar ortaya çıkabilir. Diğer bir ifade ile fiziksel olayın dinamiğinde süreksizlik ortaya çıkabilir. Nonlineer problemlerde ortaya çıkan yeni karakteristik özellikler (örneğin, heyecanlanmış cephenin sonlu hızla dağılımı, darbe dalgası, dahili sıçrayışları vs. gibi fiziksel özellikler) zayıf çözüm kavramı yardımıyla ifade edilebilirler.

Söz konusu zayıf çözümü tanımlamak için, göz önüne alınan diferansiyel denkleme karşılık gelen ve denkleme bilinen anlamda denk olan, integral gösterim yazmak gerekmektedir. Genelde, kısmi türevli diferansiyel denklem için zayıf çözüm kavramı farklı yollarla yazılabilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için zayıf çözüm kavramı 1930 yılların da Sobolev tarafından verilmiştir. Sobolev anlamındaki zayıf çözüm, integral eşitlik yardımı ile tanımlanmaktadır. Bu tanımı açıklamak için, $Q_T \subset R^{n+1}$ Öklid uzayında konveks bir bölge, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ ve $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ Q_T 'de ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere operatör biçimde verilmiş

$$Lu = f \quad (1.10)$$

lineer kısmi türevli diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Burada L sürekli diferansiyellenebilen katsayılarla sahip self-adjoint (öz eşlenik) diferansiyel ifadeyi göstermektedir.

Tanım 1. Test fonksiyonlar sınıfından keyfi $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ fonksiyonları için

$$\int_{Q_T} \{uM\varphi - f\varphi\} dx dt = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad (1.11)$$

integral eşitliğini sağlayan u fonksiyonuna (1.10) denkleminin zayıf (veya genelleştirilmiş) çözümü denir. Burada $M = L^*$ dir; yani M, L operatörüne karşılık gelen Lagrange anlamında adjoint operatör olmaktadır, [2].

Tanım 1 den görüldüğü gibi (1.10) denkleminin herhangi bir klasik çözümü (1.11) eşitliğini korumak zorundadır. Ama (1.11) eşitliğini sağlayan $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ fonksiyonları daha geniş bir sınıf oluşturur. Çünkü (1.11) in içerdiği u fonksiyonlarının klasik anlamda türevlenebilir olması gerekmemektedir.

Zayıf çözümler göz önüne alındığında, denklem için başlangıç ve sınır değer koşullarının hangi anlamda verileceğini özel olarak belirtmek gerekmektedir.

2. MİKROSKOBİK ORTAMDA İKİ FAZLI SIVILARIN TABAKALI ORTAMDA HAREKETİNİN MATEMATİKSEL MODELİ VE ÇÖZÜMÜ

Hidrodynamicin ve diğer bilim dallarının birçok önemli problemleri, örneğin Newton sıvılarının tabakalı ortamlardaki hareketi, ince tabakalardaki laminar akış, nehir sularının açık mecrada akışı vs. bu gibi problemlerin çözümü matematiksel olarak iki kez dejenere olan ve ikili nonlineariteye sahip parabolik tür denklemler için yazılmış başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümüne indirgenmektedir. Böylelikle bu tür özelliklere sahip olan denklemlerin incelenmesi hem pratik hem de teorik açıdan büyük önem taşımaktadır.

R^2 ile (x, t) noktalarının Öklid uzayını ve $D_T = \{-\infty < x < \infty, t \geq T\} \subset R^2$ bölgesini gösterelim. Burada x yer değişkeni, t ise zaman değişkeni olmaktadır.

D_T de aşağıdaki denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) - \frac{\partial Q(u)}{\partial x} \quad (2.1)$$

göz önüne alalım. Burada, $K(s)$, $\sigma(u)$ ve $Q(u)$, kendi argümanına göre bilinen fonksiyonlar olmakla beraber aşağıdaki koşulları sağlamaktadırlar:

- $K(s)$, $\sigma(u)$ ve $Q(u)$ negatif olmayan ve sınırlı s ve u argümanları için tanımlı ve sınırlı olmaktadır;
- Pozitif u lar için $\sigma'_u(u) > 0$ ve sınırlıdır, $K'_u(u) \geq 0$, $K(|u|) - K(0) \geq m_0 > 0$, $|u| \geq m_1$;
- $K(0) = K'(0) = \sigma(0) = \sigma'(0) = 0$;
- $K''_u(u)$ fonksiyonu işaret değiştirir.

(2.1) denklemini özel şekilde, yani $\sigma'(u) = K_p(\sigma) F_s(\sigma) p'_k(\sigma)$, $Q(u) = w(t)F_s(\sigma)$ olduğu durumda iki fazlı sıvılar kapiler basınç dikkate alınmakla tabakalı ortamda birlikte hareket etmektedir yani

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + w(t) \frac{\partial F_w(\sigma)}{\partial x} + \frac{k}{\mu_p} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_p(\sigma) F_w(\sigma) \frac{\partial P_k(\sigma)}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.1')$$

denklemine dönüşür. Eğer kapiler basınç dikkate alınmazsa, yani sıvının makroskopik ortamda hareket ettiğini varsayarsak (2.1')

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + w(t) \frac{\partial F_w(\sigma)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

denklemine dönüşür. Burada $F_w(\sigma)$ Buckley-Lewerett fonksiyonu olmaktadır ve

$$F_w(\sigma) = \frac{k_w(\sigma)}{k_w(\sigma) + \bar{\mu}k_p(\sigma)}$$

Bilindiği üzere

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial Q(\sigma)}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

denklemini ile ifade edilebilen süreçler herhangi bir korunma kanununu ifade eder. Burada σ korunacak yoğunluk, Q ise akış fonksiyonunu göstermektedir.

Literatürden bilindiği üzere $Q(u)$ bükey fonksiyon olduğu durumda (2.3) denkleminin çözümünde çok değerlilik oluşur, bu ise fiziksel açıdan kabul edilemez. Çok değerli çözümün yerine bir değerli fakat sıçrayışa sahip olduğunu kabul edersek söz konusu çözümü kurtarabiliriz. Bu ise kendi sırasında klasik çözüm kavramını genişlendirmeyi zorunlu kılmaktadır.

Sıçrayışa sahip olan çözümler genelleştirilmiş çözüm kavramını içermeyi talep eder, fakat asıl olan bu durum diğer yeni problemlerin sıçrayış noktalarının ne zaman ve nerede ortaya konulduğudur.

Diğer taraftan problemin çözümündeki çok değerliliğin ortaya çıkması fiziksel açıdan $Q(\sigma)$ fonksiyonunun olayı ne kadar iyi yansıtabilir sonucunu da doğurur.

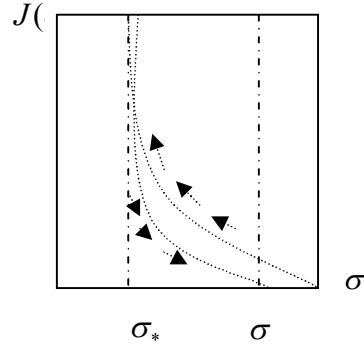
(2.1') denklemini çıkarırken $Q = f(\sigma)$ fonksiyonel bağlantısının daha genel şekilde olduğunu varsaymıştık. Gerçektende (2.3) denkleminde

$$Q(\sigma) = w(t)F_w(\sigma) + \frac{k}{\mu_p} \left(K_p(\sigma) F_w(\sigma) \frac{\partial P_k(\sigma)}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

olarak yazarsak (2.1') i elde ederiz.

$\sigma(x, t)$ çözümünün grafiğinde geriye dönme noktası oluştuğunda σ_x sonsuz büyür ve bu durumda (2.4) ile tanımlanan ikinci basamaktan türev içeren terim dominant rol

oyun. Yani bu durumda artık çözümden sürekli ve tek değerli bir fonksiyon olmasını bekleyebiliriz. p_k ile σ arasındaki fonksiyonel bağıllık Buckley-Lewerett fonksiyonu ile adlanan fiziksel birime sahip olmayan $J(\sigma)$ fonksiyonu ile ifade edilmektedir, [6]. $J(\sigma)$ fonksiyonunun grafiği şekilde gösterilmiştir.



[2,10] de gösterildiği üzere

$$J(\sigma) = \frac{p_k}{\gamma} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

olmaktadır.

Şekilden görüldüğü gibi $J(\sigma)$ monoton azalır, yani $J'(\sigma) < 0$. Fakat, bilindiği üzere $F_w(\sigma)$ monoton artar ve $F_w(\sigma) \geq 0$ 'dir.

Bu koşullar çerçevesinde (2.1) denklemi lineer olmayan parabolik tür denklem olur. $p'_k(\sigma) = 0$ olduğu durumda ise söz konusu denklem birinci basamaktan denkleme dejenere olur.

Diğer taraftan da σ nın bazı değerlerinden sonra $k_w(\sigma)$ ve $k_p(\sigma)$ fonksiyonlarının simetrikliği bozulur. Gerçektende σ nın bazı değerlerinden sonra her bir faz bağımsız duruma dönüşür ve her fazın oransal geçirgenliği sıfıra eşit olur, yani

$$k_w(\sigma) = 0 \quad \sigma < \sigma_*$$

$$k_p(\sigma) = 0 \quad \sigma > \sigma^* = 1 - \sigma_*$$

olur.

Buckley-Lewerett fonksiyonunun tanımına göre $F_w(\sigma)$ fonksiyonu da $\sigma = \sigma_*$ da sıfıra eşit olur.

$$F_w(\sigma_*) = 0$$

Bu da (2.1') denkleminin dejenere olmasına neden olur. Dolayısıyla (2.1') denklemi iki kez $P_k'(\sigma) = 0$ ve $F_w(\sigma_*) = 0$ olduğundan birinci basamaktan denkleme dönüşür. (2.1) denkleminin gerçek çözümünü elde etmek zor olduğundan ve (2.1') cinsinden denklemin çözümünün denklemin dejenere olduğu noktalarda (2.3) denkleminin çözümüne yaklaştığını göstermek amacıyla bazı özel durumları inceleyelim.

Örnek 13 Burgers denklemi olarak adlanan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

denkleminin çözümünü bulunuz, burada μ yeteri kadar küçük pozitif $\mu > 0$ bir parametre olmaktadır.

Görüldüğü gibi, (2.5) denklemini,

$$Q = \frac{1}{2} u^2 + \mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

ile gösterir isek (2.1) şekline dönüşür. Gösterelim ki, $\mu \rightarrow 0$ yaklaştığında (2.5) denkleminin çözümü koşan dalga şeklinde olmaktadır. Gerçekten de [9] olduğu gibi

$$u = -2\mu \frac{\varphi_x}{\varphi} \quad (2.6)$$

değişken dönüşümü yardımı ile (2.5) denklemini

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

şeklindeki lineer ısı denklemine dönüştürebiliriz. (2.7) denkleminin yapısını incelemek için

$$u(x, 0) = F(x) \quad (2.8)$$

başlangıç koşulunu ekleyelim. Başlangıç koşuluna da (2.6) dönüşümünü uygularsak

$$\varphi = \varphi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\mu} \int_0^x F(\eta) d\eta \right\}$$

alırız.

Bilindiği gibi (2.7)-(2.8) ısı denklemi için Cauchy probleminin çözümü Poisson integrali şeklinde

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\eta) \exp \left\{ -\frac{(x - \eta)^2}{4\mu t} \right\} d\eta$$

ifade edilmektedir, [9]. (2.6) değişken dönüşümünü dikkate alır isek (2.5) in çözümü için

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-\frac{G}{2\mu} d\eta}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{G}{2\mu} d\eta}}$$

ifadesini elde ederiz, burada

$$G(\eta; x, t) = \int_0^{\eta} F(\eta') d\eta' + \frac{(x - \eta)^2}{2f}$$

olmaktadır. Sonuncu ifadeden

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = F(\eta) - \frac{x-\eta}{t} = 0 \quad (2.9)$$

elde ederiz. Buradan

$$F(\xi) - \frac{x-\xi}{t} = 0 \quad (2.10)$$

olur.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{-G(\eta)/2\mu} d\eta$$

integralinin $x = \xi$ noktasındaki ağırlığı

$$g(\xi) \sqrt{\frac{4\pi\mu}{|G''(\xi)|}} e^{-G(\xi)/2\mu},$$

olmaktadır, [11].

Varsayalım ki, (2.10) denklemini koruyan $\xi(x, t)$ stasyonere noktadır. Bu takdirde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-G/2\mu} d\eta \sim \frac{x-\xi}{t} \sqrt{\frac{4\pi\mu}{|G''(\xi)|}} e^{-G(\xi)/2\mu},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\mu} d\eta \sim \sqrt{\frac{4\pi\mu}{|G''(\xi)|}} e^{-G(\xi)/2\mu}.$$

alırız. Buradan

$$u \sim \frac{x-\xi}{t}$$

elde ederiz. Sonuncu ifade ile (2.9) dan

$$u = F(\xi) \tag{2.11}$$

olarak buluruz, burada $\xi = x - ut$ olur. Böylelikle ispatladık ki, $\mu \rightarrow 0$ (2.5) denkleminin çözümü

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Hopf denkleminin çözümüne yaklaşıp.

Şimdi μ nün fiks edilmiş değeri için (2.5) denkleminin koşan dalga şeklinde çözümünü bulalım. Bunun için söz konusu denklemin çözümünü

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - ct$$

şeklinde arayalım. Bu ifadeyi (2.5) denkleminde yerine yazarsak

$$-cu_{\xi} + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_{\xi} = \mu u_{\xi\xi}$$

elde ederiz. Sonuncu eşitliği bir kez ξ ' ye göre integraller isek

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 = \mu u_\xi$$

alırız. Görüldüğü gibi sonuncu denklemin sol tarafı u ya göre kare form olmaktadır. Eğer

$$c = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad A = \frac{1}{2}u_1u_2$$

olarak alsak

$$-2\mu u_\xi = (u - u_1)(u - u_2)$$

yazabiliriz. Bu denklemi integraller isek

$$\frac{\xi}{\mu} = \frac{2}{u_2 - u_1} \ln \frac{u_2 - u}{u - u_1}$$

alırız. Buradan u için

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left\{\frac{u_2 - u_1}{2\mu}(x - ct)\right\}} \quad (2.12)$$

ifadesini elde ederiz.

Başlangıç fonksiyon $u_1 > u_2$ olmak koşulu ile

$$F(x) = \begin{cases} u_1, & x > 0 \\ u_2, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde alalım. Bu durumda, yani $u_1 > u_2$ olduğunda elde ettiğimiz çözüm fiziksel yararlı ve sürekli olmaktadır. Eğer $u_2 > u_1$ ve $\mu = 0$ olduğunda çözümde çok değerlilik oluşur. Bu durumda (2.12) ifadesi

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + h \exp\left\{\frac{u_2 - u_1}{2\mu}(x - ct)\right\}}$$

şeklinde olur. Burada

$$h = \frac{\int_{-(x-u_1)t}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta}{\int_{(x-u_2)t}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} \sqrt{4\mu t}$$

olmaktadır.

Eğer $\frac{x}{t}$ ifadesi $u_1 < \frac{x}{t} < u_2$ aralığın da olduğunda $h \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$ ve çözüm (2.12)' a yaklaşır. u_1 ve u_2 sabit sayılar olduğundan μ parametresinin değişmesini Ox ekseninde ölçek değişimi ile düzenleyebiliriz. $\mu \rightarrow 0$ yaklaştığında çözümün profili x ekseninde sıkışır ve limit de u_2 den u_1 e geçerek parçalı sürekli fonksiyon oluşturur ve bu sıçrayış (bu sıçrayış fiziksel olarak darbe dalgası olarak nitelendirilir) $c = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ hızı ile hareket etmektedir. Fiks olunmuş fakat yeteri kadar küçük μ ler için darbe dalgası hızlı lakin akış parametrelerinin sürekli arttığı küçük şerit olarak algılanır. Söz konusu dar şeritte nonlinearlikten doğan çok değerlilik çözümün grafiğindeki geriye dönme difüzyon ile etkisizleştirir dolayısıyla difüzyon terim burada dominat rol oynar bu da dalğanın profilinde stasyoner bir form oluşturur. Çözümün gradiyentinin hızlı değiştiği dönüş bölgesinin (dar şeridin) net olarak eni bilinmemektedir. Fakat onu farklı yöntemlerle belirleyebiliriz. Örneğin gradiyentin 80-90 faiz değiştiği bölgeye geçit bölgesi gibi bakabiliriz. Veya $u_2 - u_1$ in $|u_x|$ in maksimum eğimine oranı olarak da kabul edebiliriz. Açıktır ki tüm bu söylediğimiz ölçüler $\frac{\mu}{(u_2 - u_1)}$ ile düz orantılıdır. Görüldüğü gibi $\mu \rightarrow 0$ yaklaştığında şeridin eni sifıra yaklaşır. İspat etmek mümkündür ki eğer $F(x) = A\delta(x)$ olur ise $R \rightarrow \infty$ yaklaştığında (yani $\mu \rightarrow 0$ yaklaştığında) darbe dalgasının geçit bölgesi u fonksiyonunun süreksizlik çizgisine dönüşür ve geçit bölgesi $x=0$ noktası civarında u_x fonksiyonunun süreksiz olduğu doğruya dönüşür (burada R sayısı Reynolds sayısıdır; konvektif terimin difüzyon terime oranı olarak tanımlanmaktadır).

Altını çizmek gerekir ki, dalğanın profili ile Ox eksenı arasındaki alan, hatta difüzyon terimini dikkate alsak bile sabit kalmaktadır, çünkü

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = \left[\mu u_x - \frac{1}{2} u^2 \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Bu yüzden $\frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx$ ifadesi ile tanımlanan Reynolds sayısı tüm t ler için sabit kalmaktadır.

Yukarıda gördük ki, (2.5) denkleminin klasik çözümü mevcut olmamaktadır çünkü geçit bölgesinde u_x türev mevcut değildir. Bu durumda genelleştirilmiş çözüm kavramını içermek zorundayız. Bu amaçla (2.5) denklemini

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int u dx + \frac{1}{2} u^2 - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = 0$$

şeklinde yazalım. Aşağıdaki notasyonu

$$\int u dx = v$$

içerelim. Bu notasyonda sonuncu denklem

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (2.13)$$

şeklini alır. Bu ise [7] de önerilen yardımcı denklem olmaktadır.

(2.13) denklemi nonlineer parabolik tür denklem olmaktadır, ve

$$v = -2\mu \ln \psi \quad (2.14)$$

değişken dönüşümü yapalım. Bu değişken dönüşümünde (2.13) denklemi lineer ısı

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

denkleminde dönüşür. Varsayalım ki $\psi(x, t)$, (2.15) denkleminin herhangi bir sürekli çözümdür. Bu denklem iyi öğrenildiğinden $\psi(x, t)$ fonksiyonun nasıl bulunduğu önemli değildir. Esas sorun çözümün tanım bölgesinin sağ sınırının zamana göre değişen olmasıdır.

$\psi(x, t)$ fonksiyonunu hesaplamak için $G_\varphi = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ bir bölge tanımlayalım, burada $x(t) \ll L$ in yeteri kadar büyük sayı olduğunu varsayalım. Limit durumunda $L = \infty$ da ola bilir. Eğer (2.13) denkleminin G_φ bölgesinde herhangi bir çözümü var ise dalga profilinin sınırladığı bölgenin sabit kalması şartına göre $x_{deg}(t)$, $v(x, t)$ nin profilinin oluşturduğu alandan sabit kalması gerekir ve

$$v(x_{deg}(t), t) = \int_0^{x_{deg}(t)} u(x, t) dx = \text{sabit} \quad (2.16)$$

eşit olan bölgeyi keser.

$S_H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$ sayısını içerelim ve bu sayıyı [7] kaynağına göre $v(x, t)$ fonksiyonunun kritik sayısı olarak adlandıralım. (2.14)'e göre $\psi(x, t)$ fonksiyonu için başlangıç fonksiyon

$$\psi(x, 0) = \exp\left\{-\frac{F(x)}{2\mu}\right\}.$$

olur. (2.16) dan hareket eden sıçrayış noktası için aşağıdaki denklemi

$$\frac{dx_{deg}(t)}{dt} = \left(-\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}\right) \Big|_{x=x_{deg}(t)}$$

elde ederiz. Sonuncu ifade de

$$t = \int_0^{x_\phi} \frac{dx_\phi}{\left(-\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

zamanını buluruz ki, bu süre zarfında dalga geçit bölgesine ulaşmış oluruz.

2.1 Oransal Faz Geçirgenliğinin Teorik Tanımlanması

Makroskopik tabakalı ortamlardaki iki fazlı sıvıların hareketini ifade ederken, Buckley-Leverett fonksiyonunun elde edilmesidir. Söz konusu fonksiyon genelde deneyler sonucu elde edilebilir. Fakat, bulunmuş fonksiyonun fiziksel olayı ne kadar düzgün aks ettirebilir sorusu ile karşı karşıya kalabiliriz. Çünkü deneyler yapılırken modellenen tabakalı ortamın fiziksel ve kimyasal özellikleri doğal tabakalı ortamın özelliklerinden farklı olabilir. Bu durumda matematiksel model fiziksel olayı düzgün aks ettiremeyebilir. Ayrıca laboratuvar deneylerinde ortamca sade sulaşma periyodu görülebilir. Ama petrolün su ile sıkıştırılıp çıkarılması sürecinde susuz periyodu da dikkate almak gerekmektedir. Bu bölümde oransal faz geçirgenliklerinin bulunması için teorik bir yöntem verilecektir. Yöntemin mantığını oransal faz geçirgenlikleri, Buckley-Leverett fonksiyonlarının fiziksel olarak sağlanması da gereken koşulları oluşturmaktadır. Söz konusu koşullar aşağıdakilerdir.

$$k_p(\sigma_1) = 1, k_p(\sigma_0) = 0, F'_w(\sigma_1) = 0, \quad (2.17)$$

$$k_w(\sigma_1) = 1, k_w(\sigma_0) = 0, F'_w(\sigma_0) = 0 \quad (2.18)$$

$k_p(\sigma)$ ve $k_w(\sigma)$ fonksiyonlarını

$$k_w(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + a_2\sigma^2$$

$$k_p(\sigma) = b_0 + b_1\sigma + b_2\sigma^2$$

şeklinde arayalım. Burada a_i ve b_i , ($i = 0,1,2$) şimdilik bilinmeyen sabitlerdir.

(2.17), (2.18) sistemini çözmeden önce $F_w'(\sigma_1) = 0$ ve $F_w'(\sigma_0) = 0$ koşullarından doğan sonuçları inceleyelim. Bunun için önce $F_w(\sigma)$ fonksiyonunun türevlerini bulalım.

$$F_w'(\sigma) = \frac{k_w'(\sigma)[k_w(\sigma) + \bar{\mu} k_p(\sigma)] - k_w(\sigma)[k_w'(\sigma) + \bar{\mu} k_p'(\sigma)]}{[k_w(\sigma) + \bar{\mu} k_p(\sigma)]^2}$$

Buradan $F_w'(\sigma_0) = 0$ olması için

$$k_w'(\sigma_0)[k_w(\sigma_0) + \bar{\mu} k_p(\sigma_0)] - k_w(\sigma_0)[k_w'(\sigma_0) + \bar{\mu} k_p'(\sigma_0)] = 0 \quad (2.19)$$

gerekmektedir.

$$k_w'(\sigma) = a_1 + 2a_2\sigma,$$

$$k_p'(\sigma) = b_1 + 2b_2\sigma$$

olduğundan (2.17) koşullarından

$$\begin{cases} (a_1 + 2a_2\sigma_0) - [(a_1 + 2a_2\sigma_0) + \bar{\mu}(b_1 + 2b_2\sigma_0)] = 0 \\ (a_1 + 2a_2\sigma_0) - (a_1 + 2a_2\sigma_0) - \bar{\mu}(b_1 + 2b_2\sigma_0) = 0 \\ b_1 + 2b_2\sigma_0 = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\begin{cases} F'(\sigma_1) \equiv b_1 + 2b_2\sigma_1 = 0 \\ k_p(\sigma_1) \equiv b_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_1^2 = 1 \\ k_p(\sigma_0) \equiv b_0 + b_1\sigma_0 + b_2\sigma_0^2 = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

cebirsel denklemler sistemini alırız.

a_0 , a_1 ve a_2 katsayılarını bulmak için

$$a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_1^2 = 0$$

$$a_0 + a_1\sigma_0 + a_2\sigma_0^2 = 1$$

$$a_1 + 2a_2\sigma_1 = 0$$

sistemini Kramer kuralı ile çözelim. Bunun için katsayılardan oluşan esas ve yardımcı determinantaları bulalım.

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & \sigma_1^2 \\ 1 & \sigma_0 & \sigma_0^2 \\ 0 & 1 & 2\sigma_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & \sigma_1^2 \\ 1 & \sigma_0^2 \end{vmatrix} + 2\sigma_1 \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 \\ 1 & \sigma_0 \end{vmatrix} = \\ &= -(\sigma_0^2 - \sigma_1^2) + 2\sigma_1(\sigma_0 - \sigma_1) = (\sigma_0 - \sigma_1)(-\sigma_0 - \sigma_1 + 2\sigma_1) = \\ &= (\sigma_0 - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_0) = -(\sigma_1 - \sigma_0)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1^2 \\ 1 & \sigma_0 & \sigma_0^2 \\ 0 & 1 & 2\sigma_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_1^2 \\ 1 & 2\sigma_1 \end{vmatrix} = \frac{2\sigma_1^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} = \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sigma_1^2 \\ 1 & 1 & \sigma_0^2 \\ 0 & 0 & 2\sigma_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1^2 \\ 0 & 2\sigma_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} 2\sigma_1 = -\frac{2\sigma_1}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & 0 \\ 1 & \sigma_0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2}.\end{aligned}$$

Bulduğumuz a_i ($i = 0,1,2$) katsayılarını yerine yazarsak

$$\begin{aligned}k_w(\sigma) &= \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} - \frac{2\sigma_1\sigma}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} + \frac{\sigma^2}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} \\ &= \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} [\sigma_0^2 - 2\sigma_1\sigma + \sigma_1^2] \\ &= \frac{(\sigma - \sigma_1)^2}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2}\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi bilinmeyen b_i , ($i = 0,1,2$) katsayılarını

$$b_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_1^2 = 1$$

$$b_0 + b_1\sigma_0 + b_2\sigma_0^2 = 0$$

$$b_1 + 2b_2\sigma_0 = 0$$

benzer yol ile denklemler sisteminden bulalım.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & \sigma_1^2 \\ 1 & \sigma_0 & \sigma_0^2 \\ 0 & 1 & 2\sigma_0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1^2 \\ 1 & \sigma_0^2 \end{vmatrix} + 2\sigma_0 \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 \\ 1 & \sigma_0 \end{vmatrix} = \\ &= -(\sigma_0^2 - \sigma_1^2) + 2\sigma_0(\sigma_0 - \sigma_1) = (\sigma_0 - \sigma_1)(-(\sigma_0 + \sigma_1) + 2\sigma_0) \\ &= (\sigma_0 - \sigma_1)(-\sigma_0 - \sigma_1 + 2\sigma_0) \\ &= (\sigma_0 - \sigma_1)(\sigma_0 - \sigma_1) = (\sigma_0 - \sigma_1)^2 \\ &= (\sigma_0 - \sigma_1)^2 \\ b_0 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & \sigma_1^2 \\ 0 & \sigma_0 & \sigma_0^2 \\ 0 & 1 & 2\sigma_0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_0^2 \\ 1 & 2\sigma_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_1} (2\sigma_0\sigma_0 - \sigma_0^2) = \frac{1}{\Delta_1} (\sigma_0^2) = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0 - \sigma_1)^2}. \\ b_1 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \sigma_1^2 \\ 1 & 0 & \sigma_0^2 \\ 0 & 0 & 2\sigma_0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} 1 & \sigma_0^2 \\ 0 & 2\sigma_0 \end{vmatrix} = \frac{-2\sigma_0}{\Delta_1} = \frac{-2\sigma_0}{(\sigma_0 - \sigma_1)^2}. \\ b_2 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 & 1 \\ 1 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} 1 & \sigma_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{\Delta_1} = \frac{1}{(\sigma_0 - \sigma_1)^2}. \end{aligned}$$

Elde ettiğimiz sayıları yerine yazarsak

$$k_p(\sigma) = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0 - \sigma_1)^2} - \frac{2\sigma_0}{(\sigma_0 - \sigma_1)^2} \sigma + \frac{1}{(\sigma_0 - \sigma_1)^2} \sigma^2$$

$$k_p(\sigma) = \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{(\sigma_0 - \sigma_1)^2}$$

elde ederiz.

3. İKİ KEZ DEJENERE OLUNAN PARABOLİK TÜR DENKLEMLER

(2.1) denklemi için yazılmış birinci sınır-değer problemi $\sigma(u) = u$, $K(s) = s^{p-2}$, $p > 2$ olduğu durumlar literatürde incelenmiş [3] ve uygun fonksiyonel uzaylarda zayıf çözümün varlığı ispatlanmıştır. Altını çizmek gerekir ki, (2.1) denklemi nonlinear olduğundan onun gerçek çözümünü bulmak genelde zordur, bazı durumlarda ise hiç mümkün olmamaktadır. Lakin, 2. bölümde söylediğimiz gibi (2.1) denkleminin gerçek çözümlerini $K(s)$, $\sigma(u)$ ve $Q(u)$ fonksiyonlarının bazı özel durumlarında ele almak mümkündür. Örneğin, $K(s) = s^n$, ($n > 2$), $\sigma = u$ olduğu durumda, yani $K_u''(0)$ fonksiyonunun işareti değişmediğinde, (3.1) denkleminin koşan dalga şeklinde olan çözümü [4] vs. gibi kaynaklarda ele alınmış ve çözümünün bazı özellikleri incelenmiştir. İspatlanmıştır ki, denklemin çözümü sürekli, birinci ve ikinci basamaktan olan türevleri ise süreksiz, ama $\frac{\partial s^n}{\partial x}$ fonksiyonu ise sürekli olmaktadır.

Not 1. $K_u'(u) < 0$ ve $Q(u) = 0$ olduğunda (2.1) denklemi, ısı dağılımını ve mikroskobik tabakalı ortamlarda sıvıların hareketini ifade etmektedir.

$K_u''(u)$ fonksiyonunun işaret değiştirdiği durumda kapiler basıncın dikkate alınması koşulu ile (2.1) denklemi iki fazlı sıvıların tabakalı ortamlarda akış problemini ifade eder. [5] de (2.1) denkleminin $K_u''(u)$ fonksiyonunun işaret değiştiren bir özel durumu incelenmiştir.

(2.1) denkleminde görüldüğü gibi, eğer $K(s) \equiv 0$ ve $Q(u)$ fonksiyonu Buckley-Leverett fonksiyonu olduğu durumda (2.1) denklemi, kapiler basınç dikkate alınmamak koşulu ile sıkışmayan iki fazlı sıvıların tabakalı ortamlarda hareketini ifade eden

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(u(x,t))}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

1.basamaktan lineer olmayan hiperbolik tür denkleme dönüşür ve söz konusu denklem petrol dinamiğinde önem taşımaktadır. Genelde (3.1) denklemi, literatürde hidrodinamiğin model denklemi olarak bilinmektedir ve [6], [7] iyice incelenmiştir.

Açıktır ki söz konusu denklemin karakteristikler yöntemi ile bulunan çözümünün ifadesi kapalı fonksiyon olmaktadır. Alınan bu ifadeyi ise, pratik amaçlar için kullanmak zorluk çıkarmaktadır. Diğer taraftan da [7],[8], vs. ispatlanmıştır ki, (3.1) denkleminin çözümü yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olmaktadır. [7] de (3.1) denklemi için yazılmış Cauchy probleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında gerçek çözümünün bulunması için bir yöntem verilmiştir.

Literatürde (2.1) denkleminin nümerik çözümünü ele almak için, yani çözümün diferansiyellene bilme özelliklerini dikkate alınmaksızın homojen sonlu farklar yöntemleri önerilmiştir.

Bu tezin amacı (2.1) denklemi için yazılmış Cauchy ve sınır-değer problemlerinin zayıf çözümlerinin bulunması için sayısal bir çözüm yöntemi önermek ve ele alınmış çözümün bazı özelliklerinin incelenmesi olmaktadır.

3.1 Cauchy problemi

Bu bölümde (2.1) denkleminin çözümünü

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.2)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. Burada, $u_0(x)$ tanım bölgesinde sonlu sayıda birinci tür süreksizlik noktalarına ve sonlu taşıyıcıya sahip bilinen bir fonksiyon olmaktadır.

(2.1) den görüldüğü gibi, bu denklem iki kez dejenere olur, gerçekten de

$\frac{\partial}{\partial x} K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) = K'(s) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ olduğundan $u = 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ olduğu durumlarda (2.1) denklemi birinci basamaktan olan denkleme dejenere olur. Problemin fiziksel yapısından görüldüğü gibi (2.1) denklemi için $-K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) + Q(u)$ ifadesi sürekli fonksiyon olmaktadır, çünkü fiziksel olarak bu ifade akış fonksiyonunu göstermektedir. Ama problemin çözümünün ikinci basamaktan türevi mevcut

olmayabilir. Dolayısıyla (2.1), (3.2) probleminin klasik çözümü mevcut olmaya bilir. (2.1), (3.2) probleminin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 1. (3.2) koşulunu ve herhangi bir $f(x, t) \in W_{1,1}^2 \left(\begin{smallmatrix} o^2 \\ R_l \end{smallmatrix} \right)$ ve $f(x, T) = 0$ test fonksiyonları için aşağıdaki integral eşitliği koruyan $u(x, t)$ fonksiyonuna

$$\int_D \left\{ u \frac{\partial f}{\partial t} + \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) + Q(u) \right] \frac{\partial f}{\partial x} \right\} dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) f(x, 0) dx = 0 \quad (3.3)$$

(2.1), (3.2), probleminin zayıf çözümü denir. Burada $W_{1,1}^2 \left(\begin{smallmatrix} o^2 \\ R_l \end{smallmatrix} \right)$ üzerinde kurulmuş Sobolev uzayıdır.

Tanım 1 den görüldüğü gibi, $u(x, t)$, $K(s)$ ve $Q(u)$ fonksiyonları bu durumda sürekli olmak zorunda değildir.

(2.1), (3.2) probleminin zayıf çözümünü ele almak için [7],[9] takip ederek aşağıdaki

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = K \left[\frac{\partial}{\partial x} \sigma \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) \right] - Q(u), \quad (3.4)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad (3.5)$$

yardımcı problemi içereyim. Burada $v_0(x)$,

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = u_0(x) \quad (3.6)$$

denklemini koruyan sürekli diferansiyel lenebilen keyfi fonksiyon olmaktadır.

Teorem 1. Eğer $v(x, t)$, (3.4), (3.5) yardımcı probleminin klasik çözümü ise,

$$u(x, t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad (3.7)$$

eşitliği ile tanımlanan $u(x, t)$ fonksiyonu (2.1), (3.2) probleminin zayıf çözümüdür.

Teoremin ispatı için (3.4) denklemini test fonksiyonları sınıfından olan keyfi $f_x(x, t)$ fonksiyonu ile çarpıp D_T bölgesi üzeri x 'e göre integrallersek

$$\int_{D_T} f \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} K \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} \right] dx dt = 0 \quad (3.8)$$

alırız. (3.8) ifadesini iki integrale parçalayıp, bunlardan birincisine t' ye göre kısmi integrasyon yöntemini, ikincisine ise x' e göre kısmi integrasyon yöntemini uygularsak teoremi ispatlamış oluruz.

Yardımcı problemin aşağıdaki avantajları vardır:

- $u(x, t)$ fonksiyonu sürekli olmak zorunda değildir ve bilinmeyen fonksiyonu ele almak için yazılmış algoritmalarda söz konusu fonksiyonun ikinci türevini kullanma zorunluluğu ortaya çıkmamaktadır. Ayrıca problemin fiziksel yapısından $-K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) + Q(u)$ sürekli olmaktadır,
- $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümlerini ele almak için yazılacak sayısal algoritmalar çok sade olmaktadır.

3.2 Yarım Eksende Başlangıç Sınır Değer Problemi

$R_+^2 = \{0 \leq x < \infty, t \geq 0\}$ olsun, ve bu bölgede (2.1) denklemini aşağıdaki

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.9)$$

$$u(0, t) = u_1(t) \quad (3.10)$$

koşulları çerçevesinde inceleyelim. Burada, $u_0(x)$ ve $u_1(t)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlar olmaktadır. (2.1), (3.9) ve (3.10) probleminin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

Tanım 2. (3.9), (3.10) koşullarını ve test fonksiyonlar sınıfından olan herhangi bir $f(x, t) \in W_{1,1}^2 \left(\overset{o^2}{R_+} \right)$ ve $f(x, T) = 0$ özelliğine sahip $f(x, t)$ fonksiyonu için, aşağıdaki integral eşitliğini

$$\int_{R_+^2} \left\{ u \frac{\partial f}{\partial t} - \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) + Q(u) \right] \frac{\partial f}{\partial x} \right\} dx dt + \int_0^T \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u(0,t))}{\partial x} \right) - Q(u(0,t)) \right] f(0,t) dx + \int_0^\infty u_0(x) f(x, 0) dx = 0 \quad (3.11)$$

sağlayan $u(x, t)$ fonksiyonuna (3.1), (3.9) ve (3.10) probleminin zayıf çözümü denir.

(2.1), (3.9) ve (3.10) probleminin zayıf çözümünü ele almak için aşağıdaki yardımcı problemi

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = K \left(\frac{\partial \sigma(u(x,t))}{\partial x} \right) - Q(u), \quad (3.12)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad (3.13)$$

$$u(x, 0) = u_1(t) \quad (3.14)$$

inceleyelim. 2.bölümde ispatlamış olduğumuz Teorem1 in bu durum için de doğru olduğunu ispatlamak zor değildir.

3.3 Birinci Tür Başlangıç Sınır Değer Problemi

Bu bölümde (2.1) denklemini $D_T = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ bölgesi üzeri

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.15)$$

başlangıç

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t) \quad (3.16)$$

ve sınır koşulları çerçevesinde inceleyelim. Burada, $u_0(x)$ ve $u_1(t)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlar olmaktadır. (2.1),(3.15) ve (3.16) probleminin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

Tanım 3. (3.15),(3.16) koşullarını ve test fonksiyonlar sınıfından olan herhangi bir $f(x, t) \in W_{1,1}^2 \left(\overset{o}{D_T} \right)$ ve $f(x, T) = 0$ özelliğe sahip $f(x, t)$ fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliğini

$$\int_{D_T} \left\{ u \frac{\partial f}{\partial t} + \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) - Q(u) \right] \frac{\partial f}{\partial x} \right\} dx dt + \int_0^T \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u(0,t))}{\partial x} \right) - Q(u(0,t)) \right] f(0, t) dx + \int_0^\infty u_0(x) f(x, 0) dx = 0 \quad (3.17)$$

sağlayan $u(x, t)$ fonksiyonuna (2.1),(3.2) ve (3.16) probleminin zayıf çözümü denir.

(2.1),(3.2) ve (3.16) probleminin zayıf çözümünü ele almak için aşağıdaki yardımcı problemi içereyim.

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = K \left(\frac{\partial \sigma(u(x,t))}{\partial x} \right) - Q(u), \quad (3.18)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad (3.19)$$

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(l, 0) = u_2(t). \quad (3.20)$$

Burada $u_0(x)$, denkleminin herhangi bir türevlenebilir çözümüdür.

Teorem 2. Eğer $v(x, t)$ fonksiyonu (3.18)-(3.20) ile tanımlanan yardımcı probleminin zayıf çözümü ise

$$u(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (3.21)$$

(2.1), (3.2), ve (3.16) probleminin zayıf çözümüdür.

4. SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA NÜMERİK ÇÖZÜMLER İÇİN ALGORİTMALAR

Şimdi önerilmiş yardımcı problem çerçevesinde göz önüne aldığımız problemlerin sayısal çözümleri için algoritmalar içereyim.

(3.17), (3.18), probleminin nümerik algoritmasını geliştirmek için önce D_T^l bölgesini

$$\omega_{h,\tau}^l = \{(x_i, t_k) | x_i = ih, t_k = k\tau, i = 0, 1, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; h > 0, \tau > 0\}.$$

ağı ile örtelim. Burada h ve τ sırasıyla x ve t değişkenlerinin adımları olmaktadır.

$\bar{\omega}_{h,\tau}^l = \omega_{h,\tau}^l + \gamma_{h,\tau}^l$, $\gamma_{h,\tau}^l$, $\omega_{h,\tau}^l$ ağının sınır düğümleri olmak üzere $\omega_{h,\tau}^l = \omega_h^l \times \omega_\tau^l$ olmaktadır. $\omega_{h,\tau}^l$ ile tanımlanan ağın $u(x_i, t_k)$ değerini $U_{i,k}$ ağ fonksiyonu ile gösterelim. R_T ve R_T^+ üzerinde bulunan ağın adımlarını sırası ile $T_{\omega_{h,\tau}}$ ve $T_{\omega_{h,\tau}^+}$ ile ifade edelim.

4.1 Nümerik Çözümün Özellikleri

(3.18), (3.20) problemini (x_i, t_k) noktaları üzeri aşağıdaki gibi sonlu farklara

$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} = K \left(\frac{\sigma(U_{i,k}) - \sigma(U_{i-1,k})}{h} \right) - Q(U_{i,k}), \quad (4.1)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i), \quad (4.2)$$

$$U_{0,k} = u_1(t_k), \quad U_{n,k} = u_2(t_k) \quad (4.3)$$

ayrıklaştıralım. Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3. Eğer $V_{i,k}$, (4.1)-(4.3) yardımcı problemin nümerik çözümü ise

$$U_{i,k+1} = \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h} \quad (4.4)$$

eşitliği ile tanımlanan $U_{i,k}$ ağ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\tau} = \frac{1}{h} \left[K \left(\frac{\sigma(U_{i+1,k}) - \sigma(U_{i,k})}{h} \right) \right. \\ \left. - K \left(\frac{\sigma(U_{i,k}) - \sigma(U_{i-1,k})}{h} \right) \right] - \frac{Q(U_{i,k}) - Q(U_{i-1,k})}{h}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$U_{i,0} = u_0(x_i), \quad (4.6)$$

$$U_{0,k} = u_1(t_k), \quad U_{n,k} = u_2(t_k) \quad (4.7)$$

doğrusal olmayan cebirsel denklemler sisteminin nümerik çözümü olmaktadır.

1. (4.5)-(4.7) probleminin negatif olmayan sonlu karşılığı

$$0 \leq m \leq U_{i,k} \leq M$$

olmaktadır. Burada $m = \min\{u_0, u_1, u_2\}$ ve $M = \max\{u_0, u_1, u_2\}$ dır.

İspat (4.5) denklemini $U_{i,k} = U$, $U_{i,k+1} = \hat{U}$ ve $\hat{U}_{\pm} = U_{i\pm 1, k+1}$ notasyonlar yardımı ile basitçe

$$\hat{U} - U = \frac{\tau}{h} K' \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \left[\frac{\sigma(\hat{U}_+) - \sigma(\hat{U})}{h} - \frac{\sigma(\hat{U}) - \sigma(\hat{U}_-)}{h} \right] - \frac{Q(\hat{U}) - Q(\hat{U}_-)}{h} \quad (4.8)$$

yazabiliriz. $\gamma_{h,\tau}^l$ düğümü yerine $\omega_{h,\tau}^l$ ağın adımlarını $\hat{U} \neq \text{sabit}$ ve \hat{U} değerlerine sahip bir noktada olduğunu varsayalım. $(x_1, t_1) \in \omega_{h,\tau}^l$ noktasında \hat{U} maksimum değerini almakta ve hatta bazı komşu noktalarda $U(x_1, t_1)$, $\hat{U}(x_1, t_1)$ den daha küçük olmaktadır. Eğer $\hat{U}(x_1, t_1) > U(x_1, t_1)$ ise $\sigma(u)$ fonksiyonu monoton, (4.8) denkleminin sol tarafı pozitif fakat sağ tarafı negatif olmaktadır. Dolayısıyla bu bir tutarsızlıktır. Benzer şekilde $\hat{U}_{\pm}(x_1, t_1) > \hat{U}(x_1, t_1)$ olduğunda ise de aynı tutarsızlığa varabiliriz. İspat etmeliyiz ki \hat{U} , $\omega_{h,\tau}^l$ ağının iç düğümlerinde minimal bir değer almasın.

Görüldüğü gibi (4.4) sonlu fark karşılığı τ ya göre birinci mertebeden olmaktadır. Fakat söz konusu sonlu fark karşılığının zaman değişkenine göre mertebesini, örneğin Runge-Kutta yöntemini kullanarak yükseltmek mümkündür.

2.

$$\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \leq \text{sabit}$$

ve

$$\max\left\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \left|\frac{d\alpha_1}{dt}\right|, \left|\frac{d\alpha_2}{dt}\right|\right\} \leq \text{sabit}$$

eşitsizliklerini koruduğu takdirde

$$\tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_x(\hat{U}) \left[K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0) - Q(\hat{U}) \right] \leq \text{const} \quad (4.9)$$

olmaktadır.

İspat (4.8),(4.9) probleminin çözümünün (2.1),(3.2) ve (3.3) probleminin gerçek çözümüne yakınsaklığını ispatlamak için, önce (4.9) denklemini aşağıdaki şekilde yazıp

$$U_t = K_{\bar{x}}(\sigma_x(\hat{U})) - Q_{\bar{x}}(\hat{U})$$

sonra $w(\hat{U})$ fonksiyonuna çarpıp elde edilmiş denklemi (i, k) üzeri

$$(\hat{w}, U_t)_{L_2(\omega_{h\tau})} = \left(\hat{w}, K_{\bar{x}}(\sigma_x(\hat{U})) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} - \left(\hat{w}, Q_{\bar{x}}(\hat{U}) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} \quad (4.10)$$

toplayalım. Burada

$$\hat{w} \equiv w(\hat{U}) = \sigma(\hat{U}) + (x_i - \iota)\alpha_1 - \frac{x_i}{\iota} = \sigma(\hat{U}) + H(t), \quad (4.11)$$

$$\alpha_1 = \sigma(u_1(t_{k+1})), \quad \alpha_2 = \sigma(u_2(t_{k+1})) \quad H(t) = (x_i - \iota)\alpha_1 - \iota\alpha_2$$

olmaktadır ve $(u, v)_{L_2(\omega_{h\tau})}$ ile ifade edilen sembol, $\tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i$ toplamı göstermektedir. Bu toplamın $\omega_{h\tau}$ ağında $\int_{D_T} u(x, t) v(x, t) dx dt$ integralinin sayısal karşılığı olmaktadır. Kolayca gösterilebilir ki, \hat{w} fonksiyonu $i = 0$ ve $i = n$ olduğunda sifıra eşit olur.

(4.10) eşitliğine kısmi toplama formüllerini uygulayalım. Önce $I_1 = (\widehat{w}, U_t)_{L_2(\omega_{h\tau})}$ üzerinde işlemler yapalım. Bunun için (4.11) i dikkate alarak

$$I_1 = I_{11} + I_{12} \quad (4.12)$$

şeklinde yazalım, burada

$$I_{11} = (\sigma(\widehat{U}), U_t)_{L_2(\omega_{h\tau})}, \quad I_{12} = \tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} H(t) U_t = (H(t), U_t)_{L_2(\omega_{h\tau})}$$

olmaktadır. Şimdi $I_2 = \left(\widehat{w}, K_{\bar{x}} \left(\sigma_x(\widehat{U}) \right) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})}$ ifadesine kısmi toplama formülünü uygular isek

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\widehat{w}, K_{\bar{x}} \left(\sigma_x(\widehat{U}) \right) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} = \tau \sum_{k=1}^{m-1} w|_{i=n} K \left(\sigma_x(\widehat{U}) \right) \Big|_{i=n-1} - \\ &\quad \tau \sum_{k=1}^{m-1} \left(\widehat{w} K \left(\sigma_x(\widehat{U}) \right) \right) \Big|_{i=0} - \left(\widehat{w}_x, K \left(\sigma_x(\widehat{U}) \right) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} = \\ &= - \left(\sigma_x(\widehat{U}), K \left(\sigma_x(\widehat{U}) \right) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} - \left(H_x(t), K \left(\sigma_x(\widehat{U}) \right) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} \end{aligned}$$

alırız. Sonuncu ifadeyi dikkate alarak I_2 i

$$I_2 = - \left(\sigma_x(\widehat{U}), K \left(\sigma_x(\widehat{U}) \right) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} + I_{21} \quad (4.13)$$

şeklinde yazalım. Burada

$$I_{21} = - \left(H_x(t), K \left(\sigma_x(\widehat{U}) \right) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})}$$

olmaktadır.

Şimdi $I_3 = \left(\widehat{w}, Q_{\bar{x}}(\widehat{U}) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})}$ ifadesine de yukarıda olduğu gibi kısmi integrasyon toplama yöntemini uygular isek

$$I_3 = \tau \sum_{k=1}^{m-1} \widehat{w}|_{i=n} Q(\widehat{U}) \Big|_{i=n-1} - \tau \sum_{k=1}^{m-1} \widehat{w} Q(\widehat{U}) \Big|_{i=0} - \left(\widehat{w}_x(\widehat{U}), Q(\widehat{U}) \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\sigma_x(\hat{U}), Q(\hat{U})\right)_{L_2(\omega_{h\tau})} - \left(H_x(t), Q(\hat{U})\right)_{L_2(\omega_{h\tau})} \\
&= -\left(\sigma_x(\hat{U}), Q(\hat{U})\right)_{L_2(\omega_{h\tau})} + I_{32}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$I_3 = -\left(\sigma_x(\hat{U}), Q(\hat{U})\right)_{L_2(\omega_{h\tau})} + I_{32} \quad (4.14)$$

olmaktadır, burada

$$I_{32} = -\left(H_x(t), Q(\hat{U})\right)_{L_2(\omega_{h\tau})}$$

(4.12), (4.13) ve (4.14) ifadelerini dikkate alarak (4.10) eşitliğini

$$\left(\sigma(\hat{U}), U_t\right)_{L_2(\omega_{h\tau})} + \left(\sigma_x(\hat{U}), K\left(\sigma_x(\hat{U})\right) - Q(\hat{U})\right)_{L_2(\omega_{h\tau})} \leq I_{12} + I_{22} + I_{32} \quad (4.15)$$

olarak yazabiliriz.

Şimdi I_{12} , I_{22} ve I_{32} ifadelerini değerlendirelim. Önce I_{12} ifadesini göz önüne alalım. Bunun için

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} [(x_i - \iota)(\alpha_1, U_t) - \iota(\alpha_2, U_t)] = \\
&= h \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \iota) \tau \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_1 U_t - h \sum_{i=1}^{n-1} \iota \tau \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_2, U_t
\end{aligned}$$

şeklinde yazıp, k 'ya göre olan toplamlara kısmi toplama formüllerini uygular isek

$$\begin{aligned}
\tau \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_1 U_t &= (\alpha_1, U_t)_{L_2(\omega_{h\tau})} = \\
\alpha_1|_{k=m} U|_{k=m-1} - \alpha_1 U|_{k=0} - \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, U\right)_{L_2(\omega_{h\tau})}
\end{aligned}$$

I_{12} ifadesini son olarak aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned}
I_{12} = & h \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \alpha_1|_{k=m} U|_{k=m-1} - (\alpha_1 U)|_{k=0} - \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, U \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} \right\} - \\
& - h \sum_{i=1}^n x_i \left\{ \alpha_2|_{k=m} U|_{k=m-1} - (\alpha_2 U)|_{k=0} - \left(\frac{d\alpha_2}{dt}, U \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} \right\} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan I_{12} için

$$\begin{aligned}
|I_{12}| \leq & \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(u_1(t_m)) U_{i,m-1}(x_i - \iota) \right| + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(u_1(t_0)) U_{i,0}(\iota) \right| + \\
& + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, U \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} \right| + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(u_2(t_m)) U_{i,m-1} x_i \right| + \\
& + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(u_2(t_0)) U_{i,0} x_i \right| + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d\alpha_2}{dt}, U \right)_{L_2(\omega_{h\tau})} \right| \leq \\
\leq & \max |\alpha_1| \|U\|_{L_2(\omega_{h\tau})} + \max |\alpha_2| \|U\|_{L_2(\omega_{h\tau})} + T \max \left| \frac{d\alpha_1}{dt} \right| \|U\|_{L_2(\omega_{h\tau})} + \\
& + \max \left| \frac{d\alpha_2}{dt} \right| T \|U\|_{L_2(\omega_{h\tau})} \leq M_3 \|U\|_{L_2(\omega_{h\tau})} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

değerlendirilmesini alırız, burada

$$M_3 = M_{31} \max \left\{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, \left| \frac{d\alpha_1}{dt} \right|, \left| \frac{d\alpha_2}{dt} \right| \right\}$$

ve

$$M_{31} = 4 + 2T = 2(T + 2)$$

olmaktadır. Dolayısıyla

$$|I_{12}| \leq M_3 \max \left\{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, \left| \frac{d\alpha_1}{dt} \right|, \left| \frac{d\alpha_2}{dt} \right| \right\} \quad (4.18)$$

I_{22} ifadesini değerlendirmek için $H(t)$ nin türevini

$$\begin{aligned}
H_x(t) &= [(x_i - 1)_x \alpha_1 - (x_i)_x \alpha_2] = \\
&= \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \alpha_1 - \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \alpha_2 = \alpha_1(t) - \alpha_2(t) = H_1(t)
\end{aligned}$$

hesaplayalım ve I_{22} ni aşağıdaki

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \left[H_1(t), \left(K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0) \right) \right] = \tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} H_1(t) \left[K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \tau h \sum_{i,k}^* \sigma_x(\hat{U}) \left[K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0) \right] + \frac{1}{2} \tau h \sum_{i,k}^{**} c H_1(t) \quad (4.19)
\end{aligned}$$

şekilde yazalım. Burada \sum^* toplamı

$$|H_1(t)| \leq \frac{1}{2} \sigma_x(\hat{U})$$

eşitsizliğini koruyan (x_i, t_k) noktaları üzeri,

\sum^{**} toplamı ise

$$|\sigma_x(\hat{U})| \leq H_1(t) \quad (4.20)$$

eşitsizliğini koruyan noktalar üzeri gerçekleşmektedir. (4.20) eşitsizliğinden

$$|\sigma_x(\hat{U})| \leq c_1 = \text{const}$$

olduğu görülmektedir.

Buradan,

$$I_3 \leq \frac{1}{2} \tau h \sum_{i,k} \left[K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0) \right] + c_1 \quad (4.21)$$

olduğunu elde ederiz.

Şimdi $I_{11} = (\sigma(\hat{U}), U_t)$ ifadesini göz önüne alalım

$$\begin{aligned}
\sigma(\hat{U})(\hat{U} - U) &= \sigma_1(\hat{U}) - \sigma_1(U) + \alpha + \sigma(0)(\hat{U} - U) = \\
&= [\sigma_1(\hat{U}) - \sigma_1(0)] - [\sigma_1(U) - \sigma_1(0)] + \sigma(0)(\hat{U} - U) + \alpha
\end{aligned}$$

olduğundan

$$h \sum_i \{ \sigma_1(U)|_{t=T} - \sigma_1(0) \} + \frac{1}{2} \tau h \sum_{i,k} \sigma_x(\hat{U}) \left[K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0) - Q(\hat{U}) \right] \leq \text{sabit}$$

elde ederiz. Burada

$$\sigma_1(U) - \sigma_1(0) = \int_0^U [\sigma(\xi) - \sigma(0)] d\xi$$

olmaktadır.

5. BİLGİSAYAR DENEYLERİ

Önerilen yöntemin etkisini görmek için birkaç tane bilgisayar testleri yapalım.

Problem. Varsayalım ki, $K(s) = vs, \sigma(u) = u; Q(u) = \frac{u^2}{2}; u_1 = 1.0; u_2 = 0.5$ ve $T = 1$ olsun. Bu durumda (2.1) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

şekline dönüşür. Bu denkleme bilindiği gibi literatürde Burgers denklemi denir. (5.1) Burgers denklemini önce aşağıdaki başlangıç

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2, & x > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

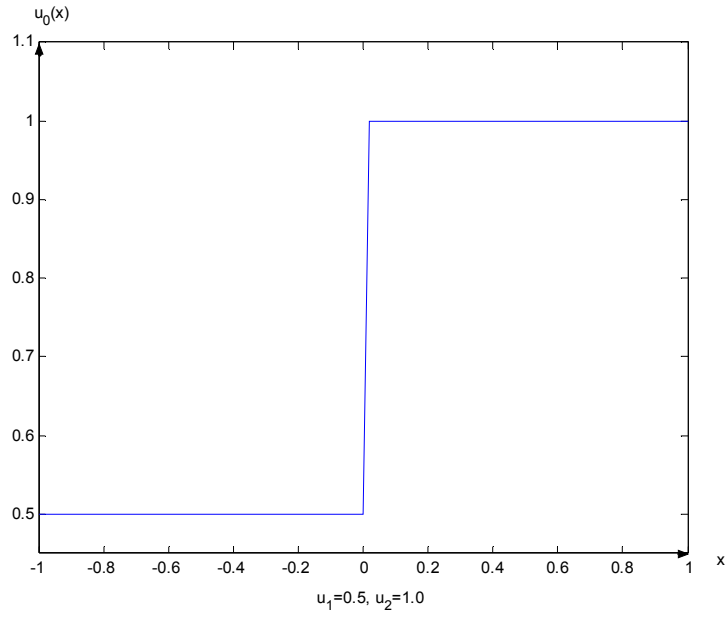
koşulu çerçevesinde inceleyelim ve (5.1)-(5.2) probleminin sayısal çözümünü bulalım. Bunun için yardımcı problemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u^2}{2} = v \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5.3)$$

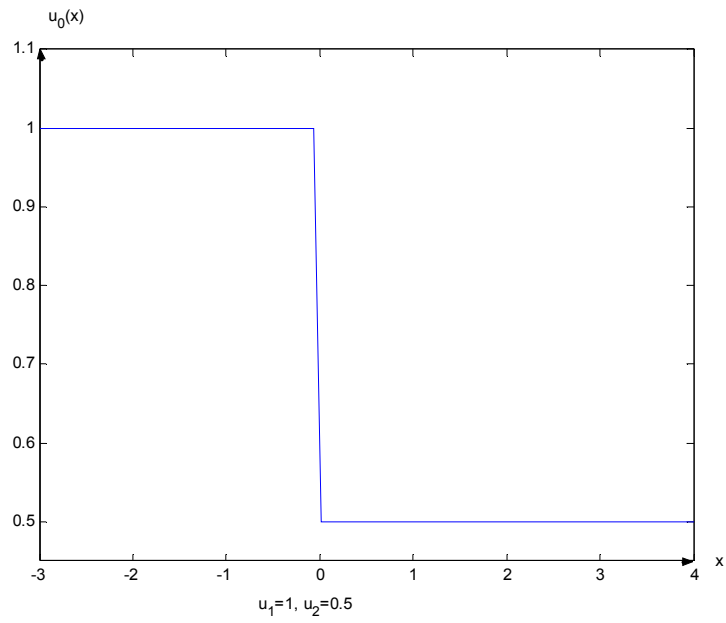
$$v_0(x) = \begin{cases} u_1 x, & x < 0 \\ u_2 x, & x > 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

dahil edelim.

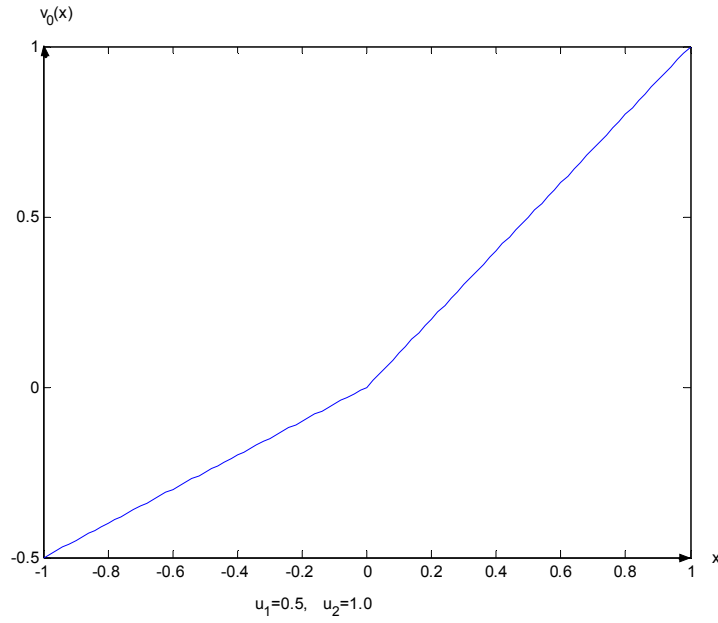
$u_0(x)$ ve $v_0(x)$ fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla şekil1-4 de verilmiştir.



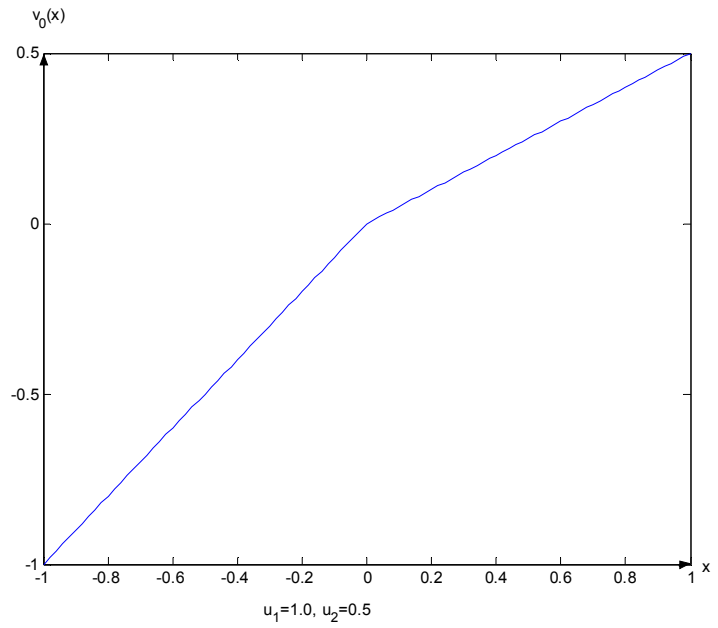
Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3



Şekil4

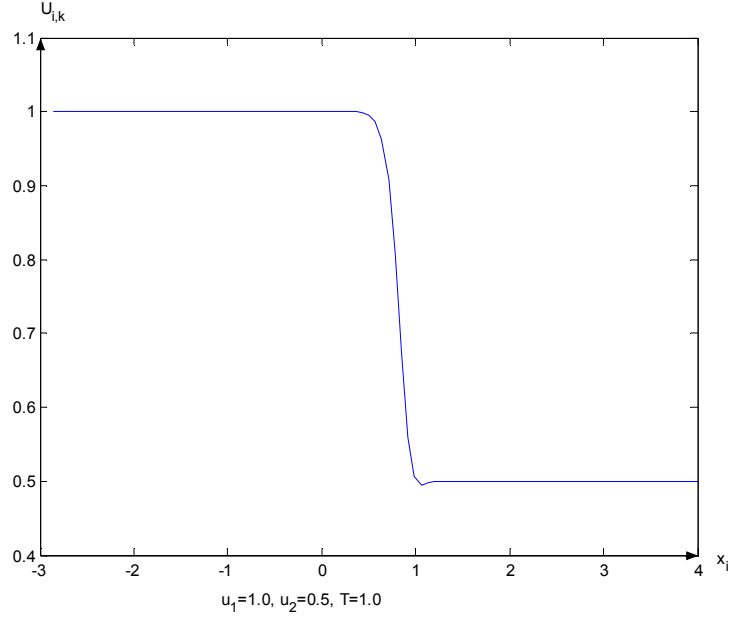
Yardımcı problemi aşağıdaki şekilde sonlu farklara

$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} = \frac{U_{i,k}^2}{2} + \nu \left(\frac{U_{i,k} - U_{i-1,k}}{h} \right), \quad (5.5)$$

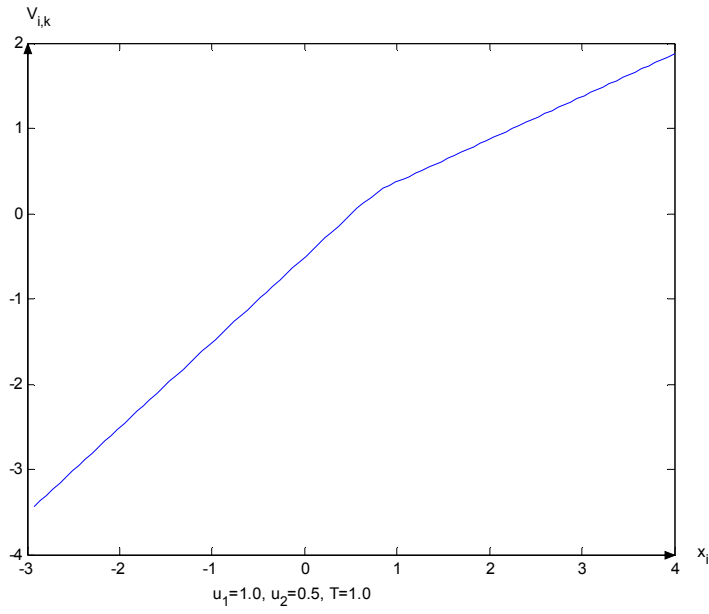
$$V_{i,0} = v_0(x_i). \quad (5.6)$$

ayrıklaştıralım.

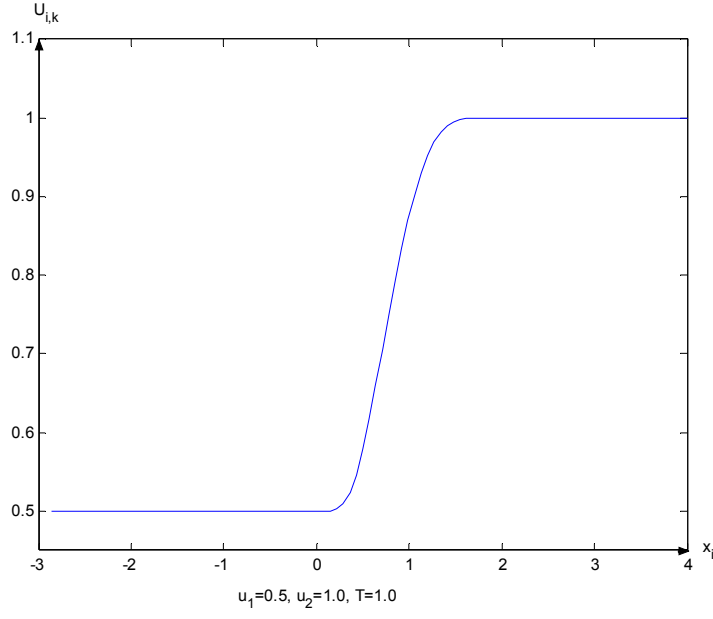
(5.5)-(5.6) algoritması ve (4.4) formülleri ile elde edilen çözümlerin grafikleri şekil 5-8 de gösterilmiştir.



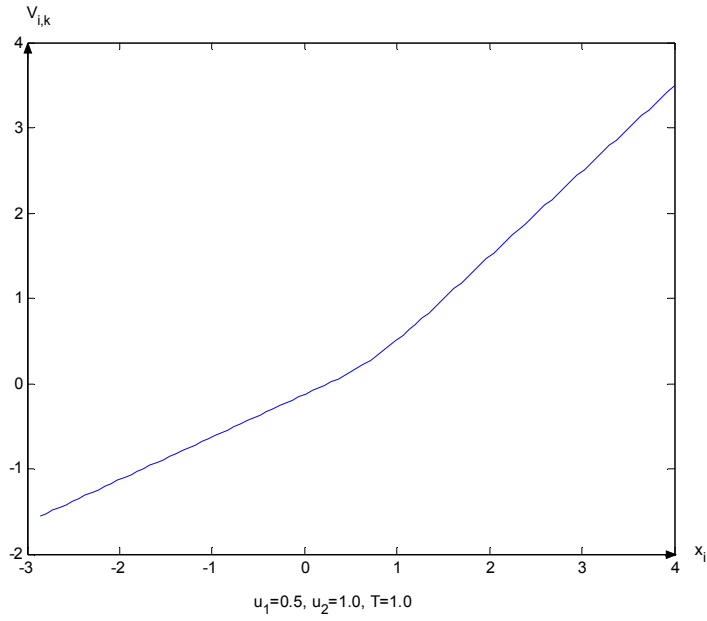
Şekil 5



Şekil 6



Şekil 7



Şekil 8

Grafiklerden görüldüğü gibi Burgers denklemi için yazılmış Cauchy probleminin nümerik çözümünün dağılım grafiği gerçek çözümle çakışıyor. Şimdi (5.1) denkleminin aşağıdaki koşul çerçevesinde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{diğer noktalarda} \end{cases} \quad (5.7)$$

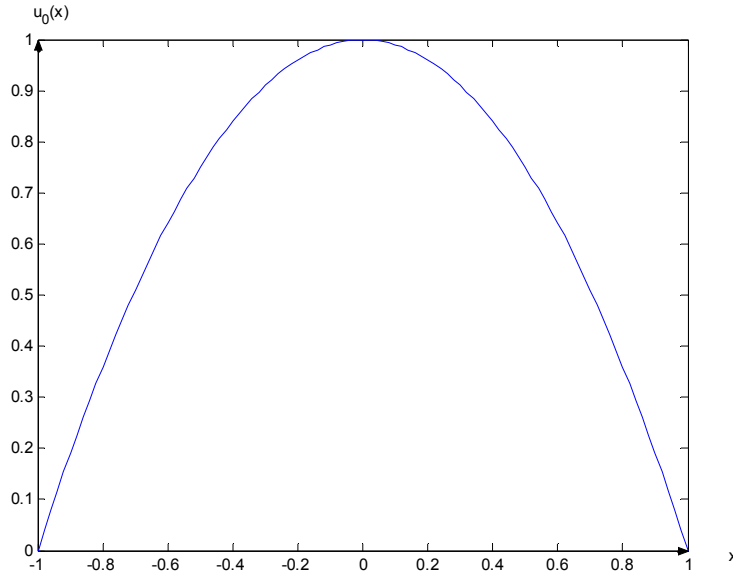
(5.1)-(5.7) problemine karşılık gelen yardımcı problemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u^2}{2} = v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.8)$$

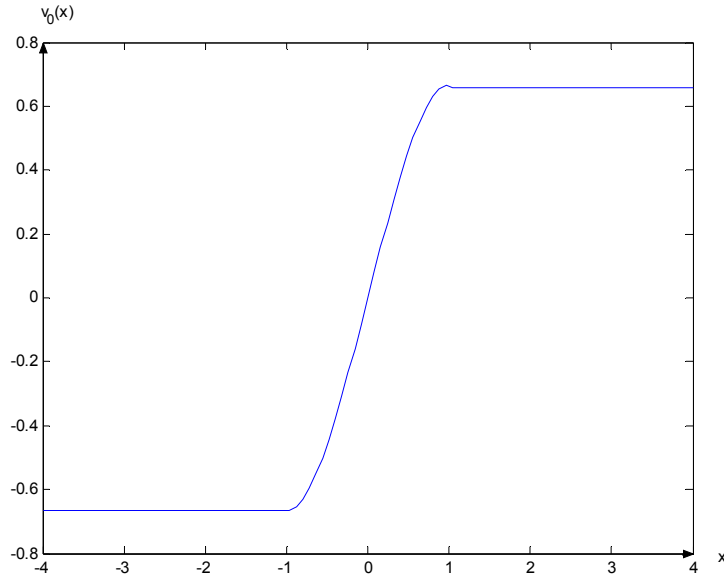
$$v_0(x) = \begin{cases} -0.66, & x < -1 \\ x - \frac{x^3}{3}, & |x| \leq 1 \\ 0.66, & x > 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

aşağıdaki gibi dahil edelim.

(5.7),(5.9) fonksiyonlarının grafikleri şekil 9 ve şekil 10 da gösterilmiştir.



Şekil 9



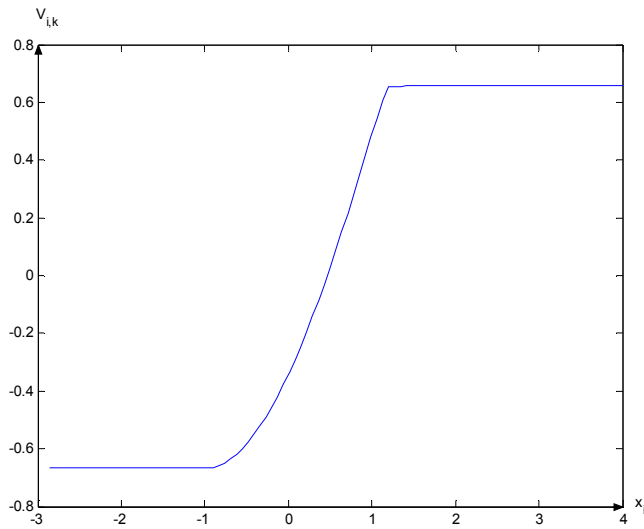
Şekil 10

(5.8),(5.9) probleminin sonlu fark karşılığı

$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} = \frac{U_{i,k}^2}{2} + \nu \left(\frac{U_{i,k} - U_{i-1,k}}{h} \right),$$

$$v_0(x_i) = \begin{cases} -0.66, & x_i < 1 \\ x_i - \frac{x_i^3}{3}, & |x_i| \leq 1 \\ 0.66, & x_i > 1 \end{cases} \quad (5.10)$$

dır. (5.5),(5.10) çözümünün grafiği ise şekil-11 de gösterilmiştir.

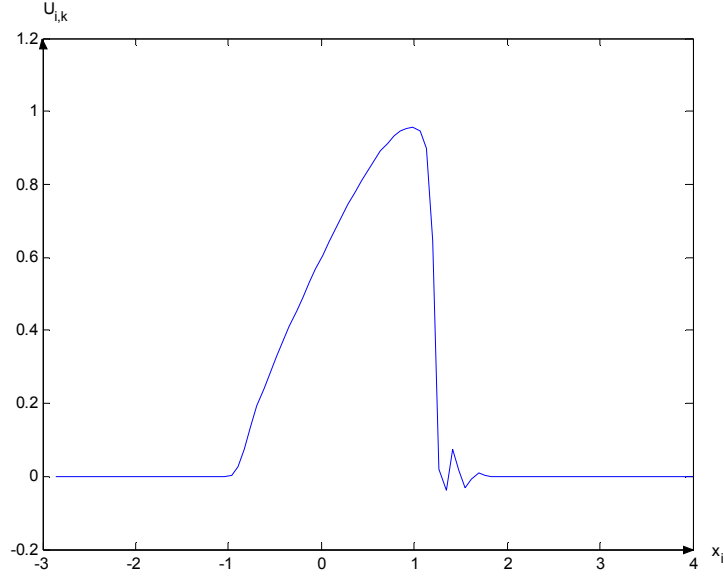


Şekil 11

Şekil-12 de ise

$$U_{i,k} = \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h}$$

formülü ile ifade edilen çözümün grafiği verilmiştir.



Şekil 12

SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralıya biliriz.

1. Burgers denkleminin süreksiz başlangıç koşulu çerçevesinde analitik çözümünün yapısı incelenmiş ve gösterilmiştir ki Burgers denkleminin çözümü başlangıçta verilmiş sıçrayışı koruyarak $\frac{dx}{dt} = \frac{u_1+u_2}{2}$ hızı ile hareket etmektedir.
2. İki kez dejenere olunan nonlinear parabolik tür denklem için yazılmış başlangıç, başlangıç sınır değer problemleri için zayıf çözümün tanımı verilmiştir.
3. Tanımlanmış zayıf çözümü elde etmek için süreksiz fonksiyonlar sınıfında sonlu farklar yöntemi önerilmiştir.
4. Nümerik çözüm için uygun fonksiyonel uzayda değerlendirmeler elde edilmiştir.
5. Suyun ve petrolün oransal faz geçirgenliğini bulmak için teorik bir yöntem önerilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Courant R. , Partial Differential Equations, New-York. London, 1962,
- [2] Sobolev S.L, Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, 1950.
- [3] Lions, J.L., Some Methods of Solutions of Nonlinear Boundary Problem. Moskow. 1972 587p
- [4] Samarskii A.,A. Theory of Difference Schemes. Moscow, Nauka, 1977.
- [5] Rasulov M.A., Sinsoysal B., Finite Differences Method for Solving of First-order Hyperbolic Type Equations with Nonconvex State Function in a class of Discontinuous Functions. In book Differential and Difference Equations and Applications, 2006, 963-969
- [6] Buckley, S.E., Leverett, M.C., Mechanism of Fluid Displacement in Sands. Trans. AIME 146, 1942, pp.107-116
- [7] Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., About One Method of the Solution of a Problem Cauchy for a Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First-Order with the Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dokl. Vol. 316, No.4, 1991, pp.777-781.
- [8] John Fritz, Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1989.
- [9] Hopf, E., The Partial Differential Equation $(u_t + uu_x = \mu u_{xx})$. Comm. Pure Applied Mathematics, 3, 1950, pp.201-230
- [10] Barenblatt, G.I. and M.I. Vishik, On the Finite Rate of Propagation of the Perturbations in Problems of Non-stationary Filtration of a Fluid and a Gas, Prikl. Mat. Mekh., 20, 1956, pp.411-417
- [11] Erdelyi. A. Asymptotic Expansions Dover Publications, Inc.1962, pp.127

ÖZGEÇMİŞ

11 Mart 1985 tarihi, İstanbul İli Bahçelievler ilçesi doğumluyum. İlkokul eğitim ve öğretimimi Bahçelievler İlköğretim Okulunda, ortaokul eğitim ve öğretimimi İstek Vakfı Bilge Kağan Lisesinde, lise eğitim ve öğretimimi ise Ataköy Cumhuriyet Lisesinde tamamladım. Daha sonra Beykent Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar bölümüne kaydoldum ve bölümümden 2009 yılında mezun oldum. Lisans eğitimimi de tamamladıktan sonra üniversitem tarafından almış olduğum eğitim-öğretimden memnun kaldığım için kendi üniversitemde yüksek lisans eğitimi almaya karar verdim ve 2009 yılında Beykent Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Ana Bilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalında yüksek lisans eğitimime başladım. Yedi yıl boyunca lisans ve yüksek lisans eğitim-öğretimim süresince beni yetiştiren bilgi birikimime sahip kılan Beykent Üniversitesine ve değerli hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

TUĞÇE AKGÜL