T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

İKİ KEZ DEJENERE OLAN PARABOLİK DENKLEMLERİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Elif YAR

İSTANBUL, 2014

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

İKİ KEZ DEJENERE OLAN PARABOLİK DENKLEMLERİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Elif YAR

Öğrenci No:

120860006

Danışman:

Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İSTANBUL, 2014

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **‘‘İki Kez Dejenere Olan Parabolik Denklemlerin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü ’’** başlıklı bu çalışmamın bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamda kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 01.08.2014

Elif YAR

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 120860006 no'lu Elif YAR'ın 01/08/2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavı[1] sonucunda 55 (Elli beş) dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında[2] oybirliğiyle, kabul kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Başlığı[3] : İki Kez Dejenere Olan Parabolik Denklemlerin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü

Tez Sınav Jürisi		Öğretim Üyesi	İmza
Danışman	:	Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL	
Üye	:	Prof.Dr. Mahir RESULOV	
Üye	:	Yrd.Doç.Dr. Kenen ŞENTÜRK	

---

[1] Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

[2] Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi başarısız bulunan öğrencinin Enstitü ile ilişiği kesilir. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. Bu savunma sınavında da tezi kabul edilmeyen öğrencinin enstitü ile ilişiği kesilir. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

[3] İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Tezimin hazırlanması esnasında yardımlarını esirgemeyen, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV ile Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a en içten saygılarımı sunarım. Ayrıca, tüm öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi katkılarından dolayı sevgili aileme teşekkür eder, şükranlarımı sunarım.

İstanbul, 2014 Elif YAR

Adı ve Soyadı : Elif YAR

Danışmanı : Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans, 2014

Alanı : Uygulamalı Matematik

Anahtar Kelimeler : Parabolik, Nonlineer, Diferansiyellenebilme Mertebesi

ÖZ

İKİ KEZ DEJENERE OLAN PARABOLİK DENKLEMLERİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bilindiği üzere nonlineer dejenere olan parabolik tür denklemin çözümünün diferansiyellenebilme mertebesi, denklemin çözümden talep ettiği diferansiyellenebilme mertebesinden düşük olmaktadır. Bu özellik denklemin klasik çözümünün olmadığını göstermektedir. Ayrıca bu özellikten dolayı çözümün bulunması için literatürde iyi bilinen yöntemlerin uygulanması da zorluk çıkarmaktadır.

Tezde iki kez dejenere olan bir boyutlu nonlineer parabolik denklemin çözümü için bazı avantajlara sahip özel bir yardımcı problem önerilmiştir. Yardımcı problem kullanılarak sayısal çözümün belli anlamda gerçek çözüme yakınsadığı ispatlanmıştır. Süreksiz fonksiyonlar sınıfında yüksek duyarlıklı sayısal algoritmalar oluşturulmuş ve bu algoritmalar bazı problemlere uygulanmıştır.

Dört bölümden oluşan tezin ilk bölümünde, iki kez dejenere olan denklemlerin çözümünü elde etmek için gereken alt yapı incelenmiş, gerekli bilgi ve bazı kavramlar içerilmiştir.

İkinci bölümde iki kez nonlineerliğe sahip parabolik bir denklem için Cauchy problemi, sınır değer problemi ve birinci tür başlangıç-sınır değer problemi ayrı ayrı tanımlanmış ve bu problemlerin her biri için zayıf çözümler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ise, ikinci bölümdeki sonuçlar ve önerilen yardımcı problem kullanılarak, göz önüne alınan nonlineer denklemin sayısal çözümü elde edilmiş ve bunun gerçek çözüme yakınsaklığı ispatlanmıştır. Ayrıca önerilen metodun etkinliğini göstermek amacıyla bazı sayısal deneyler yapılmıştır.

Son bölümde ise Burgers denkleminin çözümünün asimptotik yapısı incelenmiştir.

Name and Surname : Elif YAR
Advisor : Assoc. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
Type and Date : Master, 2014
Field : Applied Mathematics
Key Words : Parabolic, nonlinear, Order of Differentiation

ABSTRACT

A NUMERICAL SOLUTION OF DOUBLY DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS IN A CLASS OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS

As is known, differentiability order of the solution of a nonlinear degenerate parabolic type equation is lower than the order of differentiability which is required by the solution of equation. This feature of the equation shows that there is no classical solution of the equation. Also, because of this feature implementation of the well-known methods in the literature raises difficulties to find the solution.

In this thesis, a special auxiliary problem having some advantages over the main problem has been proposed for the solution of one dimensional nonlinear doubly degenerate parabolic equation. Using the auxiliary problem, the convergence of the numerical solution to the exact solution is proven. High-precision numerical algorithms were created in a class of discontinuous functions and these algorithms have been applied to some problems.

The thesis contains four chapters. In the first chapter of the thesis the required background and the necessary information and some concepts to obtain the solutions of the doubly degenerate equations are included.

In the second chapter, Cauchy problem, boundary value problem and first-kind initial-boundary value problem are defined separately for a parabolic equation with double nonlinearity and for each of these problems the weak solutions have been introduced.

In the third chapter, using the proposed auxiliary problem and results obtained in the second chapter, the numerical solution of the nonlinear equation is obtained and the convergence of this to the exact solution is proven. Also, numerical experiments were carried out for demonstrating the effectiveness of the proposed method.

In the last chapter, the asymptotic structure of the solution of the Burgers equation is investigated.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Çağdaş matematiksel fizik problemlerinin çözümünde önemli olan konu, hangi özelliklerin fiziksel problemden, hangi özelliklerin matematiksel modellerden ortaya çıktığını bilmektir. Fiziksel problemler genelde nonlineer olduğundan dolayı, söz konusu nonlineerlik yeni fiziksel özellikler barındırmaktadır. Örneğin, dalgaların dağılım hızının sonlu olması, kontakt süreksizlikleri, bifügrasyonlar vs. Bu tür fiziksel özellikleri matematiksel ifade etmek için klasik matematiğin yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, çağdaş fiziksel problemlerin çözümü yeni matematiksel yöntemler talep etmekle birlikte, modern bilgisayar tekniğinin kullanılmasını zorunlu kılmıştır. Bu nedenle herhangi bir çağdaş fiziksel problemin çözümünü araştırmak için aşağıdaki etapları gerçekleştirmek gerekmektedir:

1. Fiziksel problemi yeterince düzgün ifade edebilen matematiksel modellerin, yani diferansiyel denklem veya denklemler sistemi için uygun başlangıç ve(veya) sınır koşullarının yazılması;

2. Matematiksel problemin etkin çözüm algoritmalarının yazılması ve bunların bilgisayarda gerçekleştirilmesi;

3. Alınan sonuçların fiziksel yorumlanması ve irdelenmesi.

Bu model çerçevesinde yapılan işler çağdaş matematiksel fizik bilim dalının teorik temellerini çok geniş şekilde geliştirdi ve şimdi bunların yardımı ile kuantum fiziğinin, hidrodinamiğin, aerodinamiğin zor problemleri çözülmektedir.

Nonlineer problemleri incelemek için henüz genel bir yöntem bulunmamaktadır. Bir nonlineer problem için geçerli olan bir yöntem aynı sınıftan ama farklı nonlineerlik hali için geçerli olmayabilir. Bu nedenle her bir nonlineer problem için özel yöntemlerin oluşturulması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır.

Nonlineer denklemleri incelemeden önce lineer denklemlerin genel teorisi hakkında kısa bilgiler verelim.

1.1 İki Değişkene Bağlı Kısmi Türevli Denklemlerin Sınıflandırılması

İkinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması için baş kısmı lineer olan

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\quad F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $(x,y)\in Q$ bağımsız değişkenler; a , b , c ve F kendi argümanlarına göre bilinen fonksiyonlar olmaktadır.

(1.1) denklemini ısı, dalga veya Laplace denklemlerinden birisine benzetecek şekilde a, b ve c katsayıları için koşullar araştıralım. Bunun için a, b ve c katsayılarının aynı anda sıfır olmadığını ve $u(x,y)$ fonksiyonunun her iki değişkene göre ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olduğunu varsayalım.

Amacımıza ulaşmak için x, y değişkenlerinden yeni ξ ve η değişkenlerine geçişi aşağıdaki

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y) \tag{1.2}$$

dönüşümü ile yapalım. Buradaki ξ ve η fonksiyonlarının x ve y ye göre iki kez diferansiyellenebilir olduğunu ve ayrıca aşağıdaki Jakobiyenin Q tanım bölgesinde

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

olduğunu varsayalım. Böylece (1.2) sistemini x ve y değişkenlerine göre çözmek mümkün olur ve bu durumda

$$x=x(\xi,\eta),\quad y=y(\xi,\eta)$$

fonksiyonları da süreklidir. (1.1) denklemini yeni ξ ve η değişkenlerine göre yazabilmek için (1.2) dönüşümü yardımıyla denklemde görülen kısmi türevleri hesaplayalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \quad (1.6)$$

(1.3), (1.4), (1.5) ve (1.6) ifadeleri (1.1) denkleminde yerine konulup, düzenlenirse

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+ \quad F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta})=0 \quad (1.7)$$

olduğu görülebilir. Burada,

$$A=a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$B=a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+b(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+c(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$C=a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

olmaktadır. Gösterelim ki, $(x_0,y_0)\in Q$ noktası etrafında $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ öyle seçilebilir ki, (1.7) denkleminin katsayıları (x_0,y_0) noktası etrafındaki (x,y) ler için aşağıdaki: 1) $A=C=0$; 2) $A=B=0$; 3) $A=C$, $B=0$ durumlarına indirgenebilir.

I. Önce (1.2) değişken dönüşümünü öyle seçelim ki, (1.7) denkleminde $A=C=0$ ve $B\neq 0$, yani

$$a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=0, \quad (1.8)$$

$$a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2=0 \quad (1.9)$$

olsun. Burada, $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ bilinmeyen fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar için 1. mertebeden nonlineer diferansiyel denklemler ele alınmaktadır. Göründüğü gibi (1.8), (1.9) aynı diferansiyel denklemler olmaktadırlar. Onlarda yalnız bilinmeyen fonksiyonların isimleri farklıdır. Bundan dolayı eğer, (1.8) denkleminin iki tane lineer bağımlı olmayan çözümünden birini $\xi(x,y)$, diğerini ise $\eta(x,y)$ ile gösterirsek, (1.8), (1.9) denklemlerinin korunduğu açıktır.

Eğer

$$z = -\frac{\partial\xi/\partial x}{\partial\xi/\partial y}$$

dersek, (1.8) denklemini

$$a(x,y)z^2 - 2b(x,y)z + c(x,y) = 0$$

veya

$$a(z-z_1)(z-z_2) = 0$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $z_{1,2} = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ olmaktadır. Böylelikle (1.8) eşitliği

$$a(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial x} + (b + \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \tag{1.10}$$

$$a(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial x} + (b - \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0 \tag{1.11}$$

biçiminde iki denkleme parçalanmış olur.

Adi diferansiyel denklemler konusundan bilindiği üzere (1.10) ve (1.11) denklemleri iki değişkene bağlı birinci mertebeden kısmi türevli homojen diferansiyel denklemler olmaktadır. Açıktır ki, (1.10) ve (1.11) denklemleri için Cauchy probleminin çözümü adi diferansiyel denklemler sisteminin çözümünün bulunmasına indirgenebilir.

Sonraki işlemlerimizde kolaylık sağlamak için aşağıdaki denklemi göz önüne alalım

$$f_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{1.12}$$

Görüldüğü üzere (1.12) $z(x,y)$ fonksiyonuna göre lineer denklemdir. (1.10) ve (1.11) denklemleri de aynı cinsten denklemlerdir. (1.12) ye karşılık gelen karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{f_1(x,y)} = -\frac{dy}{f_2(x,y)},$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)} \tag{1.13}$$

biçiminde olmaktadır. Şimdi (1.13) denklemi için Cauchy problemini göz önüne alalım, yani söz konusu denkleme

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.14}$$

başlangıç koşulunu ekleyelim. (1.13), (1.14) problemi için varlık ve teklik teoreminin koşullarının hepsi sağlanmaktadır. Buna ek olarak, (x_0, y_0) noktasının komşuluğunda $f_1(x,y)$ ve $f_2(x,y)$ fonksiyonlarının y değişkenine göre sürekli kısmi türevlerinin mevcut ve $f_1(x,y) \neq 0$ olduğunu varsayalım.

Eğer ξ ve η fonksiyonlarını (x_0, y_0) noktasından geçen ve (1.10), (1.11) denklemlerinin karakteristiklerine dokunmayan $l_i, (i = 1,2)$ eğrileri boyunca değerini versek, (1.10), (1.11) denklemlerinin $\varphi_i = \varphi_i(x,y), \quad (i = 1,2)$ çözümlerini elde ederiz. Ayrıca, eğer $l_i, (i = 1,2)$ eğrilerini ve bunlar üzerinde verilmiş fonksiyonların gerekli olduğu kadar pürüzsüz olduğunu varsayarsak, bu durumda x ve y değişkenine göre sürekli birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevleri olan $\varphi_i = \varphi_i(x,y), \quad (i = 1,2)$ çözümlerini elde ederiz. (1.13), (1.14) probleminin çözümünü

$$y = \varphi(x_0, y_0, x) \tag{1.15}$$

ile gösterelim. Şarta göre x_0 değeri verildiğinde y_0 da sabit kabul edilebilir, yani $y_0 = c$ olabilir. (1.15) kapalı fonksiyonunu y_0 a göre çözelim ve bulunan çözümü

$$y_0 = \psi(x_0, x, y) \tag{1.16}$$

ile gösterelim.

Varlık ve teklik teoremine göre (x_0, y_0) başlangıç noktasının verilmesi belli bölgede çözümün $l_i, \quad (i = 1,2)$ eğrileri üzerinde değişken (x,y) noktasını tek değerli olarak tanımlayabilir. Bu (1.15) ifadesine denk gelir. Eğer (x,y) ve (x_0, y_0) noktalarının rollerini değiştirirsek, yani (x,y) yi başlangıç noktası kabul edersek, varlık ve teklik teoremine göre (x_0, y_0) noktasında bir değerli tanımlanabilir. Bu ise (1.16) ya denk olur. $y_0 = c$ olduğunu göz önüne alırsak

$$y = \varphi(x, c) \tag{1.17}$$

veya

$$c = \psi(x, y) \tag{1.18}$$

buluruz.

Açıktır ki, (1.17) belli bir bölgede (1.13) denkleminin genel çözümü olmaktadır. Burada $\psi(x, y)$ öyle fonksiyondur ki, genelde sabit olmayıp (1.13) denkleminin her bir integral eğrisi üzerinde sabit değer almaktadır.

Tanım 1.1 (1.18) ifadesine (1.13) denkleminin birinci aralık integrali denilir.

Görüldüğü gibi, aramakta olduğumuz ξ ve η fonksiyonları (1.10) ve (1.11) denklemlerinin çözümlerine bağımlıdırlar.

Lemma 1.1 Eğer (1.16) ifadesi (1.13) denkleminin integral eğrisi ise, bu durumda $z = \psi(x, y)$ fonksiyonu (1.12) denkleminin çözümüdür ve tersine, eğer $z = \psi(x, y)$ fonksiyonu (1.12) denkleminin çözümü ise, bu durumda (1.16) ifadesi (1.13) denkleminin genel integrali olmaktadır.

İspat. (1.16) da (1.13) denkleminin herhangi bir $y = y(x)$ çözümü yerine konursa alırız $c = \psi(x, y)$ ifadesini (2.18) den buluruz

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

olur. (1.13) göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{f_2(x, y(x))}{f_1(x, y(x))} = 0$$

veya

$$f_1(x, y(x))\frac{\partial \psi}{\partial x} + f_2(x, y(x))\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{1.19}$$

olur. (1.19) denklemi integral eğrileri boyunca sağlandığından (1.19) dan, henüz sonucu söylemek daha erkendir. (1.12) denklemi ise, zaten keyfi x, y ler için sağlanmaktadır. Varlık ve teklik teoremine göre tanım bölgesinin keyfi x, y noktasından tek bir integral eğrisi geçtiğinden dolayı, yukarıda bahsedildiği gibi bölgenin tüm noktaları için de geçerli olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $z = \psi(x, y)$, (1.12) denklemini sağlamaktadır. Böylece lemmanın birinci tarafı ispatlanmış oldu. İkinci tarafı ispatlamak için farzedelim ki, $z = \psi(x, y)$

fonksiyonu (1.12) denkleminin sabitten özdeş olarak farklı olan çözümüdür, yani

$$f_1(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x} + f_2(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial y} \equiv 0$$

dır. Özel durumda, (1.13) ifadesinde keyfi $y = y(x)$ çözümü yerine konursa özdeş eşitlik elde ederiz ve sonuç

$$\frac{d}{dx}[\psi(x, y(x))] = 0$$

veya

$$\psi(x,y) = c$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle, $\psi(x,y)$ fonksiyonu genelde sabit olmayıp (1.13) ün tanım bölgesinin keyfi integral eğrisi boyunca sabit değer almaktadır. Bu ise $\psi(x,y) = c$ ifadesinin (1.13) denkleminin birinci integrali olduğu anlamına gelmektedir.

Şimdi bu söylediklerimizi (1.10), (1.11) denklemleri için uygulayalım. Onlara karşılık gelen karakteristik denklemleri aşağıdaki şekilde yazalım

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b - \sqrt{b^2 - ac}},$$

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b + \sqrt{b^2 - ac}}$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{1.20}$$

(1.20) denklemlerinin birinci integrallarini sırasıyla

$$\varphi(x,y) = c_1, \quad \psi(x,y) = c_2 \tag{1.21}$$

ile gösterelim.

Tanım 1.2 (1.21) ifadelerine (1.1) denkleminin *karakteristikleri* denilir. (1.20) denklemlerine ise *karakteristiklerin diferansiyel denklemi* denir.

Tanım 1.3 $D = b^2 - ac$ ifadesine (1.7) denkleminin *diskriminantı* adı verilir.

$b^2 - ac > 0$ olduğu durumda (1.7) denklemine *hiperbolik* tür denklem denir. Görüldüğü gibi $b^2 - ac > 0$ olduğu durumda (1.1) denkleminin iki çeşit karakteristikler ailesi vardır. Tanım bölgesinin keyfi noktasından her ailenin bir karakteristik eğrisi geçmiş olur.

Genel olarak, (1.1) denklemi için karakteristikler ailesinin diferansiyel denklemi

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)(dx)^2 = 0 \qquad (1.22)$$

biçiminde de yazılabilir. $a(x,y) \neq 0$ olduğundan (1.10) ve (1.11) den görüldüğü gibi, eğer $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ ve $\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$ olursa, (x_0, y_0) noktasının komşuluğunda

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (b + \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$a(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial x} + (b - \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

buluruz. Buradan ise

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \psi}{\partial x} \equiv \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{b - \sqrt{b^2 - ac}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (1.23)$$

dır. $b^2 - ac > 0$ olduğundan $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$ olur. Yani

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y) \qquad (1.24)$$

olarak alınabilir. Bu dönüşümden sonra (1.7) denkleminde $A = 0$, $C = 0$ olmakta ve böylece (1.7) denklemi

$$2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \qquad (1.25)$$

formunu almaktadır. Buradan

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)J^2 \qquad (1.26)$$

olduğu kolayca görülür. Yani, (1.24) dönüşümünden sonra (1.1) denklemi invaryant kalmaktadır. Sonuç olarak (1.26) dan $B \neq 0$ buluruz. Bu durumda (1.25) den

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (1.27)$$

elde ederiz. (1.27) denklemine (1.1) 2. mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin *1. kanonik şekli* denir. Eğer (1.27) denkleminde

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta \qquad (1.28)$$

değişken dönüşümü yapar ve (1.27) nin içerdiği türevleri yeni α ve β değişkenleri cinsinden ifade edersek,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\frac{\partial \beta}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}$$

buluruz. Sonuncu ifadeyi (1.27) de yerine yazarsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + F_2\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = 0 \tag{1.29}$$

elde ederiz. (1.29) denklemine (1.1) denkleminin *2. kanonik şekli* denir.

Örnek 1.1 $u_{tt} - \kappa^2 u_{xx} = 0$ dalga denkleminin türünü belirleyiniz.

Çözüm. $a = 1$, $b = 0$, $c = -a^2$ ve $b^2 - 4ac = 4\kappa^2 > 0$ olduğundan dalga denklemi her yerde hiperboliktir.

Karakteristik denklemi $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \pm\kappa$ dır. Bu denklemin çözümünden $x = \pm\kappa t + c$ veya $\xi = x - \kappa t$, $\eta = x + \kappa t$ elde ederiz. Buradan, $u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$, $u_{tt} = \kappa^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$ olur. Böylece dalga denklemi $-4\kappa^2 u_{\xi\eta} = 0$ biçimini alır. $\kappa \neq 0$ olduğundan $u_{\xi\eta} = 0$ denklemi iki kez integre edilerek, dalga denkleminin çözümü φ ve ψ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

veya

$$u(x, t) = \varphi(x - \kappa t) + \psi(x + \kappa t)$$

olarak bulunur.

Örnek 1.2 $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$ denkleminin karakteristiklerini bulunuz ve denklemi kanonik şekle indirgeyiniz.

Çözüm. $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$ ve $b^2 - 4ac = 16 > 0$ olduğundan denklem hiperbolik türdendir. Karakteristik denklemleri ve karakteristikleri

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2a}\left(b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)=\frac{1}{2}\left(-2\pm\sqrt{16}\right)$$

Buradan birinci aralık integrallerini sırasıyla $x-y=c_1$ ve $y+3x=c_2$ olarak elde ederiz.

Şimdi $\xi=x-y$, $\eta=y+3x$ olarak kabul edelim. Buradan

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi+3u_\eta,\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=-u_\xi+u_\eta,$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}=u_{\xi\xi}+6u_{\xi\eta}+9u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}$$

$$=-u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+3u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$$

olur. Kısmi türevlerin hesaplanan bu değerleri verilen denklemde yerine konulursa

$$u_{\xi\xi}+6u_{\xi\eta}+9u_{\eta\eta}-2(-u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+3u_{\eta\eta})-3(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})-u_\xi+u_\eta=0$$

olur ve buradan

$$16u_{\xi\eta}-u_\xi+u_\eta=0$$

veya

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{16}\left(u_\xi+u_\eta\right)=0$$

elde ederiz.

Örnek 1.3 $x^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ denklemini kanonik forma indirgeyiniz.

Çözüm. $a=x^2$, $b=0$, $c=-y^2$ ve $b^2-4ac=4x^2y^2>0$ olduğundan denklem hiperbolik türdendir. Karakteristiklerin denklemi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2a}\left(b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)=\pm\frac{y}{x}$$

ifadesinden birinci aralık integralleri

$$c_1=\frac{y}{x},\ ve\ c_2=xy$$

olarak bulunur. $\xi(x,y)=xy$, $\eta(x,y)=\dfrac{y}{x}$ kabul edersek

$$u_x=u_\xi \xi_x+u_\eta \eta_x=yu_\xi-\frac{y}{x^2}u_\eta,\ \ u_y=u_\xi \xi_y+u_\eta \eta_y=xu_\xi+\frac{1}{x}u_\eta,$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi \xi_{xx}+u_\eta \eta_{xx}=y^2u_{\xi\xi}-2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta}+\frac{y^2}{xy}u_{\eta\eta}+2\frac{y}{x^3}u_\eta,$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi \xi_{yy}+u_\eta \eta_{yy}=x^2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+\frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}$$

elde edilir. Bu ifadeler verilen denklemde yerine konulursa

$$x^2\left(y^2u_{\xi\xi}-2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta}+\frac{y^2}{xy}u_{\eta\eta}+2\frac{y}{x^3}u_\eta\right)-y^2\left(x^2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+\frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}\right)=0,$$

$$-4y^2u_{\xi\eta}+2\frac{y}{x}u_\eta=0$$

olur ve buradan $u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{2xy}u_\eta=0$ veya $u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{2\xi}u_\eta=0$ bulunur.

II. Şimdi varsayalım ki, diskriminant

$$b^2-ac=0 \tag{1.30}$$

olsun. Yukarıda (1.1) denkleminin $a(x,y)$, $b(x,y)$ ve $c(x,y)$ katsayılarının aynı anda sıfır olmadığını varsaymıştık. (1.30) şartı çerçevesinde a ve c katsayılarından biri sıfırdan farklı olmalıdır. $a\neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (1.10) ve (1.11) denklemleri aynı olmaktadır, yani

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}+b\frac{\partial\xi}{\partial y}=0 \tag{1.31}$$

olur. Açıktır ki, (1.31) denkleminin her bir çözümü (1.30) koşulu çerçevesinde

$$b\frac{\partial\xi}{\partial x}+c\frac{\partial\xi}{\partial y}=0 \tag{1.32}$$

denkleminin de çözümü olmaktadır. Eğer (1.2) değişken dönüşümünde $\xi=\varphi(x,y)$ olursa $A=0$ olur, ama $\eta=\psi(x,y)$ dönüşümü hakkında henüz hiç bir bilgi yoktur.

(1.31) denklemine denk olan karakteristik denklemi yazalım

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \qquad veya \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}. \tag{1.33}$$

Açıktır ki, (1.33) denkleminin birinci integrali $\varphi(x,y) = c$ cinsindendir ve $\xi = \varphi(x,y)$ fonksiyonu (1.31) i sağlamaktadır. $\eta = \psi(x,y)$ fonksiyonu için

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

koşulunu sağlayan sürekli diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyon ele alabiliriz. Örneğin, $\varphi(x,y) = x$ kabul edebiliriz. (1.7) denkleminde $A = 0$ olduğu açıktır. B katsayısını da

$$B = a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + b(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + c(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$= \left(a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(b\frac{\partial \varphi}{\partial x} + c\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

olarak buluruz. (1.31) ve (1.32) ifadeleri göz önüne alınırsa $B = 0$ olur. Böylelikle $\psi(x,y)$ fonksiyonunun nasıl bulunacağından bağımsız olarak (1.7) de $B = 0$ olur. Şimdi, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ ifadesinin katsayısını hesaplayalım

$$C = a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(a\frac{\partial \psi}{\partial x} + b\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2$$

Burada, $J = 0$ olamayacağı için $C \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda (1.7) denklemi

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{1.34}$$

formunda yazılabilir. (1.34) denklemine *parabolik tip denklemin kanonik şekli* denir.

Eğer F_3 fonksiyonu kendi argümanlarına göre lineer olursa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = A_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + C_1 u + D \tag{1.35}$$

alırız. (1.35) denklemini daha basit biçimde yazmak için $u(\xi,\eta)=z(\xi,\eta)v(\xi,\eta)$ değişken dönüşümü yapalım. $v(\xi,\eta)$ fonksiyonunu aşağıda belirteceğiz. Bundan dolayı (1.35) denklemini şöyle yazacağız

$$v\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta}=A_1 v\frac{\partial z}{\partial\xi}+B_1\frac{\partial z}{\partial\eta}+C_2 z+D_1. \tag{1.36}$$

(1.36) denkleminde biz yalnız z , $\frac{\partial z}{\partial\xi},\frac{\partial z}{\partial\eta}$ ile ilişkili ifadeleri tuttuk ve geri kalan ifadeleri ise C_2 ile gösterdik. Şimdi $v(\xi,\eta)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki, (1.36) denkleminde $\frac{\partial z}{\partial\eta}$ nin katsayısı sıfıra eşit, yani

$$2\frac{\partial v}{\partial\eta}-B_1 v=0 \tag{1.37}$$

olsun. Bu durumda (1.36) denklemi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=A_1\frac{\partial z}{\partial\xi}+C_3 z+D_2 \tag{1.38}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$C_2=\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+A_1\frac{\partial v}{\partial\xi}+B_1\frac{\partial v}{\partial\eta}+C_1 v,\quad C_3=\frac{C_2}{v},\quad D_2=\frac{D_1}{v}$$

dır. (1.37) denkleminden $v(\xi,\eta)$ fonksiyonunu

$$v(\xi,\eta)=\exp\left(\frac{1}{2}\int b_1(\xi,\eta)d\eta\right)$$

olarak buluruz.

Örnek 1.4 $k^2=$ sabit olmak üzere $u_t-k^2u_{xx}=0$ ısı veya difüzyon denkleminin türünü belirleyiniz.

Çözüm. Burada $a=0,\ \ b=0,\ \ c=-k^2$ ve $b^2-4ac=0$ olur, yani difüzyon denklemi parabolik türdendir.

Örnek 1.5 $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$ denklemini kanonik forma indirgeyiniz.

Çözüm. Bu durumda $a=1,\ \ b=2,\ \ c=1$ ve $b^2-4ac=0$ olduğundan denklem parabolik olur.

Karakteristiklerin denklemi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2a}\left(b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)=1$$

olur ve integralleme ile birinci aralık integrali $y=x+c$ veya $x-y=c_1$ olarak elde edilir. Bu durumda, $\xi(x,y)=x-y$, $\eta(x,y)=x$ olarak alınırsa

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi+u_\eta,\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=-u_\xi,$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}=-u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}=u_{\xi\xi}$$

bulunur. Hesaplanan bu değerler verilen denklemde yerine konulursa

$$u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}+2(-u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta})+u_{\xi\xi}=0$$

veya

$$u_{\eta\eta}=0$$

elde edilir.

III. Son olarak, $b^2-ac<0$ durumunu inceleyelim. Fakat bu durumda *a,b* ve *c* katsayılarının analitik fonksiyonlar olduğunu varsayalım. O halde (1.10) ve (1.11) denklemlerinin katsayıları analitik fonksiyonlardır. Farz edelim ki,

$$\varphi(x,y)=\varphi^*(x,y)+i\varphi^{**}(x,y)$$

(1.10) denkleminin analitik çözümüdür ve $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|\neq 0$ dır. (1.2) değişken dönüşümünde

$$\xi=\varphi^*(x,y),\quad \eta=\varphi^{**}(x,y) \tag{1.39}$$

kabul edelim. (1.39) denklemleri x ve y değişkenlerine göre çözülebilir, çünkü

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix} \tag{1.40}$$

Jakobiyeni tanım bölgesinde sıfırdan farklıdır. Eğer (1.10), (1.11) denklemlerini reel ve sanal kısımlarına ayırırsak

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}=-b\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{ac-b^2}\,\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}=-b\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{ac-b^2}\,\frac{\partial\eta}{\partial y} \tag{1.41}$$

elde ederiz. (1.41) denklemlerinden $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ ifadeleri (1.40) da yerine konursa

$$J=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]$$

ifadesini buluruz. Buradan görünür ki , determinantın sıfıra eşit olması için $\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=0$ sağlanmalıdır. O zaman, $\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=0$ olduğunu da (1.41) den görürüz. Böyle noktalar, zaten tanım bölgesinde yoktur. Aksi halde $\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=0$ olurdu.

Şimdi

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$$

ifadesini reel ve sanal kısımlarına ayırırsak

$$a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=a\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2, \tag{1.42}$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0 \tag{1.43}$$

buluruz. Açıktır ki, $a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2$ kuadratik formun ($b^2-ac<0$) tanımlı olduğundan dolayı (1.41) ifadesinin sağ ve sol taraflarının sıfıra eşit olması için

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=0 \tag{1.44}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Zaten $\varphi(x,y)$ fonksiyonu, (1.44) tanım bölgesinin hiç bir noktasında sıfıra eşit olmayacak şekilde seçilmiştir. O halde (1.7) denkleminde $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ ve $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ ifadelerinin katsayıları eşit ve sıfırdan farklı olurlar; C katsayısı ise sıfıra eşit olur. Bu durumda (1.7) aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_4(\xi,\eta,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}) \tag{1.45}$$

formunda yazılabilir. (1.45) denklemine *eliptik tip denklemin kanonik şekli* denir.

Örnek 1.6 $u_{xx}+u_{yy}=0$ Laplace denkleminin eliptik olduğunu gösterelim.

Çözüm. $a=1,\ b=0,\ c=1$ ve $b^2-4ac=-4<0$ olduğundan Laplace denklemi eliptiktir.

Örnek 1.7 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ denkleminin karakteristik denklemlerini ve karakteristiklerini bularak, kanonik şekle indirgeyiniz.

Çözüm. $a=1,\ b=-2,\ c=2$ ve $b^2-4ac=-4<0$ olup, denklem eliptik türdendir. Karakteristik denklemleri

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2a}\left(b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)=\frac{1}{2}\left(-2\pm\sqrt{-4}\right)=-1\pm i$$

olmaktadır. Bu ifadelerin integrallenmesiyle aralık integralleri $y=(-1\pm i)x+c_1$ veya $c_1=y+x\mp ix$ olarak buluruz. Burada, $\xi(x,y)=\varphi(x,y)=y+x$, $\eta(x,y)=\psi(x,y)=x$ olarak alınırsa

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\xi_x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\xi_x\eta_x+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\eta_x^2+\frac{\partial z}{\partial\xi}\xi_{xx}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\eta_{xx}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\xi_y^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\xi_y\eta_y+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\eta_y^2+\frac{\partial z}{\partial\xi}\xi_{yy}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\eta_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\xi_x \xi_y + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\left(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\eta_x \eta_y + \frac{\partial z}{\partial \xi}\xi_{xy} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\eta_{xy}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$$

bulunur. Hesaplanan bu değerler verilen denklemde yerine konulursa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0$$

elde edilir.

Aşağıdaki örneklerde, biraz daha zor problemler ele alınacaktır.

Örnek 1.8 $xu_{xx} + u_{yy} = x^2$ denkleminin karakteristik denklemini ve karakteristiklerini bularak, kononik şekle indirgeyiniz.

Çözüm. Bu problemde $a = x,\ \ b = 0,\ \ c = 1$ ve $b^2 - 4ac = -4x$ dir. Denklem, $x < 0$ ise hiperbolik, $x = 0$ ise parabolik, $x > 0$ ise eliptik olur.

Karakteristiklerin denklemini

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2A}\left(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right) = \frac{\pm\sqrt{-4x}}{2x} = \frac{\pm 2\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}\sqrt{-x}} = \pm\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

şeklinde yazalım. Buaradan birinci integralleri $y = \pm 2\sqrt{-x} + c$ şeklinde elde edilir. $x < 0$ için denklem hiperbolik olacağından, denklemi kanonik şekle indirgemek için

$$\xi(x, y) = y + 2\sqrt{-x}, \quad \eta(x, y) = y - 2\sqrt{-x}$$

dönüşümlerini göz önüne alalım. Verilen denklemdeki kısmi türevler

$$\xi_x = -\frac{1}{\sqrt{-x}},\ \ \xi_y = 1,\ \ \xi_{xx} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(-x)^{3/2}},\ \ \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = \frac{1}{\sqrt{-x}},\ \ \eta_y = 1,\ \ \eta_{xx} = \frac{1}{2}\frac{1}{(-x)^{3/2}},\ \ \eta_{yy} = 0$$

ifadeleri yardımıyla

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\left(-\frac{1}{x}\right)+2u_{\xi\eta}\left(\frac{1}{x}\right)+u_{\eta\eta}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{(-x)^{3/2}}u_\xi+\frac{1}{2}\frac{1}{(-x)^{3/2}}u_\eta,$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$$

olarak bulunur. Bu sonuçlar verilen denklemde yerine konursa

$$4u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(u_\eta-u_\xi\right)=x^2$$

olur. Sonuncu denklemde $\sqrt{-x}=\dfrac{\xi-\eta}{4}$ ve $x^2=\dfrac{(\xi-\eta)^4}{16^2}$ idafeleri yerine yazılırsa verilen denklemin

$$u_{\xi\eta}=\frac{1}{4}\frac{(\xi-\eta)^4}{16^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\xi-\eta}\left(u_\eta-u_\xi\right)$$

birinci kanonik ifadesi elde edilir.

Diğer taraftan, $x>0$ için $\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ ifadesinden integralleme ile $y=\pm 2i\sqrt{x}+c$ elde ederiz. Bu durumda

$$\xi(x,y)=y+2i\sqrt{x},\quad \eta(x,y)=y-2i\sqrt{x}$$

dönüşümlerini alırız. Denklemi kanonik şekle indirgemek için aşağıdaki şekilde tanımlanan ξ ve η değişkenlerini

$$\alpha=\frac{1}{2}(\xi+\eta)=y,\quad \beta=\frac{1}{2i}(\xi-\eta)=2\sqrt{x}$$

kullanalım. Buradan

$$\alpha_x=0,\ \alpha_y=1,\ \alpha_{xx}=0,\ \alpha_{xy}=0,\ \alpha_{yy}=0,$$

$$\beta_x=\frac{1}{\sqrt{x}},\ \beta_y=0,\ \beta_{xx}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}},\ \beta_{yy}=0$$

olduğundan verilen denklemin kanonik şekli

$$x\left(u_{\alpha\alpha}\alpha_x^2+2u_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_x+u_{\eta\eta}\beta_x^2+u_\alpha\alpha_{xx}+u_\beta\beta_{xx}\right)+$$

$$+\left(u_{\alpha\alpha}\alpha_y^2+2u_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_y+u_{\beta\beta}\beta_y^2+u_\alpha\alpha_{yy}+u_\beta\beta_{yy}\right)=\left(\frac{\beta}{2}\right)^4$$

veya

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}u_\beta=\left(\frac{\beta}{2}\right)^4$$

olur. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\beta}$ olduğundan sonucu

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}-\frac{1}{\beta}u_\beta=\left(\frac{\beta}{2}\right)^4$$

olarak yazabiliriz.

Örnek 1.9 $(\ell+x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$ denkleminin ℓ ye bağlı olarak hiperbolik, parabolik ve eliptik tür olduğu bölgeleri belirleyiniz .

Çözüm. Bu örnek için $a(x,y)=\ell+x$, $b(x,y)=xy$, $c=y^2$, diskriminant ise

$$b^2-ac=x^2y^2+y^2(\ell+x)=y^2(x^2+x+\ell) \quad (1.46)$$

dır. (1.46) yı $b^2-ac=y^2(x-x_1)(x-x_2)$ şeklinde yazalım. Burada

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-4\ell}}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1-4\ell}}{2}$$

olmaktadır.

i) Eğer $\ell=\dfrac{1}{4}$ olursa, eliptiklik bölgesi kaybolur ve $x_1=x_2=-\dfrac{1}{2}$ olur. Bu durumda $x=-\dfrac{1}{2}$ noktasında denklem parabolik olur.

ii) $\ell>\dfrac{1}{4}$ olursa denklem tanım bölgesinin keyfi noktasında eliptik türe ait olur.

iii) $\ell<\dfrac{1}{4}$ olursa, x_1 ve x_2 reel ve farklı olur. $x_1<x$ ve $x>x_2$ olduğunda denklem hiperbolikdir. Ayrıca $x_1<x<x_2$ eliptiklik bölgesi, $x=x_1$ ve $x=x_2$ ise denklemin parabolik olduğu bölge olur.

Örnek 1.10 $u_{xx}+xu_{yy}=0$ denklemini kanonik şekle dönüştürünüz.

Çözüm. ***i)*** $x<0$ olduğu durumu göz önüne alalım ve b^2-ac diskriminantını hesaplayalım, $a(x,y)=1$, $b(x,y)=0$, $c=x$ olduğundan $b^2-ac=-x$ olur. Bu durumda denklem hiperboliktir. Karakteristik denklemleri

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{-x},\quad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{-x}$$

dır. Karakteristik denklemlerin çözümleri

$$C=\frac{3}{2}y+\left(\sqrt{-x}\right)^3,\quad C=\frac{3}{2}y-\left(\sqrt{-x}\right)^3$$

olmaktadırlar. Buradan,

$$\xi=\frac{3}{2}y+\left(\sqrt{-x}\right)^3,\quad \eta=\frac{3}{2}y-\left(\sqrt{-x}\right)^3 \quad (1.47)$$

olarak ele alıp denklemi kanonik şekle dönüştürelim. Bundan dolayı denklemi (1.47) deki yeni koordinatlarla

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{9}{4}(-x)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{9}{2}x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{9}{4}(-x)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2.\frac{9}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \eta}+\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

şeklinde ifade edelim. Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \eta}+\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0,$$

($\xi>\eta$ olduğunda) kanonik denklemi elde ederiz.

ii) Şimdi $x>0$ olduğu durumu göz önüne alalım. Bu durumda $b^2-ac<0$ dır ve denklem eliptik türe aittir, karakteristik denklem ise

$$\frac{dy}{dx}=i\sqrt{x},\quad \frac{dy}{dx}=-i\sqrt{x}$$

olur. Birinci denklemin çözümününden $C=\frac{3}{2}y-i\left(\sqrt{x}\right)^3$ elde ederiz. Değişken dönüşümünü

$$\xi = \frac{3}{2} y, \quad \eta = \left(\sqrt{x}\right)^3$$

biçiminde yapalım ve denklemi yeni koordinatlarda ifade edelim.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{2}(x)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{9}{4}(-x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{9}{2} x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{9}{4}(-x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Elde ettiğimiz ifadeler denklemde yerine konursa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

alırız.

Örnek 1.11 $u_{xx} + 2u_{xy} + sign(y) u_{yy} = 0$ denklemini kanonik şekle dönüştürünüz.

Çözüm. $b^2 - ac$ hesaplayalım, $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 1$, $c = sign(y)$ olduğundan $b^2 - ac = signy$ dir. $y > 0$ olduğunda denklem hiperbolik türe aittir. Karakteristik denklemi yazalım

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b + \sqrt{sign(y)}}{a} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-b - \sqrt{sign(y)}}{a} = -2.$$

Karakteristik denklemlerin çözümleri $y = -2x + c$ ve $y = c$ olduğundan, değişken dönüşümünü

$$\xi = y - 2x, \quad \eta = y \tag{1.48}$$

biçiminde ele alalım. Denkleme dahil olan türevleri, (1.48) deki yeni değişkenlerle aşağıdaki şekilde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2 \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-2 + 0)$$

bulunan bu ifadeler denklemde yerine konursa, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ alırız. Böylelikle denklemin $y > 0$ olduğu bölgede kanonik şeklini elde etmiş oluruz.

Şimdi, $y<0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda karakteristik denklem

$$\frac{dy}{dx}=-1+i,\quad \frac{dy}{dx}=-1+i$$

olur. Değişken dönüşümünü aşağıdaki gibi yapalım

$$\xi=y-x,\quad \eta=x$$

ve denklemi yeni değişkenlerde yazabilmek için aşağıdaki ifadeleri hesaplayalım

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}.$$

Bu ifadeler denklemde yerine konursa denklemin kanonik şeklini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

biçiminde elde ederiz. Böylelikle, $y>0$ olduğunda denklem hiperbolik, $y<0$ olduğunda ise denklem parabolik türe ait olur.

1.2 *n* Değişkene Bağlı Denklemlerin Sınıflandırılması

Aşağıdaki gibi bir diferansiyel denklemi göz önüne alalım

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+f\left(x_1,x_2,....,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0. \quad (1.49)$$

Burada $a_{ij}=a_{ji}$, $u=u(x_1,x_2,...,x_n)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ $(n\geq 3)$ dır. $u(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebe dahil olmak üzere ikinci mertebeye kadar sürekli diferansiyellenebilir olduğunu varsayalım. İki boyutlu olduğu durumda olduğu gibi dejenere olmayan

$$\xi_i=\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n),\ (i=1,2,...,n) \quad (1.50)$$

özel değişken dönüşümü uygulayalım. (1.50) dönüşümünün özel olması için

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\xi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\xi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\xi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\xi_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

koşulu mutlaka sağlanmalıdır. Basitlik için $J=\left\{ \left\| \dfrac{\partial\xi_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^{n} \right\}$ ile gösterelim.

φ_i , $(i=\overline{1,n})$ nin ikinci mertebe dahil olmak üzere ikinci mertebeye kadar sürekli türevlere sahip olduğunu varsayarsak (1.49) daki türevleri yeni değişken cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_k\partial\xi_l}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\frac{\partial^2\xi_k}{\partial x_i\partial x_j}. \tag{1.51}$$

(1.51) ifadeleri (1.49) da yerine konulursa

$$\sum_{k,l=1}^{n}A_{k,l}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_k\partial\xi_l}+f_1(\xi_l,\xi_2,...,\xi_k,...)=0 \tag{1.52}$$

bulunur. Burada,

$$A_{k,l}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x)\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j} \tag{1.53}$$

dır. Burada, ancak denklemin baş kısmının açık şekilde yazıldığını önemle vurgulayalım. Birinci mertebeden türevler f_1 fonksiyonuna dahil edilmektedir. (1.53) denklemindeki katsayılarda olan x değişkenleri (1.50) den bulunup $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ ler vasıtası ile ifade edilir.

Şimdi, (1.50) değişken dönüşümlerini öyle seçelim ki, sonuçta elde edilecek (1.52) denklemi karışık türevler içermesin, yani

$$A_{k,l}=0,\quad (k,l=1,2,...,n,\ k\neq l) \tag{1.54}$$

olsun. (1.54) denklemlerinde içerilen $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ fonksiyonlarını bulmak için nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemini çözmek zorunda kalırız. Burada denklemlerin sayısı

$C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ dir. $n > 3$ olduğu durumda $\dfrac{n(n-1)}{2} > n$ olur ve böylelikle denklemlerin sayısı bilinmeyen fonksiyonların sayısından çok olur. Böyle denklem sisteminin çözümü olmayabilir. Bu nedenle, $n > 3$ olduğu durumda (1.50) dönüşümü vasıtası ile (1.49) denklemini tüm tanım bölgesinde kanonik şekle dönüştürmek mümkün olmayabilir.

Genel durumda (1.49) denklemini tanım bölgesinin ayrı ayrı kısımlarında kanonik şekle dönüştürelim. $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ noktasının tanım bölgesinde olduğunu varsayalım ve

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x^{(0)}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f = 0 \tag{1.55}$$

denklemini göz önüne alalım. (1.55) denklemi sabit katsayılı denklemdir ve bu denklemi kanonik şekle indirgemek için

$$\xi_k = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks} x_s, \quad (k = 1,2,...,n) \tag{1.56}$$

değişken dönüşümü uygulayalım. Burada,

$$\det\left\{\left\|\alpha_{ks}\right\|_{k,s=1}^{n}\right\} \neq 0 \tag{1.57}$$

dır ve α_{ks} ler sabitlerdir. Bu sabitleri öyle seçelim ki, bu dönüşümden sonra (1.49) denkleminin baş kısmı kanonik şekle indirgensin. Bu durumda (1.52) ve (1.53) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{k,l}^{(0)} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + f = 0,$$

$$A_{k,l}^{(0)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x^{(0)}) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} = \sum_{i,j}^{n} a_{i,j}(x^{(0)}) \alpha_{ki} \alpha_{lj} \tag{1.58}$$

(1.56) ifadesi ile bağımlı olan aşağıdaki şekilde bir kare formu

$$K = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^{(0)}) x_i x_j \tag{1.59}$$

göz önüne alalım. Burada x_i değişkenlerini

$$x_i = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} \eta_s, \quad (i = 1,2,...,n) \tag{1.60}$$

biçiminde dönüştürelim. (1.59) ifadesinde $x_1, x_2, ..., x_n$ kare form değişkenleri, (1.60) da ise $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ yeni değişkenlerdir. (1.60) ifadesi (1.59) da yerine konursa

$$K = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^{(0)}) \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_k \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}\eta_l \right] = \sum_{k,l=1}^{n} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^{(0)})\alpha_{ik}\alpha_{jl} \right] \eta_k \eta_l$$

bulunur. Görüldüğü üzere (1.60) ın yerine

$$x_i = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{si}\eta_s \qquad (1.61)$$

yazarsak K kare formunun yeni katsayıları (1.58) ile aynı olabilir. Böylece, K kare formu

$$K = \sum_{k,l=1}^{n} A_{k,l}^{(0)} \eta_k \eta_l$$

şeklini alır. (1.56) dönüşümü sonucunda (1.55) baş kısmı nasıl dönüşürse, (1.60) dönüşümü sonucunda K kare formunun katsayıları da aynı şekilde değişebilir. (1.56) ile (1.61) dönüşümlerinin matrisleri birbirinin transpozesidir.

Kare formlar teorisinden açıktır ki, (1.61) dönüşümü yardımı ile her bir kare formu kanonik şekle dönüştürmek mümkündür. Bu işlemde, mutlaka değişkenlerin kareleri yer alır ve bu terimlerin katsayıları $+1$ ve -1 olmalıdır. Aynı bir kare form bir çok (1.61) gibi dönüşüm yardımıyla kanonik şekle dönüştürülebilir. Kare formların ivme kanununa göre göz önüne alınan kare formun kanonik şeklinde $+1$ ve -1 katsayıları değişmez kalabilir. Farzedelim ki, (1.61) dönüşümü K kare formunu kanonik şekle dönüştüren herhangi bir değişken dönüşümü olsun. K kare formunun kanonik şeklini

$$K = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \cdots + \eta_m^2 - \eta_{m+1}^2 - \eta_{m+2}^2 - \cdots + \eta_s^2$$

olarak yazalım. Açıktır ki, $s \le n$ dir. Böyle değişken dönüşümüne uygun (1.56) dönüşümünü (1.55) de yaparsak

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} - \sum_{i=m+1}^{s} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + F_1 = 0, (s \le n) \qquad (1.62)$$

elde ederiz. $s - m = r$ kabul edelim. (1.62) den görüldüğü gibi, bu denklemde ikinci mertebeden olan pozitif türevlerin sayısı m, negatif türevlerin sayısı ise r dir. Bu nedenle, (1.62) denklemine (m,r) türüne ait denklem denir. (m,r) ve (r,m) türlerinin denk olduğu açıktır.

Tanım 1.4

(i) $(n-1,1)$ türlü denkleme dar anlamda hiperbolik tür denklem denir.

(ii) $(n,0)$ türlü denkleme dar anlamda eliptik denklem denir.

(iii) $m+r<n$ olan denkleme geniş anlamda parabolik tür denklem denir.

(iv) $(n-1,0)$ olan denkleme dar anlamda parabolik tür denklem denir.

(v) $m+r=n, \quad m>1, \quad r>1$ olan denkleme ultra hiperbolik tür denklem denir.

Eğer (1.49) denklemi tanım bölgesinin tüm noktalarında (m,r) türüne ait olursa, denklem (m,r) türünden denklem olarak adlandırılır.

Bilindiği üzere dalga denkleminin çözümünün birinci türevleri karakteristikler üzerinde sıçrayışa sahiptirler. Dolayısıyla, genelde elde edilen çözüm klasik çözüm olmayabilir. Klasik çözümlerin mevcut olmadığı durumlarda zayıf çözüm, (veya genelleştirilmiş çözüm) kavramı içermekle durumu kurtarabiliriz. Zayıf çözüm kavramını vermeden önce genelleştirilmiş fonksiyon ve genelleştirilmiş türev kavramlarını dahil edelim.

1.3 Genelleştirilmiş Fonksiyonlar

Tanım 1.5 $-\infty<x<\infty$ aralığında tanımlı, reel değerli ve herhangi $a \le x \le b$ sonlu aralığında Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlara adi (ordinary) fonksiyon denir, [8].

Tanımdan görüldüğü gibi, her bir $a \le x \le b$ sonlu aralığında sürekli (ölçülebilir) fonksiyonlar adi fonksiyonlar olmaktadır.

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$ adi fonksiyonları hemen her yerde $f_1(x)=f_2(x)$ ise, bunlara eşit fonksiyonlardır denir. Adi fonksiyonlar kümesi E ile gösterilecektir. Adi fonksiyonların toplamı ve keyfi reel sabitle çarpımı da adi fonksiyon olur; yani, E bir lineer uzay oluşturmaktadır. E lineer uzayında limit kavramı da verilebilir.

Eğer $f_1(x), \; f_2(x), ..., \; f_\nu(x), ...$ adi fonksiyonlar dizisi hemen her yerde $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ve ayrıca $|f_\nu(x)| \le f_0(x)$ ise (burada $f_0(x)$ - önceden bilinen adi fonksiyondur), bu taktirde Lebesque teoremine göre $f(x)$ limit fonksiyonu da adi fonksiyon olur.

Diğer taraftan, bilinen ve çok gerekli olan diferansiyelleme işlemlerini E de her fonksiyon için tanımlamak mümkün değildir. Örneğin, analizden bilinen Weierstrass fonksiyonu her yerde sürekli ama hiçbir yerde diferansiyellenemeyen fonksiyondur. Aynı şekilde, bazı adi fonksiyonlar için türev mevcut olsa bile ($y = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ örneğindeki gibi), onların türevi adi fonksiyon olmayabilir. Ayrıca $\{f_\nu(x)\}$ adi fonksiyonlar dizisi için $f_\nu(x)$ türevleri mevcut olsa bile $f_\nu(x) \to f(x)$ den her zaman $f_\nu^{'}(x) \to f'(x)$ olması da söz konusu değildir. Bilindiği üzere analitik fonksiyonlar sınıfında yukarıda sözü edilen işlemlerin her biri gerçeklenir ama bu sınıf uygulamalar için çok dardır. O halde uygulama bakımından arzu edilen durum, tüm adi fonksiyonları içeren en azından diferansiyelleme işlemlerinin yürüyeceği bir sınıf oluşturmaktır. İlk bakışta, türev alma işlemleri tanımlanılacak sınıf dar olacak gibi gözükse de, aslında bu sınıf dar değil, tersine daha da genişletilmiş olacaktır.

Bu bölümde *E* uzayı, üzerinde tanımlanan diferansiyel işlemi limit işlemine göre sürekli olacak şekilde yeni bir sınıfa genişletilmeden önce, ileriki işlerimizde gereken bazı tanım ve kavramlar verilecektir.

$Supp\ f(x) = \{\, x \mid f(x) \neq 0 \,\}$ kümesine f fonksiyonunun desteği denir ve $Supp\ f$ ile gösterilir.

$-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı, reel değerli ve her mertebeden sürekli diferansiyellenebilen ve kompakt desteğe sahip fonksiyonlar sınıfına temel (test) fonksiyonlar sınıfı ve bu sınıfın keyfi elemanına ise temel (test) fonksiyon denir.

Örnek 1.12 (Sobolev şapkası)

$$\varphi(x;a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

fonksiyonu bir temel (test) fonksiyondur, [17].

Temel fonksiyonların toplamı ve keyfi reel sayıyla çarpımı yine temel fonksiyon olur, yani temel fonksiyonlar sınıfı lineer uzay oluşturmaktadır. Söz konusu uzayı **D** ile gösterelim (**D** uzayı literatürde bazen **K** ile de gösterilir), [8].

D uzayında keyfi $\varphi(x)$ temel fonksiyonu ile sonsuz diferansiyellenebilen ve |*x*| in yeteri kadar büyük değerlerinde keyfi artma hızına sahip olan g(x) fonksiyonu ile (toplamaya göre distribütiflik özelliğine sahip olan) çarpma işlemi de tanımlanmaktadır.

D uzayında limit alma işlemini tanımlayalım. Eğer $\{\varphi_\nu(x)\}$, $(\nu = 1,2,\ldots,n,\ldots)$ temel fonksiyonlar dizisinin tüm elemanları ve onların keyfi mertebeden türevleri herhangi bir $[a,b]$

aralığı dışında sıfıra eşitseler ve $\{\varphi_\nu^{(n)}(x)\}$, $(n=0,1,2,...)$ dizileri sıfıra düzgün yakınsak olursa, bu taktirde, $\{\varphi_\nu(x)\}$, $(n=0,1,2,...)$ dizisine sıfıra yakınsak dizi denir.

Şimdi $\varphi_\nu(x)=\frac{1}{\nu}\varphi(x;a)$, $(\nu=1,2,...)$ dizisini göz önüne alalım. $\{\varphi_\nu(x)\}$, $(\nu=1,2,...)$ **D** de sıfıra yakınsaktır. $\varphi_\nu(x)=\frac{1}{\nu}\varphi(\frac{x}{\nu};a)$ dizisi ise tüm türevleri ile birlikte sıfıra yakınsaktır; fakat **D** de sıfıra yakınsak değildir. Çünkü, $\varphi_\nu(x)$ lerin hepsinin aynı anda dışında sıfıra eşit olduğu bir $[a,b]$ aralığı yoktur.

D de $\{\varphi_\nu(x)\}$ dizisinin $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsaklığı $\{\varphi_\nu(x)-\varphi(x)\}$ dizisinin sıfıra yakınsaklığı anlamına gelmektedir.

Toplama, keyfi reel sayıyla çarpma, sonsuz diferansiyellenebilen bir fonksiyonla çarpma işlemleri yakınsaklık işlemine göre sürekli işlemlerdir. Yani **D** de $\varphi_\nu\to\varphi$ ve $\psi_\nu\to\psi$ ise, herhangi α ve β sayıları için **D** de $\alpha\varphi_\nu+\beta\psi_\nu\to\alpha\varphi+\beta\psi$ dır. Aynı zamanda herhangi bir sonsuz diferansiyellenebilen $g(x)$ fonksiyonu için **D** de $g(x)\varphi_\nu(x)\to g(x)\varphi(x)$ olmaktadır.

Uyarı 1.1 **D** uzayı metrikleştirilemez. Diğer bir ifade ile, bilinen standart özelliklere sahip $\rho(\varphi,\psi)$ uzaklık fonksiyonu **D** de tanımlanamaz. Çünkü, $\{\varphi_\nu\}$ dizisinin φ ye yakınsaklığı $\rho(\varphi,\varphi_\nu)\to 0$ bağıntısının sağlanmasına denktir.

Eğer **D** bir metrik uzay,

$$\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(1)},...,\varphi_\nu^{(1)},...\to\varphi^{(1)}$$

....

$$\varphi_1^{(m)},\varphi_2^{(m)},...,\varphi_\nu^{(m)},...\to\varphi^{(m)}$$

yakınsak dizilerin sistemi ve ayrıca $\varphi^{(m)}\to\varphi$ olsaydı. O halde, her satırdan bir eleman seçmekle

$$\varphi_{\nu_1}^{(1)},\varphi_{\nu_2}^{(2)},...,\varphi_{\nu_m}^{(m)},...$$

alt dizisi için de $\{\varphi_{\nu_m}^{(m)}\}\to\varphi$ olmak zorundaydı. Ancak **D** de böyle bir sonuca varılamaz. Örneğin, $\varphi(x;m)$ örnek 1.12 deki fonksiyon olmak üzere

$$\varphi_\nu^{(m)}=\frac{1}{\nu}\varphi(x;m),\ (\nu=1,2,..;m=1,2,...)$$

olsun. Her bir $m \in N$ için $\varphi_{\nu}^{(m)} \to 0$ dır. Ama $\left\{\varphi_{\nu_m}^{(m)}\right\}$ dizisi sıfıra yakınsak değildir. Çünkü, $\varphi_{\nu_m}^{(m)}$ lerin tümünün dışında sıfır olduğu ortak kapalı bir aralık yoktur.

Çeşitli yollarla verilebilen genelleştirilmiş fonksiyon kavramı ilk kez 1936 yılında Sobolev, S. L. tarafından verilmiştir [17]. Daha sonraları 1950-51 yıllarında Schwartz, L. genelleştirilmiş fonksiyon kavramını sistemleştirerek onu lineer topolojik uzayların esaslandırılması problemlerine uygulamıştır [15]. Bu yöntem günümüzde çok ilerlemiş ve bu konuda oldukça önemli bir çok çalışma yapılmıştır.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisinde ikinci yöntem “dizisel yaklaşım” yöntemidir [1]. Bu yöntemde herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon bir adi fonksiyonlar dizisinin limiti olarak alınmaktadır. Bu yöntem kolay olmanın yanı sıra, fizikçiler için de bir o kadar doğal olmaktadır. Yukarıda sözü edilen iki yöntemin dışında da genelleştirilmiş fonksiyon tanımı mevcuttur.

$\mathfrak{D}$ uzayı üzerinde herhangi bir $f(x)$ adi fonksiyonuna karşılık gelen

$$(f,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad , \ \varphi \in \mathfrak{D} \tag{1.63}$$

lineer fonksiyoneli göz önüne alalım [8]. Burada doğal olarak, integralleme aralığı $supp\,\varphi$ üzerinde yoğunlaşmaktadır.

Bu kavram fonksiyon tanımının genişletilmesine olanak sağlamaktadır. Önceleri, bir fonksiyonun tanım aralığının keyfi noktasında (veya hemen her yerde) tanımlı ve tek değerli olması isteniliyordu, ama şimdi göz önüne alınan adi fonksiyonun herhangi bir temel fonksiyonla çarpımının integralinin sonucu bizi ilgilendirmektedir. Eğer bu integral mevcutsa, biz onu genelleştirilmiş fonksiyon olarak isimlendireceğiz.

Bu arada, fonksiyonun ayrı ayrı noktalarda değeri belli olmayıp, genel ve temel fonksiyonların çarpımının integralinin nasıl tanımlanılacağı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı çok sadedir. Bu durumda biz integrali yapısal değil aksiyomatik olarak tanımlayacağız.

Diğer yandan, $\forall\ \varphi_{1,}\ \varphi_2 \in \mathfrak{D}$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$ için

$$(f,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(f,\varphi_1)+\alpha_2(f,\varphi_2)$$

olduğundan (1.63) cinsinden tanımlanan fonksiyonel lineerdir. Ayrıca (1.63) fonksiyoneli aşağıdaki anlamda sürekli olmaktadır. Eğer $\mathfrak{D}$ de $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,... \to 0$ olan temel fonksiyonların bir dizisi ise $\lim\limits_{\nu\to\infty}(f,\varphi_\nu)=0$ (integralin özelliğinden) dır. Böylece, (1.63) fonksiyoneli **D** de sürekli ve lineer bir fonksiyoneldir.

D de (1.63) cinsinden ifade edilemeyen diğer fonksiyoneller de vardır. Her bir $\varphi(x)$ temel fonksiyonuna $\varphi(0)$ sayısını karşılık getiren δ fonksiyonelini göz önüne alalım.

$(\delta,\varphi(x))=\varphi(0)$ fonksiyoneli lineer ve süreklidir [8]. Diğer taraftan, her bir $\varphi(x)$ e $\varphi(0)$ sayısını karşılık getiren (1.63) cinsinden fonksiyonel yoktur. Gerçekten de, varsayalım ki **D** de keyfi $\varphi(x)$ ve belli bir $f(x)$ adi fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx=\varphi(0) \tag{1.64}$$

olsun. Özellikle $\varphi(x)=\varphi(x;a)$ olarak örnek 1.12 deki fonksiyonu ele alırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x;a)dx=\varphi(0;a)=\frac{1}{e}$$

elde ederiz. Fakat $a\to 0$ olduğunda (1.64) ün sol tarafı sıfıra yaklaşır; bu ise (1.64) gösterimi ile çelişir.

Tanım 1.6 **D** de tanımlı lineer, sürekli fonksiyonele, yani

(i) $(f,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(f,\varphi_1)+\alpha_2(f,\varphi_2)$,

(ii) **D** de $\varphi_\nu\to 0$ ise $(f,\varphi_\nu)\to 0$ dır

koşullarını sağlayan f fonksiyoneline genelleştirilmiş fonksiyon denir [8].

(1.63) cinsinden ifade edilebilen fonksiyonele regüler, edilemeyene de singüler fonksiyonel denir. Bu durumda, $(\delta,\varphi)=\varphi(0)$ fonksiyoneli singülerdir.

Keyfi adi fonksiyona (1.63) cinsinden genelleştirilmiş bir fonksiyon karşılık gelmektedir.

Örnek 1.13 $f(x)\equiv c$ olsun. Tanım 1.6 ya göre

$$(f,\varphi)\equiv(c,\varphi)=c\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$$

biçimindeki genelleştirilmiş fonksiyon sabit olarak isimlendirilecektir. Özel olarak genelleştirilmiş 1 fonksiyonu, $(1,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$ anlamındadır [8].

f_1 ve f_2 genelleştirilmiş fonksiyonlarının aynı temel fonksiyonlar üzerinde oluşturduğu fonksiyoneller eşit, yani $(f_1,\varphi)\equiv(f_2,\varphi)$ ise bu taktirde f_1 ve f_2 ye eşittir denir.

Eğer en az bir φ_0 temel fonksiyonu için $(f_1,\varphi_0) \neq (f_{2,}\varphi_0)$ oluyorsa f_1 ve f_2 fonksiyonlarına farklı genelleştirilmiş fonksiyonlar denir.

Ayrıca farklı $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ adi fonksiyonlarına farklı genelleştirilmiş fonksiyonlar karşılık gelir [8].

Toplama ve herhangi bir reel sayı ile çarpma

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1(f_1, \varphi) + \alpha_2(f_2, \varphi)$$

ile tanımlanır. $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ in belirlediği fonksiyonel de lineer ve süreklidir. Üstelik $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarına karşılık gelen f_1 ve f_2 fonksiyonelleri regüler ise, $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ fonksiyonuna tekabül eden $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ fonksiyoneli de regülerdir.

Sonsuz diferansiyellenebilen herhangi bir $\alpha(x)$ fonksiyonu ile genelleştirilmiş herhangi bir f fonksiyonun $\alpha(x) f$ çarpımı

$$(\alpha(x) f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi)$$

ile tanımlanır.

Eğer $f(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyon ise, onun $f'(x)$ adi türevi mevcuttur. Bu taktirde $f'(x)$ için

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathfrak{D}$$

ifadesini oluşturabiliriz. Şimdi varsayalı ki, $\varphi(x)$ de mutlak sürekli ve sınırlı $\varphi'(x)$ türevine sahip fonksiyon olsun. Son integralden kısmi integrasyon yardımı ile

$$(f', \varphi) = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

elde edilir, yani

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \tag{1.65}$$

dır. Eğer f' fonksiyonu klasik anlamda mevcut olmazsa bile $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$ ifadesi keyfi $\varphi(x)$ test fonksiyonları için mutlaka mevcut olmaktadır. Böylelikle elimizde $f'(x)$ olmasa da ve kesinlikle bize $f'(x)$ in sınırlı türeve sahip, kompakt desteği olan sınırlı bir fonksiyonla çarpımının integrali gerekmekte ise bu sonuca, $f'(x)$ in mevcut olduğu var sayılır gibi kabul ederek, (1.63) ifadesinin önüne eksi işareti koyarak ulaşabiliriz.

Bu kavram, temel fonksiyonların iyi seçilmesi durumunda keyfi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi var ve bu türevinde bir genelleştirilmiş fonksiyon olacağını göstermektedir. Diğer bir deyişle, herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon her mertebeden türevlere sahiptir. Bu bağlamda,

$$(f'', \varphi) = (f', -\varphi') = (f, \varphi'')$$

ve benzer şekilde, herhangi bir q için

$$(f^{(q)}, \varphi) = (f, (-1)^q \varphi^{(q)}) = (-1)^q (f, \varphi^{(q)})$$

dır. Kolayca görülür ki, türev lineerlik özelliğine sahiptir. f_1 ve f_2 iki genelleştirilmiş fonksiyon ve α_1, α_2 sabitler ise $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1^{'} + \alpha_2 f_2^{'}$ dır. Ayrıca, $\alpha(x)$ sonsuz diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyon ise $(\alpha f)' = \alpha f' + \alpha' f$ dir.

Eğer $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları sürekli ise, bu taktirde f' fonksiyoneli $f'(x)$ türevini verir. Burada, türevin belirlenmesine dair birkaç örnek ele alalım.

Örnek 1.14 (Heaviside fonksiyonu)

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

adi fonksiyonunun türevini alalım. (1.65) formülüne göre

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = (\theta(x), -\varphi'(x)) = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

dır. Böylelikle, $\delta(x)$ fonksiyonunun tanımına göre $\theta'(x) = \delta(x)$ olduğu elde edilir. Genel olarak $\theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ olur [8].

Örnek 1.15 $f(x)$, $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ noktalarında $h_1, h_2, ..., h_n, ...$ sıçrayışlarına sahip parçalı mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f'(x)$ fonksiyonu sonlu $x_1, ..., x_n$ noktaları dışında her yerde tanımlı fonksiyon olmaktadır [8].

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k).$$

Bu fonksiyonunun genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında türevi

$$f_1'(x) = f'(x) - \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

olup

$$f'(x) = f_1'(x) - \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

dır.

Şimdi çok değişkene bağlı genelleştirilmiş fonksiyonun kısmi türevi kavramına geçelim. Varsayalım ki, f $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ değişkenlerine bağlı fonksiyon olduğunda $f(x)$ fonksiyonunun x_i, $(i = 1,2,...,n)$ değişkenine göre kısmi türevleri aşağıdaki formül yardımı ile tanımlanır [8],

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad (i = 1,2,...,n).$$

Bilindiği gibi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi de genelleştirilmiş fonksiyon olduğundan f fonksiyonunun yüksek mertebeden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, ...$$

türevlerini de aynı yolla tanımlayabiliriz. Böylelikle tüm genelleştirilmiş fonksiyonlar sonsuz diferansiyellenebilirdirler.

İkinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olan, fakat birinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon gösterilebilir. $f(x)$ genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon olmak üzere aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım

$$F(x, y) = f(x) + f(y).$$

Bu taktirde $F(x, y)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi yoktur [10]. Fakat $F(x, y)$ nin ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevi vardır. Gerçekten de, gereken koşulları sağlayan $\psi(x, y)$ fonksiyonu için

$$\iint_G F(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dxdy = \iint_G f(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dxdy + \iint_G f(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dxdy$$

dır. Diğer taraftan

$$\iint_G f(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dxdy = \int_a^b f(x) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dxdy = \int_a^b f(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = 0$$

$$\psi_x'(x, \varphi_1(x)) = \psi_x'(x, \varphi_2(x)) = 0$$

burada $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ G nin $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ sınırlarını göstermektedir. Aynı yolla

$$\iint_G f(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$\iint_G F(x,y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy = 0 = \iint_G 0.\psi(x,y)dxdy$$

yani $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ mevcuttur ve özdeş olarak sıfıra eşittir.

Uyarı 1.2 Hemen her yerde türevin olmasından genelleştirilmiş türevin olması çıkarılamaz.

1.4 Zayıf Çözüm Kavramı

Doğadaki bir çok pratik problemlerin matematiksel modelleri, kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklemler sistemi için yazılmış başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün bulunmasına indirgenilir. Çoğu zaman problemin söz konusu verileri süreksiz fonksiyonlar olabilir. Bazı durumlarda ise matematiksel problemin çözümünde, diğer deyişle fiziksel olayın dinamiğinde süreksizlik ortaya çıkmaktadır.

Genel olarak nonlineer problemin çözümünde bazı özellikler ortaya çıkmaktadır. Nonlineer problemlerde ortaya çıkan yeni karakteristik özellikler (örneğin, heyecanlanmış cephenin sonlu hızla dağılımı, darbe dalgası, kontakt sıçrayışları vs. gibi fiziksel özellikler) zayıf çözüm kavramı yardımıyla ifade edilebilirler.

Söz konusu zayıf çözümü tanımlamak için göz önüne alınan diferansiyel denkleme karşılık gelen integral gösterimi yazmak gerekmektedir. Genelde, kısmi türevli diferansiyel denklem için zayıf çözüm kavramı farklı yollarla yazılabilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için zayıf çözüm kavramını 1930 yıllarında Sobolev' in verdiğine önceden değinilmişti. Sobolev anlamındaki zayıf çözüm, integral eşitlik yardımı ile tanımlanmaktadır. Bu tanımı açıklamak için, $Q_T \subset R^{n+1}$ Euklid uzayında konveks bir bölge, $u = u(x_1, x_2, ... x_n, t)$ ve $f(x_1, x_2, ... x_n, t)$ Q_T de ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere operatör biçimde verilmiş

$$Lu=f \tag{1.66}$$

lineer kısmi türevli diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada L sürekli diferansiyellenebilen katsayılara sahip self-adjoint (öz eşlenik) diferansiyel ifadeyi göstermektedir.

Tanım 1.7 Test fonksiyonlar sınıfından keyfi $\varphi(x_1, x_2,...x_n, t)$ fonksiyonları için

$$\int_{Q_T} \{ uM\varphi - f\varphi \} dxdt = 0 , \quad x = (x_1,..., x_n) \tag{1.67}$$

integral eşitliğini sağlayan u fonksiyonuna (1.66) denkleminin zayıf (veya genelleştirilmiş) çözümü denir. Burada $M = L^*$ dir; yani M, L operatörüne karşılık gelen adjoint operatör olmaktadır [17].

Tanım 1.7 den görüldüğü gibi (1.66) denkleminin herhangi bir klasik çözümü (1.67) eşitliğini korumak zorundadır. Ama (1.67) eşitliğini sağlayan $u(x_1, x_2,...x_n, t)$ fonksiyonları daha geniş bir sınıf oluşturur. Çünkü (1.67) nin içerdiği u fonksiyonlarının klasik anlamda türevlenebilir olması gerekmiyor.

Zayıf çözümler göz önüne alındığında, denklem için başlangıç ve sınır değer koşullarının hangi anlamda verileceğini özel olarak belirtmek gerekmektedir.

2. DEJENERE OLAN PARABOLİK DENKLEMLER

Gözenekli bir ortamda Newtonyen olmayan bir akışkanın hareketi, ince tabakada laminar akış ve nehirlerde akan suyun hareketi vs. gibi hidrodinamiğin bir çok problemi iki kez dejenere olan uygun başlangıç ve sınır koşullu nonlineer parabolik tür kısmi türevli denklemlerle modellenir, [3-5]. Bu tür problemlerin incelenmesi hem pratik açıdan hem de teorik açıdan önemlidir.

Alışıldığı gibi, R^1 reel sayı ekseni olmak üzere ve $R_T = \{(x,t) \mid x \in R^1, 0 < t < T\} \subset R^2$ olsun. R_T bölgesinde aşağıdaki denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} K\left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x}\right) - \frac{\partial Q(u)}{\partial x} \tag{2.1}$$

göz önüne alalım.

Burada $u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur ve ayrıca $K(s)$, $\sigma(u)$ ve $Q(u)$ fonksiyonları sırasıyla s ve u ya göre bilinen fonksiyonlar olup, aşağıdaki koşulları sağlamaktadırlar:

- $K(s)$, $\sigma(u)$ ve $Q(u)$ fonksiyonları sırasıyla sınırlı s ve u lar için sınırlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır.
- $K'(s) > 0$ ve $\sigma'(u) > 0$ dır ve $u > 0$ için $Q'(u) > 0$ olup, aynı zamanda sonludur, $K(|s|) - K(0) \geq m_0 > 0, \quad |s| \geq m_1$;
- $K(0) = K'(0) = \sigma(0) = \sigma'(0) = Q(0) = Q'(0) = 0$;
- $K''(s)$ işaretini değiştirmektedir.

Jacques Lions 1972 yılında (2.1) denklemi için birinci tür başlangıç sınır değer probleminin $Q(u) = 0$, $\sigma(u) = u$, ve $K(s) = s^{p-2}$, ($p > 2$) olduğunda zayıf çözümünün varlığını uygun bir uzayda ispatlamıştır. Önemle belirtmek gerekir ki, (2.1) denklemi nonlineer olduğu için onun gerçek çözümünü oluşturmak mümkün değildir. Fakat, $K(s)$, $\sigma(u)$ ve $Q(u)$ fonksiyonlarının özel bir durumunda denklemin gerçek çözümünü bulmak mümkün olmaktadır. Örneğin, $K(s) = s^n$, $(n > 2)$ ve $\sigma(u) = u$ olduğunda (yani, $K''(s)$ işaret değiştirmediğinde), (2.1) denklemi koşan dalga (traveling wave) şeklinde çözüme sahip olur, [14]. Bu çözüm sürekli olduğu halde, onun birinci ve ikinci türevlerinin süreksizlik noktalarına sahip olduğu kanıtlanmıştır. Diğer taraftan $\frac{\partial u^n}{\partial x}$ fonksiyonu süreklidir.

Not 2.1 $K_s'(s) < 0, Q(u) = 0$ olduğu durumda (2.1) denklemi ısı ve kütle değişimindeki düzensiz kayan tabakalı akışı modeller .

$K(s) \equiv 0$ ve $Q(u)$ Buckley-Leverett fonksiyonu olduğunda, (2.1) denklemi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(u(x,t))}{\partial x} = 0 \tag{2.2}$$

biçimini ve gözenekli bir ortamda, kılcal basınç dikkate alınmaksızın iki fazlı sıkıştırılamaz akışkanların eşzamanlı mikroskobik hareketini modeller. Bu durum da detaylı olarak [18] de irdelenmiştir.

Karakteristikler metodu uygulanarak elde edilen çözüm kapalı bir çözüm olduğundan pratikte onu kullanmak mümkün olmamaktadır. Diğer taraftan [5], [6] ve [18] de ispatlandığı üzere, (2.1) denkleminin çözümü yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarına sahiptir. Bu nedenle, (2.2) denkleminin zayıf gerçek ve nümerik çözümünü elde etmek için bir metod önerilmiştir, [12], [13].

(2.1) denklemi [3] de $Q(u) = 0$ olduğunda incelenmiş ve sayısal çözümü için çözümde görülen süreksizlik noktalarını dikkate almayan homojen şemalar çalışılmıştır. [13] ve [16] da parabolik tür nonlineer denklemin sayısal çözümünü bulmak için süreksiz fonksiyonlar sınıfında nümerik bir metot önerilmiştir.

$K(s) = \nu s$, $\sigma(u) = u$ ve $Q(u) = \dfrac{u^2}{2}$ olduğunda (2.1) denklemi aşağıdaki

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Burgers denklemine denklemine indirgenir, [9], [18]. Bu çalışmada (2.1) denklemi için yazılan problemin sayısal çözümünü elde etmek amacıyla bir sonlu farklar metodu önereceğiz ve sayısal çözümün bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

2.1 Yardımcı Problemler

$u = 0$ ve $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ olduğu taktirde, $\dfrac{\partial}{\partial x}K(\dfrac{\partial \sigma(u)}{\partial x}) = K'(s)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sigma'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ olduğundan (2.1) denklemi birinci mertebeden denkleme dönüşür. Fiziksel açıdan akışı tanımlayan $-K(\dfrac{\partial \sigma(u)}{\partial x}) + Q(u)$ fonksiyonu süreklidir.

2.1.1 Cauchy Problemi

(2.1) denklemini öncelikle aşağıdaki başlangıç koşuluna göre ele alacağız

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2.3}$$

Burada, $u_0(x)$ kompakt taşıyıcıya sahip, hem sürekli hem de parçalı sürekli bilinen bir fonksiyon olmaktadır. (2.1), (2.3) probleminin zayıf çözümü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

Tanım 2.1 (2.3) başlangıç koşulunu koruyan, $f(x,t) \in \overset{o}{W}{}^2_{1,1}(R_T^2)$ ve $f(x,T) = 0$ olan her test fonksiyonu için

$$\int_{R_T} \left\{ u\frac{\partial f}{\partial t} + [K\left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x}\right) - Q(u)]\frac{\partial f}{\partial x} \right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) f(x,0) dx = 0$$

integral bağıntısını sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonuna (2.1), (2.3) probleminin zayıf çözümü adı verilir. Burada $\overset{o}{W}{}^2_{1,1}(R_T^2)$, $\overset{o}{R}{}^2_T$ üzerinde bir Sobolev uzayıdır.

Tanım 2.1 den görüldüğü üzere, bu durumda $u(x,t)$, $K(s)$ ve $Q(u)$ fonksiyonları süreksiz de olabilirler. (2.1), (2.3) probleminin zayıf çözümünü bulabilmek için, M. Rasulov'un [12] ve [13] de önerdiği yönteme benzer şekilde aşağıdaki

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = K\left(\frac{\partial \sigma(u(x,t))}{\partial x}\right) - Q(u),$$

$$v(x,0) = v_0(x)$$

yardımcı problemini dahil edeceğiz. Burada $v_0(x)$ fonksiyonu,

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = u_0(x) \tag{2.4}$$

denkleminin diferansiyellenebilir herhangi bir çözümünü göstermektedir.

2.1.2 Yarı Eksende Sınır Değer Problemi

İkinci olarak, (2.1) denklemini $R_T^+ = \{0 \le x < \infty,\ t \ge 0\}$ bölgesinde aşağıdaki

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2.5}$$

$$u(0,t) = u_1(t) \tag{2.6}$$

başlangıç ve sınır koşulları dahilinde inceleyeceğiz. Burada $u_0(x)$ ve $u_1(t)$ bilinen fonksiyonlardır. (2.1), (2.5), (2.6) probleminin zayıf çözümü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.2 (2.5) ve (2.6) koşullarını koruyan, $f(x,t) \in \overset{o}{W}{}^2_{1,1}(R_T^+)$ ve $f(x,T)=0$ olan her test fonksiyonu için aşağıdaki

$$\int_{R_T^+} \left\{ u\frac{\partial f}{\partial t} + [K\left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x}\right) - Q(u)]\frac{\partial f}{\partial x} \right\} dxdt +$$

$$\int_0^T \left[K\left(\frac{\partial \sigma(u(0,t))}{\partial x}\right) - Q(u(0,t)) \right] f(0,t)dt + \int_0^\infty u_0(x) f(x,0)dx = 0$$

integral bağıntısını sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonuna (2.1), (2.5) ve (2.6) probleminin bir zayıf çözümü denir. $\overset{o}{W}{}^2_{1,1}(R_T^+)$, $\overset{o}{R}{}_T^+$ üzerinde bir Sobolev uzayıdır.

(2.1), (2.5) ve (2.6) probleminin zayıf çözümü aşağıdaki yardımcı problemden elde edilir

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = K\left(\frac{\partial \sigma(u(x,t))}{\partial x}\right) - Q(u),$$

$$v(x,0) = v_0(x),$$

$$u(0,t) = u_1(t).$$

Buradaki $v_0(x)$, (2.4) denkleminin herhangi bir çözümü olmaktadır.

2.1.3 Birinci Tür Başlangıç-Sınır Değer Problemi

Bu kısımda (2.1) denklemini $D_T^\ell = \{(x,t) \mid 0 \le x \le \ell, 0 \le t \le T\}$ bölgesinde aşağıdaki

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in [a,b] \tag{2.7}$$

başlangıç ve

$$u(0,t) = u_1(t), \quad u(\ell,t) = u_2(t) \tag{2.8}$$

sınır koşulları dahilinde ele alacağız.

Tanım 2.3 (2.7) ve (2.8) koşullarını koruyan, $f(x,t) \in \overset{o}{W}{}^2_{1,1}(D_T^\ell)$ ve $f(x,T)=0$ olan test fonksiyonları için aşağıdaki

$$\int_{D_T^\ell}\left\{u\frac{\partial f}{\partial t}+[K\left(\frac{\partial\sigma(u)}{\partial x}\right)-Q(u)]\frac{\partial f}{\partial x}\right\}dxdt+\int_0^\infty u_0(x)f(x,0)dx=0$$

integral bağıntısını sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonuna (2.1), (2.7) ve (2.8) probleminin zayıf çözümü denir. Burada $\overset{o}{W}{}_{1,1}^{2}(D_T^\ell)$, $\overset{o}{D}{}_T^\ell$ üzerinde bir Sobolev uzayıdır.

(2.1), (2.7) ve (2.8) probleminin zayıf çözümünü bulabilmek için aşağıdaki yardımcı problemi dahil edeceğiz

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=K\left(\frac{\partial\sigma(u(x,t))}{\partial x}\right)-Q(u), \tag{2.9}$$

$$v(x,0)=v_0(x), \tag{2.10}$$

$$u(0,t)=u_1(t), \quad u(\ell,0)=u_2(t). \tag{2.11}$$

Burada $v_0(x)$, (2.4) denkleminin herhangi bir diferansiyellenebilir çözümü olmaktadır.

Teorem 2.1 Eğer $v(x,t)$ fonksiyonu (2.9)-(2.11) yardımcı probleminin yumuşak (soft) çözümü oluyorsa, bu taktirde aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$u(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \tag{2.12}$$

fonksiyonu (2.1),(2.7) ve (2.8) esas probleminin bir zayıf çözümü olur.

(2.9) denklemini $f_x(x,t)$ ile çarpar ve D_T^ℓ bölgesi üzerinde

$$\int_{D_T^\ell} f\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}K\left(\frac{\partial\sigma(u)}{\partial x}\right)+\frac{\partial Q(u)}{\partial x}\right]dxdt=0$$

integraline sırasıyla t ve x e göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak, Teorem 2.1 i ispatlamış oluruz.

Not 2.2 Teorem 2.1 yukarıda göz önüne alınan bütün durumlar için geçerlidir.

Önerilen yardımcı problem aşağıdaki avantajlara sahiptir:

- $v(x,t)$ mutlak sürekli bir fonksiyondur,
- (2.1), (2.3) probleminin bilinmeyen çözümünü bulmak için kullandığımız algoritma $u(x,t)$ fonksiyonunun x ve t ye göre türevlerini içermez.
- $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ yi elde etmek için oluşturulan algoritmalar, bilgisayar

hesaplamaları açısından sade ve ekonomiktir.

İleriki bölümde önerilen yardımcı problemin bu avantajlarını kullanarak, sayısal çözümler içi algoritmalar geliştireceğiz ve onların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

3. SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ALGORİTMALAR

3.1. Nümerik Çözüm ve Özellikleri

(2.1), (2.7) ve (2.8) problemi için bir nümerik algoritma geliştirmek amacıyla öncelikle D_T^ℓ bölgesini aşağıdaki

$$\Omega_{h,\tau}^\ell = \{(x_i, t_k) \mid x_i = ih, t_k = k\tau, i = 0,1,2,...n; k = 0,1,2,...; h > 0, \tau > 0\}.$$

ağı ile örtelim. Burada, h ve τ sırasıyla x ve t değişkenlerine göre $\Omega_{h,\tau}^\ell$ ağının adımlarını göstermektedir, $\overline{\Omega}_{h,\tau}^\ell = \Omega_{h,\tau}^\ell + \gamma_{h,\tau}^\ell$ ifadesindeki $\gamma_{h,\tau}^\ell$ ise $\Omega_{h,\tau}^\ell$ ağının sınır düğüm noktalarının kümesidir ve $\Omega_{h,\tau}^\ell = \Omega_h^\ell \times \Omega_\tau^\ell$. dır. $U_{i,k}$ ile $\Omega_{h,\tau}^\ell$ da tanımlanan $u(x_i, t_k)$ ağ fonksiyonunun yaklaşık değerlerini gösterelim.

(2.9)-(2.11) problemi $\Omega_{h,\tau}^\ell$ ağının herhangi bir (x_i, t_k) noktasında aşağıdaki gibi yaklaşık olarak değerlendirilir

$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} = K\left(\frac{\sigma(U_{i,k+1}) - \sigma(U_{i-1,k+1})}{h}\right) - Q(U_{i,k+1}), \tag{3.1}$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i), \tag{3.2}$$

$$V_x\,|_{i=0} = u_1(t_k), \quad V_{\bar{x}}\,|_{i=n} = u_2(t_k). \tag{3.3}$$

Teorem 3.1 Eğer $V_{i,k}$ (3.1)-(3.3) yardımcı probleminin nümerik çözümü ise, bu taktirde

$$U_{i,k+1} = \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h} \tag{3.4}$$

ile tanımlanan ağ fonksiyonu aşağıdaki

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\tau} = \frac{1}{h}\left[K\left(\frac{\sigma(U_{i+1,k+1}) - \sigma(U_{i,k+1})}{h}\right)\right.$$

$$\left. - K\left(\frac{\sigma(U_{i,k+1}) - \sigma(U_{i-1,k+1})}{h}\right)\right] - \frac{Q(U_{i,k+1}) - Q(U_{i-1,k+1})}{h}, \tag{3.5}$$

$$U_{i,0} = u_0(x_i), \tag{3.6}$$

$$U_{0,k} = u_1(t_k), \quad U_{n,k} = u_2(t_k) \tag{3.7}$$

probleminin nümerik çözümüdür.

Şimdi $U_{i,k}$ nümerik çözümünün bazı özelliklerini ispatlayacağız.

Teorem 3.2 (3.5)-(3.7) probleminin çözümü en büyük (veya en küçük) değerini sınır düğüm noktalarında alır, yani $m = min\{u_0, u_1, u_2\}$ ve $M = max\{u_0, u_1, u_2\}$ olmak üzere

$$0 \le m \le U_{i,k} \le M$$

dır.

İspat. Kolaylık için $U_{i,k} = U$, $U_{i,k+1} = \hat{U}$ ve $\hat{U}_{\pm} = U_{i\pm 1,k+1}$ notasyonlarını içerelim. Bu notasyonlar dahilinde (3.5) denklemini

$$\hat{U} - U = \frac{\tau}{h} K'\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)\left[\frac{\sigma(\hat{U}_{+}) - \sigma(\hat{U})}{h} - \frac{\sigma(\hat{U}) - \sigma(\hat{U}_{-})}{h}\right] - \frac{Q(\hat{U}) - Q(\hat{U}_{-})}{h} \qquad (3.8)$$

olarak tekrar yazabiliriz. $\hat{U} \neq sabit$ olduğunu ve $\hat{U}$ nun en büyük değerini $\gamma_{h,\tau}^{\ell}$ kümesinin düğüm noktalarından yerine, $\Omega_{h,\tau}^{\ell}$ ağının belli bir noktasında aldığını varsayalım. O halde, $\hat{U}$ nun maksimal değerini aldığı bir $(x_1, t_1) \in \Omega_{h,\tau}^{\ell}$ noktası vardır öyle ki, en azından bu noktanın belli bir komşuluğundaki $U(x_1, t_1)$ değerleri $\hat{U}(x_1, t_1)$ den küçüktür.

Eğer $\hat{U}(x_1, t_1) > U(x_1, t_1)$ ise, $\sigma(u)$ monoton fonksiyon olduğundan, (3.8) bağıntısının sol kısmı is positif, fakat sağ kısmı negatif olur. Bu nedenle, kararsızlığa ulaşırız. Eğer $\hat{U}_{\pm}(x_1, t_1) > \hat{U}(x_1, t_1)$ olursa tıpkı önceki gibi yine karasızlığa varılır. Benzer şekilde, $\hat{U}$ nun $\Omega_{h,\tau}^{\ell}$ ağının iç kısımdaki düğüm noktalarında minimal değerini alamayacağını da ispatlayabiliriz.

Teorem 3.3 Eğer $max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \le const$ ve $max\left\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \left|\frac{d\alpha_1}{dt}\right|, \left|\frac{d\alpha_2}{dt}\right|\right\} \le const$ ise, bu taktirde, (3.5)-(3.7) probleminin çözümü için

$$(\sigma_x(\hat{U}), [K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0) - Q(u)]) \le const \qquad (3.9)$$

değerlendirmesi geçerli olur.

İspat. (3.9) değerlendirmesinin geçerliliğini ispatlamak için,

$$U_t = K_{\bar{x}}(\sigma_x(\hat{U})) - Q_{\bar{x}}(\hat{U}),$$

denklemini $w(\hat{U})$ ile çarptıktan sonra i, k ya göre toplarsak,

$$(\hat{w}, U_t)_{L_2(\Omega_{h\tau})} = (\hat{w}, K_{\bar{x}}(\sigma_x(\hat{U})))_{L_2(\Omega_{h\tau})} - (\hat{w}, Q_{\bar{x}}(\hat{U}))_{L_2(\Omega_{h\tau})} \tag{3.10}$$

elde ederiz. Burada

$$w(U) = \sigma(U) + (x_i - \ell)\alpha_1 - x_i\alpha_2 = \sigma(U) + H(t), \tag{3.11}$$

$$\alpha_1 = \sigma(u_1(t)), \quad \alpha_2 = \sigma(u_2(t)), \quad H(t) = (x_i - \ell)\alpha_1 - x_i\alpha_2$$

olmaktadır. Ayrıca buradaki $(.)_x$, $(.)_{\bar{x}}$ ve $(.)_t$ notasyonları sırasıyla $\left(\frac{\partial .}{\partial x}\right)$ ve $\left(\frac{\partial .}{\partial t}\right)$ türevlerinin ileri ve geri sonlu fark karşılıklarını göstermektedir. $(f, g)_{L_2(\Omega_{h,\tau})}$ ise D_T bölgesi üzerinde $\iint f(x,t)g(x,t)dxdt$ integralinin sonlu farklar karşılığı anlamına gelmektedir. $x_0 = 0,\ \ x_n = \ell$ ve $x_i = ih$, $(i = 1,2,...,n-1)$ olduğundan, $i = 0$ ve $i = n$ olduğunda w nın sıfıra eşit olacağını göstermek kolaydır.

Şimdi, (3.10) eşitliğine toplam formülünü uygulayacağız. Önce $I_1 = (\hat{w}, U_t)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$ ifadesini göz önüne alalım. (3.11) ifadesini dikkate alarak, I_1 i aşağıdaki gibi

$$I_1 = \left(\sigma(\hat{U}), U_t\right) + I_{12} \tag{3.12}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$I_{12} = \tau h \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} H(t) U_t = \left(H(t), U_t\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$$

dır. $I_2 = \left(\hat{w}, K_{\bar{x}}\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$ ifadesine kısmi toplam formülünü uygularsak

$$I_2 = \left(\hat{w}, K_{\bar{x}}\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})} = \tau \sum_{k=1}^{m-1} w|_{i=n}\ K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)|_{i=n-1} -$$

$$\tau \sum_{k=1}^{m-1} \left(wK\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)\right)|_{i=0} - \left(\hat{w}_x, K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})} =$$

$$= -\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right), K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})} - \left(H_x(t), K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$$

elde ederiz. Son bağıntıyı dikkate alarak I_2 yi

$$I_2 = -\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right), K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})} + I_{21}$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $I_{21}=-\left(H_x(t),K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$ olmaktadır.

Benzer şekilde, $I_3=\left(\hat{w},Q_{\bar{x}}\left(\hat{U}\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$ için

$$I_3=\tau\sum_{k=1}^{m-1} w|_{i=n}\, Q\left(\hat{U}\right)|_{i=n-1}-\tau\sum_{k=1}^{m-1} wQ\left(\hat{U}\right)|_{i=0}-\left(w_x\left(\hat{U}\right),Q\left(\hat{U}\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$$

$$-\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right),Q\left(\hat{U}\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}-\left(H_x(t),Q\left(\hat{U}\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$$

alırız. Bundan dolayı, $I_3=-\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right),Q\left(\hat{U}\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}+I_{32}$ olur. Burada $I_{32}=\left(H_x(t),Q\left(\hat{U}\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$ dır. Böylece, (3.10) ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$(\sigma(\hat{U}),U_t)_{L_2(\Omega_{h\tau})}+\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right),K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)-Q\left(\hat{U}\right)\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}\le I_{12}+I_{22}+I_{32}.$$

Şimdi de I_{12}, I_{22} ve I_{32} bağıntılarını değerlendireceğiz. Bu sebeple öncelikle I_{12} yi

$$I_{12}=\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left[(x_i-\ell)(\alpha_1,U_t)-x_i\,(\alpha_2,U_t)\right]=h\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\ell)\tau\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_1\,U_t-h\sum_{i=1}^{n-1}x_i\tau\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_2\,U_t$$

olarak yazar ve sonra k ya göre kısmi toplam formülünü uygularsak

$$\tau\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_1\,U_t=(\,\alpha_1,U_t)_{L_2(\Omega_{h\tau})}=\alpha_1\big|_{k=m}U\big|_{k=m-1}-\alpha_1U\big|_{k=0}-\left(\frac{d\alpha_1}{dt},U\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$$

buradan I_{12} için

$$I_{12}=h\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\alpha_1\big|_{k=m}U\big|_{k=m-1}-(\alpha_1U)\big|_{k=0}-\left(\frac{d\alpha_1}{dt},U\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}\right\}-$$

$$-h\sum_{i=1}^{n}x_i\left\{\alpha_2\big|_{k=m}U\big|_{k=m-1}-(\alpha_2U)\big|_{k=0}-\left(\frac{d\alpha_2}{dt},U\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}\right\}\tag{3.13}$$

alırız. (3.13) ifadesinden I_{12} için aşağıdaki değerlendirme elde edilir

$$|I_{12}|\le\left|h\sum_{i=1}^{n-1}\sigma(u_1(t_m))U_{i,m-1}(x_i-\ell)\right|+\left|h\sum_{i=1}^{n-1}\sigma(u_1(t_0))U_{i,0}(x_i-\ell)\right|+$$

$$+\left|h\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dt},U\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}\right|+\left|h\sum_{i=1}^{n-1}\sigma(u_2(t_m))U_{i,m-1}\;\;x_i\right|+$$

$$+\left|h\sum_{i=1}^{n-1}\sigma(u_2(t_0))U_{i,0}\ x_i\right| \ +\left|h\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{d\alpha_2}{dt},U\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}\right|\leq$$

$$\leq \max|\alpha_1|\|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})}+\max|\alpha_2|\|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})}+T\max\left|\frac{d\alpha_1}{dt}\right|$$

$$\|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})}+\max\left|\frac{d\alpha_2}{dt}\right|T\|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})}\leq M_3\|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})}.$$

Burada $M_3 = M_{31}\max\left\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\left|\frac{d\alpha_1}{dt}\right|,\left|\frac{d\alpha_2}{dt}\right|\right\}$, $\quad M_{31} = 4+2T = 2(T+2)$ dir.

Böylece,

$$|I_{12}|\leq M_3\ \max\left\{|\alpha_1|,\ |\alpha_2|,\left|\frac{d\alpha_1}{dt}\right|,\left|\frac{\alpha_2}{dt}\right|\right\} \tag{3.14}$$

elde ederiz. I_{21} yi değerlendirebilmek için öncelikle $H_x(t)$ yi bulmalıyız. O halde,

$$H_x(t)=\left[(x_i-\ell)_x\alpha_1-(x_i)_x\ \alpha_2\right]=\frac{x_{i+1}-x_i}{h}\ \alpha_1-\frac{x_{i+1}-x_i}{h}\ \alpha_2=\alpha_1(t)-\alpha_2(t)=H_1(t)$$

eşitliğine göre I_{21} yi aşağıdaki gibi

$$I_{21}=\left(H_1(t),\left(K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)-K(0)\right)\right)=\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}H_1(t)\left[K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)-K(0)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ \tau h\sum_{i,k}^{*}\sigma_x\left(\hat{U}\right)\left[K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)-K(0)\right]+\frac{1}{2}\ \tau h\sum_{i,k}^{**}c\ H_1(t) \tag{3.15}$$

olarak yazabiliriz. Burada, $\sum^{*}$ ve $\sum^{**}$ toplamları sırasıyla

$$|H_1(t)|\leq\frac{1}{2}\ \sigma_x\left(\hat{U}\right)\quad \text{ve}\quad \left|\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right|\leq H_1(t) \tag{3.16}$$

eşitsizliklerini sağlayan (x_i,t_k) noktalarında gerçeklenir. (3.16) eşitsizliğinden $\left|\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right|\leq c_1 = sabi$ olduğu görülür. Böylece, $|I_{21}|\leq\frac{1}{2}\ \tau h\sum_{i,k}\left[K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right)-K(0)\right]+c_1$ elde ederiz.

Şimdi, $I_{11}=\left(\sigma\left(\hat{U}\right),U_t\right)$ ifadesini göz önüne alalım.

$$\sigma(U)(\hat{U}-U)=\sigma_1(\hat{U})-\sigma_1(U)+\alpha-\sigma(0)(\hat{U}-U)=$$

$$= \left[\sigma_1(\hat{U}) - \sigma_1(0)\right] - \left[\sigma_1(U) - \sigma_1(0)\right] - \sigma(0)(\hat{U} - U) + \alpha$$

olup, buradaki $\sigma_1(U) - \sigma_1(0) = \int_0^U \left[\sigma(\xi) - \sigma(0)\right] d\xi$ dır. Bu bağıntıyı dikkate alarak,

$$h\sum_i \left\{\sigma_1(U)|_{t=T} - \sigma_1(u)|_{t=0}\right\} + \frac{1}{2}\tau h \sum_{i,k} \sigma_x(\hat{U})\left[K\left(\sigma_x\left(\hat{U}\right)\right) - K(0) - \varphi(\hat{U})\right] \le sabit$$

elde ederiz.

3.2. Nümerik Çözümün Gerçek Çözüme Yakınsaklığı

Nümerik çözümün gerçek çözüme yakınsadığını ispatlamak için $\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial v}{\partial t}$ fonksiyonlarının yaklaşım hataları olarak sırasıyla $\varepsilon_{i,k}$, $\eta_{i,k}$ ve $\delta_{i,k}$ yı alalım. Bu taktirde (3.1) denklemini

$$v_t = K\left(\sigma_x\left(\hat{U}_{\bar{x}}\right)\right) - Q\left(v_{\bar{x}}\right) + v_{i,k}^{(1)} + v_{i,k}^{(2)} \tag{3.17}$$

biçiminde yazabiliriz. $K(s)$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$v_{i,k}^{(1)} = K\left(\sigma_x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) - K\left(\sigma_x\left(v_{\bar{x}}\right)\right) = K\left(\sigma_x\left(u(x_i, t_k)\right)\right) - K\left(\sigma_x\left(u(x_i^*, t_k)\right)\right)$$

$$= K\left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x}|_{x=x^{**}}\right) - K\left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x}|_{x=x^{***}}\right) \to 0.$$

dır. Burada, $|x_i - x_i^{**}| \le h,$ $|x_i - x_i^{***}| \le h$, $v_{i,k}^{(2)} = \delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} K'(s) - \eta_{i,k} Q'(s)$ ve $v_{i,k}^{(3)} = v_{i,k}^{(1)} + v_{i,k}^{(2)}$ olmaktadır.

(3.17) denklemini (3.1) denkleminden çıkartarak ve R ile $R = v - V$ yi göstererek

$$R_t = K'(s)\left[\sigma'(s^*)\hat{R}_x\right]_{\bar{x}} - Q'(s^*)R_{\bar{x}} + v_{i,k}^{(3)}, \tag{3.18}$$

$$R_{i,0} = h\sum_{j=1}^{i-1} \Delta_{0,j} = \tilde{\Delta}(0), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x} - V_x\right)|_{i=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x} - V_{\bar{x}}\right)|_{i=n} = 0$$

elde ederiz.

Teorem 3.4 Herhangi τ ve h için aşağıdaki eşitsizlikler gerçeklenir

$$|v - V| \le \max_i |\tilde{\Delta}(0)| + 2T \max_{i,k} |v_{i,k}^{(3)}|, \tag{3.19}$$

$$\tau h\sum_{i,k}\left[\sigma(\hat{u})-\sigma(\hat{U})\right](u-U)+\tau h\sum_{i,k}\left[K(\hat{u})-K(\hat{U})\right]_x(v-V)\le const\left(\max_{i,k}|v-V|+\max_i|\eta_{i,k}|\right). \quad (3.20)$$

İspat Öncelikle, (3.19) eşitsizliğini ispatlayalım. $v-V=\rho+A(t_k)$ olacak şekilde bir ρ fonksiyonunu dahil edelim. Buradaki $A(t_k)$ ifadesi daha sonra seçilecektir. Kolayca gösterilebileceği üzere, ρ fonksiyonu aşağıdaki

$$\rho_t=K'(s)\left[\sigma'(s^*)\hat{\rho}_{\bar{x}}\right]_x-Q'(s^*)\rho_{\bar{x}}+\nu_{i,k}^{(3)}-A_t' \quad (3.21)$$

$$A(0)+\rho_{i,0}=(v-Y)_{i,0}=\tilde{\Delta}^{(0)}, \quad (3.22)$$

$$\left[\rho_x-\left(\frac{\partial v}{\partial x}-V_x\right)\right]|_{i=0}=0,\quad \left[\rho_{\bar{x}}-\left(\frac{\partial v}{\partial x}-V_{\bar{x}}\right)\right]|_{i=n}=0$$

problemini sağlamaktadır. Sınır noktalarında (3.21) denklemi aşağıdaki biçimleri alır: $i=1$ için

$$\hat{\rho}_1-\rho=\frac{\tau}{h}K'(s_1)\left[\sigma'(s_2)\left(\frac{\partial v}{\partial x}|_{i=1}-\frac{\hat{V}_2-\hat{V}_1}{h}\right)\right]+\nu_{1,k}^{(3)}-A_t'$$

ve $i=n$ için

$$\hat{\rho}_n-\hat{\rho}_{n-1}=\frac{\tau}{h}K'(s_n)\left[\sigma'(s_n)\left(\frac{\partial v}{\partial x}|_{i=n}-\frac{\hat{V}_{n+1}-\hat{V}_n}{h}\right)\right]+\nu_{n,k}^{(3)}-A_t'$$

olur.

Eğer $A(t_k)$, $A(t_k)+\max_{i,k}|\nu_{i,k}^{(2)}|<0$ olacak şekilde seçilirse, örneğin $A(t_k)=-2t_k\max_{i,k}|\nu_{i,k}^{(2)}|$ gibi, bu taktirde maksimum prensibini uygulayabiliriz. Bundan dolayı, herhangi bir k için, $|\rho_{i,k}|\le\max_i|\Delta_{i,k}^{(0)}|$ dır ve $v-V$ için

$$|v-V|\le|\rho_{i,k}|+|A(t_k)|\le\max_i|\Delta^{(0)}|+2T\max_{i,k}|\nu_{i,k}^{(3)}|$$

gerçeklenir. Şimdi (3.20) eşitsizliğini ispatlayalım. Bu amaçla

$$J=\tau h\sum_{i,k}\{[\sigma(\hat{u})-\sigma(\hat{U})](\hat{u}-\hat{U})+(Q(\hat{u})-Q(\hat{U}))(\hat{v}-\hat{V})\}$$

ifadesini göz önüne alalım. Son bağıntıyı aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$J = \tau h \sum_{i,k} \{ [\sigma(\hat{u}) - \sigma(\hat{U})] \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \hat{V}_{\bar{x}} \right) + \left(Q(\hat{u}) - Q(\hat{U}) \right) \left(\hat{v} - \hat{V} \right) \} = -\tau h \sum_{i,k} \{ [\sigma(\hat{u}) - \sigma(\hat{U})]_x$$

$$- \left(Q(\hat{u}) - Q(\hat{U}) \right) \} \left(\hat{v} - \hat{V} \right) + \tau h \sum_{i,k} [\sigma(\hat{u}) - \sigma(\hat{U})] \eta_{i,k} = J_1 + J_2 + J_3 .$$

Burada $J_1 = -\tau h \sum_{i,k} [\sigma_x(\hat{u}) - Q(\hat{u})] \left(\hat{v} - \hat{V} \right)$, $J_2 = -\tau h \sum_{i,k} [\sigma_x(\hat{U}) - Q(\hat{U})] \left(\hat{v} - \hat{V} \right)$ ve $J_3 = -\tau h \sum_{i,k} [\sigma(\hat{U}) - Q(\hat{U})] \eta_{i,k}$ olmaktadır.

Şimdi $\Omega_{\tau h}$ ağını aşağıdaki şeklinde tanımlanan iki $\Omega_{\tau h}^{(1)}$ ve $\Omega_{\tau h}^{(2)}$ alt ağına ayıralım

$$\Omega_{\tau h}^{(1)} = \{ (x_i, t_k) \,\|\, \sigma_x(\hat{u}) - Q(\hat{u}) \,| \le 1 \}, \qquad \Omega_{\tau h}^{(2)} = \{ (x_i, t_k) \,\|\, \sigma_x(\hat{u}) - Q(\hat{u}) \,| > 1 \}.$$

Bu durumda $| J_1 |_{\Omega_{\tau h}^{(1)}} \le \tau h \sum_{i,k} | v - V |$ dır. J_1 ifadesini $\Omega_{\tau h}^{(2)}$ üzerinde değerlendirelim. $| s | > 1$ ve $| K(s) - K(0) | \ge m_0 > 0$ varsayımı altında we get

$$| J_1 |_{\Omega_{\tau h}^{(2)}} \le \frac{1}{2} \tau h \sum_{i,k} | \sigma_x(u) \left[K(\sigma_x(u)) - K(0) - Q(u) \right] (v - V) | \le \frac{c_1}{m_0} \max_{i,k} | v - V |$$

alırız. $J_2 |_{\Omega_{\tau h}^{(1)}}$ ve $J_2 |_{\Omega_{\tau h}^{(2)}}$ benzer şekilde değerlendirilir. Sonuç olarak, J için

$$| J | \le c_1 \max_{i,k} | \eta_{i,k} | + 2 \tau h \sum_{i,k} | v - V | + c_2 \max_{i,k} | v - V |,$$

elde edilir. Burada c_j, $(j = 1,2)$ ler sabitlerdir. (3.21) eşitsizliğinin doğruluğu son bağıntıdan görülmektedir. Önerilen algoritmalar temelinde sayısal deneyler gerçekleştirilmiştir.

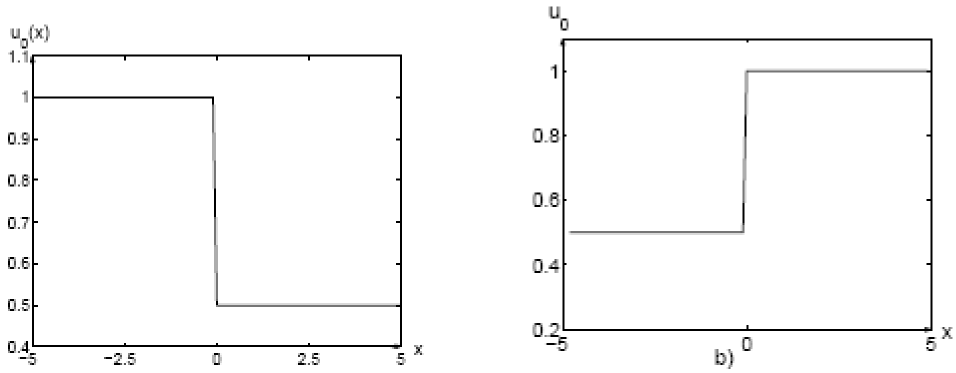
3.3. Sayısal Deneyler

Önerilen metodun etkinliğini göstermek amacıyla, bu algoritmayı aşağıdaki problemleri çözmede uygulayacağız

Problem 3.1 $K(s) = \nu s$, $\sigma(u) = u$, $Q(u) = 0.5u^2$ olduğu durumu göz önüne alalım. Burada ν verilen herhangi bir pozitif sabittir. Bu durumda (2.1) denklemi Burgers denklemine indirgenir. Bu denklem, aşağıdaki başlangıç koşulu ile çözülmektedir

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2, & x > 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Burada, (i) $u_1 > u_2$ ve (ii) $u_1 < u_2$ olarak iki durum ortaya çıkabilir. Başlangıç fonksiyonunun grafiği Şekil 3.1 de gösterilmiştir.



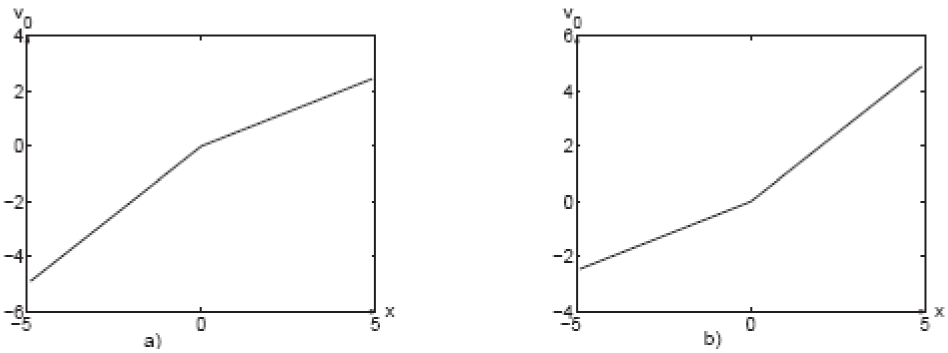
Şekil 3.1. a) Esas problemin başlangıç fonksiyonu; b) Yardımcı problemin başlangıç fonksiyonu

Bu problem için yardımcı denklem aşağıdaki gibi

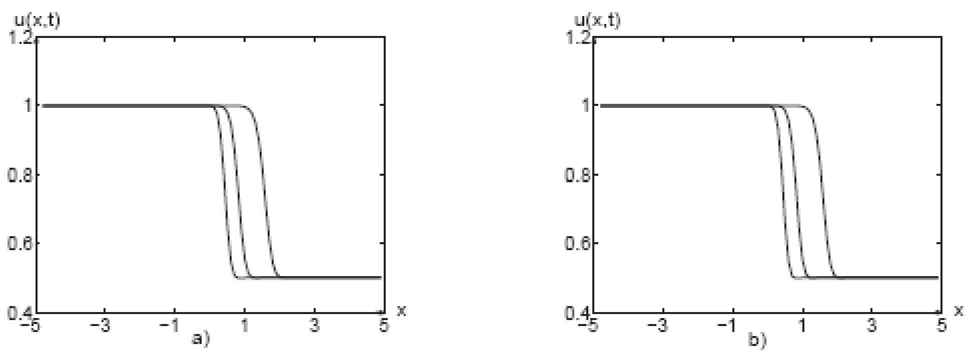
$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{u^2(x,t)}{2} = \nu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \tag{3.24}$$

$$v_0(x) = \begin{cases} u_1 x, & x < 0 \\ u_2 x, & x > 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

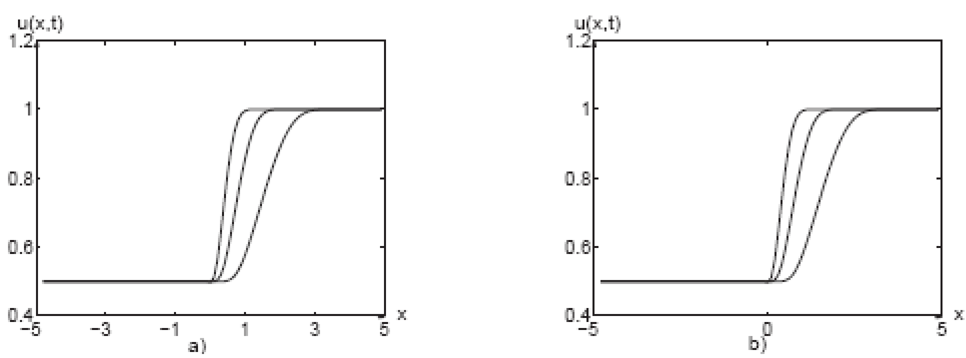
olarak yazılır. $v_0(x)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 3.2 de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. a) $u_1 > u_2$ durumunda $v_0(x)$ ın grafiği; b) $u_1 < u_2$ durumunda $v_0(x)$ ın grafiği



Şekil 3.3. a) $T = 0.5, T = 1.0, T = 2.0, \nu = 0.007, ht = 0.001$;
b) $T = 0.5, T = 1.0, T = 2.0, \nu = 0.01, ht = 0.01$



Şekil 3.4. a) $T = 0.5, T = 1.0, T = 2.0, \nu = 0.01, ht = 0.01$
b) $T = 0.5, T = 1.0, T = 2.0, \nu = 0.001, ht = 0.01$

(3.24), (3.25) problemine aşağıdaki sonlu farklar şeması ile yaklaşım kuracağız

$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} = \frac{U_{i,k}^2}{2} + \left(\frac{U_{i,k} - U_{i-1,k}}{h}\right),$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i)\ .$$

Söz konusu problemin bu algoritma kullanılarak elde edilen çözümünün grafiğikleri Şekil 3.3 ve 3.4 de gösterilmiştir.

Problem 3.2 $K(s) = s^2$, $\sigma(u) = u$, $Q(u) = u$ olsun. Bu taktirde (2.1) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.26}$$

formunu alır. (3.26) denkleminin aşağıdaki

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \tag{3.27}$$

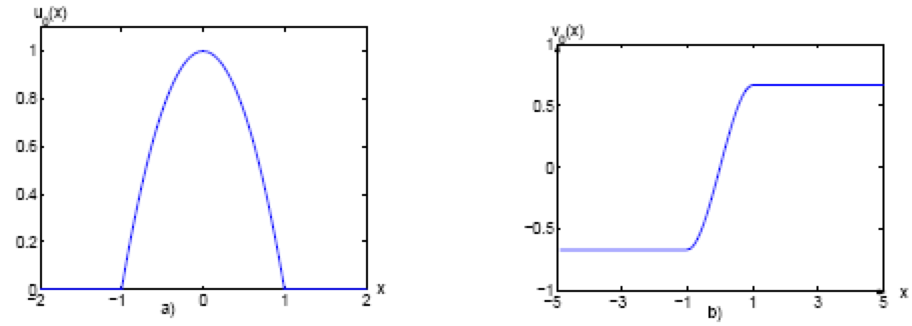
başlangıç koşulu dahilinde çözümünü araştıracağız. Bu durum için yardımcı problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u \tag{3.28}$$

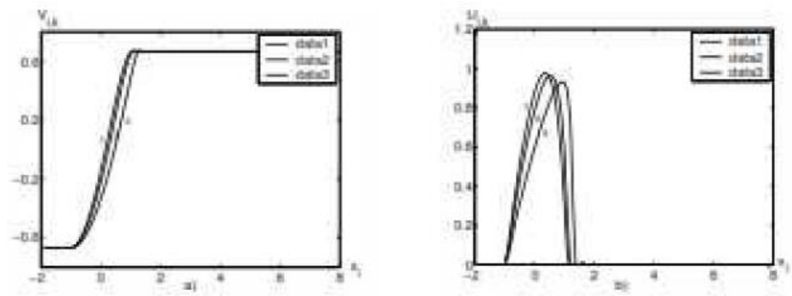
olur. (3.28) denklemi için başlangıç koşulu

$$v_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}, & x \le -1 \\ x - \dfrac{x^3}{3}, & -1 < x < 1 \\ \dfrac{2}{3}, & x \ge 1 \end{cases}$$

dır.



Şikil 3.5. a) $u_0(x)$ fonksiyonunun grafiği; b) $v_0(x)$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.6. a) $V_{i,k}$ nın grafiği; b) $U_{i,k} = V_{\bar{x}}$ nın grafiği

$u_0(x)$ ve $v_0(x)$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.5 de gösterilmiştir. (3.28) denkleminin sonlu farklar karşılığı

$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} = \left(\frac{U_{i,k} - U_{i-1,k}}{h} \right)^2 - U_{i,k} \tag{3.29}$$

dır. (3.29) algoritması kullanılarak elde edilen çözümler Şekil 3.6 da gösterilmiştir.

4. BURGERS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Bu bölümde (2.2) denkleminin özel durumlarını inceleyeceğiz.

Eğer

$$Q = -\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} \qquad (4.1)$$

olursa (2.2) denklemi nonlineer ısı

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} \qquad (4.2)$$

denklemine dönüşür.

Oleinik ve Kalashnikov'un çalışmalarından görüldüğü gibi, herhangi bir t için (4.1) denkleminin başlangıç fonksiyonu kompakt taşıyıcıya sahip olduğunda ve uygun sınır koşulu çerçevesinde denklemin de kompakt taşıyıcıya sahip çözümünün olduğu ispatlanmıştır, [11]. Başka bir deyişle, (4.1) denkleminin çözümünün heyecanlanmış ön cephesi sonlu hızla hareket eder. Bu, matematiksel olarak şu anlama gelir: (4.1) denkleminin çözümü zayıf süreksizlik noktalarına sahiptir; yani fonksiyonun kendisi sürekli, fakat birinci türevi 2. tür süreksizlik noktalarına sahiptir. Çözümdeki bu özellik (yani heyecanlanmış cephenin sonlu hızla hareket etmesi) (4.1) denkleminin kalitatif özelliklerini değiştirir öyle ki, bu özellik lineer denklemlerde mevcut olmamaktadır. (4.1) denklemindeki nonlineerliğin yarattığı etkiyi detaylı şekilde inceleyebilmemiz için,

$$Q = \frac{1}{2}u^2 + \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \ (\mu > 0) \qquad (4.3)$$

olmak üzere tekrar

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (4.4)$$

denklemini göz önüne alalım. (4.4) denklemi iki çeşit fiziksel etkinliği içermektedir. Bunlardan biri doyma fonksiyonunun nonlineer dağılımını ifade eden özelliğidir; diğeri de kapilar basınç hesabına oluşan difüzyon terimidir. Bizim burada esas problemimiz $\mu \to 0$ iken (4.4) denkleminin çözümünün dejenere olan denklemin gerçek çözümüne yaklaştığını göstermektir. Bu sonuç filtrasyon olayına kapilar basıncın etkisini öğrenmemize olanak tanır. (4.4) denklemi literatürde iyice öğrenilmiştir. Bu doğrultuda ilk araştırma Hopf tarafından yapılmıştır, [9]. Bilindiği üzere Cole-Hopf dönüşümü olarak isimlendirilen

$$u = -2\mu \frac{\varphi_x}{\varphi} \qquad (4.5)$$

dönüşümü yardımıyla (4.4) denklemini φ bilinmeyenine göre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad (4.6)$$

ısı denklemine dönüştürebiliriz. (4.6) denklemini

$$u(x,0) = F(x) \qquad (4.7)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. (4.6), (4.7) probleminin çözümü

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\eta) e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\mu t}} d\eta \qquad (4.8)$$

şeklinde olmaktadır. Buradaki ϕ fonksiyonu

$$\varphi = \phi(x) = e^{-\frac{1}{2\mu}\int_0^x F(\eta) d\eta}$$

biçimindedir.

Sonuç olarak, Cole-Hopf dönüşümünü dikkate alırsak, (4.4) denkleminin çözümünü

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-\frac{G}{2\mu}} d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{G}{2\mu}} d\eta} \qquad (4.9)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada

$$G(\eta; x,t) = \int_0^{\eta} F(\eta') d\eta' + \frac{(x-\eta)^2}{2t} \qquad (4.10)$$

dır.

Şimdi (4.9) ifadesinin $\mu \to 0$ iken davranışını inceleyelim. Açıktır ki, bu fonksiyonun $\mu \to 0$ iken taşıyıcısı (4.10) deki G fonksiyonunun stasyoner noktalarının civarında olacaktır. Varsayalım ki, $\eta = \xi(x,t)$ herhangi bir stasyoner nokta olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = F(\eta) - \frac{x-\eta}{t} = 0 \qquad (4.11)$$

olup, η fonksiyonu

$$F(\xi)-\frac{x-\xi}{t}=0 \tag{4.12}$$

ifadesinin kökü olarak tanımlanır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)e^{-\frac{G(\eta)}{2\mu}}d\eta$$

integralinin $\eta=\xi$ noktası civarındaki asimptotik değeri

$$g(\xi)\sqrt{\frac{4\pi\mu}{|G''(\xi)|}}e^{-\frac{G(\xi)}{2\mu}}$$

olmaktadır, [7].

Önce (4.12) denkleminin tek bir stasyoner noktasının olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\eta}{t}e^{-\frac{G(\eta)}{2\mu}}d\eta \sim \frac{x-\xi}{t}\sqrt{\frac{4\pi\mu}{|G''(\xi)|}}e^{-\frac{G(\xi)}{2\mu}} \tag{4.13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{G(\eta)}{2\mu}}d\eta \sim \sqrt{\frac{4\pi\mu}{|G''(\xi)|}}e^{-\frac{G(\xi)}{2\mu}} \tag{4.14}$$

ve (4.9) eşitliğinden

$$u\sim\frac{x-\xi}{t} \tag{4.15}$$

alırız. Elde edilen asimptotik ifadeyi

$$u=F(\xi), \qquad \xi=x-ut \tag{4.16}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifade

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4.17}$$

denkleminin çözümü olmaktadır. Görüldüğü gibi, (4.17) denklemi (4.4) denkleminden $\mu=0$ olduğu durumda elde edilmiştir. Böylelikle şunu ispatlamış oluruz: $\mu\to 0$ iken (4.4) denkleminin çözümü (4.17) denklemine dönüşür.

Pratik hesaplamalarda μ her zaman bir değere sahiptir. Bu değer adeta sıfıra yakın bir değerdir. Bu nedenle de μ sıfıra yakınlaştığında elde edilen çözüme birinci yaklaşım olarak bakabiliriz. μ fiziksel büyüklük olduğundan onun bir ölçüsü vardır. Sadelik için onu ölçüsüz hale getirebiliriz. Gösterilebilir ki, μ ile $V(x_f(t),t)$ aynı L^2/T birimine sahiptir.

$$R = \frac{V(x_f(t),t)}{2\mu}$$

değişkenini dahil edelim. Görüldüğü gibi, R ölçüsüz bir büyüklüktür ve μ küçük olduğu zaman $R >> 1$ (1 den çok çok büyük) olur. R sayısına Reynolds sayısı denir ve Reynolds sayısı konvektif terimin difüzyon terimine olan oranını göstermektedir.

μ sıfıra yaklaştığı zaman elde edilen çözüm ile $\mu = 0$ olduğu çözüm arasındaki farkı göstermek gerekir. Bunun için $\mu \neq 0$ olduğu zaman darbe dalgasının yapısını inceleyelim. Bu amaçla

$$u = u(\xi), \qquad \xi = x - ct \tag{4.18}$$

dönüşümünü yapalım. (4.18) u (4.4) denkleminde dikkate alırsak

$$-cu_\xi + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_\xi = \mu u_{\xi\xi} \tag{4.19}$$

alırız. Sonuncu eşitliği integrallersek

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 + A = \mu u_\xi \tag{4.20}$$

elde ederiz. Burada A integrasyon sabiti olmaktadır. Görüldüğü gibi, (4.20) in sol tarafı u ya bağlı kare form olmaktadır ve u_1, u_2 kare formun sıfırları olduğu taktirde Viyet teoremine göre

$$c = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \qquad A = \frac{1}{2}u_1 u_2 \tag{4.21}$$

ifadesi geçerlidir. Bu durumda, (4.20) denklemini

$$-2\mu u_\xi = (u - u_1)(u - u_2) \tag{4.22}$$

şeklinde yazabiliriz. (4.22) denklemini bir kez daha integrallersek,

$$\frac{\xi}{\mu} = \frac{2}{u_2 - u_1}\ln\frac{u_2 - u}{u - u_1} \tag{4.23}$$

alırız. (4.23) denkleminden u yu çekersek

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + e^{\frac{u_2 - u_1}{2\mu}(x - ct)}} \tag{4.24}$$

alırız. Eğer başlangıç fonksiyonunu

$$F(x) = \begin{cases} u_1, & x > 0 \\ u_2, & x < 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

şeklinde seçersek ve $u_1 > u_2$ kabul edersek, bulduğumuz çözüm fiziksel gerçek olan ve sürekli fonksiyona dönüşür. $\mu = 0$ ve $u_2 > u_1$ olduğunda ise çözümde kırılma oluşur. Bu durumda (4.9) ifadesi

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + he^{\frac{u_2-u_1}{2\mu}(x-ct)}} \tag{4.26}$$

şekline dönüşür. Burada

$$h = \frac{\int_{-(x-u_1 t)}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta}{\int_{\frac{(x-u_2 t)}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} \tag{4.27}$$

dır. $u_1 < \dfrac{x}{t} < u_2$ aralığında olan herhangi bir x/t için $t \to \infty$ iken (4.26) çözümü (4.24) e yakınsar. (4.20) denkleminden açıktır ki, eğer u_1 ve u_2 sabit ve değişmez ise μ nün değişmesi, *ox* ekseninde ölçek değiştirmeyle telafi edilebilir. Bu durumda $\mu \to 0$ olduğunda Şekil 4.2 deki profil civarındaki şeriti daraltmayla çözümü parçalı sabit şekilli fonksiyona dönüştürmek mümkün olur. Dolayısıyla u_1 den u_2 ye doğru dönen bir sıçrayış elde ederiz ki, o sıçrayış $c = \dfrac{1}{2}(u_1 + u_2)$ hızıyla hareket eder. Sabit ve değişmez olan, fakat çok küçük μ için darbe dalgası hızlı değişen sürekli kısma sahip olan fonksiyona dönüşür ki, bu eğri üzerinde akış parametreleri hızla değişir. Bu dar alandaki kırılma denklemin nonlineer olmasından doğar ve denklemdeki difüzyon terimi söz konusu sıçrayışı belli bir ene sahip şerite taşır. Bu geçit bölgesi net bir ene sahip değildir; fakat onu çeşitli yollarla değerlendirebiliriz. Örneğin, eğer çözümün gradyanın değeri %90 değişirse bu bölgeyi geçit bölgesi olarak kabul edebiliriz. Diğer bir yolla, $u_2 - u_1$ i $|u_x|$ in maksimumuna bölmeyle elde etmek de mümkündür. Açıktır ki, bu ölçeklerin hepsi $\dfrac{\mu}{u_2 - u_1}$ ifadesiyle orantılıdır ve görüldüğü gibi $\mu \to 0$ olduğunda bu sayı sıfıra yaklaşır.

[18] de ispatlanmıştır ki, eğer

$$F(x) = A\delta(x)$$

olursa, Reynolds sayısı sonsuza yaklaşırsa $(\mu \to 0)$, geçit bölgesi u fonksiyonunun sıçrayış doğrusuna dönüşür. Böylece, geçit bölgesi $x=0$ noktası civarında u_x türevinin süreksizlik eğrisi olur.

Önemle belirtmek gerekir ki, çözümün grafiği ile *ox* ekseninin sınırladığı bölge sabit kalmaktadır. Çünkü

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} udx = \left[\mu u_x - \frac{1}{2}u^2\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

dır. Buna göre de $\frac{1}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty} udx$ ile tanımlanan Reynolds sayısı tüm t ler için sabit kalır.

Yukarıda söylediklerimizden hükmedebiliriz ki, (4.4) denkleminin klasik çözümü yoktur. Çünkü u_x türevi geçit bölgesinde süreksizliğe maruz kalır. Bu nedenle klasik çözüm kavramını genişlendirip zayıf (veya genelleştirilmiş) çözüm kavramını dahil etmemiz gerekir, [13] de olduğu gibi (4.1) denklemini

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int udx + \frac{1}{2}u^2 - \mu\frac{\partial u}{\partial u}\right\} = 0 \tag{4.28}$$

şeklinde yazalım.

$$\int udx = v$$

notasyonunu kabul edelim. Bu notasyonda (4.28) denklemini

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{4.29}$$

şeklinde yazabiliriz. (4.29) denklemini yardımcı denklem olarak adlandıracağız. Bu denklem nonlineer parabolik tür denklem olmaktadır. Şimdi gösterelim ki,

$$v = -2\mu\ln\psi \tag{4.30}$$

değişken dönüşümü yardımıyla (4.29) denklemini

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{4.31}$$

şeklinde denkleme dönüştürebiliriz. Gerçekten de,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2\mu\frac{\partial\psi/\partial t}{\psi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\mu\frac{\partial\psi/\partial x}{\psi},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2\mu \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\psi - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2}{\psi^2}$$

türevlerini (4.29) ifadesinde yerine koyarsak

$$-2\mu \frac{\partial \psi / \partial t}{\psi} + \frac{1}{2}4\mu^2 \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2}{\psi^2} + \mu 2\mu \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\psi - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2}{\psi^2} = 0$$

veya sadeleştirmeyle

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

elde ederiz. (4.31) denklemi lineer parabolik türdendir ve literatürde iyice öğrenilmiştir, [14].

$\psi(x,t)$, (4.31) denkleminin herhangi bir sürekli çözümü olsun. ψ fonksiyonunun elde edilme yolu önemli değildir. Ancak buradaki sorunlu nokta (4.29) denkleminin çözümünün sonlu taşıyıcısının $(0, x_f(t))$ bölgesinde olmasıdır öyle ki, bu bölgenin sağ tarafı zamana göre hareket etmektedir. Fakat (4.31) denklemi sınırları değişen bölgede ısı potansiyeli şeklinde çözüme sahiptir, [14].

$\psi(x,t)$ fonksiyonunu bulmak için aşağıdaki şekilde hareket edelim:

$$G_f = \{0 \le x \le L, \quad 0 \le t \le T\}$$

bölgesini göz önüne alalım. Burada L heyecanlanmış bölgenin ön cephesinin ulaşamadığı x ekseni üzerindeki noktanın yerini göstermektedir. Genelliği bozmadan $L = \infty$ da alabiliriz. Eğer (4.31) denklemini herhangi bir yolla çözebilirsek, yukarıda sözünü ettiğimiz gibi başlangıç profili ile sınırlanmış bölgenin sabit oluşu koşulundan

$$v(x_f(t), t) = \int_0^{x_f(t)} u(x,t)dx \tag{4.32}$$

integrali sabit kalır.

Tanım 4.1 $S_b(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$ integralini v fonksiyonu için kritik sayı olarak adlandıralım.

(4.30) i dikkate alırsak

$$\psi(x,0) = e^{-\frac{F(x)}{2\mu}} \tag{4.33}$$

olur. (4.33) koşulu (4.31) denkleminin çözümünün bulunması için kullanılarak $v(x,t)$ leri hesaplayabiliriz.

Tanım 4.2 $v(x,t)$ fonksiyonunun kritik değer aldığı noktanın apsisine denklemin dejenere noktası adı verilir.

Şimdi heyecanlanmış bölgenin ön cephesinin bulunması problemi ile uğraşalım. (4.32) den

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = \left(-\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \bigg|_{x=x_f(t)}$$

elde ederiz. Sonuncu ifadeden parçacığın ön cephe noktasına (front noktasına) ulaşma süresini

$$t = \int_0^{x_f} \frac{dx_f}{\left(-\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \right)}$$

olarak buluruz.

5. SONUÇ

1.İki kez dejenere olabilen nonlineer parabolik tür denklemlerin sayısal çözümünün bulunması için esas problem üzerinde bazı avantajlara sahip olan ve incelenen problemin tüm fiziksel özelliklerini doğru olarak açıklayan özel bir yardımcı problem önerilmiş ve çözümün bazı özellikleri incelenmiştir.

2. İki kez dejenere olan nonlineer parabolik denklemlerin çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfında yüksek hassasiyete sahip bir sayısal şema önerilmiştir. Yardımcı problem kullanılarak sayısal çözümün belli anlamda gerçek çözüme yakınsadığı ispatlanmıştır.

3. Elde edilen sayısal çözümün dinamiğini incelemek için göz önüne alınan problemin özel durumu olan Burgers denkleminin çözümünün asimptotik yapısı öğrenilmiştir.

4. Önerilen yöntemi kullanarak bazı bilgisayar deneyleri de gerçekleştirilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Antonsik, P., MikusinskiJ., Sikorski, R., Theory of Distributions The Sequential Approach, Elsevier Scientific, Amsterdam, 1973.

[2] Antontsev, S., Shmarev, S.: Parabolic Equations with Double Variable Nonlinearities. Mathematics and Computers in Simulation, 81, 2018–2032 (2011)

[3] Baklanovskaya, V. F.: A Study of the Method of Nets for Parabolic Equations with Degeneracy. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 17(2.6), 1458–-1473 (1977)

[4] Barenblatt G.,I., Entov, V., M., Pijik V., M. Motions of Fluids and Gases in Reservoirs. Moskow, Nedra, 1984, 221 p.

[5] Buckley, S.E., Leverett, M.C. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. Trans. AIME 146, 1942, pp. 107-116.

[6] Collins, R.E. Flow of Fluids Through Porous Materials. Penn-Well, Tulsa, OK, 1976.

[7] Erdelyi, A., Asymptotic Expansions, Dover Publ., 1956.

[8] Gelfant, I.M., Shilov, G.E., Generalized Functions, Vol. 1: Properties and Operations, Academic Press, New York, 1964.

[9] Hopf , E. The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure Applied Mathematics, 3, 1950, pp. 201-230.

[10] Lusternik, L., Sobolev, V. I., Elements of Functional Analysis, Nauka, Moscow, 1965.

[11] Oleinik, O.A., Kalashnikov, A.S, Chzhou, Y.-L., The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of non-stationary filtration (in Russian). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 22, 667-704 (1958)

[12] Rasulov, M. A.: A Numerical Method of Solving a Parabolic Equation with Degeneration. Dif. Equations, 18(2.8), 1418–1427 (1992)

[13] Rasulov, M.A., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin Yayınevi, İstanbul, 2011.

[14] Samarskii, A. A.: Duty with Peaking in Problems for Quasi Linear Equations of Parabolic Type . Nauka, Moskow (1987)

[15] Schwartz, L., Théorie des Distributions, Vol. I and II, Hermann, Paris, 1957-1959.

[16] Sinsoysal, B.: The Analytical and a Higher-Accuracy Numerical Solution of a Free Boundary Problem in a Class of Discontinuous Functions. Mathematical Problems in Engineering, 2012, doi:10.1155/2012/791026 (2012)

[17] Sobolev, S. L., Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1978.

[18] Whitham, G. B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley Int., New York, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

22.11.1986 yılında Trabzon’da doğdum. 1997 yılında Fatih Sultan Mehmet İlkokulu’ndan, 2000 yılında Atatürk İlköğretim Okulu’ndan, 2005 yılında Özel Ertuğrul Gazi Lisesi’nden mezun oldu. Beykent Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümünden mezun oldu. 2013 yılında Beykent Üniversitesi’nde Fen-Edebiyat Fakültesi Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda yüksek lisansa başladı.

Elif YAR,