

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**HOPF DENKLEMİNİN SONLU FARKLARLA
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**
(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan: **Deniz GÜÇLER**

İSTANBUL, 2011

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**HOPF DENKLEMİNİN SONLU FARKLARLA
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**
(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan:

Deniz GÜÇLER

Öğrenci No:

090860001

Danışman:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2011

YEMİN METİNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum □□HOPF DENKLEMİNİN SONLU FARKLARLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ□□ başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geneleklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 31/03/2011

Aday: **Deniz GÜÇLER**

HOPF DENKLEMİNİN SONLU FARKLARLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Hazırlayan: Deniz GÜÇLER

ÖZET

Dört bölümden oluşan tezde, genelde 1. Basamaktan Nonlineer hiperbolik tür denklemler için yazılmış başlangıç, başlangıç- sınır değer problemlerinin sayısal çözümleri incelenmiştir.

Bunun için önce diferansiyel probleminin gerçek çözümleri bulunmuştur ve gerçek çözümün diferansiyelenebilme özellikleri incelenmiştir. Tespit edilmiştir ki nonlineer denklemlerin çözümleri başlangıç fonksiyon hem negatif hem pozitif eğimlere sahip olduğu taktirde, yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahiptir. Dolayısıyla problemin klasik çözümün mevcut olmadığı ispatlanmıştır.

Zayıf çözümü bulmak için esas çözümde bulunmayan avatajlara sahip, yardımcı problem önerilmiştir. Önerilen yardımcı problem, incelediğimiz diferansiyel problemin sayısal çözümünü bulmak için geniş imkanlar sağlamaktadır.

Bunaları gösterebilmemiz için tezin birinci bölümde sonlu farklar yönteminin temelleri incelenmiştir.

İkinci bölümde lineer ve lineer olmayan Hopf denkleminin sayısal çözümünün bulunması için algoritmalar geliştirilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Hopf denklemi için yazılmış başlangıç - sınır değer problemlerinin sayısal çözümü elde edilmiştir.

Tezin sonuncu bölümünde, tabakalı ortamda petrolun su ile sıkıştırılması problemini ifade eden diferansiyel problemin çözümü elde edilmiştir.

FINITE DIFFERENCES METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF HOPH EQUATION

Presented by: Deniz GÜÇLER

ABSTRACT

In this thesis in general the numerical solutions of the initial and initial-boundary value problems for the first order nonlinear hyperbolic type are investigated. For this aim, at first the exact solution of the differential problem is found and differentiable properties are studied. It is proved that, the exact solution have the points of discontinuities the locations of which unknown before, if the initial profile has both a negative and negative slopes.

Therefore the classical solution the interest us problem does not exist. In order to find the weak solution, the special auxiliary problem is introduced. The suggested auxiliary problem permits us to apply the familiar method for finding the numerical solution.

In the second part the algorithms for obtaining of the numerical solution of nonlinear Hoph equation are developed.

Later, the initial-boundary value for the Hoph equation is obtained.

Finish the process of the motion of the two phase fluids in porous medium is investigated.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
1. SONLU FARKLAR YÖNTEMİNİN TEMEL KAVRAMLARI	1
1.1 Temel Kavramlar ve Diskretleştirme	2
1.1.1 Türevin Sonlu Farklara Ayrıklaştırılması	5
1.2 Denklemlerin Sonlu Farklara Ayrıklaştırılması	10
1.2.1 Uzlaşma, Kararlılık ve Yakınsaklık	13
1.3 Kararlılık Analizi	20
2. BİR BOYUTLU DENKLEMLER İÇİN SONLU FARKLAR	26
2.1 Lineer Hopf Denklemi	28
2.1.1 Sürekli Başlangıç Koşul	29
2.1.2 Süreksiz başlangıç koşulu	33
2.2 Hopf Denklemi İçin Sonlu Farklar	36
2.2.1.Sürekli Başlangıç Koşul. Konservatif ve Konservatif Olmayan Şemalar ...	36
2.2.2.Süreksiz Başlangıç Koşul	40
3. Hopf Denklemi için Başlangıç-Sınır Değer Problemi	42
4. 1.Basamaktan Nonlinear Denklemler	44
4.1 1.Tür Yardımcı Problem	44
4.2. Başlangıç-Sınır Değer Problemi	46
4.3 Nümerik Deneyler	47
5. SONUÇLAR	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	57

Bölüm 1. Sonlu Farklar Yönteminin Temel Kavramları

Bu bölümde sonlu farklar yönteminin temel kavramları ve genel olarak verilmiş diferansiyel problemlerin sonlu farklara ayrıklaştırılma metodları incelenecektir. Bunun için önce argümanların sürekli değiştiği bölge ayrık noktalar kümesine (buna ağ denir) dönüştürülür ve sonra ele alınan problemin çözümü ağın düğüm noktalarında aranılır. Denklemin içerdiği türevler sonlu fark formülleri aracılığıyla sonlu farklara ayrıklaştırılır ve incelenen diferansiyel problem cebirsel denklemler sistemine dönüştürülür.

Elde edilen cebirsel denklemler sisteminin özellikleri, genelde diferansiyel denklemin ait olduğu türev ve sınır koşullarına bağlı kalmaktadır.

Stasyonel problemler öyle cebirsel denklemler sistemine dönüştürülür ki, sözkonusu cebirsel denklemler sistemi ağın düğüm noktalarında uygun sınır koşulları çerçevesinde direk olarak çözülebilir. Stasyonel olmayan problemlerde ise elde ettiğimiz cebirsel denklemler sistemi, iteratif yöntemler kullanılarak zaman katları üzerinde hareket edilerek çözülebilir. Bazı durumlarda ise birkaç denklemler sisteminin birlikte çözülmesine indirgenir. Diferansiyel problemleri ayrıklaştırırken aşağıdaki üç önemli noktayı dikkate almak gerekmektedir:

1. Diferansiyel problemin sonlu farklara dönüştürüldüğünde diskretleştirme (ayrıklaştırma) hatasının bulunması ve değerlendirilmesi,
 2. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin bilinen yöntemlerden biriyle çözülmesi,
 3. Yaklaşık çözümle gerçek çözüm arasındaki farkının değerlendirilmesi.
- Bahsettiğimiz bu üç hususu incelemek için bazı temel kavramları hatırlamamız gerekmektedir.

1.1 Temel Kavramlar ve Diskretleştirme

Sonlu farklar yöntemini uygulamadan önce, argümanın sürekli değiştiği bölgenin ayrıklaştırılması gerekir. Bunun için aranan çözümün tanım bölgesi ve bölgenin sınırları belirlenir ve sözkonusu bölgede diferansiyel problem yazılır.

Diskretleştirme olayını incelemeden önce, diferansiyel denklem (veya denklemler sistemi) için yazılmış problemler hakkında genel bilgi verilir.

D ile R^n Euclid uzayında sınırlı bir bölgeyi, ∂D ile sözkonusu bölgenin sınırını gösterelim. D bölgesi ve ∂D sınırlarında uygun olarak L ve l_j ($0 \leq j \leq \nu$) diferansiyel operatörlerinin verildiğini varsayalım. Ayrıca f ve g_j , ($0 \leq j \leq \nu$) sırasıyla F ve G_j uzaylarında tanımlı fonksiyonlar olsun. Burada F uzayı D 'de, G_j ise ∂D_j üzerinde kurulmuş fonksiyonel uzaylar olmaktadır.

D üzerinde kurulmuş uzayın herhangi bir elemanı için

$$Lu = f, \quad (1.1)$$

$$l_j u = g_j, \quad 0 \leq j \leq \nu \quad (1.2)$$

problemini koruyan u fonksiyonunun bulunmasına, diferansiyel problem denir.

Önemle belirtelim ki, l_j operatörleri ∂D sınırlarının tümünde veya sınırın bir kısmında dejenere olabilir, yani sifıra çevrilebilirler, veya operatörün metrebesi azalabilir. Bundan dolayı, l_j operatörlerinin sayısı ∂D sınırında koşulların nasıl verileceğine bağlı olmaktadır.

Yukarıda söylediklerimiz formel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Diferansiyel problemi çözmek, (1.1), (1.2) problemi ile tanımlanan u elemanının bulunması ve $\{F, G_j\}$ uzayının kurulması anlamına gelmektedir.

Pratikte sık raslanan birkaç problemi gözönüne alalım.

Örnek 1.1 $D \subset R^2$, sınırı ∂D olan bir bölge, $L(\cdot) = \Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$ Laplace operatörü, I_0 ise birim operatör, yani $I_0 u = u$ olsun. Bu durumda, (1.1), (1.2) problemi Poisson denklemi için yazılmış

$$\Delta u = f, \quad (1.3)$$

$$u|_{\partial D} = g \quad (1.4)$$

Dirichlet problemi olmaktadır.

(1.3), (1.4) diferansiyel problemini bu durum için aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür; f ve g fonksiyonları hangi sınıftan olmalı ki, (1.3), (1.4) probleminin tek bir çözümü olsun. Ayrıca, sözkonusu fonksiyonlarından öyle minimal şartlar talep edilmeli ki, sözkonusu koşullar pratikte mevcut olabilsin. Yani, f ve g fonksiyonlarının yüksek pürüzlüğe ve yüksek mertebeden diferansiyellenebilmeye sahip olması istenmemelidir.

$s \geq 0$ herhangi bir reel sayı olamk üzere [1] de $f \in H^s(D)$ ve $g \in H^{s+\frac{3}{2}}(\partial D)$ olduğu durumda (1.3), (1.4) probleminin $H^{s+2}(D)$ tek bir çözümü olduğu ispatlanmıştır. Sözkonusu çözümü elde ederken, kesin mertebeden türev kavramı ve bazı durumda s negatif sayı da olabilmektedir. Gerçekten de, pratikte öyle problemlerle karşılaşırız ki, g singüler fonksiyon olabilir. Örneğin, g fonksiyonu ∂D de karesi ile toplanan veya Dirac fonksiyonu olabilir. Daha detaylı bilgiler [1], [2] vs gibi kaynaklardan alınabilir.

Örnek 1.2 $D_T = \Omega \times [0, T) \subset R^3$ olsun, burada $\Omega \subset R^2$ de sınırlı bir bölge olmaktadır. Stasyoner olmayan problemlerde $L(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \Delta_x(\cdot)$ ve $I_0 = I$ olsun. Bu durumda diferansiyel problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = f, \quad D_T \text{ de} \quad (1.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \Omega \text{ da} \quad (1.6)$$

$$u|_{\partial D} = g \quad (1.7)$$

olmaktadır. (1.5)- (1.7) diferansiyel problemini çözmek için f , u_0 ve g fonksiyonları için öyle bir geniş sınıf bulmak gerekir ki, sözkonusu problemin tek bir çözümü olsun.

Şimdi diferansiyel problemi diskretleştirme tekniklerini inceleyelim. Kolaylık için

önce R^2 Euclid uzayında yazılmış problemleri gözönüne alalım. $u(x, y)$ fonksiyonu $G = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ dikdörtgen bölgede tanımlı fonksiyon olsun. Önce G bölgesinde ağ oluşturalım. Bu amaçla $[a, b]$ ve $[c, d]$ parçalarını sırasıyla $x_i, (i = 0, 1, \dots, n)$ ve $y_j, (j = 0, 1, \dots, m)$ noktaları ile n ve m parçaya bölelim.

$$\omega_{h_x} = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

ve

$$\omega_{h_y} = \{y_0 = c, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m = d\}$$

noktalar kümesini sırasıyla $[a, b]$, ve $[c, d]$ parçaları üzerinde kurulmuş bir boyutlu ağ, x_i ve y_j noktalarına ise ağın düğüm noktaları denir. x_i ve y_j noktalarından dikmeler çizelim. Bu dikmelerin kesişme noktalarını (x_i, y_j) ile gösterelim.

$$\omega_{h_x h_y} = \omega_{h_x} \times \omega_{h_y} = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in \omega_{h_x}, y_j \in \omega_{h_y}\}$$

kümesini G bölgesini örten iki boyutlu ağ denir.

Ağın iki komşu noktaları arasındaki farka, yani $x_i - x_{i-1} = h_i^x$, $(i = 0, 1, \dots, n)$ ve ya $y_j - y_{j-1} = h_j^y$, $(j = 0, 1, \dots, m)$ farklarına ağın adımı denir. Eğer $h_i^x = \text{sabit}$ ve $h_j^y = \text{sabit}$ olursa, bu tür ağlara düzgün ağ, aksi takdirde düzgün olmayan ağ denir. x_{i-1} ve x_{i+1} noktalarına x_i noktasının komşu noktaları denir. $\omega_{h_x h_y}$ ağının herbiri (x_i, y_j) düğüm noktasının dört komşusu (x_i, y_{j-1}) , (x_{i-1}, y_j) , (x_i, y_{j+1}) , ve (x_{i+1}, y_j) , olmaktadır. Eğer ağın herbiri

düğüm noktası kendi komşuları ile birlikte ağa dahilse, bu tür noktalara iç (dahili) düğüm noktaları denir. Komşularından en az bir tanesi bölgenin dışında kalırsa bu tür noktalara sınır noktaları denir ve bu noktaların kümesi $\Gamma_{h_x h_y}$ ile gösterilir. Yalnız iç noktalarından oluşan ağa açık ağ denir. Açık ağa sınır noktalarını da eklediğimizde elde edilen ağa kapalı ağ denir ve $\bar{\omega}_{h_x h_y}$ ile gösterilir, yani, $\bar{\omega}_{h_x h_y} = \omega_{h_x h_y} + \Gamma_{h_x h_y}$ dir. Böylelikle (x, y) argümanlarının sürekli değiştiği G bölgesini diskret bölge, yani $\omega_{h_x h_y}$ ağı ile örtmüş olduk. $u(x, y)$ fonksiyonunun ağın (x_i, y_j) noktasındaki değerini $u(x_i, y_j) = u_{x,j}$ ile gösterelim. $u_{x,j}$ fonksiyonuna ağ fonksiyonu denir. Sürekli $u(x, y)$ fonksiyonları için $\lim_{x \rightarrow x_i, y \rightarrow y_j} u(x, y) = u_{x,j}$ olmaktadır. Buna göre

$$u_{x,j} = u(x_i, y_j), \quad u_{x \pm 1, j} = u(x_i \pm h_x, y_j),$$

$$u_{x, j \pm 1} = u(x_i, y_j \pm h_y)$$

anlamına gelmektedir.

Diferansiyel problemi diskretleştirmek için denklemin içerdiği türevlerin de sonlu fark karşılığını yazmak gerekmektedir.

1.1.1 Türevin Sonlu Farklara Ayırıklaştırılması

Türevlerin sonlu fark karşılığını yazmadan önce onun

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{u(x_i + h_x, y_j) - u(x_i, y_j)}{h_x} = \frac{u(x_i + h_x, y_j) - u(x_i, y_j)}{h_x} + \varepsilon_{i,j}$$

(1.8)

tanımını hatırlatalım. Burada $\varepsilon_{i,j}$ ayırıklaştırma hatası gösterebilir. Ayırıklaştırma hatasını değerlendirmek için $u(x_i + h_x, y_j)$ fonksiyonunun (x_i, y_j) noktası civarında

$$u(x_i + h_x, y_j) = u(x_i, y_j) + \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} h_x + \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \frac{h_x^2}{2!} + Hata$$

Taylor serisine ayırıklaştıralım. Buradaki “Hata” kavramını $O(\varphi)$ sembolü ile değerlendireceğimiz için öncelikle $O(\varphi)$ sembolünün matematiksel anlamını ve bazı özelliklerini hatırlayalım.

$\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları herhangi bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olsun. U ile D bölgesinde dahil olan herhangi bir x_0 noktasının komşuluğunu gösterelim. Eğer herhangi bir $x \in U \cup D$ noktası için $|\varphi(x)| \leq A|\psi(x)|$ eşitsizliği korunuyorsa, bu $\varphi = O(\psi)$ ile gösterilebilir. Burada A sabiti x e bağlı değildir. Benzer yolla o noktasyonunu da tanımlayalım. x_0 noktasının $\varepsilon > 0$ civarını U_ε ile gösterelim. $U_\varepsilon \cup D$ bölgesindeki herhangi bir x için $|\varphi(x)| \leq \varepsilon|\psi(x)|$ olursa, bu da $\varphi = o(\psi)$ olarak yazılabilir.

Not 1 : Eğer $\psi(x)$ fonksiyonu D de sıfırdan farkıysa yukarıda söylediğimiz kavramlar şöyle ifade edilebilir. $\varphi = O(\psi)$ ise, $\forall x \in D$ için $\frac{\varphi}{\psi}$ sınırlı olmaktadır.

O ve o sembollerine mertebe ilişkileri denir ve aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

$$O(O(\varphi)) = O(\varphi),$$

$$O(\varphi)O(\psi) = O(\varphi\psi),$$

$$O(\varphi) + O(\varphi) = O(\varphi) + o(\varphi) = O(\varphi),$$

$$O(o(\varphi)) = o(O(\varphi)) = o(o(\varphi)) = o(\varphi),$$

$$O(\varphi)o(\varphi) = o(\varphi)o(\varphi) = o(\varphi)$$

$$o(\varphi) + o(\varphi) = o(\varphi)$$

bu noktasyonları dikkate alarak sonuncu eşitliği

$$u(x_i + h_x, y_j) = u(x_i, y_j) + \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} h_x + \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \frac{h_x^2}{2!} + O(h_x^2) \quad (1.9)$$

olarak da yazabiliriz. (1.9) eşitliğindeki $O(h)$ şeklindeki ifade hata hakkında hiçbir bilgi vermemektedir. Sadece sözkonusu hatanın $h_x \rightarrow 0$ takdirde sıfıra yaklaştığını gösterir.

Şimdi (1.8) ifadesindeki hatanın mertebesini (derecesini) bulalım. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

in sınırlı olduğunu varsayarak (1.9) ifadesinden

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_j)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{h_x}{2} + O(h_x) \quad (1.10)$$

elde ederiz. (1.8) ifadesine $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevinin “ileri” veya “sağ” fark karşılığı denir.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ türevinin birkaç sonlu fark karşılığını yazmak mümkündür. Örneğin, $u(x_i - h_x, y_j)$ fonksiyonunu

$$u(x_i - h_x, y_j) = u(x_i, y_j) - \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} h_x + \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \frac{h_x^2}{2!} + O(h_x^3) \quad (1.11)$$

şekilde Taylor serisine açarsak,

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} + O(h_x) \quad (1.12)$$

alırız. (1.12) ifadesine $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevinin “geriye” veya “sol” sonlu fark karşılığı denir. (1.10) ve (1.12) formüllerinden görüldüğü gibi $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevi için sağ veya sol sonlu fark karşılıklarının ayrıklaştırma hatasının derecesi birinci mertebeden olmaktadır. $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevini başka bir yolla da sonlu farka ayrıklaştırmak mümkündür. (1.9) ve (1.11) ifadelerini bir birinden çıkarırsak

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} - \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{h_x^2}{3!} + O(h_x^4) \quad (1.13)$$

elde ederiz. (1.13) sonlu fark karşılığına “merkezi” sonlu fark denir. Görüldüğü gibi, merkezi sonlu fark karşılığında ayrıklaştırma hatasının derecesi iki olmaktadır.

Eğer, (1.9) ve (1.11) ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$\frac{\partial u^2(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x^2} + O(h_x^2) \quad (1.14)$$

alırız. (1.14) ifadesi $\frac{\partial u^2}{\partial x^2}$ türevinin sonlu fark karşılığı olmaktadır. Türevlerin sonlu farka ayrıklaştırması durumunda kullanılan düğüm noktalarına “şablon” denir.

Aşağıda bazı türevlerin sonlu fark karşılığı verilmiştir. Yazının sade ve kompakt olması için aşağıdaki noktasyonları kabul edelim.

1. Birinci basamaktan kısmi türevler

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(i,j)} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} + O(h_x) = u_{\dot{x}} + O(h_x),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(i,j)} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} + O(h_x) = u_{\bar{x}} + O(h_x),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(i,j)} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + O(h_x) = u_{\dot{x}} + O(h_x^2),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(i,j)} = \frac{-3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2h_x} + O(h_x^2),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(i,j)} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2h_x} + O(h_x^2),$$

2. İkinci basamaktan türevler

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{h_x^2} + O(h_x^2) = u_{\ddot{x}} + O(h_x^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h_x^2} + O(h_x^2) = u_{\ddot{x}} + O(h_x^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + O(h_x^2) = u_{\ddot{x}} + O(h_x^2)$$

Üçten fazla düğüm noktası kullanılarak ayrıklaştırılan bazı türevler

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{(i,j)} &= \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2h_x^3} + O(h_x^2), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(i,j)} &= \frac{-u_{i+3,j} + 4u_{i+2,j} - 5u_{i+1,j} + 2u_{i,j}}{h_x^2} + O(h_x^2), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(i,j)} &= \frac{2u_{i,j} - 5u_{i-1,j} + 4u_{i-2,j} - u_{i-3,j}}{h_x^2} + O(h_x^2), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(i,j)} &= \frac{-u_{i+2,j} + 8u_{i+1,j} - 8u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h_x^2} + O(h_x^4), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(i,j)} &= \frac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{h_x^2} + O(h_x^4),\end{aligned}$$

3. İkinci basamaktan karışık türevler

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(i,j)} &= \frac{1}{h_x} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}}{h_y} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y} \right) + O(h_x, h_y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(i,j)} &= \frac{1}{h_x} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} - \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}}{h_y} \right) + O(h_x, h_y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(i,j)} &= \frac{1}{h_x} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y} - \frac{u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}}{h_y} \right) + O(h_x, h_y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(i,j)} &= \frac{1}{h_x} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{h_y} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} \right) + O(h_x, h_y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(i,j)} &= \frac{1}{h_x} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2h_y} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} \right) + O(h_x, h_y^2), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(i,j)} &= \frac{1}{h_x} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} - \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2h_y} \right) + O(h_x, h_y^2),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(i,j)} = \frac{1}{2h_x} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2h_y} - \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2h_y} \right) + O(h_x^2, h_y^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(i,j)} = \frac{1}{2h_x} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{2h_y} - \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}}{2h_y} \right) + O(h_x^2, h_y^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(i,j)} = \frac{1}{2h_x} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}}{2h_y} - \frac{u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}}{2h_y} \right) + O(h_x^2, h_y^2),$$

1.2 Denklemlerin Sonlu Farklara Ayrıklaştırılması

Bu bölümde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sonlu fark karşılıklarını irdedeceğiz. Stasyonery olmayan süreçleri ifade edebilen kısmi türevli diferansiyel denklemlerde değişkenlerden birini zaman değişkeni oluşturmaktadır. Bu değişkeni özel olarak t ile gösterelim. Zamana göre değişmez kalan süreçlere “stasyonery” süreçler denir. Zamana göre değişken süreçlere ise “stasyonery olmayan” süreçler denir. Şimdi $D_T = \{[a, b] \times [0, T]\}$ bölgesinde yazılmış

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.15)$$

lineer ısı denklemini gözönüne alalım, burada α bilinen pozitif sabit olmaktadır. D_T bölgesi

$$\omega_{h_x, h_y} = \{(x_i, t_k), x_i = a + ih_x, t_k = kh_t, h_x > 0, h_t > 0, i = 0, 1, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots\}$$

ağı ile örtelim. $t = t_k$ doğrularına zaman katları denir.

(1.15) denklemini oluşturan $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevini ileri, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevini ise merkezi sonlu farklara ayırklaştırsak,

$$\frac{U_{i,k+1} + U_{i,k}}{h_t} = \frac{\alpha}{h_x^2} (U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}) \quad (1.16)$$

elde ederiz.

Böylelikle (1.15) denklemini (1.16) cebirsel denklemler sistemine dönüştürmüş oluruz. Elde edilen cebirsel denklemler sisteminin özeliğini, (1.15) denklemini oluşturan diferansiyel operatörün yapısı ve denlemin hangi şablonda sonlu farklara ayrıklaştırıldığı belirler. Burada, $U_{i,k}$ ağ fonksiyonu $u(x,t)$ fonksiyonunun (x_i, t_k) noktasındaki yaklaşık değerini göstermektedir. Görüldüğü gibi, (1.16) cebirsel denklemler sisteminden bilinmeyen

$$U_{i,k+1} = (U_{1,k+1}, U_{2,k+1}, U_{3,k+1}, \dots, U_{n-1,k+1})$$

ağ fonksiyonunun çözümün $t = t_k$ katlarındaki değerlerine göre

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} + \alpha \frac{h_t}{h_x^2} (U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}) \quad (1.17)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

olarak açık şekilde bulabiliriz. Sözkonusu cebirsel denklemler sisteminin her bir denkleminde bir tane bilinmeyen bulunmaktadır. (1.16) sonlu fark karşılığına “açık” sonlu fark karşılığı veya açık şema denir. (1.15) lineer ısı denklemini olduğundan, başlangıç verileri kullanılarak (1.16) formülü ile bilinmeyen $U_{i,k+1}$ fonksiyonlarını elde ederiz.

Şimdi de (1.15) denkleminin aşağıdaki gibi sonlu farklara

$$\frac{U_{i,k+1} + U_{i,k}}{h_t} = \frac{\alpha}{h_x^2} (U_{i+1,k+1} - 2U_{i,k+1} + U_{i-1,k+1}) \quad (1.18)$$

ayrıklaştıralım. (1.18) cebirsel denklemler sistemini

$$a_i U_{i+1,k+1} - b_i U_{i,k+1} + c_i U_{i-1,k+1} = f_i \quad (1.19)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$a_i = c_i = \alpha \frac{h_t}{h_x^2}, \quad b_i = \left(1 + 2 \frac{h_t}{h_x^2} \right), \quad f_i = -U_{i,k}$$

olmaktadır.

(1.19) dan görüldüğü gibi cebirsel denklemler sisteminin herbir denkleminde üç tane bilinmeyen olmaktadır ve sözkonusu bilinmeyenleri elde etmek için bir yöntem uygulanmak zorundadır. (1.18) cinsinden olan sonlu fark karşılığına “kapalı” sonlu fark karşılığı denir.

Şimdi (1.15) denklemini sonlu farklara ayrıklaştırdığımızdaki hataları hesaplayalım. Bu hatalara kesme hataları da denir.

Önce açık şemanın hatasını bulalım. Bu amaçla (1.16) sistemine dahil olan $U_{i,k+1} = U(x_i, t_k + h_t)$ ve $U_{i\pm 1,k} = U(x_i \pm h_x, t_k)$ fonksiyonlarını Taylor serisine ayrıklaştırır ve alınan ifadeleri (1.16) da yerine yazarsak

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} - \left\{ \frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{h_t} - \frac{\alpha}{h_x^2} (U_{i-1,k} - 2U_{i,k} + U_{i+1,k}) \right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(i,k)} \frac{h_t}{2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(i,k)} \frac{h_x^2}{12} + \dots \quad (1.20)$$

elde ederiz. Burada, 1. ve 2. parantezler sırasıyla verilmiş diferansiyel denklemini ve onun sonlu fark karşılığını, eşitliğin sağ tarafındaki ifade ise kesme veya ayrıklaştırma hatasını göstermektedir

Görüldüğü gibi kesme hatasını bulurken uygun fonksiyonların Taylor serilerinin ilk terimlerini kullandık. Bu nedenle (1.20) deki hata teriminin derecesi $O(h_t, h_x^2)$ mertebeden olmaktadır. Eğer, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ve $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ sınırlı fonksiyonlar ise ağırlık adımları sıfıra yaklaştığında hata terimi de sıfıra yaklaşır. Açık olmayan şemalar için de kesme hatası benzer yolla hesaplanabilir.

Diferansiyel denlemleri sonlu farklara ayrıklaştırdığımızda kesme hatasının yeteri kadar küçük olduğunu varsayalım. Bu ilk bakışta hiçbir sorun yaratmamaktadır. Fakat kesme hatasının küçük olması için hangi koşulların gerektiğini incelemek zorunluluğunu ortaya çıkar. Bu sorulara cevap vermek için aşağıdaki kavramları inceleyelim.

1.2.1 Uzlaşma, Kararlılık ve Yakınsaklık

Kısmi türevli diferansiyel denklemlere yaklaşan sonlu fark karşılığına uzlaşma şema denir. Yukardaki bölümde görüldüğü gibi, diferansiyel denklem ile onun sonlu fark karşılığı arasındaki fark yakınsaklık hatasını oluşturur. Sonlu fark karşılığının uzlaşabilen olması için ağın adımları sıfıra yaklaştığı takdirde yakınsaklık hatasının sıfıra yaklaşması gerekmektedir. Eğer ayrıklaşma hatası $O(h_t)$, $O(h_x)$ mertebedense, sonlu fark karşılığı uzlaşan olur. Yakınsaklık hatası $o\left(\frac{h_t}{h_x}\right)$ mertebeden olduğu takdirde sonlu fark karşılığının uzlaşabilen olması için ağın adımlarının sıfıra yaklaşması ile birlikte $\frac{h_t}{h_x} \rightarrow 0$ olması da gerekmektedir.

Yukarıda söylediklerimizi detaylı şekilde göstermek için DuFort ve Frankel tarafından ısı dağılım denklemi için önerilmiş

$$\frac{U_{i,k+1} + U_{i,k-1}}{2h_t} = \alpha \frac{U_{i+1,k} - U_{i,k+1} - U_{i,k-1} + U_{i-1,k}}{h_x^2} \quad (1.21)$$

sonlu fark karşılığını gözönüne alalım. (1.21) sonlu fark karşılığı (1.17) şemasında $2U_{i,k}$ nın yerine $U_{i,k+1} + U_{i,k-1}$ ifadesinin yazılmasıyla elde edilmiştir. (1.21) sonlu fark karşılığının ayrıklaştırma hatası

$$\begin{aligned} & \frac{U_{i,k+1} + U_{i,k-1}}{2h_t} - \alpha \frac{U_{i+1,k} - U_{i,k+1} - U_{i,k-1} + U_{i-1,k}}{h_x^2} = \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{(i,k)} \alpha \left(\frac{h_t}{h_x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ & O(h_t^2 + h_x^2) + O\left(\frac{h_t^2}{h_x^2}\right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

olmaktadır. Şemanın uzlaşabilen olması için h_x , $h_t \rightarrow 0$ koşulunun yanı sıra $\frac{h_t}{h_x} \rightarrow 0$ koşulunun korunması da gerekmektedir. Eğer $\frac{h_t}{h_x} \rightarrow \beta$ olursa, (β - sabit sayı) (1.22)

sonlu fark karşılığı ısı denkleminde değil

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \beta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

denkleminle uzlaşır.

Stasyoner problemlerin çözüm yöntemlerinden farklı olarak stasyoner olmayan problemlerin çözümünü elde etme sürecinde herhangi bir zaman katından diğer zaman katına geçerek belli bir hata ortaya çıkar. Bu açıdan her bir zaman katında elde edilmiş çözümün kararlılığını ciddi şekilde kontrol etmek gerekir.

Eğer zaman değişkenine göre olan herhangi bir hata (yuvarlama hatası, ayrıklaştırma hatası v.s.) bir zaman katından diğerine geçerek artmazsa, bu tür şemaya kararlı veya dayanıklı şema denir.

Sonlu fark karşılığının kararlılığını sağlamak, onun uzlaşan olmasını sağlamaktan daha zordur ve daha titiz araştırmalar talep eder. Şemanın uzlaşan olduğunu kontrol etmek çok da zor değildir. Gerçekten de, yazılan sonlu fark karşılıkları gözönüne alınan denklemin ayrıklaştırdığından bir kural olarak uzlaşma koşulu otomatik sağlanır. Şemanın dayanıklılığı ise daha hassas özellik olduğundan onu ciddi teorik yolla ispatlamak gerekmektedir.

Sonlu fark karşılığının tanımını vermeden önce stasyoner olmayan problemi gözönüne alalım. Problemin başlangıç verilerinin k . katta verildiğini ve problemin çözümünün $(k+1)$. katta bulunmasının talep edildiğini varsayalım. Eğer, verilmiş diferansiyel problemin sonlu fark karşılığını ifade eden operatörü bir “kara kutu” gibi yorumlarsak söylediklerimizi formel olarak yukardaki gibi ifade edebiliriz. Böyle olduğu takdirde kararlılık teorisi, sonlu fark operatörünün k . kattaki verilerin $(k+1)$. kata geçtiği zaman nasıl değiştiğini inceleyen metotlardan oluşur.

Sonlu fark karşılığının dayanıklılığını incelemek için (1.1), (1.2) problemin vektörel şeklinde

$$\mathfrak{R}u = \Phi \tag{1.23}$$

yazalım. Burada,

$$\mathfrak{R}u = \begin{cases} Lu, & D \text{ de} \\ l_j u, & \partial D \text{ de} \end{cases}$$

ve

$$\Phi = \begin{cases} f, \\ g_j, \end{cases}$$

olmaktadır.

Stasyonere olmayan problemleri incelerken Banach uzayının bazı kavramlarını kullanarak problemi somut şekilde yazalım. B ile Banach uzayını gösterelim ve B de aşağıdaki problemi

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Lu, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

gözönüne alalım. Burada, $u(t)$ bir parametreye bağlı fonksiyon ailesi, L bir lineer diferansiyel operatör, u_0 ise sistemin başlangıç durumunu göstermektedir.

$$L_{h_t, h_x} U_{h_t, h_x} = \Phi_{h_t, h_x} \quad (1.24)$$

ifadesinin (1.23) probleminin ω_{h_t, h_x} ağındaki sonlu fark karşılıklarının kurulması ile sonraki bölümlerde uğraşacağız. Şimdilik burada formel sonlu fark karşılığı kastedilmektedir. Genel olarak, (1.23) eşitliğini net olarak koruyan $[u]_{h_t, h_x}$ ağ fonksiyonunu seçmek mümkün olmamaktadır. Söz konusu

$[u]_{h_t, h_x}$ ağ fonksiyonunu (1.23) de yerine yazarak

$$L_{h_t, h_x} [u]_{h_t, h_x} = \Phi_{h_t, h_x} + \delta\Phi_{h_t, h_x} \quad (1.25)$$

denklemini elde ederiz.

Eğer $h_x, h_t \rightarrow 0$ iken $\delta\Phi_{h_t, h_x} \rightarrow 0$ ise L_{h_t, h_x} fark operatörünü L diferansiyel operatörüne yaklaşıır. Bu taktirde $[u]_{h_t, h_x}$ ağ fonksiyonunun

koruduğu (1.25) denklemi (1.23) denklemine Φ_{h,h_x} fonksiyonunun üzerine $\delta\Phi_{h,h_x}$ küçük değişmesini eklemekle elde edilmektedir. Böylelikle, (1.24) probleminin u_{h,h_x} çözümü Φ_{h,h_x} fonksiyonunun herhangi bir küçük değişmesine göre dayanıklı kalırsa ve $h_x, h_t \rightarrow 0$ iken $\delta\Phi_{h,h_x} \rightarrow 0$ oluyorsa u_{h,h_x} fonksiyonu da $[u]_{h,h_x}$ fonksiyonuna yaklaşır, yani U_{h,h_x} yaklaşık çözümü $[u]_{h,h_x}$ gerçek çözümüne yaklaşır. Böylece $U_{h,h_x} \rightarrow [u]_{h,h_x}$ olur.

Örnek 1.3 (Dayanıklı Şema, [3])

Gerçek çözümü $u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$ olan adi diferansiyel denklem için yazılmış

$$u' = -\alpha u, \quad u(0) = u_0, \quad \alpha > 0$$

Chauchy problemini gözönüne alalım ve onu

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_x} = -\alpha y_i, \quad (i = 1, 2, \dots), \quad y_0 = u_0 \quad (1.26)$$

şeklindeki sonlu farklara ayırklaştıralım. Burada y_i yaklaşık çözümü göstermektedir. (1.26) denklemden $y_i(1 + \alpha h_x) = y_{i-1}$ veya $y_i = s y_{i-1} = s^i y_0$ elde ederiz, burada $s = \frac{1}{1 + \alpha h_x}$ olmaktadır. Sonuncu ifadeyi, $s < 1$ olduğunu dikkate alarak, $\ln s = -\ln(1 + \alpha h_x) = -\alpha h_x + O(h_x^2) = -h_x(\alpha + O(h_x))$, veya $s = e^{-h_x(\alpha + O(h_x))}$ şeklinde yazabiliriz. Herhangi bir \bar{x} noktasını gözönüne alalım. \bar{x} nın ağıın adımı $h_x \rightarrow 0$ olduğundan herhangi bir düğüm noktasına yaklaştığımızı varsayalım. Söz konusu düğüm noktasının numarası $i = \frac{\bar{x}}{h_x}$ olsun. Bu taktirde

$$y_i = s^i y_0 = y_0 e^{-h_x(\alpha + O(h_x)) \frac{\bar{x}}{h_x}} = y_0 e^{-\alpha \bar{x} + O(h_x)} = y_0 (e^{-\alpha \bar{x}} + O(h_x))$$

olacağı açıktır. Bu ifadeden görüldüğü gibi yaklaşık çözüm gerçek çözüme yaklaşır ve dolayısıyla (1.26) dayanıklı şema olur.

Şimdi gözönüne aldığımız problemi

$$\sigma \frac{y_i - y_{i-1}}{h_x} + (1 - \sigma) \frac{y_{i+1} - y_i}{h_x} + \alpha y_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.27)$$

şeklinde sonlu farklara ayrıştırılalım. Burada $\sigma \neq 1$ keyfi bir sayıdır. (1.27) üç noktalı şema olduğu için y nin değerini

$$y_0 = u_0, \quad y_1 = \bar{u}_0$$

gibi iki noktadan vermek gerekir. (1.27) yi

$$(\sigma - 1)y_{i+1} - (2\sigma - 1 + \alpha h_x)y_i + \sigma y_{i-1} = 0 \quad (1.28)$$

şeklinde yazabiliriz. (1.28) in çözümünü $y_i = s^i$ şeklinde arayalım. Bu takdirde,

$$(\sigma - 1)s^{i+1} - ((2\sigma - 1) + \alpha h_x)s^i + \sigma s^{i-1} = 0$$

olup, buradan

$$(\sigma - 1)s^2 - ((2\sigma - 1) + \alpha h_x)s + \sigma = 0$$

alırız. Denklemin diskriminantını

$$\Delta = ((2\sigma - 1) + \alpha h_x)^2 - 4\sigma(\sigma - 1) =$$

$$1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h_x + \alpha^2 h_x^2 = 1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h_x + O(h_x^2)$$

olarak buluruz. Buradan da

$$\sqrt{\Delta} = 1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h_x + O(h_x^2)$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz ifadeleri dikkate alarak kare denklemin köklerini

$$s_1 = \frac{\sigma}{\sigma - 1} (1 + \alpha h_x + O(h_x^2))$$

ve

$$s_2 = 1 - \alpha h_x + O(h_x^2)$$

şeklinde buluruz. O halde, (1.28) denkleminin genel çözümü

$$y_i = A s_1^i + B s_2^i \quad (1.29)$$

biçimindedir. Burada bilinmeyen A ve B sabitleri başlangıç koşullarından elde edilir. $\ln(1 \pm \alpha h_x) = \pm h_x (\alpha + O(h_x))$ ve

$$s_1 = \frac{\sigma}{\sigma-1} e^{h_x(\alpha+O(h_x))}, \quad s_2 = e^{-h_x(\alpha+O(h_x))}$$

olduğundan problemin çözümünü

$$y_i = A \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right)^{\frac{\bar{x}}{h_x}} e^{\bar{x}(\alpha+O(h_x))} + B e^{-\bar{x}(\alpha+O(h_x))} \quad (1.30)$$

olarak yazabiliriz. (1.30) formülünden görüldüğü gibi $\sigma > 1$ olursa, $\frac{\sigma}{\sigma-1} > 1$ ve $A \neq 0$ olduğunda $y_i \rightarrow \infty$ olmaktadır.

A karsayısı başlangıç verilerine bağımlı olduğundan sözkonusu başlangıç verileri $A = 0$ olacak şekilde seçilebilir. Fakat başlangıç verilerin yuvarlama hatası sonucu azıcık değişmesiyle $A \neq 0$ olabilir ve bu durumda da çözüm sonsuzluğa yaklaşır. Böylelikle, (1.27) sonlu fark karşılığı dayanıksız olmakta ve önerilen algoritma hesaplama işlemleri için yararsız olmaktadır. Örnekten de görüldüğü gibi yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaması için sonlu fark karşılığının da diferansiyel probleme yaklaşması yeterli şart olmamaktadır. Ek olarak sonlu fark karşılığının dayanıklı olması da gerekmektedir. Şimdi dayanıklılığın tanımını verelim.

Tanım 1.1 Herhangi bir $f_{h,h_x} \in F_{h_x}$ için $\mathfrak{I}_{h,h_x} U_{h,h_x} = f_{h,h_x}$ denkelminin U_{h,h_x} uzayında tek bir çözümü varsa ve

$$\|U_{h,h_x}\|_{U_{h,h_x}} \leq c \|f_{h,h_x}\|_{F_{h_x}} \quad (1.31)$$

bağıntısı korunursa, $\mathfrak{I}_{h,h_x} U_{h,h_x} = f_{h,h_x}$ sonlu fark karşılığına dayanıklı şema denir.

Burada c , ağın adımlarına bağılı olmayan bir sabittir.

Lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler için P.Lax tarafından önerilen ifade edelim.

Teorem 1.1 (Lax) Düzgün yazılmış lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için önerilmiş sonlu fark karşılığının yakınsaklığı için gerek ve yeter koşul sonlu farklar şemasının uzlaşan ve dayanıklı olmasıdır.

Hatırlatalım ki, Lax teoremi nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler için ispatlanmamıştır. Yukarıda söylediklerimizi daha matematiksel bir dille ifade edebilmek için (1.31) e bir anlam vermek gerekir. Bunun için ω_{h_x, h_t} ağı üzerinde normlandırılmış ağ fonksiyonları uzayını gözönüne alalım ve sözkonusu uzayı U_{h_x, h_t} ile gösterelim.

Herhangi bir $u_{h_x, h_t} \in U_{h_x, h_t}$ elemanı için, u_{h_x, h_t} fonksiyonunu mutlak sıfırdan fakını gösteren, negatif olamayan $\|u_{h_x, h_t}\|_{U_{h_x, h_t}}$ sayısına ağ fonksiyonunun normu denir.

Sonlu boyutlu uzaylarda çalıştığımız için çeşitli normları kullanacağız. Örneğin, norm olarak

$$\|u_{h_x, h_t}\|_{U_{h_x, h_t}} = \sup_{(i,k)} |u_{h_x, h_t}(x_i, t_k)|, \quad (1.32)$$

$$\|u_{h_x, h_t}\|_{U_{h_x, h_t}} = \left(h \sum_{i=0}^N |u_i|^2 \right)^{1/2} \quad (1.33)$$

ifadeleri gözönüne alalım. (1.32) ve (1.33) formülleri ile ifade edilen normlar D bölgesinde tanımlanan $\max_{(x,t)} |u(x,t)|$ ve $(\int_D u^2(x,t) dx dt)^{1/2}$ normlarının sonlu fark karşılıkları olmaktadır.

Lineer normlaştırılmış U_{h_x, h_t} uzayı dahil edildikten sonra artık biz bir ağ fonksiyonunun diğerlerinden nasıl farklı olduğunu gösterebiliriz. Eğer a_{h_x} ve b_{h_x} ağ fonksiyonları U_{h_x, h_t} nin iki farklı elemanıysa $\|a_{h_x} - b_{h_x}\|$ sözkonusu elemanların birbirinden ne kadar mesafede yerleştiğini göstermektedir.

Şimdi U_{h_x, h_t} yaklaşık çözümünün $[u]_{h_x, h_t}$ gerçek çözümüne yakınsaklığının tanımını verebiliriz.

Tanım 1.2 Eğer ağın h_x ve h_t adımları sıfıra yaklaştığında

$$\|[u]_{h_x, h_t} - U_{h_x, h_t}\|_{U_{h_x, h_t}} \rightarrow 0 \quad (1.34)$$

koşulu korunursa, U_{h_x, h_t} yaklaşık çözümü $[u]_{h_x, h_t}$ gerçek çözümüne yaklaşır.

$$\|u_{h_x, h_t} - U_{h_x, h_t}\|_{U_{h_x, h_t}} \leq ch^k \quad (1.35)$$

eşitsizliğinin korunduğu durumda ise yakınsaklık hızı h^k mertebededir denir. Burada c ve k ağın adımlarına bağlı olmayan sabitlerdir.

Şimdi yakınsaklık hatasını daha net bir matematiksel dille ifade edelim.

Tanım 1.3 $\|\delta\Phi_{h_x, h_t}\| \rightarrow 0$ koşulu koruduğu takdirde, $\mathfrak{R}_{h_x, h_t} U_{h_x, h_t} = \Phi_{h_x, h_t}$ sonlu fark karşılığı $\mathfrak{I}U = \Phi$ problemine yaklaşır denir.

Eğer $\|\delta\Phi_{h_x, h_t}\| \leq ch^k$ ise \mathfrak{R}_{h_x, h_t} fark operatörü \mathfrak{R} diferansiyel operatörüne h^k mertebeden yaklaşır.

1.3 Kararlılık Analizi

$$Lu \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (1.36)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.37)$$

problemini gözönüne alalım. (1.36), (1.37) probleminin gerçek çözümünün $u(x, t) = \varphi(x - at)$ olduğu açıktır.

ω_{h_x, h_t} ağının herhangi bir (i, k) noktasında $Lu = 0$ denkleminin herhangi bir sonlu fark karşılığı

$$L_{n_x} u_h \Big|_{(i, k)} = \sum_{m, n} a_{m, n} u_{i+m}^{k+n} = 0 \quad (1.38)$$

olsun.

Tanım 1.4 $u \in l_2$ fonksiyonunun diskret Fourier dönüşümü

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\xi} u_m \quad (1.39)$$

eşitliğiyle tanımlanan \hat{u} fonksiyonuna denir.

Burada $I = \sqrt{-1}$ ve $\xi \in [0, \pi]$ dir.

Tanım 1.5 Eğer $u \in l_2$ ve \hat{u} fonksiyonu u nun diskret Fourier dönüşümü ise,

$$u_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Im\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \quad (1.40)$$

olmaktadır.

(1.40) eşitliğine ters diskret Fourier dönüşümü denir.

Önerme 1.1 Eğer $u \in l_2$ ve \hat{u} fonksiyonu u nun diskret Fourier dönüşümü ise,

$$\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2 \quad (1.41)$$

olmaktadır. Buradaki birinci norm $L_2[-\pi, \pi]$ anlamındadır, ikinci norm ise l_2 anlamında norm olmaktadır.

İspat (1.40) daki ifadenin doğruluğunu sade hesaplamalar yardımı ile

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Im\xi} \hat{u}(\xi) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Ik\xi} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{Im\xi} u_m d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{I(k-m)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty, m \neq k}^{\infty} u_m \left[\frac{e^{I(k-m)\xi}}{I(k-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} u_k \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty, m \neq k}^{\infty} u_m \frac{1}{I(k-m)} \left[e^{I(k-m)\pi} - e^{-I(k-m)\pi} \right] + u_k = u_k \end{aligned}$$

şeklinde gösterebiliriz. Benzer yolla (1.41) deki Parseval eşitliğini de ispatlayalım.

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{u}|^2 d\xi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{|\hat{u}(\xi)|} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-Im\xi} u_m d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{-Im\xi} \overline{\hat{u}(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{Im\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m \overline{u_m} = \|u\|_2^2
\end{aligned}$$

Diskret Fourier dönüşümü ve Parseval özdeşliği sonlu fark karşılıklarının kararlılık analizi yapılırken temel araç olmaktadır.

Not 2 Yazıda kolaylığı sağlayabilmemiz için $u_{i,k+1} = u_i^{k+1}$ olarak da kullanacağız.

Sonlu fark şemalarının kararlılığı diğer yolla da tanımlanabilir.

Tanım 1.6 Pozitif Δx_0 ve Δt_0 ile negatif olmayan K ve β sayıları için iki seviyeli sonlu fark karşılığı

$$u_i^{k+1} = \Lambda u_i^k \quad (1.42)$$

$0 \leq t = (k+1)\Delta t$ ve $0 < \Delta x \leq x_0$ için

$$\|u^{k+1}\| \leq K e^{\beta t} \|u^0\| \quad (1.43)$$

eşitsizliğini sağladığı takdirde (1.38) sonlu fark şeması $\|\cdot\|$ normuna göre dayanıklıdır denir.

Önerme 1.2 $0 \leq t = (k+1)\Delta t$, $\Delta x \leq x_0$ ve $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$ koşullarını koruyan, pozitif Δx_0 ve Δt_0 ile negatif olmayan K ve β sayıları için (1.38) sonlu fark karşılığı, $\|\cdot\|$ normuna göre yalnız ve yalnız

$$\|\Lambda^{k+1}\| \leq K e^{\beta t} \quad (1.44)$$

eşitsizliği sağladığı takdirde dayanıklıdır.

İspat :

$$u^{k+1} = \Lambda u^k = \Lambda(\Lambda u^{k-1}) = \Lambda^2 u^{k-1} = \dots = \Lambda^{n+1} u^0$$

olduğundan son eşitlik

$$\|u^{n+1}\| = \|\Lambda^{n+1} u^0\| \leq K e^{\beta t} \|u^0\|$$

veya

$$\frac{\|\Lambda^{n+1}u^0\|}{\|u^0\|} \leq Ke^{\beta t}$$

olarak yazılabilir. $u^0 \neq 0$ olduğu sürece her iki taraftan supremum alırsak (1.44) ün doğru olduğunu ispatlamış oluruz. $\|\Lambda^{n+1}u^0\| \leq \|\Lambda^{n+1}\| \|u^0\|$ eşitsizliğini dikkate alırsak (1.44) ile (1.43) ün aynı anlama geldiğini görürüz.

(1.36) denkleminin üç özel sonlu fark karşılığını inceleyelim.

1.Durum Önce (1.36) denkleminin merkezi sonlu fark karşılığını

$$L_h u_h \equiv \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} + a \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h_x} = 0$$

gözönüne alalım. Bu denklemi

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{ah_t}{2h_x} (u_{i+1}^k - u_{i-1}^k) \quad (1.45)$$

olarak yazabiliriz.

(1.45) denkleminin herhangi bir özel çözümünü $u_i^k = e^{ih_x k_x} v_i^k$ Fourier bileşeni şeklinde arayalım. $\theta = k_x \Delta x = k_x h_x$ ile faz açısını gösterelim, burada $I = \sqrt{-1}$ ve k_x dalga sayısı olmaktadır. Bu taktirde,

$$u_i^k = v_i^k e^{Ii\theta} \quad (1.46)$$

olur. (1.46) ifadesini (1.45) denkleminde yerine yazıp

$$v_i^{k+1} e^{Ii\theta} = v_i^k e^{Ii\theta} - \frac{ah_t}{2h_x} (v_i^k e^{I(i+1)\theta} - v_i^k e^{I(i-1)\theta})$$

ve son eşitliği $v_i^k e^{Ii\theta}$ ile bölersek,

$$v_i^k = 1 - \frac{ah_t}{2h_x} (e^{I\theta} - e^{-I\theta})$$

eşitliğini elde ederiz. Böylelikle,

$$u_i^{k+1} = \left[1 - \frac{ah_t}{2h_x} (e^{I\theta} - e^{-I\theta}) \right] u_i^k = \Lambda u_i^k$$

şeklinde yazılabilir. $\Lambda = 1 - \frac{ah_t}{2h_x}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ ya dönüşüm operatörü denir. u_i^k

çözümünün dayanıklı olması için $|\Lambda| < 1$ olmalıdır.

Şimdi Λ yi değerlendirelim.

$$\Lambda = 1 - \frac{ah_t}{2h_x}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 1 - \frac{ah_t}{2h_x} I \sin \theta$$

olup, buradan
$$|\Lambda(\theta)| = \sqrt{1 + \frac{a^2 h_t^2}{h_x^2} \sin^2 \theta}$$

veya
$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \Lambda(\theta) = \left| \Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \sqrt{1 + \frac{a^2 h_t^2}{h_x^2}}$$

elde ederiz

$A = \frac{h_t}{h_x^2}$ olsun. $h_t = Ah_x^2$ ve $h_t, h_x \rightarrow 0$ iken

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \Lambda(\theta) = \sqrt{1 + a^2 A^2 h_x^4 \frac{1}{h_x^2}} =$$

$$\sqrt{1 + a^2 Ah_t} = 1 + \frac{a^2 Ah_t}{2} + O(h_t^2)$$

olur.
$$1 + \frac{a^2 Ah_t}{2} + O(h_t^2) = e^{\frac{a^2 A}{2} h_t}$$

olduğundan
$$|\Lambda(\theta)| \leq e^{\frac{a^2 A}{2} h_t}$$

eşitsizliği korunmaktadır.

Eğer $\lim_{h_t, h_x \rightarrow \infty} \frac{h_t}{h_x^2} = \infty$ ise

$$\lim_{h_t, h_x \rightarrow \infty} \frac{\left(\Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right)}{h_t} = \infty$$

olur ve

$$\lim_{h_t, h_x \rightarrow \infty} \frac{\left(\Lambda \left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 \right)}{h_t} = a^2 A = a^2 \frac{h_t}{h_x^2} \Rightarrow \infty$$

dur, yani (1.44) eşitsizliği bozulur, dolayısıyla (1.45) şeması dayanıksız olmaktadır.

2.Durum Şimdi (1.36) denklemini için

$$L_h u_h \equiv \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} + a \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h_x} = 0, \quad a > 0 \quad (1.47)$$

sol sonlu fark karşılığı gözönüne alalım. (1.47) denklemini de

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{h_t a}{h_x} (u_i^k - u_{i-1}^k)$$

şeklinde yazıp, çözümü $u_i^k = v^k e^{i\theta}$ şeklinde arayalım. Her tarafı $e^{i\theta}$ ye bölersek dönüşüm operatörü

$$\Lambda = 1 - \frac{h_t a}{h_x} + \frac{h_t a}{h_x} e^{-i\theta}$$

şeklinde elde ederiz. Eğer $0 \leq \frac{h_t a}{h_x} \leq 1$ ise, bu takdirde

$$|\Lambda(\theta)| \leq 1 - \frac{h_t a}{h_x} + \frac{h_t a}{h_x} = 1$$

olur, yani bu durumda (1.47) şeması dayanıklı olmaktadır.

Bölüm 2. Bir Boyutlu Denklemler için Sonlu Farklar

Bu bölümde amacımız yukardaki bölümde incelediğimiz ve genelde fizik ve hidrodinamikte sık raslanan ve non-lineerlikten doğan spesifik özelliklere sahip bazı pratik problemleri modelleyen denklem veya denklemler sistemi için yazılmış problemlerin süreksiz fonksiyonlar sınıfında olayın fiziksel yapısını düzgün yansıtabilen efektif nümerik çözümleri elde etmek için yöntemler geliştirmektir. Spesifik problemler, genelde transonik akışlar, çok fazlı sıvıların tabakalı ortamlarda hareketi ve benzeri fiziksel süreçlerde ortaya çıkar. Bu cinsten olan problemlerin temel özelliği çözümde yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarının oluşmasıdır.

Literatürden bilindiği üzere sıvıların hareketi iki farklı açıdan incelenmektedir. Birincisi Lagrange yorumudur ki, burada ilgilenilen hedef sıvının kendisidir, yani diğer bir deyimle herhangi bir $\omega(t)$ hacminin dolduran sıvının herbir parçacığının hareketi incelenmektedir. Bu durumda hareket eden sıvıyı karakterize eden tüm büyüklükler, o cümleden parçacığın konumu t zaman ve bazı ξ_i , ($i=1,2,3$) değişkenlerine bağlı kılabilir, yani $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, $\rho = \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, $\sigma = \sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ vs. olur. Burada ξ_i ler bir kural olarak parçacığın başlangıç konumunun koordinatlarını göstermektedir. Böylelikle, Lagrange yorumunda esas önemli olan hareket eden parçacığın kendisi ve hareketi ifade eden parametrelerin zamana göre değişmesinin incelenmesidir.

İkinci yorum ise Euler'e aittir. Bu yorumda, tüm parametreler; örneğin hız, yoğunluk, doyma fonksiyonları, sıcaklık, basınç ve diğerleri zamanın ve sıvının konumunun fonksiyonları olmaktadır. Euler yorumunda sabit bir hesaplama sisteminde, örneğin Descartes koordinat sistemi seçilir ve karakterize edebilen parametrelerin nasıl değiştiğini incelenir. Euler yorumunda hareket eden parçacığın hangisi olduğu dikkate alınmamaktadır ve

sözkonusu parçacığın uzaydaki zaman evrimi hakkında da net bir bilgi alınmamaktadır.

Bu bölümde esas amacımız çözümlerinde yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktaları bulunan denklemler için yüksek etkinliğe sahip sonlu farklar yöntemi geliştirmektir. Bu konuda olan merak, son zamanlarda darbe dalgaları ve çözümünde yüksek gradyana sahip olan korunum kanunlarını ifade eden problemlerin çözümlerinin bulunması ile artmaktadır.

Nonlinear denklemler için yazılmış sonlu fark karılığının yaklaşık çözümünün gerçek çözüme yakınsaklığı genelde zor bir problemdir. Bundan dolayı çoğu zaman bilgisayar yakınsaklığı gibi bir kavram kullanılmaktadır. Bu durumda, ağın adımları küçültülerek aynı algoritmma üzerinde çok sayıda bilgisayar deneyleri yapılır ve çözümün çeşitli zamanlardaki değerinin farkı incelenir, fakat bu yöntem pürüzsüz çözüme sahip problemler için geçerlidir. Sıçrayışa sahip problemler için bu yöntem yanlış sonuçlara neden olabilir. Böyle durumlara karşılaşmamak için konservatif sonlu farklar kullanılmaktadır. Bu kavram denklemin diverjans formda yazılımı ile bağılı olmaktadır. Bilindiğı gibi, bazı fiziksel olayların matematiksel modeli yazılırken denklem, örneğın yoğunluk, basınç ve hız fonksiyonlarına göre diverjans formda yazılır.

Darbe dalgalarına sahip problemlerde Euler yorumu iyi sonuç vermemektedir. Eğer ağın adımı darbe dalgası içerisine alan şeritin ölçüsünden küçük kalırsa, fiziksel olmayan salınım (ossilyasyon) ortaya çıkar ve netlik bozulur. Euler yorumunda darbe dalgasına sahip denklemleri sonlu fark ayrıklaştırırken darbe dalgası ağın birkaç noktasına dağılır ve olayın fiziksel yapısı bozulur, çünkü darbe (çözümde oluşan birinci tür sıçrayış noktası) fonksiyonun değerini bir noktadaki değışmesi olmaktadır. Diğer taraftan da denklemi sonlu farklara ayrıklaştırdığımızda, pratik olarak gözönüne aldığımız denklemi değil modifiye olunmuş denklemi çözeriz. Modifiye olunmuş denklemde ise suni viskozite ortaya çıkar.

Bu tür problemleri sonlu farklar yöntemi ile çözerken geneleksen yaklaşım gözönüne alınmış problemi sonlu farklara ayırıklaştıran iki metottan ibarettir:

1. Ağın düğüm noktalarında sıçrayış yerini belirleyebilen metotlar.
2. Sıçrayış noktalarını dikkate almaksızın uygulanan düz “homojen” metotlar.

Birinci yaklaşım çeşitli yollarla gerçekleştirilir. Burada esas prensip çözümün ağın noktalarında belli bir algoritma yardımıyla bulunması, sonra sıçrayış noktalarının civarında ağın adımlarını küçültülerek yeniden hesaplama işlemleri yapılmasıdır. Fakat bu yaklaşımda sıçrayışın yerini önceden belirlemek gerekir ve sözkonusu sıçrayış noktası bu kez ağın düğüm noktası olmayabilir. Bu işlem zordur ve bundan dolayı bazı araştırmacılar bu yolu tercih etmemektedir.

Homojen şemalarda sıçrayışın yeri dikkate alınmaksızın işlem tek bir alogaritma yardımıyla gerçekleştirilir, fakat bu durumda da sıçrayış ağın birkaç düğüm noktasına dağılır ve olayın fiziksel yapısı bozulur. Sıçrayışın ağın birkaç düğüm noktalarına dağılmasının nedeni diferansiyel problemde sonlu fark karşılığına dönüş yaptığımızda denklemin sağ tarafına ağın adımı oranında difüzyon teriminin eklenmiş olmasıdır.

Dolayısıyla, esas denklemin çözümü genelde sonlu farklar denklemini korumamaktadır ve modifiye olunmuş denklem de direk sonlu fark denkleminde elde edilir. Suni viskozite çözümde oluşan gradyanı oluşturan gerçek nedenleri devredışı bırakarak tüm parametrelere göre olan gradyanı azaltır. Böylelikle sıçrayış belli uzunluğa sahip bir şeride dağılır.

2.1 Lineer Hopf Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad (2.0)$$

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad . \quad (2.0')$$

Bu bölümde (2.0) denklemi için yazılmış Cauchy problemini sonlu farklar yöntemi ile çözelim. Önce problemi bilinen klasik yöntemler aracılığıyla, sonra ise [4] de geliştirdiğimiz yardımcı problemi kullanarak çözeceğiz. Sayısal çözümün özelliklerini açık şekilde görebilmemiz için (2.0) denklemini başlangıç fonksiyon (2.0) olmak suretiyle inceleyelim.

2.1.1 Sürekli Başlangıç Koşul

(2.0) denklemi için yazılmış üç tür sonlu fark karşılığı gözönüne alalım. İlk önce, $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevi için sağ köşe şablonu kullanarak (2.0) denklemini

$$U_{i,k+1} - U_{i,k} + \frac{ah_t}{h_x} (U_{i+1,k} - U_{i,k}) = 0 \quad (2.1)$$

$$U_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 - x_i^2, & |x_i| < 1 \\ 0, & |x_i| \geq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

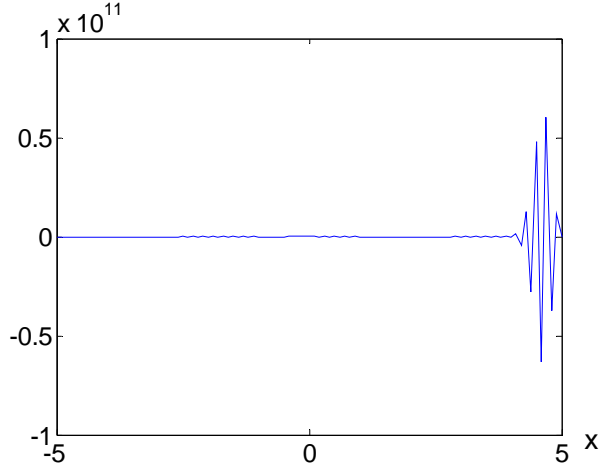
şekilde sonlu farklara ayrıklaştıralım. Yukarıda gördüğümüz gibi bu sonlu fark karşılığı kararsızdır. (2.1) algoritmasından elde edilen çözümün grafiği Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Sonra $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevi için merkezi şablonu kullanarak denklemi

$$U_{i,k+1} - U_{i,k} + \frac{ah_t}{2h_x} (U_{i+1,k} - U_{i-1,k}) = 0 \quad (2.3)$$

olarak ayrıklaştıralım. Bu sonlu fark karşılığı da kararsız olmaktadır. Şimdi (2.0) denklemi için sol köşe veya akışa karşı olan sonlu fark karşılığını

$$U_{i,k+1} - U_{i,k} + \frac{ah_t}{h_x} (U_{i,k} - U_{i-1,k}) = 0 \quad (2.4)$$

yazalım. Bu şema dayanıklı olmaktadır.

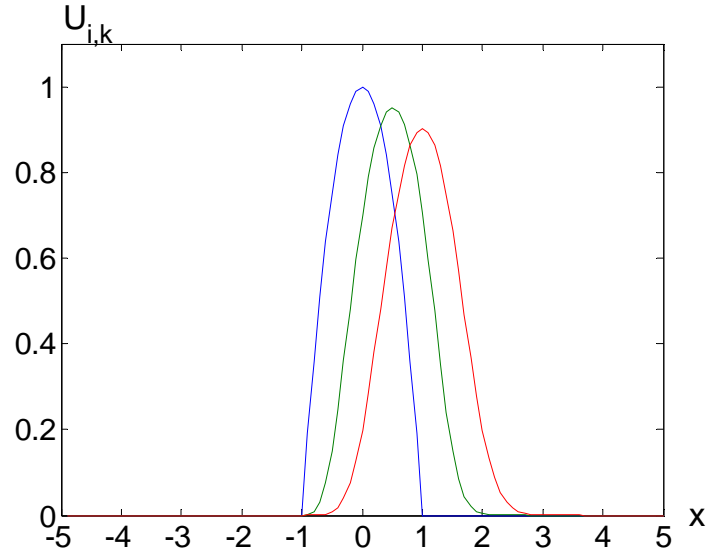


Şekil 2.1: Kararsız çözüm, $h_t = 0.005$

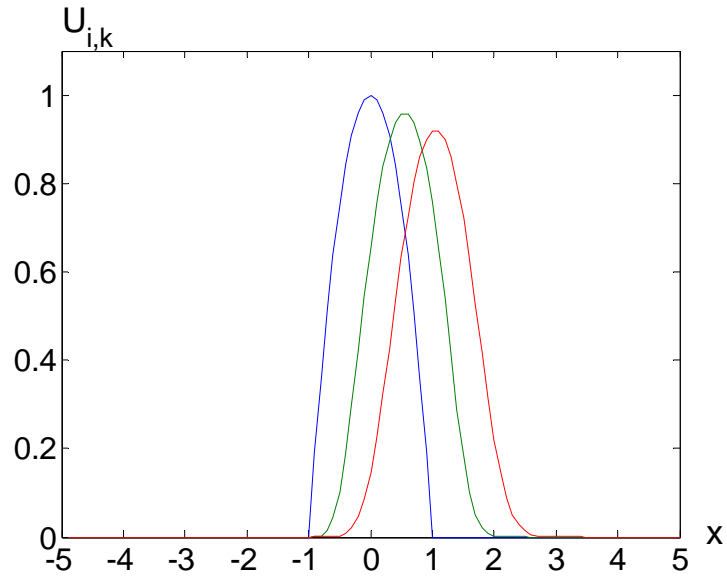
Dayanıklılık analizinden görüldüğü gibi açık sonlu fark şemalarını kullanırken şemanın dayanıklılığı için CEF (Courant-Friedrichs-Lewy) koşulunun $\left| \frac{h_t}{h_x} \right| < 1$ korunması gerekmektedir. Bu koşulu aşağıdaki gibi de $\left(\frac{h_t}{h_x} \right)^2 \leq \frac{1}{a^2}$ yazmak mümkündür. Karakteristiklerinin eğiminin $\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{a}$ olduğunu dikkate alırsak CFL koşulu gerçek çözümün bağımlı olduğu bölgenin sayısal çözümün tanımlı olduğu bölgenin içerisinde yer aldığını göstermektedir. Dolayısıyla sayısal çözümün tanımlı olduğu bölge gerçek çözümün bağımlı olduğu bölgeden geniş olabilir, fakat bunun tersi olmaz. Yani, $(i \pm 1, k)$ ve $(i, k \pm 1)$ noktalarını birleştiren doğruların eğimleri mutlak değerce karakteristiklerin eğiminden küçük olması gerekmektedir.

Yapılan bilgisayar deneylerinde sayısal çözümün gerçek çözüme yeteri kadar yakınlığı CFL koşulunun hemen-hemen korunduğu tektirde isaptanmıştır. CFL koşulunda eşitsizliğin ciddi olarak korunduğu durumda şema dayanıklı olmaktadır, ancak sayısal çözüm kütle korunum kanununu bozar. Dolayısıyla şema konservatif olmayabilir.

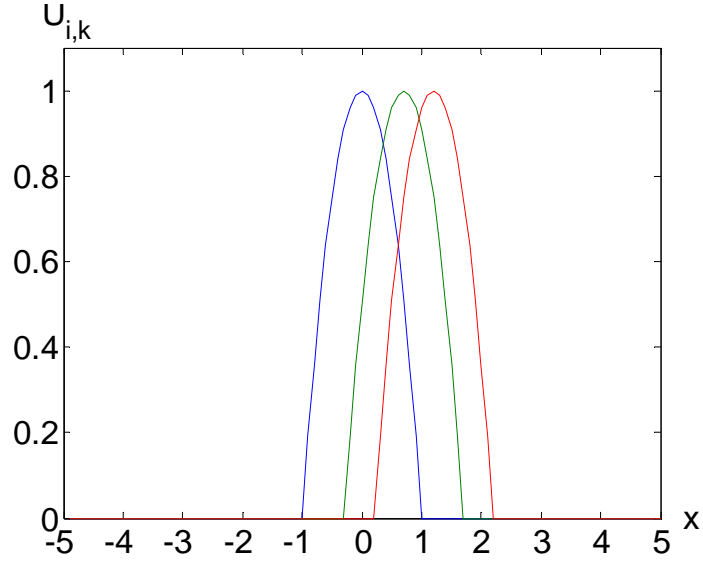
Şekil 2.2-2.4 te sırasıyla zaman adımının 0.005, 0.05 ve 0.19 değerlerindeki çözümün grafikleri verilmiştir. CFL koşulu $h_t = 0.2$ değeri için net olarak korunmaktadır. Sayısal hesaplamalardan görürüz ki numerik çözümler $h_t = 0.2$ değrinde



Şekil 2.2: $h_t = 0.005$



Şekil 2.3: $h_t = 0.05$



Şekil 2.4: $h_t = 0.19$

bozular, fakat $h_t = 0.19$ olduğunda $h_t \leq \frac{h_x}{a}$ hemen hemen korunmaktadır ve bu durumda nümerik çözüm gerçek çözümle çakışıyor.

Şimdi yardımcı problemi kullanarak incelediğimiz problemin sayısal çözümünü elde edelim. [4]' ü takip ederek aşağıdaki yardımcı denklemi dahil edelim

$$\frac{\partial v}{\partial t} + au = 0 \quad (2.5)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad (2.6)$$

ve bu denklemi (2.6) başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. (2.5) denkleminde u fonksiyonunun x ve t ye göre hiçbir türevi bulunmadığından dolayı, sözkonusu denklemi sonlu farklara ayırdığımızda yukarıdaki zorluklar karşımıza çıkmamaktadır. Bu da yardımcı problemin sayısal çözümlerin bulunmasındaki önemini göstermektedir.

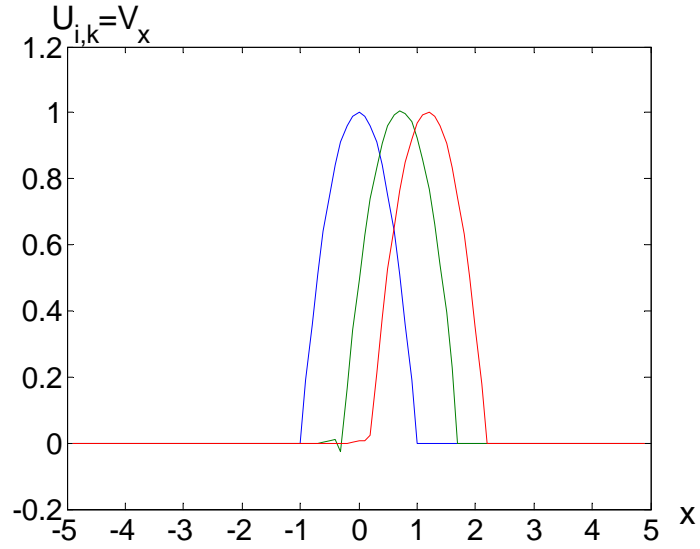
(2.5) denklemini aşağıdaki gibi sonlu farklara

$$V_{i,k+1} - V_{i,k} + ah_t U_{i,k} = 0 \quad (2.7)$$

ayırdığımızı. Herhangi bir (i, k) için

$$U_{i,k+1} = \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h_x} = (V_x)_{i,k+1} \quad (2.8)$$

olmaktadır. $\frac{ah_x}{h_x} = 1$ ve (2.8) dikkate alınırsa $\sum_i V_{i,k+1} = \sum_i V_{i,k}$ olduğu kolayca görülmektedir, yani (2.7) şeması konservatif olmaktadır. (2.7), (2.8) algoritması yardımı ile elde edilen çözümün grafiği Şekil 2.5 te gösterilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi elde edilen sayısal çözüm gerçek çözümlerle çakışmaktadır.



Şekil 2.5: $U_{i,k} = V_x$ in grafiği

2.1.2 Süreksiz başlangıç koşulu

Şimdi (2.4) denkleminin

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2, & x > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

(2.9) başlangıç koşulu çerçevesinde sayısal çözümlerini inceleyelim. Burada $v_0(x)$ fonksiyonu

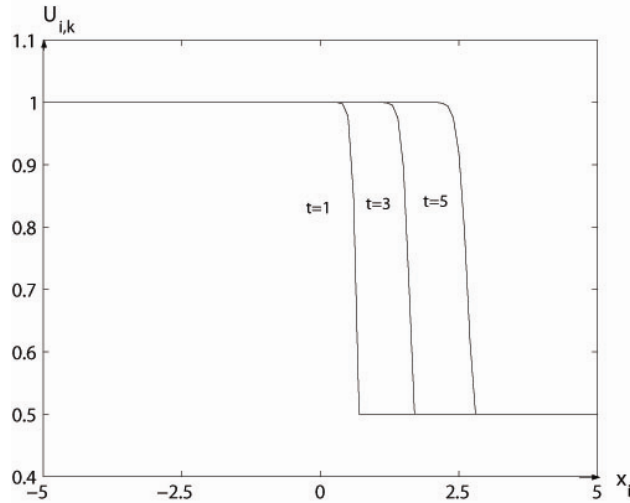
$$\frac{dv_0(x)}{dx} = u_0(x) \quad (2.10)$$

(2.10) denkleminin herhangi bir diferansiyellenebilen çözümü olmaktadır. Yukarıda belirtildiği gibi bu durumda da yalnız sol köşe şablonu üzere yazılmış sonlu fark karşılığı sonuç vermektedir. Diğer şemalar, yani sağ ve merkezi şablonda yazılmış algoritmaların her ikisi de dayanıksız olmaktadır. Sol köşe şablonu ile yazılmış (klasik) algoritma üzerinde yapılan bilgisayar testlerinin sonuçları sırasıya Şekil 2.6-2.7 de gösterilmiştir.

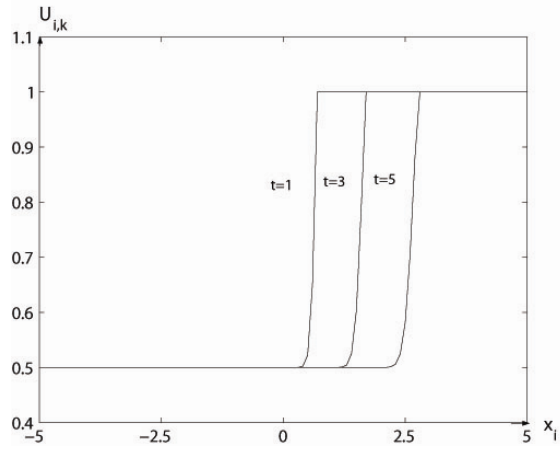
Yardımcı problemi bu durum için uygulayalım. Bu amaçla (2.5) denkleminin çözümünü

$$V_{i,0} = v_0(x_i) \quad (2.11)$$

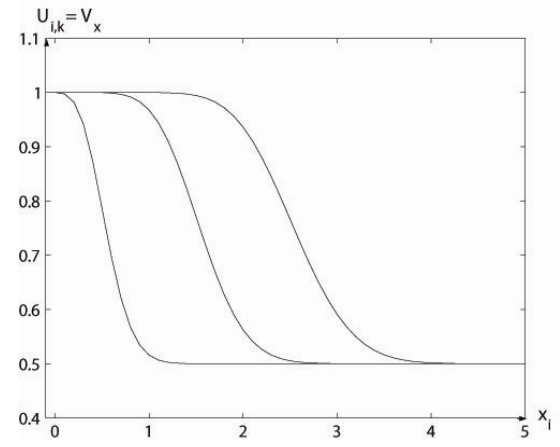
başlangıç koşulu çerçevesinde bulalım. Burada, $v_0(x_i)$ fonksiyonu (2.10) denkleminin herhangi bir çözümü olmaktadır. (2.7), (2.9) probleminin çözümünün grafikleri Şekil 2.8 ve 2.9 da gösterilmiştir. Yer değişkenine göre olan h_x adımını yeteri kadar küçük almakla sayısal çözümü gerçek çözüme yaklaştırmak mümkün olmaktadır.



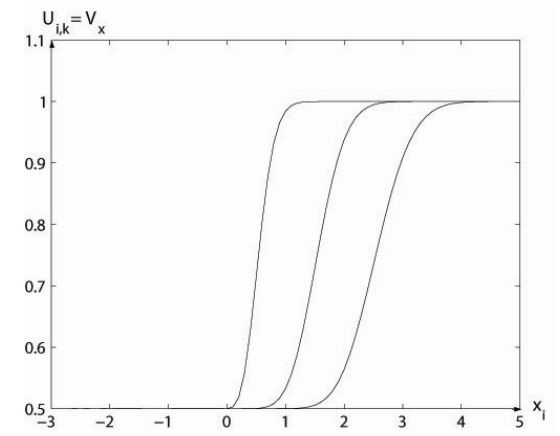
Şekil 2.6: $u_1 > u_2$ esas probleminin çözümü



Şekil 2.7: $u_1 < u_2$ esas probleminin çözümü



Şekil 2.8 $u_1 > u_2$ durumu için $U_{i,k} = V_x$ grafiği



Şekil 2.9: $u_1 < u_2$ durumu için $U_{i,k} = V_x$ grafiği

2.2 Hopf Denklemi İçin Sonlu Farklar

Şimdi (2.0) denklemi için yazılmış Chauchy problemini sonlu farklar yöntemiyle inceleyelim. Literatürde bilindiği gibi sözkonusu problemin gerçek çözümü incelenmiş ve başlangıç fonksiyonun hem pozitif, hem de negatif eğime sahip olduğu taktirde probleminin çözümünde yeri önceden belli olmayan sıçrayış noktalarının mevcut olduğu ispatlanmıştır. Çözümde bulunan sıçrayış noktalarının mevcut olması denklemi direk sonlu farklara ayırklaştırmaya imkan sağlamamaktadır, çünkü sıçrayış noktalarının civarında denklemin içerdiği türevler mevcut olmayabilir.

Literatürde (2.0) cinsinden olan denklemler için genelde iki tür sonlu farklar yöntemleri mevcuttur. Birinci türden olan yöntemlerde denklemin çözümünde sıçrayış noktalarının varlığı dikkate alınmaksızın direk sonlu farklara ayırklaştırılır. Bu prensiple yazılan şemalara homojen şemalar denir. Diğer sınıftan olan yöntemler ise problemin yumuşak çözümünü kullanılarak elde edilen yöntemler olmaktadır.

Bilindiği gibi hidrodinamiğin denklemlerinde bilinmeyenler genelde hız, yoğunluk, doyma fonksiyonları vs olmaktadırlar ve sözkonusu denklemler kütle, enerji, hareket miktarı vs büyüklüklerin korunum kanunu şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerde elde edilen çözümler de akışın integral karakteristiklerini ifade etmektedirler ki, bunlar da hem argümanların sürekli değiştiği bölgede, hem de ağın düğüm noktalarında korunabilir. Bu nedenle denklemin yazılım formu çok önem taşımaktadır.

2.2.1 Sürekli Başlangıç Koşul. Konservatif ve Konservatif Olmayan Şemalar

Bu bölümde önce Hopf denklemi için yazılmış iki klasik sonlu fark karşılığı göreceğiz sonra ise bu denklemin sayısal çözümünü yardımcı problem aracılığıyla bulacağız.

(2.0) denklemini Ω_{h_t, h_x} ağının herhangi bir (i, k) noktasında

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} - \frac{h_t}{h_x} \left[U_{i,k} (U_{i,k} - U_{i-1,k}) \right], \quad (2.12)$$

ve

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} - \frac{h_t}{2h_x} (U_{i,k}^2 - U_{i-1,k}^2), \quad (2.13)$$

şeklinde sonlu farklara ayrıklaştıralım. (2.12) veya (2.13) denklemleri için başlangıç koşulu

$$U_{i,0} = u_0(x_i) \quad (2.14)$$

olmaktadır. Burada $u_0(x_i)$ (2.2) formülü ile tanımlanan ağ fonksiyonudur.

(2.13) şemasının $U_{i,k}$ çözümü için gösterilebilir ki,

$$h_x \sum_i U_{i,k+1} = h_x \sum_i U_{i,k} \quad (2.15)$$

olmaktadır, yani (2.13) sonlu fark karşılığı konservatif olmaktadır. Ayrıca sözkonusu enerji integralinin değeri $E(0)$ a eşittir. Burada,

$E(0) = h_x \sum_i u_0(x_i)$ olmakta, yani (2.13) sonlu fark karşılığı konservatif

olmaktadır. Gösterilebilir ki, (2.12) şeması konservatif değildir. Gerçekten de herhangi real a ve b sayıları için $ab = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 - (a-b)^2]$ eşitliğini dikkate alırsak (2.12) i

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} - \frac{h_t}{2h_x} (U_{i,k}^2 - U_{i-1,k}^2) - \frac{h_t}{2h_x} (U_{i,k} - U_{i-1,k})^2 \quad (2.16)$$

gibi yazabiliriz. Dolayısıyla denklemin yazılım formu çok önem taşımaktadır.

Gerçekten de, (2.13) şeması $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$ denkleminin sonlu fark karılığı olmaktadır. Fakat,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

ifadesinin sonlu fark karılığı olmadığından (2.12) şeması konservatif şema değildir. Ayrıca bu denklem için korunum kanunu da bozulur. Literatürden bilindiği gibi $E(0)$ sayısı bu durum için $\frac{3}{4}$ olmaktadır. (2.12) şemasına dayanarak elde edilen çözüm için $E(0)$ ın değeri zamanın artan değerlerinde azalır. Hopf denklemi için diğer şemalar köşe ve merkezi sonlu fark karşılıkları kullanılmaz. Diferansiyel denklemi “direk” olarak sağ köşe ve merkezi şablonda sonlu farklara ayırklaştırdığımızda sebebiyet prensibi genelde bozulabilir, çünkü denklemin içerdiği x e göre türevi sonlu farklara ayırklaştırdığımızda (x_i, t_k) noktasındaki çözümü suni olarak (x_{i+1}, t_k) noktasındaki çözümle bağlamış oluruz. Bu nedenle de sonlu fark karşılığını yazarken (2.15) koşulunun korunmasını garanti eden şemaların yazılması gerekmektedir.

Şimdi bu problemi yardımcı problemi kullanarak çözelim. Bu durum için yardımcı problemini aşağıdaki gibi sonlu farklara

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \frac{h_t}{2h_x^2} (V_{i,k} - V_{i-1,k})^2, \quad (2.17)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i) \quad (2.18)$$

ayırklaştıralım. Herhangi bir h_t, h_x ler için (2.8) geçerli olmaktadır. (2.8) ifadesini dikkate alırsak (2.8) sonlu farklar denklemini

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \frac{h_t}{2} U_{i,k}^2 \quad (2.19)$$

gibi de yazabiliriz. Burada $v_0(x_i)$ (2.10) eşitliği ile tanımlanan fonksiyonun ağ karşılığı, yani

$$v_0(x_i) = \begin{cases} -\frac{2}{3}, & x_i < -1 \\ x_i - \frac{x_i^3}{3}, & -1 < x_i < 1 \\ \frac{2}{3}, & x_i > 1 \end{cases}$$

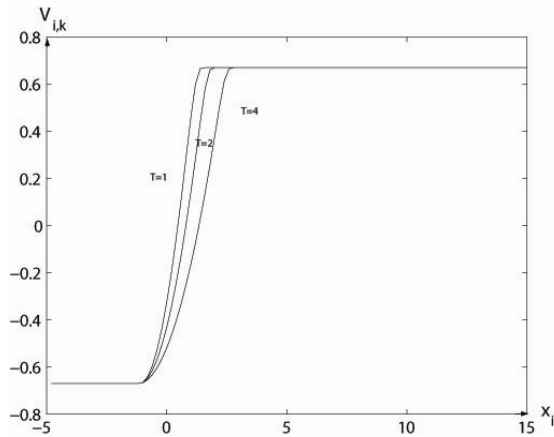
olmaktadır. (2.17), (2.18) probleminin çözümünün grafiği Şekil 2.10 de gösterilmiştir.

(2.19) ile bulunan $U_{i,k}$ fonksiyonunun grafiği ise. Şekil 2.11 de gösterilmiştir.

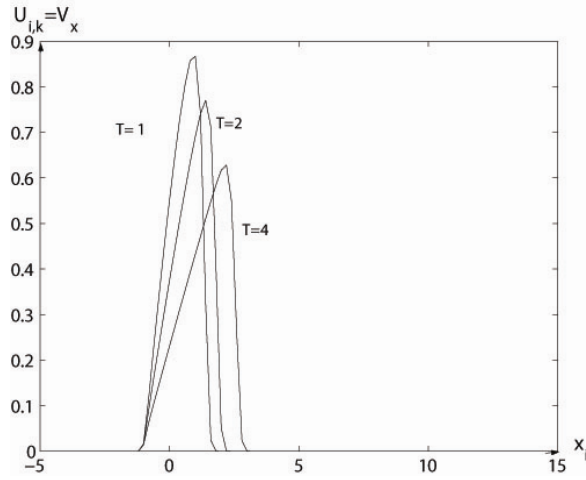
Hiperbolik denklemler için yazılmış açık şemaların dayanıklılığı için CFL koşulunun korunması gerekiyor. Pratik hesaplamalarda lineer denklemler için $\frac{a\Delta t}{\Delta x}$ in değeri 1 den çok farklandığı takdirde çözümün niteliği bozulur. Nonlineer denklem için yazılmış sonlu fark karşılıklarının dayanıklılıkları $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|}$ koşulu çerçevesinde ispatlanabilir. Burada $|v|$ sistemin en büyük karakteristik hızını göstermektedir.

(2.0), (2.0) problemi için bir sürü açık olmayan sonlu fark karşılığı da yazmak mümkündür. Bu tür şemalar h_t adımı için genelde koşul talep etmemektedir. Fakat sözkonusu açık olmayan şemaların hiperbolik denklemlerin çözümü için uygulamanın ne kadar önemli olduğu bilinmemektedir, çünkü sayısal çözümdeki dağılım hızı fiziksel dağılım hızından büyük olmaktadır. Bu nedenle de açık şemalar pratik problemlerin çözümünde daha da avantajlı olmaktadır.

Kararlılık analizi yukarıdaki bölümde yapıldığından burada bir daha dayanıklılık testi yapılmamaktadır.



Şekil 2.10: (2.13), (2.14) probleminin çözümü



Şekil 2.11: $U_{i,k} = V_{\bar{x}}$

2.2.2 Süreksiz Başlangıç Koşul

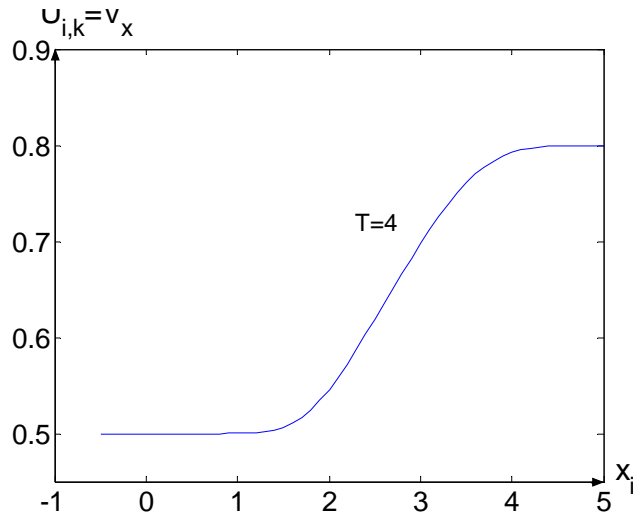
Yukarıdaki bölümde Hopf denklemi için yazılmış sürekli ve kompakt taşıyıcıya sahip başlangıç koşullu Chauchy problemi için sonlu farklar yöntemi incelenmiştir. Bu bölümde ise Hopf denklemini süreksiz başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyeceğiz.

Literatürden bilindiği gibi, $u_1 < u_2$ durumunda problemin çözümü $t > 0$ değerlerinde sürekli ve monoton fonksiyona dönüşür. Dolayısıyla bu durum için problemin sayısal çözümü hiçbir zorlukla karşılaşmamaktadır ve sayısal çözümün bulunması için özel araştırmaya ihtiyaç yoktur. Buna rağmen, sözkonusu problemin sayısal çözümünü elde etmek için (2.17) denklemler sistemini

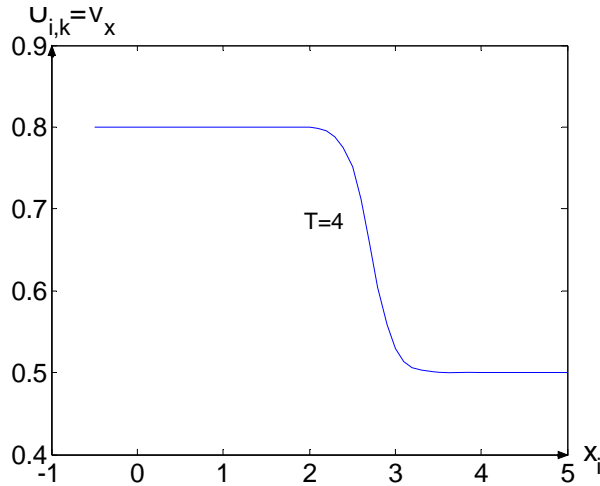
$$v_{i,0} = \begin{cases} u_1 x_i, & x_i > 0 \\ u_2 x_i, & x_i < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde çözelim. (2.8) ifadesi ile bulunan çözümün $T = 4$ değerindeki grafiği Şekil 2.12 te gösterilmiştir.

$u_1 > u_2$ olduğu durumda ise problemin çözümünde çokdeğerlilik olduğundan sözkonusu problemin klasik çözümü mevcut olmamaktadır ve zayıf çözümü elde etmek için yardımcı problem önerilmiştir. Dahil edilmiş yardımcı problem için Ω_{h_i, h_x} ağının herhangi bir (x_i, t_k) noktasında (2.13), (2.20) sonlu fark karılığını yazalım. Elde ettiğimiz sayısal çözümün grafiği Şekil 2.13 te gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi çözümde sıçrayış noktalarının civarında hiçbir salınım görülmemektedir.



Şekil 2.12: $u_1 < u_2$



Şekil 2.13: $u_1 > u_2$

Bölüm3. Hopf Denklemi için Başlangıç-Sınır Değer Problemi

Bu bölümde (2.0) denklemi aşağıdaki koşullar çerçevesinde inceleyelim.

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = u_1(t) \quad (3.2)$$

[4] ten görüldüğü gibi (2.0) denklemi için yazılmış başlangıç-sınır değer probleminin çözümünde çokdeğerlilik hemen koordinat başlangıcından başlar. Bu özellikten dolayı sözkonusu problem direk olarak sonlu farklara ayrıklaştırılmaz. Bu bölümde (2.0) denkleminin (3.1), (3.2) koşulları çerçevesinde sayısal çözümünün bulunması için etkin algoritmalar geliştireceğiz. Bunu iki yolla gerçekleştirebiliriz.

Birinci yol, aşağıdaki 1.tür yardımcı problemi Ω_{h_t, h_x} ağının (x_i, t_k) noktasında

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \frac{h_t}{2h_x^2} (V_{i,k} - V_{i-1,k})^2, \quad (3.3)$$

$$V_{i,0} = V^{(0)}(x_i), \quad (3.4)$$

$$V_{1,k} - V_{0,k} = h_x u_1(t_k) \quad (3.5)$$

şeklinde sonlu farklara ayrıklaştıralım. (2.8) yı dikkate alarak (3.3) yi

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \frac{h_t}{2} U_{i,k}^2$$

gibi de yazabiliriz. Burada da yukarıda olduğu gibi $V_{i,0}(x_i)$

$$\left(V^{(0)}(x_i) \right)_{\bar{x}} = u_0(x_i)$$

denklemini koruyan herhangi bir fonksiyon olmaktadır.

$V_{i,k+1}$ ile $U_{i,k+1}$ arasındaki ilişki yine de (2.8) formülü yardımı ile gerçekleştirilir.

(3.3)-(3.5) problemi için de geliştirilmiş sayısal çözüm kavramını dahil edelim. Bunun için $E(t_k)$ kritik sayısını $E(t) = \int_0^t (u_1^2(\tau) - u_0^2(x)) d\tau$ in ayrık karşılığı

$$\text{olarak} \quad E(t_k) = \frac{h_t}{2} \sum_{v=1}^k [u_1^2(t_v) - u_0(x_i)^2]$$

şeklinde tanımlayalım. (3.3)-(3.5) probleminin geliştirilmiş nümerik çözümünü

$$V_{i,k}^{gen} = \begin{cases} V_{i,k}, & V_{i,k} < E(t_k) \\ E(t_k), & V_{i,k} \geq E(t_k) \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edelim. Esas problemin geliştirilmiş çözümü de (2.8) formülü aracılığı ile gerçekleştirilir.

(2.0), (3.1) ve (3.2) probleminin sayısal çözümünü elde etmek için ikinci yol olarak 2.tür yardımcı problemi kullanalım.

Bu nedenle (2.0) denklemini aşağıdaki gibi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x u(\xi, t) d\xi + \frac{u^2(x, t)}{2} - \frac{u_1^2(t)}{2} = 0 \quad (3.7)$$

yazalım. (3.7) denklemi için başlangıç koşul (3.1) olmaktadır. (3.7) integro-diferansiyel denklemini sonlu farklara ayırklaştırmak için zaman değişkenine göre türevin altındaki integrale dikkörtgen yöntemi ile

$$\int_0^x u(\xi, t) d\xi \cong h_x \sum_{j=1}^i U_{j,k} \quad (3.8)$$

yaklaşalım. (3.8) yı dikkate alarak (3.7) i

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} - \frac{h_t}{2h_x} U_{i,k}^2 + \frac{h_t}{2h_x} u_1^2(t_k) - \sum_{j=1}^i (U_{j,k+1} - U_{j,k}) \quad (3.9)$$

şeklinde ayırklaştıralım. (3.9) cebirsel denklemler sistemini

$$U_{i,0} = u_0(x_i)$$

koşulu çerçevesinde çözerek problemin sayısal çözümünü elde ederiz.

Kapalı şema için benzer sonuçlar elde edilebilir. Fakat burada yine de CFL koşulunun korunmasına dikkat edilmelidir.

4. Bölüm 1.Basamaktan Nonlineer Denklemler

Yukarıdaki bölümde (2.0) denklemi için yazılmış başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemleri durum fonksiyonunun iki özel $F(u) = cu$ ve $F(u) = \frac{u^2}{2}$ durumunda

incelendi. Bu bölümde ise genel şekilde yazılmış

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (4.0)$$

denkleminin nümerik çözümü daha detaylı şekilde irdelenecek ve nümerik çözümün bazı özellikleri de incelenecektir.

Varsayalım ki, $F(u)$ hal fonksiyonu belli koşulları sağlamaktadır. Söz konusu denklemin (3.1) başlangıç koşulu çerçevesinde nümerik çözümünü elde etmek için 1.tür yardımcı problemi kullanalım.

4.1 1.Tür Yardımcı Problem

[4] i takip ederek (2.0), (3.1), (3.2) problemini Ω_{h_t, h_x} ağının herhangi bir (x_i, t_k) noktasında

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - h_t F\left(\frac{V_{i,k} - V_{i-1,k}}{h_x}\right) \quad (4.1)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i) \quad (4.2)$$

şeklinde sonlu farklara ayrıklaştıralım. $v_0(x_i)$ yi her zaman olduğu gibi

$$(V_0)_{\bar{x}} = u_0(x_i)$$

denklemini korumak suretiyle sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olarak seçelim. Herhangi bir i, k için (2.8) eşitliği korunmaktadır. Sonuncu eşitliği ispatlamak için, önce (4.1) denklemini $(i-1, k)$ noktasında yazıp ve sonra onu (4.1) ten çıkarıp 2 ye bölmek yeterlidir.

(2.8) ifadesi dikkate alınarak $U_{i,k}$ nın

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} - \frac{h_t}{h_x} (F(U_{i,k}) - F(U_{i-1,k})) \quad (4.3)$$

nonlineer cebirsel denklem sistemini sağladığı görülür.

Teorem 4.1 $u_0(x)$ fonksiyonunun sürekli ve kompakt taşıyıcıya sahip olduğu durumda

$$E_1(t_k) = h_x \sum_i U_{i,k} \quad (4.4)$$

ifadesi zamana bağlı değildir.

İspat $E_1(t_{k+1})$ ifadesini gözönüne alalım

$$\begin{aligned} E_1(t_{k+1}) &= h_x \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_{i,k+1} = h_x \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h_x} = \\ &h_x \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{V_{i,k} - V_{i-1,k}}{h_x} - \frac{h_t}{h_x} [F(U_{i,k}) - F(U_{i-1,k})] \right\} \end{aligned}$$

$u_0(x)$ fonksiyonu kompakt taşıyıcıya sahip olduğundan (4.4) eşitliği doğrulanmaktadır. Bu ise, $E_1(t_k)$ nın k dan bağımsız olduğu anlamına gelir.

Tanım 4.1

$$E_1(0) = h_x \sum_i U_{i,0} \quad (4.5)$$

ile tanımlanan $E_1(0)$ sayısına $V_{i,k}$ ağ fonksiyonunun kritik değeri denir.

Tanım 4.2

$$V_{i,k}^{gen} = \begin{cases} V_{i,k}, & V_{i,k} < E_1(0) \\ E_1(0), & V_{i,k} \geq E_1(0) \end{cases} \quad (4.6)$$

ile tanımlanan ağ fonksiyonuna (4.1), (4.2) probleminin genişletilmiş sayısal çözümü denir. Teorem 4.1 kullanarak

$$U_{i,k}^{gen} = \left(V_{i,k}^{gen} \right)_{\bar{x}}$$

elde edilir, ve bu ifade esas problemin zayıf nümerik çözümüdür.

(4.1), (4.2) sonlu fark karılığı zaman adımına göre birinci basamaktan olmaktadır. Sözkonusu Şemanın mertebesini yükseltebiliriz. Bunun için Teorem 4.1 i dikkate alarak (4.0) denklemini

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + F(u(x,t)) = 0 \quad (4.7)$$

Şeklinde yazar sonra da örneğin Runge-Kutta metodunu uygulayarak, esas problem için h_t ye göre daha yüksek mertebeden sonlu fark karılığı elde edebiliriz.

4.2 Başlangıç-Sınır Değer Problemi

Şimdi (4.0) denkleminin (3.1), (3.2) koşulları çerçevesinde nümerik çözümlünü bulabilmek için algoritmalar geliŐtirelim. Bunu iki yolla gerçekteŐtirebiliriz. Önce aşağıdaki 1.tür yardımcı problemini

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - h_t F(U_{i,k}) \quad (4.8)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i) \quad (4.9)$$

$$U_{0,k} = u_1(t_k) \quad (4.10)$$

Şeklinde sonlu forklara ayrıklaştıralım. Burada $v_0(x_i)$ yukarıdaki bölümde gösterildiği gibi seçilmektedir. (4.8)- (4.10) probleminin çözümlü elde edildikten sonra (2.8) formülünü kullanarak (4.0), (3.1) ve (3.2) probleminin nümerik çözümlü bulunabilir. Görüldüğü gibi önerilen algoritma sade ve etkindir.

Şimdi (4.0), (3.1) ve (3.2) probleminin nümerik çözümlünü elde etmek için (4.0) denklemlü için 2.tür yardımcı denklemlü

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x u(\xi,t) d\xi + F(u(x,t)) - F(u(0,t)) = 0 \quad (4.11)$$

Şeklinde yazalım. Görüldüğü gibi (4.11) denklemindeki $u(x,t)$ fonksiyonu süreksiz de olabilir. Bu avantaj sözkonusu denklemlü direk olarak sonlu farklara ayrıklaŐtırmaya imkan sağlamaktadır.

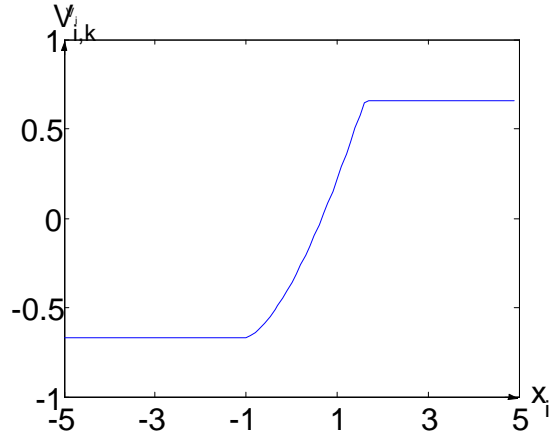
(3.8) formülünü dikkate alarak, (4.11) denkleminin aşağıdaki şekilde

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} + \frac{h_t}{h_x} \left[F(u_1(t_k)) - F(U_{i,k}) \right] - \sum_{j=1}^{i-1} (U_{j,k+1} - U_{j,k}) \quad (4.12)$$

sonlu fark karşılığını yazalım. (4.12) cebirsel denklemler sistemi (3.9) başlangıç koşulu çerçevesinde çözerek (4.0), (3.1) ve (3.2) probleminin sayısal çözümünü kolayca elde edebiliriz. Görüldüğü üzere (4.12) algoritması hesaplamalar açısından daha ekonomik ve etkindir.

4.3 Nümerik Deneyler

Önerilen nümerik yöntemin etkinliğini göstermek için bu algoritmayı çeşitli durum fonksiyonu olan iki probleme uygulayalım. İlk olarak $F(u) = u^3$ olsun ve (4.0) denklemini (2.0') başlangıç koşulu çerçevesinde çözelim. $F(u) = u^3$ fonksiyonunun gereken koşulları sağladığı açıktır.



Şekil 4.1: $F(u) = u^3$ için yardımcı problemin çözümü, $T = 1.0$

Karakteristikler metodu ile ele alınan problemin gerçek çözümü, $\xi = x - 3u^2t$ olmak üzere

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 - \xi^2, & |\xi| \leq 1 \\ 0, & |\xi| > 1 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen ifade kapalı fonksiyon olduğundan pratik amaçlarda kullanmak için net bir ifade bulmada bazı zorluklarla karşılaşmaktadır.

Ele aldığımız probleminin çözümünü elde etmek için yardımcı denklemi

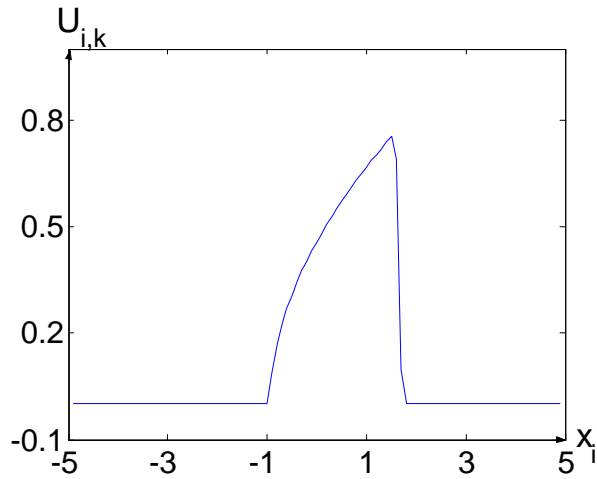
$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + u^3 = 0 \quad (4.13)$$

şeklinde yazalım. (4.13) denklemi için başlangıç fonksiyon (2.14) olmaktadır.

Söz konusu denklemin Ω_{h, h_x} ağının herhangi bir (i, k) noktasındaki sonlu fark karşılığını

$$V_{i, k+1} = V_{i, k} - h_t U_{i, k}^3 \quad (4.14)$$

şeklinde yazalım.



Şekil 4.2: $F(u) = u^3$ için esas problemin çözümü, $T = 1.0$

Literatüre göre problemin genişletilmiş ağ çözümünü

$$V_{i, k}^{gen} = \begin{cases} V_{i, k}, & V_{i, k} < \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3}, & V_{i, k} > \frac{4}{3} \end{cases} \quad (2.38)$$

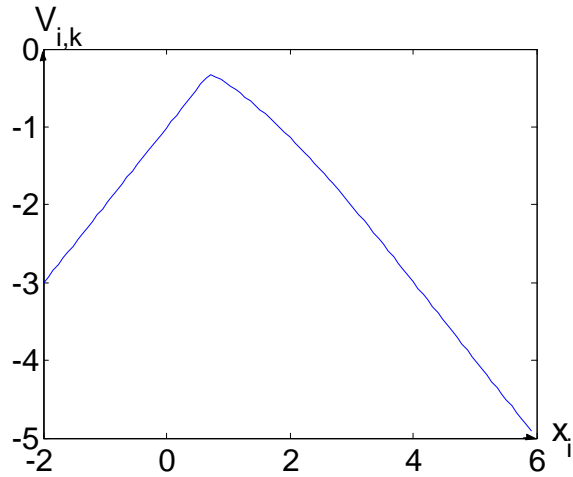
olarak inşa edebiliriz. Burada $E_1(0) = \frac{4}{3}$ olmaktadır.

Yardımcı problemin çözümünün zaman göre evrimi $T = 1.0$ değeri için Şekil 4.1 te, esas problemin çözümünün grafiği ise Şekil 4.2 da gösterilmiştir.

Şimdi, (4.0) denkleminin (2.20) başlangıç koşulu çerçevesinde nümerik çözümünü bulalım. Başlangıç verileri $u_1 = 2.0$ ve $u_2 = -2.0$ olmak suretiyle önerilen yöntemle problemin nümerik çözümü bulup bilinen gerçek çözümle kıyaslayalım. (4.14), (2.20) algoritması üzerinde yapılan bilgisayar deneylerinin sonuçlarının grafikleri sırasıyla Şekil 4.3-4.7 de gösterilmiştir.

Şekil 4.7 de aynı başlangıç verilerine sahip (4.14), (2.20) probleminin gerçek ve nümerik çözümlerinin grafiklerinin bir kıyaslaması sunulmaktadır. Şekilden görüldüğü gibi çözümde bulunan sıçrayış fiziksel açıdan doğru bir biçimde zamanın ilerleyen evrelerinde sağa doğru hareket etmektedir.

Fakat bu olgu gerçek çözümün grafiğinde gözlenmez. Çünkü, $F(u)$ fonksiyonunu konveks katmanını oluşturduğumuz zaman u fonksiyonunun hiçbir zaman katındaki evrimi dikkate alınmamaktadır. Yani konveks katman önceden verilmiş u lar üzerinde oluşturulur. Genelde, nonlinear problemler geriye dönüşü olmayan fiziksel süreçleri modeller.



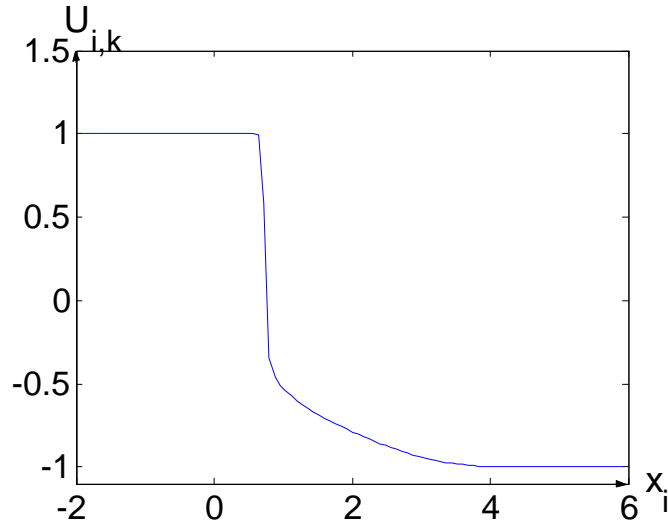
Şekil 4.3: $u_1 > u_2$ için yardımcı problemin çözümü, $T = 1.0$

Son olarak önerilen yöntemi laboratuvar ortamında yapılan petrolün su ile sıkıştırılıp çıkarılması olayın modelleyen problemin çözümüne uygulayalım.

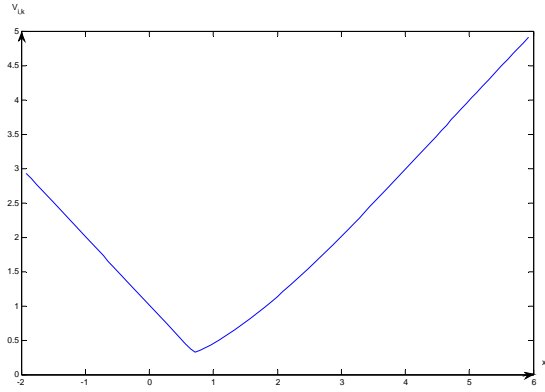
Bu deneyde tabakalı ortam modeli olarak uzunluğu $l = 1.2m$, enine kesiti $S = 9.6 \times 10^{-4} m^2$ olan ve içerisine öğütülmüş kuvars kumu doldurulan bir boru kullanılmıştır. Modelin geçirgenlik katsayısı $k = 2.22 \mu m^2$, gözenekliliği ise $m = 0.298$ olarak saptanmıştır. Petrol modeli olarak da vizkozitesi $47.9sP$ olan trafo yağı kullanılmıştır. Su ile yağ arasındaki yüzey gerilmesi $37 \mu N/m$ olmaktadır. Söz konusu borunun bir ucu basıncı $p = 0.03mPa$ olan su kaynağına bağlanmıştır. Modeldeki kalık suyun $s_0 = 0.23$ olduğu saptanmıştır ve bu fiziksel deney 54 saat sürmüştür.

Petrolün ve suyun oransal faz geçirgenlikleri ve Buckley-Lewerett fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi

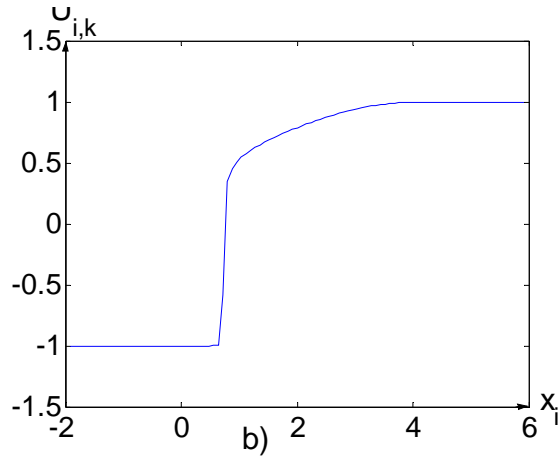
$$k_p = \frac{(0.9-s)^2}{0.15}, \quad k_s(s) = (0.5 - 0.0018T) \frac{(s-0.5)}{0.14}$$



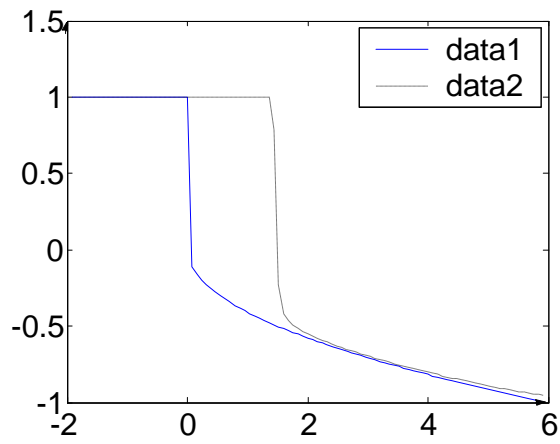
Şekil 4.4: $u_1 > u_2$ için esas problemin çözümü, $T = 1.0$



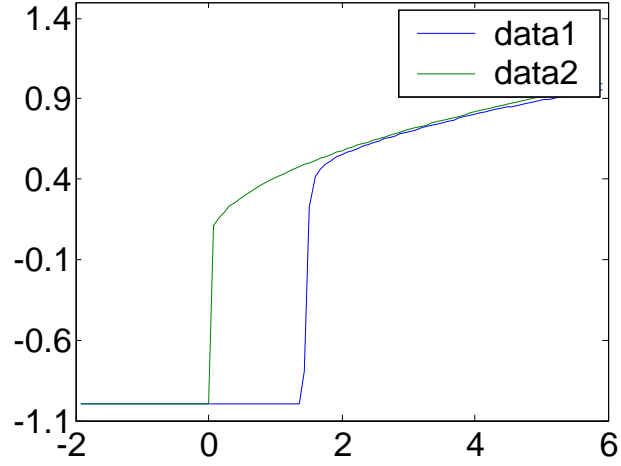
Şekil 4.5: $u_1 < u_2$ Nümerik ve gerçek çözüm, $T = 1.0$



Şekil 4.6: $u_1 < u_2$ için esas problemin çözümü, $T = 1.0$



Şekil 4.7: Nümerik ve gerçek çözüm, $T = 2.0$, $u_1 > u_2$



Şekil 4.8: Nümerik ve gerçek çözüm, $T = 2.0$, $u_1 < u_2$

$$F_s(s) = \frac{k_s(s)}{k_s(s) + \bar{\mu}k_p(s)}$$

ifade edilmektedir. $k_p(s)$, $k_s(s)$, $F_s(s)$ fonksiyonlarının grafikleri oda sıcaklığı $T = 20^\circ$ durum için sırasıyla Şekil 4.9-4.11 te gösterilmiştir.

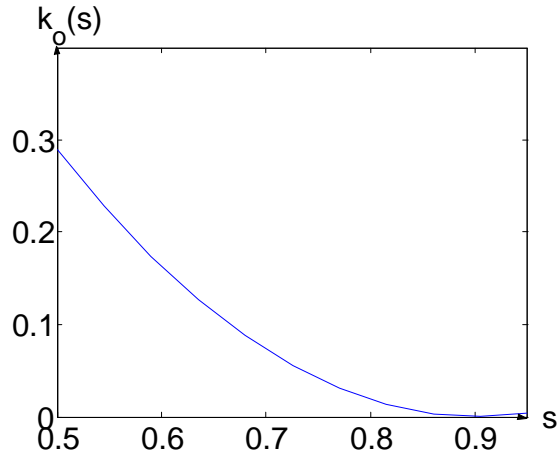
Bilindiği gibi petrolün tabakalı ortamda su ile sıkıştırılması olayının matematiksel modeli (4.0) denklemi için yazılmış (3.2) başlangıç ve (3.3) sınır koşulu yardımıyla ifade edilmektedir.

(4.0), (3.2) ve (3.3) probleminin sonlu farklar karşılığını yazmak için önce (4.0) denklemini

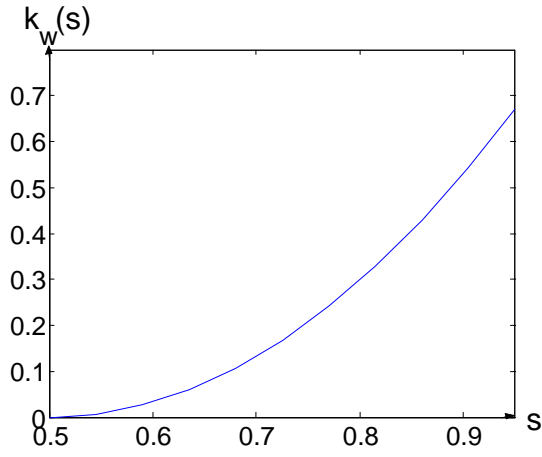
$$m \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x s(\xi, t) d\xi + u(t) (F_s(s(x, t)) - F_s(s_1(t))) = 0 \quad (4.16)$$

şeklinde yazalım. Sonra (3.8) formülünü kullanarak sonuncu denklemi aşağıdaki gibi

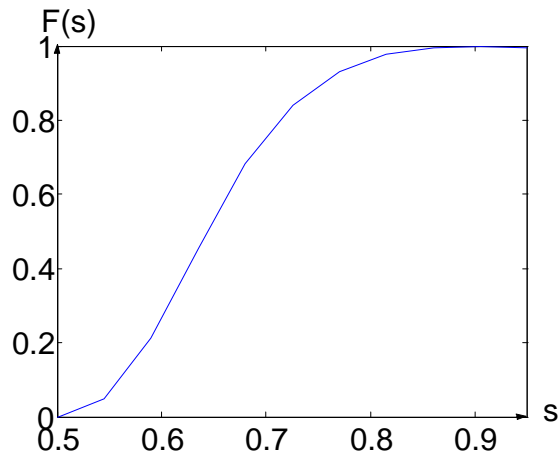
$$S_{i,k+1} = S_{i,k} + \frac{h_x u(t_k)}{h_x m} F_s(s_1(t_k)) - \frac{h_x u(t_k)}{h_x m} F_s(S_{i,k}) - \sum_{j=1}^i (S_{i,k+1} - S_{i,k}) \quad (4.17)$$



Şekil 4.9: Petrolün oransal faz geçirgenliği, $k_p(s)$



Şekil 4.10: Suyun oransal faz geçirgenliği, $k_s(s)$



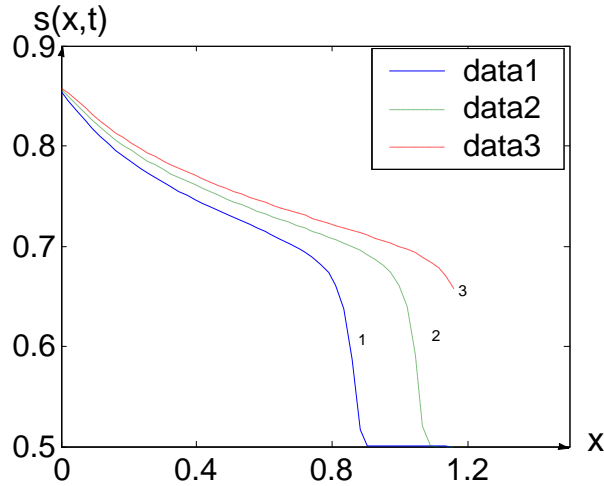
Şekil 4.11: Buckley-Lewertt fonksiyonu

sonlu farklara ayrıklaştırılm. (4.17) sistemi için başlangıçın başlangıç koşulu

$$S_{i,0} = s_0 \quad (4.18)$$

olmaktadır. (4.17), (4.18) algoritmasından elde edilen çözümlerin grafikleri $T = 10^5 s$, $T = 1.5 \cdot 10^5 s$, ve $T = 2 \cdot 10^5 s$ değerlerinde Şekil 4.12 da yer almaktadır. Şekilden görüldüğü gibi modelde sulaşma süresi, yani petrolün su ile sıkıştırılma süreci yaklaşık 54 saat olmaktadır. Dolayısıyla teorik sonuçlarla deneysel sonuçlar çok yakındır.

Not (3.8) formülünü kullanırken dikdörtgen metodu uygulanmıştır. Diğer yüksek mertebeden kuadratik formülleri kullanarak sonlu farklar şemasının mertebesini (yer değişkenine göre) yükseltebiliriz.



Şekil 4.12: Su ile doymanın dinamik dağılımı : 1) $T = 10^5 s$, 2) $T = 1.5 \cdot 10^5 s$, 3) $T = 2 \cdot 10^5 s$

5. SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür

1. Lineer ve lineer olmayan Hopf denkleminin sayısal çözümünün bulunması için yüksek çözünürlüğe sahip hasas algoritmalar üretilmiştir.
2. 1. Basamaktan nonlinear hiperbolik tür denklemler için başlangıç-sınır değer problemlerinin nümerik çözümü elde etmek için sayısal algoritmalar önerilmiş ve elde edilmiştir.
3. Petrolün su ile sıkıştırılıp çıkarılması problemin matematiksel modeli yazılmış ve sözkonusu problemin gerçek çözümü elde edilmiş.

KAYNAKLAR

- [1] Lions, J.L., Some Methods of Solution of Nonlineare Boundry Problem. Moskoı
1972, 587p.
- [2] Samarskii, A.A., Theory of Difference Schemes. Moskoı, Nauka, 1977
- [3] Abasov M.T. Rasulov, M.A., Ibrahimov T.M, Ragimova T.A., On a Method of
Sloving the Chahucy Problem for a First order Nonlinear Eşuation of Hiperbolic
Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Doc. 43, No 1. pp ,
150-153,
1991.
- [4] Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., A Numerical method of the Solution of the
Nonlinear Eşuation of a Hyperbolic Type of the First Order Differential Eşuations, Minsk, Vol. 28, No.7, pp. 2056-2063, 1992.
- [5] Guinot, V., Godunov-type Schemes: an Introduction for Engineers. Elsevier,
509p., 2003.

ÖZGEÇMİŞ

28.12.1975 – Arnavutluk doğumlu. İlk ve orta öğretimi vede lise ikiyi Arnavutlukta okudu, lise sonu ise Ankarada okudu ve buradan mezun oldu. 1995 yılında üniversite devam etme hakını kazanarak, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimler Fakültesinde Astronomi ve Uzay Bilimlerinde okumaya başladı ve Matematik bölümünden de ders tamamlayarak, 2000 yılında Astronomi ve Uzay Bilimler bölümünden ve matematik programından mezun oldu. İş hayatına girerek, banka ve sigorta sektöründe çalıştı. 2009 yılında Beykent Üniversitesi, Matematik-Bilgisayar bölümünü tarafından Uygulamalı Matematik Dalında kabul edilerek, yüksek lisans programını başladı. İş hayatında ise halen sigortacılık sektöründe çalışmakta.

Aday: Deniz GÜÇLER