

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**OTOBANDA TRAFİK AKIŞ DİNAMİĞİNİN SÜREKSİZ  
FONKSİYONLAR SINIFINDA MATEMATİKSEL  
MODELİ VE ÇÖZÜMÜ**

Yüksek lisans tezi

Tezi Hazırlayan:

**Hasan CARFİ**

İSTANBUL, 2014

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**OTOBANDA TRAFİK AKIŞ DİNAMİĞİNİN SÜREKSİZ  
FONKSİYONLAR SINIFINDA MATEMATİKSEL  
MODELİ VE ÇÖZÜMÜ**

Yüksek lisans tezi

Tezi Hazırlayan:

**Hasan CARFİ**

Öğrenci No:

**120860001**

Danışman:

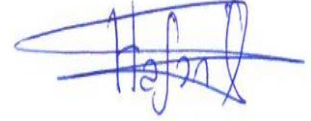
Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2014

## YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum " **Otobanda Trafik Akış Dinamiğinin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Matematiksel Modeli ve Çözümü** " başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullandıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım 16.07.2014

**Hasan CARFİ**



T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

**Beykent Üniversitesi**  
**Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,**




Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 120860001 no'lu Hasan CARFİ'nin 04/07/2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavı<sup>1</sup> sonucunda 50 (Elli) dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında<sup>2</sup> oybirliğiyle, kabul kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

---

**Anabilim Dalı** : Matematik-Bilgisayar  
**Programı** : Uygulamalı Matematik  
**Tez Başlığı<sup>3</sup>** : Otobanda Trafik Akış Dinamiğinin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Matematiksel Modeli ve Çözümü

---

<u>Tez Sınav Jürisi</u>	<u>Öğretim Üyesi</u>	<u>İmza</u>
<b>Danışman</b> :	Prof.Dr. Mahir RESULOV	
<b>Üye</b> :	Prof.Dr. Abdullah YILDIZ	
<b>Üye</b> :	Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL	

---

<sup>1</sup> Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

<sup>2</sup> Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında “kabul”, “düzeltme” veya “red” kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi başarısız bulunan öğrencinin Enstitü ile ilişkisi kesilir. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. Bu savunma sınavında da tezi kabul edilmeyen öğrencinin enstitü ile ilişkisi kesilir. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

<sup>3</sup> İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

## ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşmasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca etkin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a ve ayrıca tezimin hazırlanması esnasında desteğini esirgemeyen hocam Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İstanbul, 2014

Hasan CARFİ

# OTOBANDA TRAFİK AKIŞ DİNAMİĞİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA MATEMATİKSEL MODELİ VE ÇÖZÜMÜ

Tezi Hazırlayan: **Hasan CARFİ**

## ÖZET

Tezde otobanlardaki trafik akışının dinamiğini düzgün aksettiren matematiksel bir model oluşturulmuştur.  $\rho_l$  ve  $\rho_r$  sırasıyla arakesitin sağ ve sol tarafındaki araç yoğunluğunu göstermek üzere,  $\rho_l > \rho_r$  durumunda çözümün parçalı sürekli bir fonksiyon olduğu gözlenmiştir. Aksi halde, çözümde yeri önceden bilinmeyen bir şokun meydana geldiği ispatlanmış ve sıçrayışın yerinin bulunması için bir metot önerilmiştir. İlaveten önerilen metodun gerçekleştirilmesi için akış parametreleri de bulunmuştur.

# HIGHWAY TRAFFIC FLOW DISCONTINUOUS FUNCTIONS OF DYNAMIC MATHEMATICAL MODEL AND SOLUTION IN THEIR CLASS

Presented by: **Hasan CARFI**

## ABSTRACT

A mathematical model reflecting properly the dynamics of traffic flow on highways has been constructed. In the case of  $\rho_\ell > \rho_r$ , the solution is observed as a piecewise continuous function, where  $\rho_\ell$  and  $\rho_r$  are the densities of cars on the left and right side of the intersection respectively. On the contrary case, it has been proven that a shock of which the location is unknown beforehand arises in the solution and furthermore a method specifying the location of jump has also been proposed. In addition to the realization of the suggested method, the parameters of the flow are also found.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	iv
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
1.1 Karakteristikler Yöntemi .....	1
1.2 Cauchy Problemi .....	4
1.3 Bir Boyutlu Skaler Korunum Kuralı .....	8
1.4 Süreksiz Başlangıç Koşullu Cauchy Problemi (Riemann Problemi) .....	10
<b>2. DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN RIEMANN PROBLEMİ</b> .....	19
2.1 Lineer Hiperbolik Sistem .....	19
2.1.1 Sistemin Diagonalleştirilmesi ve Karakteristik Değişkenler .....	19
2.2 Cauchy Problemi .....	20
2.3 2x2 Boyutlu Sistem İçin Çözüm .....	22
<b>3. TRAFİK AKIŞ PROBLEMİNİN MATEMATİKSEL MODELLERİ VE ÇÖZÜMLERİ</b> .....	31
3.1 Akış Parametrelerinin Bulunması .....	31
3.2 Lighthill-Whitham Modeli ve Çözümü .....	33
3.3 Trafik Işık Problemi .....	38
3.4 Payne-Whitham Modeli .....	39
<b>4. SONUÇ</b> .....	42
<b>5. KAYNAKLAR</b> .....	43



## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1 .....	9
Şekil 1.2 .....	12
Şekil 1.3. $u(x,t)$ fonksiyonu, $u_1 > u_2$ .....	12
Şekil 1.4 .....	15
Şekil 1.5 .....	16
Şekil 1.6 .....	17
Şekil 1.7 .....	17
Şekil 2.1 .....	19
Şekil 2.2 .....	23
Şekil 2.3 .....	24
Şekil 3.1 .....	32
Şekil 3.2 .....	32
Şekil 3.3 .....	35
Şekil 3.4 .....	35
Şekil 3.5 .....	36
Şekil 3.6 .....	37
Şekil 3.7 .....	37
Şekil 3.8 .....	38
Şekil 3.9 .....	39

# 1. GİRİŞ

## 1.1 Karakteristikler Yöntemi

Kolaylık için önce

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \quad (1.1)$$

denklemini göz önüne alalım.  $xoy$  düzleminde parametrik denklemleri  $(x = x(s), y = y(s))$  olan öyle bir eğri içerelim ki, bu eğri üzerinde (1.1) denklemi tam diferansiyel şeklinde yazılabilsin. Eğer böyle eğriler bulunabilir ise bu tür eğrilere denklemin karakteristik eğrileri denir. Söz konusu karakteristik eğriler

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y) \quad (1.2)$$

adi diferansiyel denklemler sistemini koruduğu takdirde, (1.1) denklemi

$$\frac{du}{ds} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Son üç denklemler sistemini

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} = \frac{du}{0} \quad (1.2)$$

şekilde de yazabiliriz. (1.2) denklemler sistemine (1.1) e karşılık gelen karakteristik sistem denir. Adi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini

$$\phi(x, y) = c_1, \quad \psi(x, y) = c_2 \quad (1.3)$$

olarak gösterelim. Bunlara (1.1) denkleminin 1.aralık integralleri adı verilir.

**Lemma 1.** Genel olarak  $x, y, z$  serberst değişkenler olmak üzere,  $\phi = \phi(x, y, z)$  ve  $\psi = \psi(x, y, z)$  fonksiyonları verilsin.  $f$  keyfi diferansiyellenebilen fonksiyon olmak üzere  $f(\phi, \psi) = 0$  ise  $z = z(x, y)$  fonksiyonu

$$p \frac{D(\phi, \psi)}{D(y, z)} + q \frac{D(\phi, \psi)}{D(z, x)} = \frac{D(\phi, \psi)}{D(x, y)} \quad (1.4)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemini sağlar. Burada,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \frac{D(\phi, \psi)}{D(x, y)} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.5)$$

olmaktadır.

**İspat**  $f(\phi, \psi) = 0$  fonksiyonunu  $x$  e ve  $y$  ye göre diferansiyellersek

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.6)$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] = 0 \quad (1.7)$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz (1.6) ve (1.7) denklemleri, bilinmeyen  $\frac{\partial f}{\partial \phi}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \psi}$  için homojen

cebirsel denklem sistemi oluşturur. Homojen cebirsel denklemler sisteminin trival olmayan çözümünün varlığı ve tekliği için katsayılardan oluşan determinat sıfıra eşit olmalıdır

$$\left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} p \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q \right) - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} q \right) \right] = 0. \quad (1.8)$$

Sonucu ifadede parantez içerisinde olan terimleri çarptıktan sonra elde edilen ifadeyi  $p$  ve  $q$  ye göre gruplaştırsak hükmün doğrulunu ispatlamış oluruz.

**Teorem 1.**  $\Phi$  herhangi bir diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, (1.3) ifadeleri (1.1) denkleminin 1.aralık integralleri olduğu takdirde

$$\Phi(c_1, c_2) = 0 \quad (1.9)$$

ile tanımlanan kapalı fonksiyon (1.1) in genel çözümü olur.

**Örnek 1.**  $xu_x + yu_y = 0$  denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**Çözüm** Karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{0}$$

olmaktadır. Buradan 1.aralık integral  $du = 0$  denkleminde  $u = c_1$  olarak bulunur. Diğer

1.aralık integrali ise  $\frac{y}{x} = c_2$  olarak elde ederiz. Böylelikle gereken aralık integrallerimizi

bulmuş olduk. Teorem 1 e göre de denklemin genel çözümü

$$f(c_1, c_2) = 0$$

veya

$$f\left(u, \frac{y}{x}\right) = 0$$

olur. Son denklemden

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

alırız, burada  $\varphi$  keyfi diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmaktadır.

Şimdi (1.1) denkleminin yerine

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (1.10)$$

denklemini göz önüne alalım. (1.1) in çözümünü

$$v(x, y, u) = 0 \quad (1.11)$$

şeklinde arayalım. Burada  $v$  tüm değişkenlerine göre diferansiyellenebilen keyfi bir fonksiyondur. Sonucu ifadeyi  $x$  ve  $y$  ye göre diferansiyelleyelim

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Buradan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} / \frac{\partial v}{\partial u} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} / \frac{\partial v}{\partial u}$$

olarak buluruz. Sonucu ifadeler (1.1) de yerine koyulursa

$$-a(x, y, u) \frac{\partial v}{\partial x} / \frac{\partial v}{\partial u} - b(x, y, u) \frac{\partial v}{\partial y} / \frac{\partial v}{\partial u} = c(x, y, u)$$

veya

$$-a(x, y, u) \frac{\partial v}{\partial x} - b(x, y, u) \frac{\partial v}{\partial y} - c(x, y, u) \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \quad (1.12)$$

olur.  $v$  fonksiyonuna göre birinci basamaktan homojen kısmi diferansiyel denklem elde ederiz. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklemler sistemi

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{-c(x, y, u)} \quad (1.13)$$

olmaktadır.

**Örnek 2.**  $u_x - u_y = 1$  denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**Çözüm** İlk olarak aralık integrallerimizi bulalım. Karakteristik denklemlerimizi

$$dx = -dy = du$$

olarak yazarsak, buradan

$$dx = -dy, \quad dx = du$$

alırız. Sonucu denklemleri integrallersek

$$c_1 = y + x, \quad c_2 = u - x$$

buluruz. Teorem 1 e göre

$$f(y + x, u - x) = 0$$

elde ederiz. Buradan çözüm için aşağıdaki

$$u - x = \varphi(y + x)$$

veya  $u = \varphi(y + x) + x$  ifadesini elde ederiz.

## 1.2 Cauchy Problemi

$n$  değişkenli birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklem için aşağıdaki

$$X[f] \equiv X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, f) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, f) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad (1.14)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (1.15)$$

Cauchy problemini inceleyelim. Burada  $\psi = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bilinmeyen fonksiyon,  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  fonksiyonu ise verilen bir fonksiyondur.

İlk olarak karakteristik denkleminizi yazalım

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}. \quad (1.16)$$

Varsayalım ki bu (1.16) denkleminin birinci aralık integralleri

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n^0) = c_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n^0) = c_2, \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n^0) = c_{n-1} \end{cases} \quad (1.17)$$

dir. Bunlar karakteristik denklemin özel çözümleridir. O halde başlangıç koşulunu korumak zorundadırlar. Yani

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \bar{\psi}_1 \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \bar{\psi}_2 \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \bar{\psi}_{n-1} \end{cases} \quad (1.18)$$

(1.18) deki  $\psi_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) fonksiyonlarının her birinde  $n-1$  tane değişken ve  $n-1$  tane denklem vardır. O halde bu denklemler sistemine  $n-1$  tane değişkene bağlı cebirsel denklemler sistemi gözüyle bakmak mümkündür. (1.18) denkleminin çözümlerini

$$\begin{cases} x_1 = W_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) \\ x_2 = W_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) \\ \vdots \\ x_{n-1} = W_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) \end{cases} \quad (1.19)$$

olarak gösterelim. Elde edilen ifadeleri (1.15) denkleminde yerine yazarsak (1.14), (1.15) probleminin çözümünü

$$f = \varphi(W_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), W_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \dots, W_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1})) \quad (1.20)$$

şeklinde buluruz.

**Örnek 3.** Aşağıdaki denklemin çözümünü verilen başlangıç koşulu yardımı ile bulunuz

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$x = 1, \quad u = y + z^2.$$

**Çözüm** Önce karakteristik denkleminizi yazalım

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z/2}.$$

Birinci aralık integrali

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

denklemden

$$\ln |x| = \ln |y| + \ln |c_1|$$

veya

$$\frac{y}{x} = c_1$$

olarak bulunur. Birinci aralık integrali

$$c_1 = \frac{y}{x} \equiv \psi_1(x, y, z, u)$$

biçiminde gösterelim. Diğer 1. aralık integrali

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z/2}$$

denklemden

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z/2} + c_2$$

$$\ln |x| = 2 \ln |z| + \ln |c_2|$$

$$\frac{z^2}{x} = c_2$$

olarak elde ederiz. Bu integrali de

$$c_2 = \frac{z^2}{x} \equiv \psi_2(x, y, z, u)$$

biçiminde olsun. O halde, Teorem 1 e göre denklemin genel çözümü

$$u(x, y, z) = F(c_1, c_2) = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right)$$

olur. Burada  $F$  diferansiyellenebilen keyfi bir fonksiyon olmaktadır. Söz konusu fonksiyonu elde etmek için başlangıç koşulunu kullanalım, yani  $x=1$  noktasında  $u(1, y, z) = y + z^2 = F(y, z^2)$  olacaktır. Buradan  $F(s_1, s_2) = s_1 + s_2$  olarak belirlenir.  $F$  in elde ettiğimiz ifadesini dikkate alarak problemin çözümünü

$$u(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}$$

şeklinde yazabiliriz.

Verilen denklemi başka bir yolla da çözebiliriz. Yukarıda gösterdiğimiz

$$c_1 \equiv \psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}$$

1.aralık integralini kullanalım. Buradan

$$\psi(1, y, z) = \bar{\psi}_1$$

olsun. Diğer 1.aralık integral  $c_2 \equiv \psi_2(x, y, z) = \frac{z^2}{x}$  den

$$\psi(1, y, z) = \bar{\psi}_2$$

olmaktadır.  $y = \bar{\psi}_1$ ,  $z^2 = \bar{\psi}_2$  denklemlerinden  $y$  ve  $z$  yi bulup, başlangıç fonksiyonunda yerine yazarsak

$$u(x, y, z) = \psi_1 + \psi_2 = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}$$

elde ederiz.

**Örnek 4.** Aşağıdaki denklemin çözümünü verilen Cauchy başlangıç koşulu çerçevesinde bulunuz

$$(y - u)u_x + (u - x)u_y = x - y,$$

$$u = 0, \quad xy = 1.$$

**Çözüm** Karakteristik denklem

$$\frac{dx}{y - u} = \frac{dy}{u - x} = \frac{du}{x - y} = dt$$

olmaktadır. Bu durumda denklemler sistemimizi aşağıdaki gibi simetrik formda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - u), \\ \frac{dy}{dt} = (u - x), \\ \frac{du}{dt} = (x - y) \end{cases}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu denklemleri toplarsak

$$\frac{d(x+y+u)}{dt} = 0$$

elde ederiz. Burada

$$x+y+u = c_1$$

olmaktadır. Diğer 1.aralık integral olarak karakteristik denklemleri sırasıyla  $x, y$  ve  $z$  ile çarparsak

$$d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{u^2}{2}\right) = 0$$

elde ederiz. Buradan ikinci 1.aralık integrali

$$x^2 + y^2 + u^2 = c_2$$

olarak yazarız. İncelenen denklemin genel çözümü

$$F(c_1, c_2) = 0$$

veya

$$c_1 = \varphi(c_2)$$

olur. Aralık integrallerin ifadeleri yerine konursa

$$x+y+u = \varphi(x^2 + y^2 + u^2)$$

elde ederiz. Burada  $\varphi$  keyfi diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmaktadır. Aralık integraller başlangıç koşulunu korumalıdır, yani  $u = 0$  için

$$c_1 = x+y \quad \text{ve} \quad c_2 = x^2 + y^2$$

olmaktadır. Bu ifadeler yardımıyla  $c_1$  i  $c_2$  cinsinden ifade edersek

$$c_1^2 = c_2 + 2$$

alırız. Bulduğumuz  $c_1$  ve  $c_2$  değerlerini yerine yazarsak

$$(x+y+u)^2 = x^2 + y^2 + u^2 + 2$$

elde ederiz. Buradan

$$u = \frac{1-xy}{x+y}$$

olur.



### 1.3. Bir Boyutlu Skaler Korunum Kuralı

Bu bölümde aşağıdaki problemi göz önüne alacağız

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \quad (1.21)$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \quad (1.22)$$

Burada  $\varphi(x)$  hem negatif, hem de pozitif eğime sahip;  $F(u)$  ise aşağıdaki koşullara sahip ve kendi argümanına göre bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca,

1.  $F(u) \in C^2(D)$ ,  $F''(u) \leq 0$  dır,
2.  $u \geq 0$  için  $F'(u) \geq 0$  dır ve
3.  $F''(u)$  işaretini değiştirmektedir, yani konveks ve konkav kısımlara sahiptir.

(1.21), (1.22) probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \varphi(x - F'(u)t) \quad (1.23)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi, (1.23) ifadesinin (1.21) denkleminin çözümü olduğunu gösterelim.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d\varphi}{d\xi} \left( -F''(u) \frac{\partial u}{\partial t} t - F'(u) \right)$$

ifadesinden

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-\frac{d\varphi}{d\xi} F'(u)}{1 + F''(u)t} \quad (1.24)$$

buluruz. Burada  $\xi = x - F'(u)t$  olmaktadır. Benzer yolla,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\varphi}{d\xi} \left( 1 - F''(u) \frac{\partial u}{\partial x} t \right)$$

ifadesinden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{d\varphi}{d\xi}}{1 + F''(u)t} \quad (1.25)$$

alırız. (1.24) ve (1.25) ifadeleri (1.21) de yerine konulursa denklemin korunduğunu görürüz. (1.23) ifadesine (1.21) denkleminin yumuşak (soft) çözümü denir. (1.24) ve (1.25) den görüldüğü gibi

$$t = \frac{-1}{F''(u)} \Big|_{T_0}$$

değerinde  $\frac{\partial u}{\partial t}$  ve  $\frac{\partial u}{\partial x}$  türevleri sonsuzluğa yaklaşır. Dolayısıyla (1.23) ile bulunan ifade

(1.21) denkleminin klasik çözümü olamaz. Bu durumda klasik çözüm kavramını genişleterek, yani zayıf çözüm kavramı dahil ederek (1.21), (1.22) probleminin fiziksel gerçek çözümünü bulabiliriz.

$$D_\ell = \{ (x,t) \mid -a \leq x \leq a, 0 \leq t < T \} \subseteq R^2$$

olsun.  $f(x,t)$  fonksiyonu  $D_\ell$  bölgesinin sınırında sifıra dönüşen ve her iki değişkene göre sürekli diferansiyellenebilen ve  $f(x,T) = 0$  değerini alan bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki

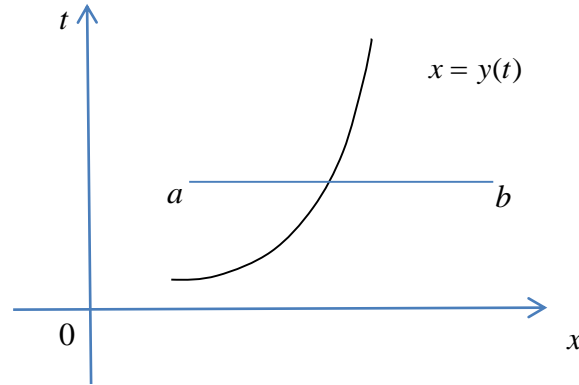
$$\iint_{R^2} \left\{ u(x,t) \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + F(u(x,t)) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} f(x,0)u(x,0)dx = 0 \quad (1.26)$$

integral eşitliğini koruyan  $u(x,t)$  fonksiyonuna (1.21), (1.22) probleminin zayıf çözümü denir, (bkz. [1], [2]).

Zayıf çözüm kavramı ilk kez Rus matematikçisi S.L. Sobolev tarafından verilmiştir, [7].

Eğer  $u$  ve  $F(u)$  fonksiyonları tanım bölgesinde sürekli diferansiyellenebile fonksiyonlar olursa, bu takdirde (1.21) ile (1.26) denklemleri denk olur.  $u$  fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalarda ise (1.26) integral eşitliğinin anlamı vardır. Önemle belirtmek gerekir ki, (1.26) daki türevler genelleşmiş integral olması halinde Lebesgue anlamında integral kastedilmektedir.

Şimdi  $u(x,t)$  fonksiyonunun herhangi bir  $x = y(t)$  eğrisi üzerinde süreksizliğe tabi olduğunu varsayalım, Şekil 1.1.



Şekil 1.1

$a, b$  sayılarını öyle seçelim ki,  $[a, b]$  parçası  $x = y$  eğrisini kesmiş olsun. Aşağıdaki integrali göz önüne alalım

$$I(t) = \int_a^b u(x,t)dx .$$

Bu integrali

$$I(t) = \int_a^y u(x,t) dx + \int_y^b u(x,t) dx$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_a^y \frac{\partial u}{\partial t} dx + u_\ell \frac{dy}{dt} + \int_y^b \frac{\partial u}{\partial t} dx - u_r \frac{dy}{dt} \quad (1.27)$$

buluruz. Burada  $u_\ell$  ve  $u_r$ ,  $u(x,t)$  fonksiyonunun  $x = y(t)$  eğrisinin sırasıyla önünde ve arkasında aldığı değerleri gösterir. Sadelik için

$$U = \frac{dy}{dt}$$

alalım.  $u_r = -F_x$  olduğundan (1.27) yi

$$\frac{dI(t)}{dt} = F_a + F_\ell + u_\ell U - F_b + F_r - u_r U \quad (1.28)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada  $F_\ell = F(u_\ell)$ ,  $F_r = F(u_r)$ ,  $F_a = F(u(a,t))$ ,  $F_b = F(u(b,t))$  dir.

(1.21) denklemi korunum kuralını ifade ettiği için

$$\frac{dI}{dt} = F_a - F_b$$

olmak zorundadır. Sonun cu eşitliğin korunabilmesi için de

$$U[u] = [F] \quad (1.29)$$

eşitliği olmak zorundadır. Burada  $[u] = u_r - u_\ell$  ve  $[F] = F_r - F_\ell$  dir. (1.29) koşuluna sıçrayış koşulu veya Rankine-Hugoniot koşulu denir.

Bu söylediklerimi aşağıdaki süreksiz başlangıç koşuluna sahip olan problem için uygulayalım.

#### 1.4. Süreksiz Başlangıç Koşullu Cauchy Problemi (Riemann Problemi)

Önceki bölümlerde Hopf denklemi için Cauchy problemini incelerken, başlangıç profilinin hem negatif, hem de pozitif eğime sahip sürekli bir fonksiyon olduğunu varsaymıştık. Bunun yanı sıra öyle bir  $T_0$  değerinin mevcut olduğunu ve  $t \geq T_0$  olduğunda problemin çözümünün yeri önceden belli olmayan sıçrayış noktalarına sahip olduğunu da göstermiştik. Limit durumu, yani dalganın başlangıç dağılımının 1.tür süreksizlik noktasına sahip olduğu durumun incelenmesi ayrıca önem taşımaktadır.

Bu bölümde (1.21) denklemini  $F(u) = u^2/2$  durumu için

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2, & x > 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. Buradaki  $u_1$  ve  $u_2$  sabitlerdir. (1.21), (1.30) Riemann problemindeki nonlineerliğin oluşturduğu özellikleri görebilmek için, bu problemin gerçek çözümünü bulup uygun lineer problemin çözümü ile karşılaştıracamız.

(1.21) denkleminin (1.30) başlangıç koşulu çerçevesinde çözümü

$$u(x,t) = \varphi(\xi) = \begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} < u_1 \\ u_2, & \frac{x}{t} > u_2 \end{cases} \quad (1.31)$$

biçiminde olmaktadır. Sezgisel olarak  $u > 0$  olduğunda  $u$  nun büyük değerlerinin, küçük değerlerine oranla daha hızlı hareket ettiği anlaşılmaktadır. Buna göre de,  $u_1 > u_2$  olduğunda dalganın dağılım sürecinde başlangıç profili bozulur ve çözümde çok değerlilik ortaya çıkar.  $u_1 < u_2$  olduğunda ise çok değerlilik söz konusu değildir. Şimdi bunları detaylı şekilde inceleyelim.

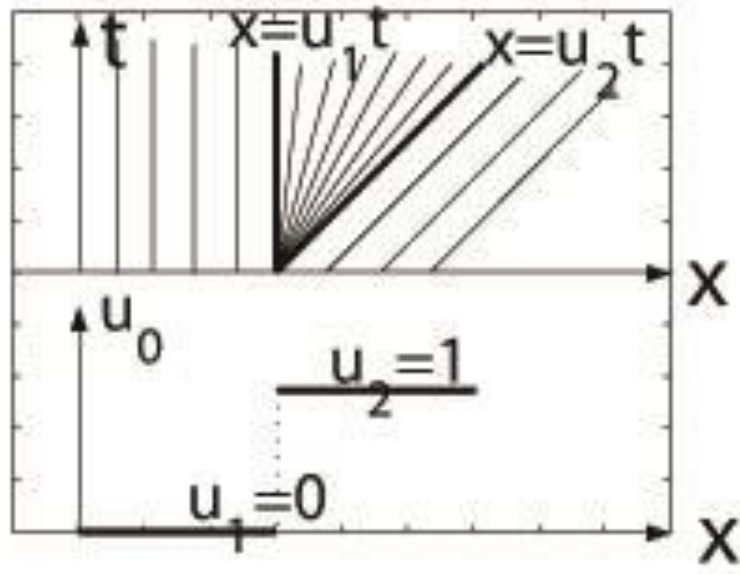
Önce 1.durumu inceleyelim, yani  $u_1 < u_2$  olduğunu varsayalım. Karakteristikler metodunun genel prensibine göre (1.21), (1.30) denkleminin çözümü için

$$u(x,t) = u_o(\xi) = \begin{cases} u_1, & \xi < 0 \\ u_2, & \xi > 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

elde ederiz. Burada  $\xi = x - ut$  olmaktadır. Ayrıca da  $u_1 < u < u_2$  olduğundan,  $x = u_1 t$  ve  $x = u_2 t$  ışınlarının oluşturduğu sektörün içerisinde yerleşen tüm karakteristiklerin yalnız bir ortak noktası  $\xi = 0$  olmaktadır. Dolayısıyla, (1.21) denkleminin tüm çözümleri  $x = ut$  cinsinden olur ve çözüm söz konusu karakteristikler üzerinde sabit kalır. (1.21) denkleminin (1.30) başlangıç koşuluna karşılık gelen karakteristiklerinin grafiği Şekil 1.2 de gösterilmiştir.

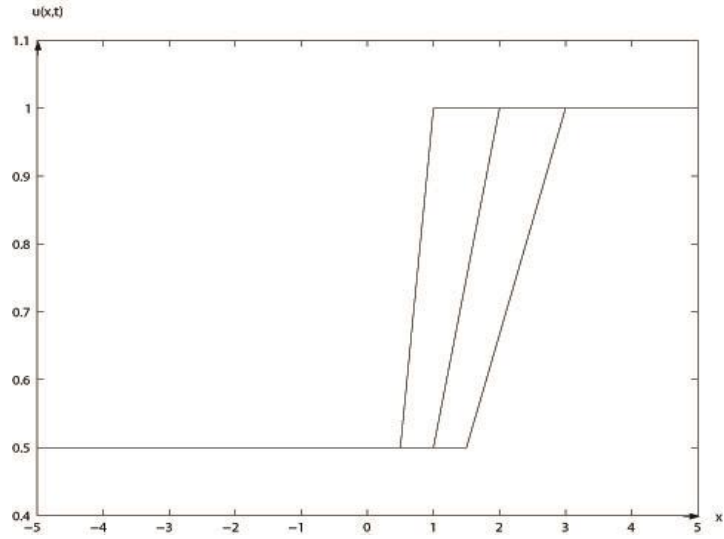
Böylelikle (1.21), (1.30)probleminin  $u(x,t)$  çözümü için

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} \leq u_1 \\ \frac{x}{t}, & u_1 < \frac{x}{t} < u_2 \\ u_2, & \frac{x}{t} \geq u_2 \end{cases} \quad (1.33)$$



Şekil 1.2

ifadesini elde ederiz. Bu ifade fiziksel açıdan tam yararlı ve sürekli çözümdür.  $u(x,t)$  fonksiyonunun evrimi Şekil 1.3 de gösterilmiştir.



Şekil 1.3.  $u(x,t)$  fonksiyonu,  $u_1 > u_2$

**Örnek 5.** Aşağıdaki problemin çözümünü bulunuz

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

**Çözüm** Bu durumda  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  olmaktadır. (1.31) formülü ile bulunan çözüm

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ 1, & \xi > 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

olmaktadır.

Şimdi,  $u = u_1$ ,  $u = u_2$  ve  $x = ut$  doğrularını başlangıç koşulunun korunmasını sağlayarak birleştirelim

a)  $\xi < 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow x < 0$ ,

b)  $\xi > 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x - t > 0 \Rightarrow x > t$ ,

c)  $\xi = 0 \Rightarrow x - ut \Rightarrow u = \frac{x}{t}$ .

Böylelikle problemin çözümünü

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & x > t \end{cases} \quad (1.35)$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi de elde ettiğimiz (1.35) fonksiyonunun (1.21) denkleminin  $u_1 = 0$  ve  $u_2 = 1$  olması halinde zayıf çözümü olduğunu gösterelim.

$f(x,t)$  temel fonksiyon olduğundan sonlu taşıyıcıya sahiptir, yani öyle  $a > 0$  ve  $T$  sayıları vardır ki,  $\text{supp}(f) \subset [-a, a] \times [0, T]$  olmaktadır. Zayıf çözümün tanımına göre

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left( u(x,t) f_t(x,t) + \frac{u^2(x,t)}{2} f_x(x,t) \right) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) f(x,0) dx \\ &= \int_0^T \int_0^t \left( \frac{x}{t} f_t(x,t) + \frac{x^2}{2t^2} f_x(x,t) \right) dx dt + \int_0^T \int_t^a \left( f_t(x,t) + \frac{1}{2} f_x(x,t) \right) dx dt + \int_0^a f(x,0) dx \\ &= \int_0^T \int_x^T \frac{x}{t} f_t(x,t) dt dx + \int_0^T \int_0^t \frac{x^2}{2t^2} f_x(x,t) dx dt + \int_0^T \int_0^x f_t(x,t) dt dx + \int_T^a \int_0^T f_t(x,t) dt dx + \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_t^a f_x(x,t) dx dt + \int_0^a f(x,0) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \left\{ \frac{x}{t} f(x,t) \Big|_{t=x}^{t=T} - \int_x^T \left( -\frac{x}{t^2} \right) f(x,t) dt \right\} dx + \int_0^T \left\{ \frac{x^2}{2t^2} f(x,t) \Big|_{x=0}^{x=t} - \int_0^t \frac{x}{t^2} f(x,t) dx \right\} dt \\
&+ \int_0^T (f(x,x) - f(x,0)) dx + \int_0^T (f(x,a) - f(x,T)) dx + \frac{1}{2} \int_0^T (f(a,t) - f(t,t)) dt + \int_0^a f(x,0) dx \\
&= \int_0^T \left( \frac{x}{T} f(x,T) - f(x,x) \right) dx + \int_0^T \int_x^T \frac{x}{t^2} f(x,t) dt dx + \frac{1}{2} \int_0^T f(t,t) dt - \int_0^T \int_x^T \frac{x}{t^2} f(x,t) dt dx \\
&\quad + \int_0^T f(x,x) dx - \int_0^T f(x,0) dx - \frac{1}{2} \int_0^T f(a,t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T f(t,t) dt + \int_0^a f(x,0) dx = 0
\end{aligned}$$

olmaktadır.

Gösterebiliriz ki,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < \frac{t}{2} \\ 1, & x > \frac{t}{2} \end{cases}$$

fonksiyonu da gözönüne aldığımız denkleminin zayıf çözümüdür. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left( u(x,t) f_t(x,t) + \frac{u^2(x,t)}{2} f_x(x,t) \right) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) f(x,0) dx \\
&= \int_0^T \int_{-a}^a \left( u(x,t) f_t(x,t) + \frac{u^2(x,t)}{2} f_x(x,t) \right) dx dt + \int_{-a}^a u_0(x) f(x,0) dx \\
&= \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a \left( f_t(x,t) + \frac{1}{2} f_x(x,t) \right) dx dt + \int_0^a f(x,0) dx \\
&= \int_0^{\frac{T}{2}} \int_0^{2x} f_t(x,t) dt dx + \int_{\frac{T}{2}}^a \int_0^T f_t(x,t) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a f_t(x,t) dx dt + \int_0^a f(x,0) dx \\
&= \int_0^{\frac{T}{2}} (f(x,2x) - f(x,0)) dx + \int_{\frac{T}{2}}^a (f(x,T) - f(x,0)) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \left( f(a,t) - f\left(\frac{t}{2}, t\right) \right) dt + \int_0^a f(x,0) dx = \int_0^{\frac{T}{2}} f(x,2x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} f(y,2y) 2dy = 0
\end{aligned}$$

eşitliği korunmaktadır. Dolayısıyla (1.21) denklemi için yazılmış Cauchy probleminin zayıf çözümü tek olmamaktadır.

Şimdi 2. durumu inceleyelim, yani  $u_1 > u_2$  olsun.

**Örnek 6.** Aşağıdaki problemi çözünüz

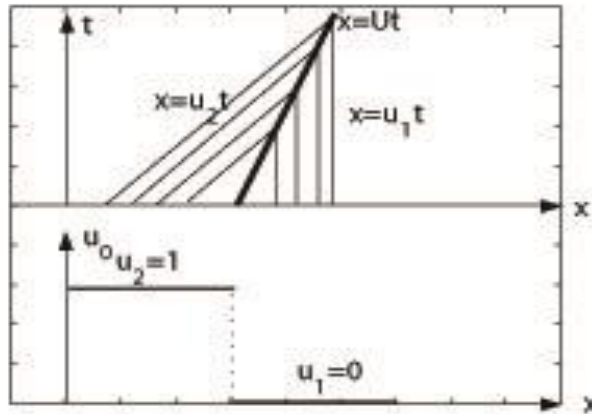
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

**Çözüm** Problemin koşullarına göre  $u_1 = 1, u_2 = 0$  dır ve bu problemin de çözümü (1.31) formülüne göre

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \xi < 0 \\ 0, & \xi > 0 \end{cases}$$

olur. Bu durumda  $u_2 < u < u_1$  dir ve  $x = u_1 t$  ve  $x = u_2 t$  sektörünün içerisinde yerleşen her bir karakteristiğin eğimi  $u_2$  den büyük olmaktadır. Böylece, diğer karakterisrikler ile kesişirler, Şekil 1.4. Bu nedenle çözümün profilinde çok değerlilik hemen başlar. Şekil 1.4 den görüldüğü gibi çözümün profilinde geriye dönme oluşur.  $u_1 > u_2$  olduğu durumda  $(t, x)$  düzlemindeki karakteristikler yelpazesi dönmeye başlar ve dalganın yeniden ileri dönmelerini sağlar. Dolayısıyla incelediğimiz problemin klasik çözümü mevcut değildir.



**Şekil 1.4**

Şimdi de  $u = 1, u = 0$  ve  $x = ut$  doğrularını başlangıç koşulunu koruyacak şekilde birleştirelim.



$$\text{a) } \xi < 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x - t < 0 \Rightarrow x < t,$$

$$\text{b) } \xi > 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow x > 0$$

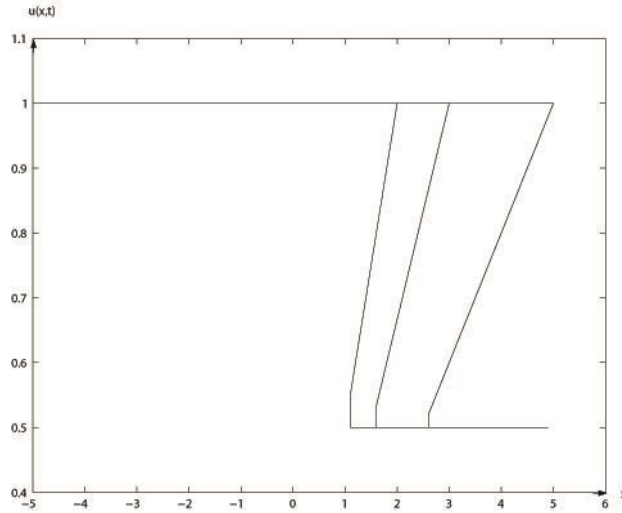
olur. Böylelikle aradığımız çözümü

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x > t \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

olarak elde ederiz. Şekil 1.5 den de görüldüğü gibi elde ettiğimiz fonksiyonun grafiği üç değerli olmaktadır. Bu ise fiziksel açıdan kabul edilemez.

Zayıf çözümü yukarıda gösterdiğimiz yolla

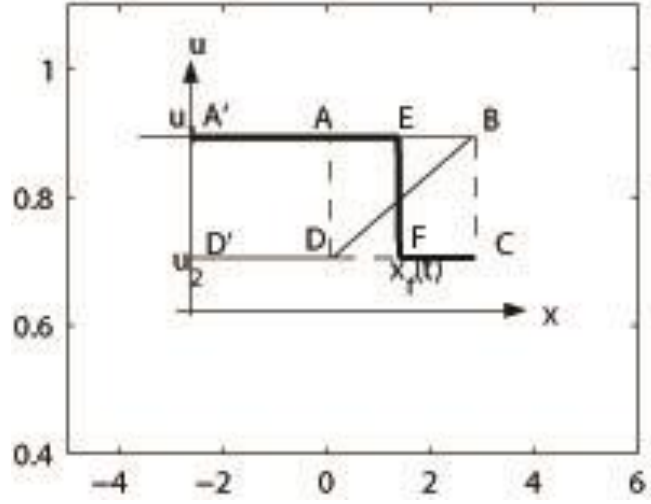
$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \frac{x}{t} < U \\ 0, & \frac{x}{t} > U \end{cases} \quad (2.48)$$



**Şekil 1.5**

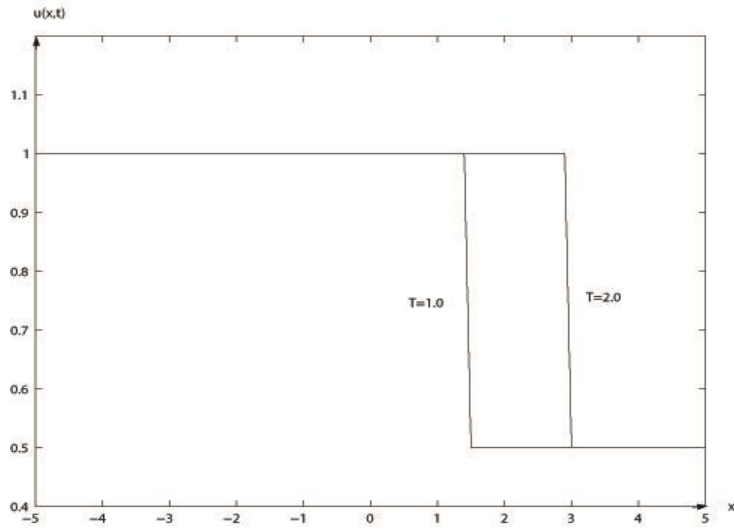
şeklinde yazabiliriz. (1.29) formülünden görüldüğü üzere çözümdeki süreksizlik  $x = \frac{t}{2}$

doğrusu üzerinde  $U = \frac{1}{2}$  hızıyla hareket etmektedir ve incelediğimiz problemin fiziksel gerçek çözümü olmaktadır.



Şekil 1.6

Çözümün geriye ve ileriye dönme noktalarını sırasıyla  $x_b(t)$  ve  $x_o(t)$  ile gösterelim.



Şekil 1.7

Sıçrayış noktasının yerini belirlemek için elde ettiğimiz, örneğin  $t = T_1$  zaman değerine karşılık gelen çözümlerden birisini göz önüne alalım (Şekil 1.6).  $u(x, T_1)$  fonksiyonunun grafiği ile sınırlanan  $S_{A'BDD'}$  bölgesinin alanı  $S_{A'BDD'} = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)t$  olmaktadır. Sıçrayış noktasının yerini öyle seçelim ki,  $S_{A'EFD'} = (u_1 - u_2)x_f(t)$

dikdörtgeninin alanı  $S_{A'BDD'}$  ye eşit, yani  $\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)t = (u_1 - u_2)x_f(t)$  olsun. Sonuncu eşitlikten sıçrayış noktası için

$$x_f(t) = \frac{u_1 + u_2}{2} t$$

denklemini elde ederiz. Buradan

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = U = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (1.36)$$

olur. (1.29) u dikkate alarak (1.21), (1.30) problemin zayıf çözümü için

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} < U, \\ u_2, & \frac{x}{t} > U \end{cases} \quad (1.37)$$

formülünü elde ederiz. Böylelikle, çok değerli çözümden bir değerli, ama birinci tür süreksizliğe sahip ve aynı zamanda enerji integralini koruyan fiziksel yararlı çözümü elde etmiş oluruz. Söz konusu zayıf çözümün grafiği Şekil 1.7 de gösterilmiştir.

Sonuncu ifadenin ele aldığımız problemin zayıf çözümü olduğunu gösterelim. Zayıf çözümün tanımına göre

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left( u(x, t) f_t(x, t) + \frac{u^2(x, t)}{2} f_x(x, t) \right) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) f(x, 0) dx \\ &= \int_0^T \int_{-a}^a \left( u(x, t) f_t(x, t) + \frac{u^2(x, t)}{2} f_x(x, t) \right) dx dt + \int_{-a}^a u_0(x) f(x, 0) dx \\ &= \int_0^T \int_{-a}^{\frac{t}{2}} \left( f_t(x, t) + \frac{1}{2} f_x(x, t) \right) dx dt + \int_{-a}^0 f(x, 0) dx \\ &= \int_{-a}^0 \int_0^T f_t(x, t) dt dx + \int_0^{\frac{T}{2}} \int_{2x}^T f_t(x, t) dt dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{-a}^{\frac{t}{2}} f_x(x, t) dx dt + \int_{-a}^0 f(x, 0) dx \\ &= \int_{-a}^0 (f(x, T) - f(x, 0)) dx + \int_0^{\frac{T}{2}} (f(x, T) - f(x, 2x)) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \left( f\left(\frac{t}{2}, t\right) - f(-a, t) \right) dt + \int_{-a}^0 f(x, 0) dx = -\int_0^{\frac{T}{2}} f(x, 2x) dx + \frac{1}{2} \int_0^T f\left(\frac{t}{2}, t\right) dt = 0 \end{aligned}$$

olur.

## 2. DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN RIEMANN PROBLEMİ

### 2.1. Lineer Hiperbolik Sistem

Aşağıdaki sabit katsayılı denklemler sistemi için Riemann problemini tekrar ele alalım

$$U_t + AU_x = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

$$U(x,0) = U^{(0)}(x) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Burada  $A$ ,  $n \times n$  boyutlu bir matris olmaktadır. Sistem ciddi hiperbolik olduğundan farklı reel özdeğerlerinin aşağıdaki gibi düzenlenebildiğini varsayalım

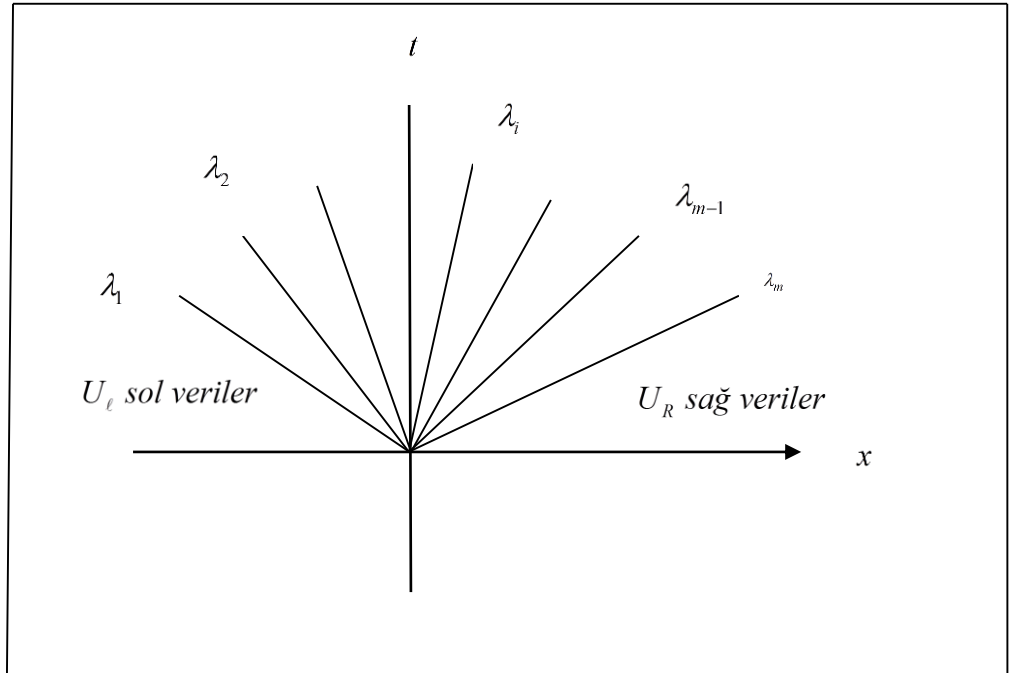
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_m. \quad (2.3)$$

#### 2.1.1. Sistemin Diyagonal Şekle İndirgenmesi ve Karakteristik Değişkenler

$W = K^{-1}U$  değişken dönüşümü yapalım. Değişken dönüşümü yaptıktan sonra (1.21)denklemini bağımsız denklemler sistemine parçalamış oluruz

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m). \quad (2.4)$$

Bu çözümler  $x-t$  düzleminde gösterilmiştir.



Şekil 2.1

$U = KW$  eşitliğinde  $K$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  özdeğerlerine karşılık gelen ve  $K^{(i)}$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) özvektörlerinden oluşan bir matristir. Bu çözümde  $K^{(i)}$  ler lineer bağımlı değildir. Bu durumda biz  $U_L$  ve  $U_R$  verilerini  $K^{(i)}$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) lere göre şu şekilde yazabiliriz

$$U_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i K^{(i)}, \quad U_R = \sum_{i=1}^m \beta_i K^{(i)}. \quad (2.5)$$

Burada  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ler sabitlerdir.

$U = KW$  denkleminin çözümünü açık şekilde şöyle yazabiliriz

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix} = W_1 \begin{pmatrix} K_1^{(1)} \\ K_2^{(1)} \\ \dots \\ K_m^{(1)} \end{pmatrix} + W_2 \begin{pmatrix} K_1^{(2)} \\ K_2^{(2)} \\ \dots \\ K_m^{(2)} \end{pmatrix} + \dots + W_m \begin{pmatrix} K_1^{(m)} \\ K_2^{(m)} \\ \dots \\ K_m^{(m)} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

veya

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^m W_i(x, t) K^{(i)}. \quad (2.7)$$

şöyle ifade edebiliriz. Burada  $W_i(x, t) = W^{(0)}(x - \lambda_i t)$  olduğunu da dikkate alırsak (2.7) yi

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^m W_i^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)} \quad (2.8)$$

olarak yazabiliriz.

Böylelikle,  $x - t$  düzleminin herhangi bir  $(x, t)$  noktasında  $U(x, t)$  fonksiyonu yalnız başlangıç verilerinin  $m$  noktasından ( $x_0^{(i)} = x - \lambda_i t$ ) bağımlı olmaktadır. Bu noktalar  $\lambda_i$  hızına sahip karakteristiklerin  $x$ -ekseni ile kesiştiği noktalardır. (2.8) denkleminin çözümüne  $m$  dalganın süper pozisyonu gibi bakılabilir. Öyle ki, bu dalgaların her birisi bağımsız olarak formunu değiştirmeden dağılmaktadır.  $i$  nolu dalganın formu  $W_i^{(0)}(x)K^{(i)}$  e eşittir ve bu dalganın değişme hızı  $\lambda_i$  dir.

## 2.2. Cauchy Problemi

Şimdi (2.1), (2.2) Riemann problemini göz önüne alalım. (2.1), (2.2) problemlerinin genel çözümü Şekil 2.1 de verildiği gibi olmaktadır. Bu çözüm her bir  $\lambda_i$  özdeğerine sahip ve orijinden çıkan  $m$  dalgadan oluşmaktadır. Her  $i$ . dalga  $U$  da bulunan süreksizlik sıçrayışlarını  $\lambda_i$  hızı hareket ettirmektedir.

Normalde çözüm  $\lambda_1$  dalgadan solda sadece  $U_L$  başlangıç verisine,  $\lambda_m$  dalgadan sağda ise  $U_R$  başlangıç verisine eşit olmaktadır. Problemin çözümü  $\lambda_1$  ve  $\lambda_m$  dalgaları arasındaki yelpazede bulunmaktadır.  $K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(m)}$  özvektörleri lineer bağımsız olduklarından sırasıyla  $U_L$  ve  $U_R$  özvektörleri üzerinden lineer kombinasyon şeklinde

$$U_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i K^{(i)}, \quad U_R = \sum_{i=1}^m \beta_i K^{(i)} \quad (2.9)$$

olarak yazabiliriz. Burada  $\alpha_i, \beta_i, (i=1,2,\dots,m)$  ler sabitlerdir.

Formal olarak (2.1), (2.2) probleminin (2.8) şeklindeki çözümü, karakteristik  $W_i^{(0)}(x)$  başlangıç verileri ile sağ  $K^{(i)}$  özvektörleri cinsinden ifade edilmektedir.

Belirtelim ki, (2.9) un her bir ifadesi (2.8) in özel durumları olmaktadır. (2.8) ve (2.9) ifadelerinden karakteristik  $W_i$  değişkenlerinde  $m$  sayıda skaler Riemann problemini elde ederiz.

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

$$W_i^{(0)}(x) = \begin{cases} \alpha_i, & x < 0 \\ \beta_i, & x > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

(2.10), (2.11) probleminin çözümü,

$$W_i(x,t) = W_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i, & x - \lambda_i t < 0 \\ \beta_i, & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde olmaktadır.

Verilmiş  $(x,t)$  için öyle bir  $\lambda_i$  özdeğeri vardır ki,

$$\forall i, i < I \quad ; \quad \lambda_i < \frac{x}{t} < \lambda_{i+1} \quad ; \quad x - \lambda_i t > 0$$

olur. Böylelikle, (2.1), (2.2) probleminin çözümünü son olarak

$$U(x,t) = \sum_{i=I+1}^m \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=1}^I \beta_i K^{(i)} \quad (2.13)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada  $I$ ,  $x - \lambda_i t > 0$  eşitliğini koruyan  $i$  indislerinin maksimumudur.

**Not .**

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$L_i$  sağ vektörler olsun. Yani,

$$L_i A = \lambda L_i$$

Eğer (2.14) denklemini  $L_i$  ile sağdan çarparsak

$$L_i \left( \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) = L_i \frac{\partial U}{\partial t} + L_i A \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$L_i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} \right) U = 0 \quad (2.15)$$

olur.

### 2.3. $2 \times 2$ Boyutlu Sistem İçin Çözüm

Örnek olarak  $2 \times 2$  ölçülü sistem için Riemann problemini göz önüne alalım

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \quad (2.17)$$

Aşağıdaki notasyonları içereyim

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Bu notasyonlarda denklemler sistemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

olarak yazabiliriz.  $A$  matrisinin iki tane birbirinden farklı reel özdeğerlerinin olduğunu varsayalım. Bunları sırasıyla  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  olarak gösterelim.  $\lambda_1 < \lambda_2$  olduğunu kabul edelim.

$K^{(i)}$  ile  $\lambda_i$  lere karşılık gelen özvektörleri gösterelim. (2.19) denklemini sağdan  $K^{(i)}$  özvektörlere çarpalım.

$$K^{(i)} \frac{\partial U}{\partial t} + K^{(i)} A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

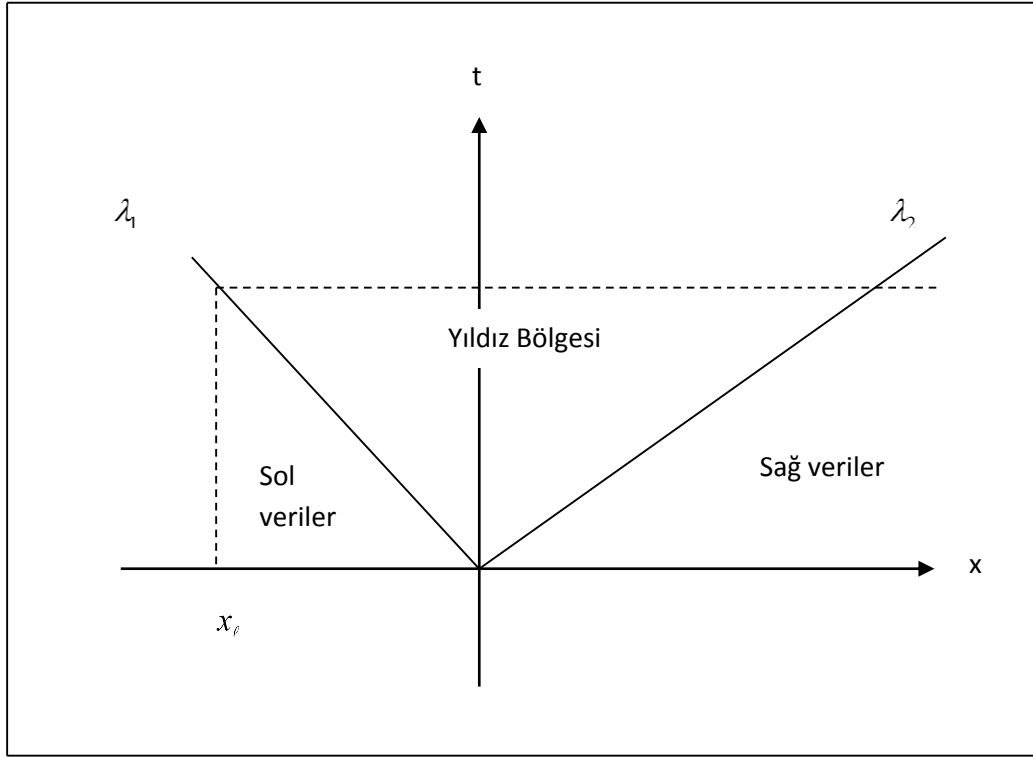
$$K^{(i)} \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i K^{(i)} A \frac{\partial U}{\partial x} = K^{(i)} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} \right) U = 0 \quad (2.21)$$

$W = KU$  özel değişkenlerinde (2.19) denklemini,

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (2.22)$$

skaler denklemini elde ederiz.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \lambda_i, \quad \xi = x - \lambda_i t. \quad (2.23)$$



Şekil 2.2

$\frac{dx}{dt} = \lambda_1$  dan solda çözüm.

$$U_L = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} \quad (2.24)$$

ve  $\frac{dx}{dt} = \lambda_2$  dan sağda çözüm.

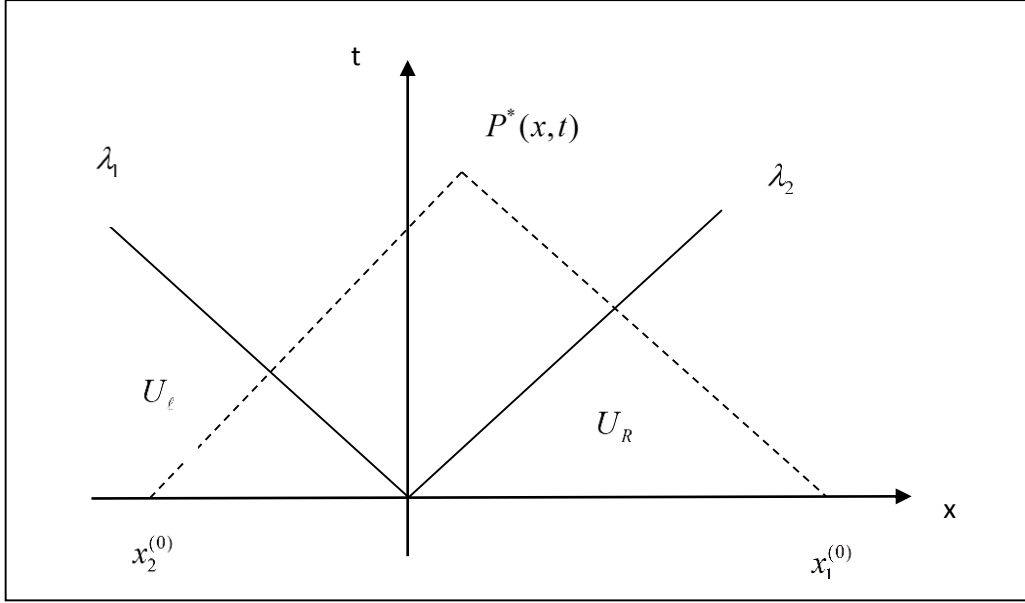
$$U_R = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \quad (2.25)$$

$\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  dalgaları arasındaki bölgeye yıldız bölgesi denir ve bu bölgede çözümü  $U^*$  ile gösteririz. Bu değer süreksiz başlangıç verilerinden oluşan ve orijinden çıkan iki dalganın devamının değeri olmaktadır. Şekil 2.2 de  $P^*(x, L)$  noktasından geriye  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  hızıyla karakteristikleri çizelim. Bunlar orijinden çıkan karakteristiklere paralel olur.  $P^*$  noktasından çıkan karakteristikler  $x_0^{(2)} = x - \lambda_2 t$  ve  $x_0^{(1)} = x - \lambda_1 t$  başlangıç noktalarından çıkmaktadırlar.



Böylelikle, (2.8) ile bulunan  $U(x,t)$  nin katsayıları tanımlanmaktadır.  $P^*$  noktasındaki çözüm (2.8) gibi tanımlanır. Esas problem  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  katsayılarını doğru seçmek olmaktadır.

$U(x_L, t^*) = U_L$  eşitliğini koruyan dalgadan solda  $t^*$  ve  $x_L$  noktasını seçelim, Şekil 2.3.



Şekil 2.3

Açıktır ki,  $x_L, t^*$  noktasından çıkan dalga

$$U_L = \sum_{i=1}^2 \alpha_i K^{(i)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} \quad (2.26)$$

şeklinde olmaktadır. Yani, açılışının tüm katsayıları  $\alpha$  lar olmaktadır. Bu durumda,  $x_L, t^*$  noktası her bir dalganın solunda yerleşmektedir. Yatay  $t = t^*$  doğrusu boyunca hareket ettiğimizde  $\frac{dx}{dt} = \lambda_1$  dalgasını keseriz. Böylelikle,  $x - \lambda_1 t$  negatiften pozitive değişir. Buna göre de  $\alpha_1$  katsayısı  $\beta_1$  katsayısına çevrilir. O zaman çözüm  $\lambda\lambda_1$  ve  $\lambda\lambda_2$  dalgaları arasındaki yıldız bölgesinde

$$U^*(x,t) = \beta_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} \quad (2.27)$$

şeklinde olur. Sağa doğru hareket etmeyi devam ettirdikçe  $\lambda_2$  dalgasını keseriz ve  $x - \lambda_2$  negatiften pozitifte değişir. (2.27) ifadesindeki  $\lambda_2$  katsayısı  $\beta_2$  ye dönüşür ve sonuçta (2.27) ifadesi

$$U_R = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \quad (2.28)$$

şeklini alır.

**Örnek 7.** Aşağıdaki formda dalga denklemini göz önüne alalım

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \quad (2.29)$$

(2.29) denklemini birinci basamaktan diferansiyel denklemlere çevirelim

$$u_t = v \quad , \quad u_x = w \quad (c^2 = 1). \quad (2.30)$$

$$u_{tt} = (u_t)_t \quad , \quad u_{xx} = (u_x)_x$$

$$u_{tt} = v_t \quad , \quad u_{xx} = w_x$$

$$v_x - w_t = 0 \quad , \quad w_t - v_x = 0 \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} v_t - w_x = 0 \\ w_t - v_x = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

veya

$$u_t + Au_x = 0. \quad (2.33)$$

Burada

$$u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

**Örnek 8.**  $c^2 \neq 1$  olmak üzere aşağıdaki denklemi göz önüne alalım

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \quad (2.34)$$

$$u_t = v, \quad cu_x = w. \quad (2.35)$$

$$v_t = \frac{w_x}{c}$$

$$(u_t)_t - c(cu_x)_x = 0$$

$$\begin{cases} v_t - cw_x = 0 \\ w_t - cv_x = 0 \end{cases}$$

$$cu_t = cv \quad , \quad cu_x = w \quad .$$

$$cu_{xt} = v_x \quad , \quad cu_{xt} = wt \quad .$$

$$\begin{cases} v_t - cw_x = 0 \\ w_t - cv_x = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

**Örnek 9.** Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.37)$$

(2.37) denklemini şu şekilde yazalım.

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{a^2}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_1 \quad , \quad -\frac{a^2}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial x} = u_2$$

Buradan,

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad , \quad -\frac{a^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

Sonra

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$$

veya

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

olur.

Böylelikle,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.38)$$

(2.38) denklemini aşağıdaki denklem sistemi gibi yazabiliriz

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{a^2}{\rho_0} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

veya  $A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ \frac{a^2}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix}$  olmak üzere vektörel formda

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.40)$$

olarak yazabiliriz.

Şimdi sistemi

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

başlangıç koşulları

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L, & x < 0 \\ \rho_R, & x > 0, \end{cases} \quad (2.42)$$

ve

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

veya

$$u(x,0) \equiv u(x,0) = u_0 = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0, \end{cases}$$

$$\rho(x,0) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 = \begin{cases} \rho_L, & x < 0 \\ \rho_R, & x > 0, \end{cases}$$

başlangıç koşulları çerçevesinde inceleyelim. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ \frac{a^2}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix}$$

olmaktadır. A matrisinin özdeğerleri

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \rho_0 \\ \frac{a^2}{\rho_0} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = a$$

olarak hesaplanır. Özvektörler ise şöyle ifade edilir. Öncelikle,  $\lambda_1 = -a$  dır .

$$\begin{cases} a\alpha_1 + \rho_0\alpha_2 = 0 \\ \frac{a^2}{\rho_0}\alpha_1 + a\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a\alpha_1 + \rho_0\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \rho_0, \quad \alpha_2 = -a,$$

$\lambda_1$  e karşılık gelen özvektör şöyledir

$$K^{(1)} = (\rho_0, -a)^T \Rightarrow K^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix}.$$

Şimdi  $\lambda_2 = a$  yı ele alalım.

$$\begin{cases} -a\alpha_1 + \rho_0\alpha_2 = 0 \\ \frac{a^2}{\rho_0}\alpha_1 - a\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a\alpha_1 + \rho_0\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \rho_0, \quad \alpha_2 = a,$$

Burada da ikinci özvektör şöyledir

$$K^{(2)} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Önce,  $u_L = (\rho_L, u_L)^T$  sol başlangıç durumu özvektörler için ayrılışını yazalım.

$$u_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i K_L^{(i)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)},$$

$$\begin{cases} \rho_L = \alpha_1 \rho_0 + \alpha_2 \rho_0 \\ u_L = -\alpha_1 a + \alpha_2 a \end{cases}$$

Bu sistemin çözümü Cramer yöntemi ile bulunmuştur.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ -a & a \end{vmatrix} = a\rho_0 + a\rho_0 = 2a\rho_0;$$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho_L & \rho_0 \\ u_L & a \end{vmatrix}}{2a\rho_0} = \frac{\rho_L a - \rho_0 u_L}{2a\rho_0},$$

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_L \\ -a & u_L \end{vmatrix}}{2a\rho_0} = \frac{\rho_L u_L + a\rho_L}{2a\rho_0}.$$

Şimdi,  $u_R = (\rho_R, u_R)^T$  sağ başlangıç verileri  $K^{(i)}$  ler üzere ayrılışını yapalım.

$$u_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \end{pmatrix} = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 \rho_0 + \beta_2 \rho_0 \\ -\beta_1 a + \beta_2 a \end{cases}$$

$$\beta_1 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0},$$

$$\beta_2 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0}.$$

Yıldız bölgesinde  $u^*(x,t) = \beta_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)}$  olduğunu dikkate alırsak

$$u^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ a^* \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$

yani,

$$\begin{aligned} \rho^* &= \beta_1 \rho_0 + \alpha_2 \rho_0 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0} \rho_0 + \frac{\rho_0 u_R + a\rho_R}{2a\rho_0} \rho_0 \\ &= \frac{a\rho_L - \rho_0 u_L}{2a} + \frac{\rho_0 u_R}{2a} + \frac{a\rho_R}{2a} = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{\rho_0}{2a}(u_R - u_L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^* &= -\beta_1 a + \alpha_2 a = -\frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0} a + \frac{\rho_0 u_L + a\rho_L}{2a\rho_0} a \\ &= -\frac{a\rho_R}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 u_R}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 u_L}{2\rho_0} + \frac{a\rho_L}{2\rho_0} = -\frac{a}{2\rho_0}(\rho_R - \rho_L) + \frac{1}{2}(u_L + u_R) \end{aligned}$$

sonuç olarak,

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{\rho_0}{2a}(u_R - u_L),$$

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{a}{2\rho_0}(\rho_R - \rho_L).$$

olduğunu görürüz.

### Örnek 10.

$$\rho_0 = 1 \quad , \quad a = 1,$$

$$\rho_L = 1 \quad , \quad \rho_R = \frac{1}{2};$$

$$u_L = 0 \quad , \quad u_R = 0$$

fiziksel veriler ve

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases} \quad ; \quad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

başlangıç koşulları çerçevesinde çözümü sırasıyla

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L, & \frac{x}{t} < \lambda_1 \\ \rho^*, & \lambda_1 < \frac{x}{t} < \lambda_2, \\ \rho_R, & \frac{x}{t} > \lambda_2 \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} u_L, & \frac{x}{t} < \lambda_1 \\ u^*, & \lambda_1 < \frac{x}{t} < \lambda_2 \\ u_R, & \frac{x}{t} > \lambda_2 \end{cases}$$

olmaktadır.

### 3. TRAFİK AKIŞ PROBLEMİNİN MATEMATİKSEL MODELLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

Bilindiği üzere otobanlarda arabaların akışını idare etmek günümüzün en güncel problemlerinden biridir. Trafikteki tıkanıklık problemini minimuma indirmek veya çözmek için sadece fiziksel gözlemler yapmak yeterli değildir. Bu tür problemleri çözmek için bir matematiksel modelin oluşturulmasına ihtiyaç vardır. Bu alanda ilk ve önemli araştırmalar [2] ve [3] de yapılmıştır.

Fiziksel olayların modelleri yazılırken bazı fiziksel yaklaşımları kabul etmek gerekir. Trafik akışındaki yaklaşımlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Otobanda araba akışının yeteri kadar yoğun olduğu varsayılır.
2. Arabaların yoğun olduğu bölgede otobandan araba çıkışı ve girişinin olmadığı kabul edilir.
3. Otobanda araç sürücülerinin refleksleri dikkate alınmamaktadır.

Bu yaklaşımlar çerçevesinde otobanın herhangi bir  $[a, b]$  kısmındaki araba akışının  $\Delta t = t_2 - t_1$  zaman zarfındaki değişimini inceleyeceğiz ve bu bölgedeki denge kuralını yazacağız.

Sonunda ise elde edilen denklemin çözümünü kullanarak akış dinamiğini inceleyeceğiz. Bu amaçla önce akış parametrelerini tahmin edeceğiz.

#### 3.1 Akış Parametrelerinin Bulunması

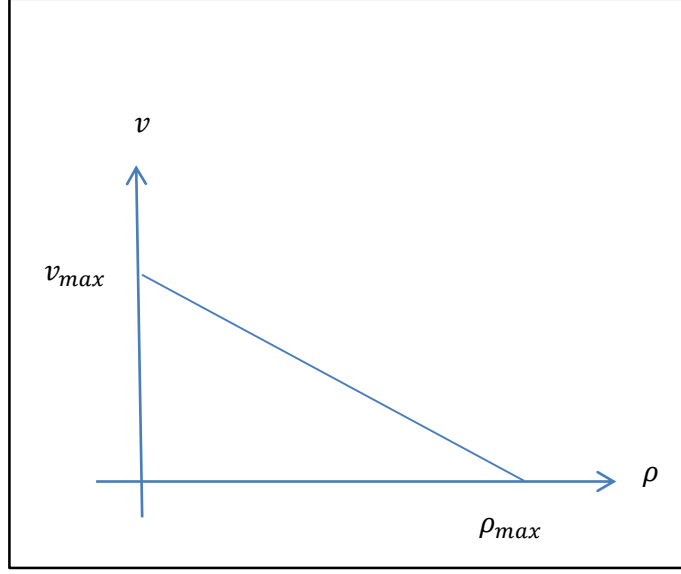
Önce otobanda arabaların hızını belirlemek için bir formül oluşturalım. Fakat bu formülün oluşturulması teorik ve deneysel verilere dayanarak elde edilebilir. Bu formülleri araba hızını ifade etmek için birinci yaklaşım olarak kabul edebiliriz.

Gözönüne aldığımız  $[a, b]$  aralığında arabaların tampon-tampona dizildiğini varsayalım. Bu durumda arabaların hareketi Şekil 3.1 de gösterildiği gibidir. Ayrıca kinematik teoriye göre akış hızı

$$v = \frac{q}{\rho} \quad (3.2)$$

olmaktadır.





**Şekil 3.1**

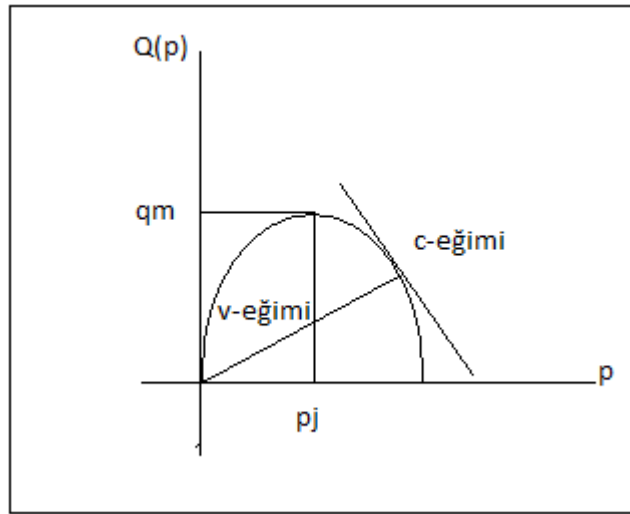
Açıktır ki,  $A(0, v_{max})$  ve  $B(\rho_{max}, 0)$  noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$v(\rho) = v_{max} - \frac{v_{max}\rho}{\rho_{max}} \quad (3.2)$$

olur. (3.1) ifadesinden

$$q = Q(\rho) = \rho v(\rho) = v_{max} \left( \rho - \frac{\rho^2}{\rho_{max}} \right) \quad (3.3)$$

alırız.



**Şekil 3.2**

Otobandaki reel sayılar onu gösterir ki, bir şeritli yollarda

$$\rho_{max} = 225 \frac{araba}{mil}, \quad \rho_j = 80 \frac{araba}{mil}, \quad q_{max} = 1500 \frac{araba}{saat},$$

olmaktadır. Otobanda bir şerittr bu sayılar birinci yaklaşım olarak kabul edilebilir ve bu yaklaşım tüm otobandaki araba sayılarının şeritlerin sayısına çarpılması ile elde edilir. Otobandaki reel deneylere dayanarak akış maksimum değerini düşük hızlarda  $v = \frac{q_{max}}{\rho_{max}} = 20 \frac{mil}{saat}$  değerinde alır.

Dalganın dağılım hızı

$$c(\rho) = Q'(\rho) = v(\rho) + \rho v'(\rho) \quad (3.4)$$

olur.  $v'(\rho) < 0$  olduğundan  $c(\rho)$  hızı arabaların hareket hızından küçük olmaktadır, dalga trafik akışının aksine hareket ederek sürücülere ileride bir problemin olduğu hakta bilgi verir.  $c(\rho)$  hızı  $Q(\rho)$  eğrisinin eğimine eşit olur, yani dalga  $\rho < \rho_j$  olduğunda ileriye doğru,  $\rho > \rho_j$  olduğunda ise geriye doğru hareket ediyor.  $\rho = \rho_j$  olduğunda, yani  $\rho = \rho_j$  maksimum değer aldığında dalga yola nazaran hareketsiz kalır.

### 3.2 Lighthill-Whitham Modeli ve Çözümü

Trafikteki akış dinamiğini incelemek için

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

denkleminin aşağıdaki başlangıç

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_l, & x < 0 \\ \rho_r, & x > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

koşul çerçevesinde çözmemiz gerekir.

Literatürden bilindiği üzere (3.5), (3.6) probleminin çözümü

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_l, & \xi < 0 \\ \rho_r, & \xi > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

olmaktadır. Burada

$$\xi = x - Q'(\rho)t \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir. (3.8) ifadesi ile tanımlanan karakteristikleri inceleyelim. Bunun için önce  $\xi$  fonksiyonunu bulalım

$$\xi = x - v_{max} \left( 1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho \right) t$$

ve karakteristikleri (3.7) başlangıç koşulunu koruyacak şekilde birleştirelim:

a)  $\xi < 0$  olduğunda  $\rho = \rho_l$

$$\frac{x}{t} < v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_l\right),$$

b)  $\xi > 0$  olduğunda  $\rho = \rho_r$

$$\frac{x}{t} > v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_r\right),$$

c)  $\xi = 0$  olduğunda

$$0 = x - v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho\right) t$$

olur. Buradan

$$\rho = -\frac{\rho_{max}}{v_{max}} \frac{x}{2t} + \frac{\rho_{max}}{2}$$

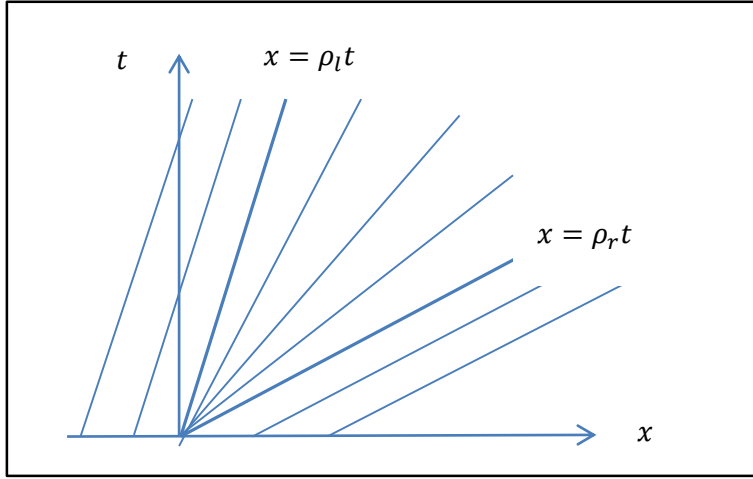
elde edilir. Bu ifadeleri dikkate alarak problemin çözümünü aşağıdaki şekilde

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_l, & \frac{x}{t} < v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_l\right) \\ -\frac{\rho_{max}}{v_{max}} \frac{x}{2t} + \frac{\rho_{max}}{2}, & v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_l\right) < \frac{x}{t} < v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_r\right) \\ \rho_r, & \frac{x}{t} > v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_r\right) \end{cases} \quad (3.9)$$

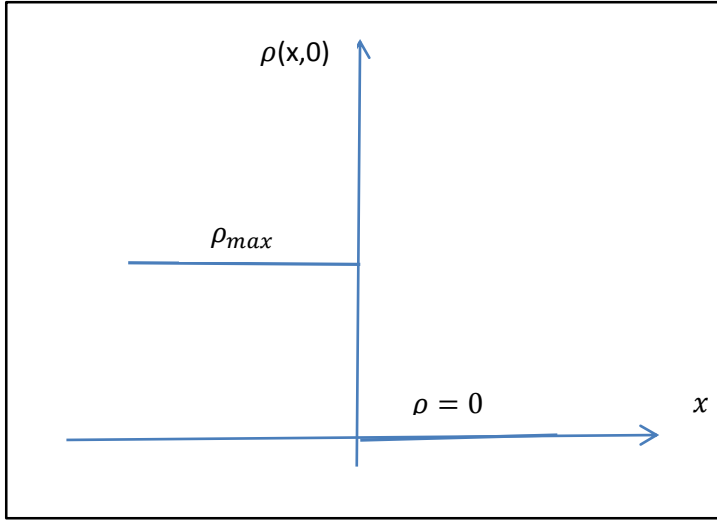
alırız. Bu durumun karakteristikleri Şekil 3.3 de gösterilmiştir.

Genel teoriden bilindiği üzere  $\rho_l > \rho_r$  olduğunda çözümde çok değerlilik oluşmaz, dolayısıyla normal seyirlerine devam ederler.

Yukarıdaki teoriği trafikteki yeşil ışık problemine uygulayalım. Varsayalım ki,  $\rho_l = \rho_{max}$  ve  $\rho_r = 0$  olsun. Bu durum fiziksel olarak  $x = 0$  noktasında kırmızı ışık yandıktan sonra trafiğin durmasını ifade etmektedir. Görüldüğü gibi araba yoğunluğu  $x = 0$  noktasında sıçrayışa sahip olur. Söz konusu arabaların dağılım durumu (başlangıç durumu) Şekil 3.4 de gösterilmiştir



Şekil 3.3



Şekil 3.4

Trafik ışığı kırmızıdan yeşile değiştiğinde arabaların dağılım dinamiğinin bulunması talep olmaktadır.

Genel teoriye göre  $\frac{dx}{dt} = c(\rho) = Q'(\rho) = v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho\right)$  ve karakteristikler üzerinde sabit kaldığı görülmektedir. Görüldüğü gibi  $ox$  eksenini pozitif yönündeki herhangi bir  $x = x_0 > 0$  noktasında kesen karakteristiğin eğimi

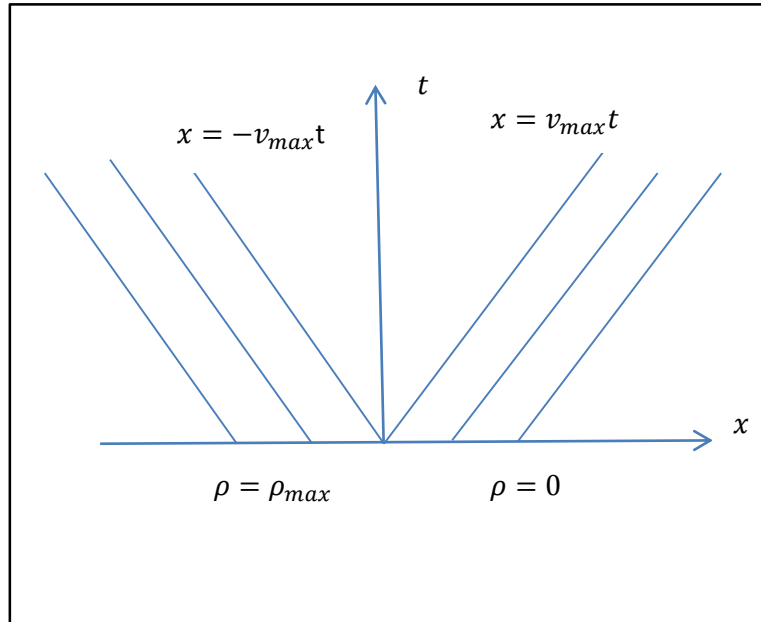
$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) = Q'(\rho) = v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho(x, 0)\right) = v_{max}$$

olur. Bu tür karakteristikler ailesinin denklemleri  $x = v_{max}t + x_0$  olur. Diğer yandan  $ox$  eksenini negatif yönündeki noktalarla kesişen karakteristiklerin eğimi ise

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) = Q'(\rho) = v_{max} \left( 1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho(x, 0) \right) = -v_{max}$$

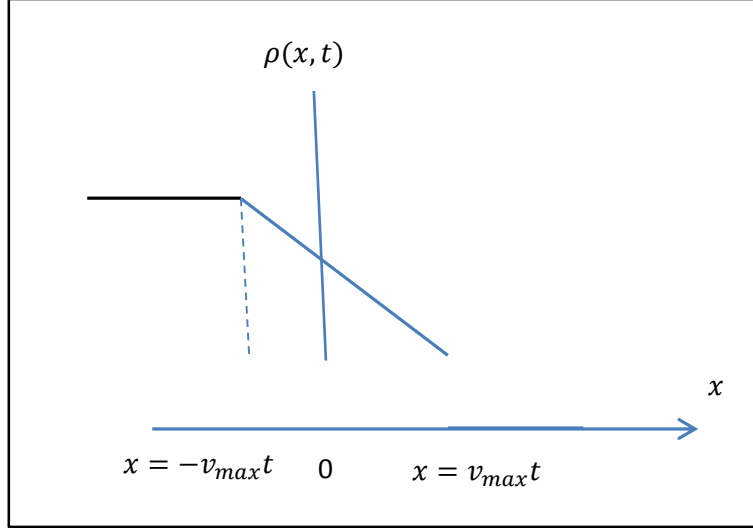
olmaktadır. Açıkça ki, bu tür karakteristikler ailesinin denklemi  $x = -v_{max}t + x_0$  gibi yazılır.

$-v_{max}t < x < v_{max}t$  bölgesinde yerleşen karakteristiklerin hepsinin bir ortak noktası olmaktadır, yani  $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$  olur. Bu durumda karakteristikler ailesinin denklemi Şekil 5 de gösterildiği gibi olur.



**Şekil 3.5**

Bu bilgiler çerçevesinde otobanda araba akışı dinamiği Şekil 3.6 da gösterilmiştir.



**Şekil 3.6**

Şimdi arabaların başlangıç dağılımının Şekil 3.7 de gösterildiği biçimde olduğu, yani  $\rho_l < \rho_r$  durumunu inceleyelim. Bu durumda (3.5) , (3.6) probleminin yerine

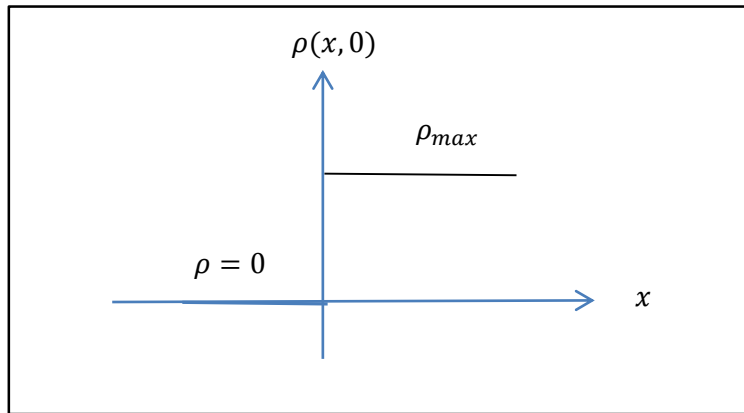
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.10)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \rho_l x, & x < 0 \\ \rho_r x, & x > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

problemi çözmemiz gerekir. Söz konusu çözüm

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-, & \xi < 0 \\ u_+, & \xi > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

olmaktadır. (3.10), (3.11) problemi [1] de incelenmiştir ve  $\rho(x, t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  ifadesinin (3.5), (3.6) probleminin çözümü olduğu ispatlanmıştır.



**Şekil 3.7**

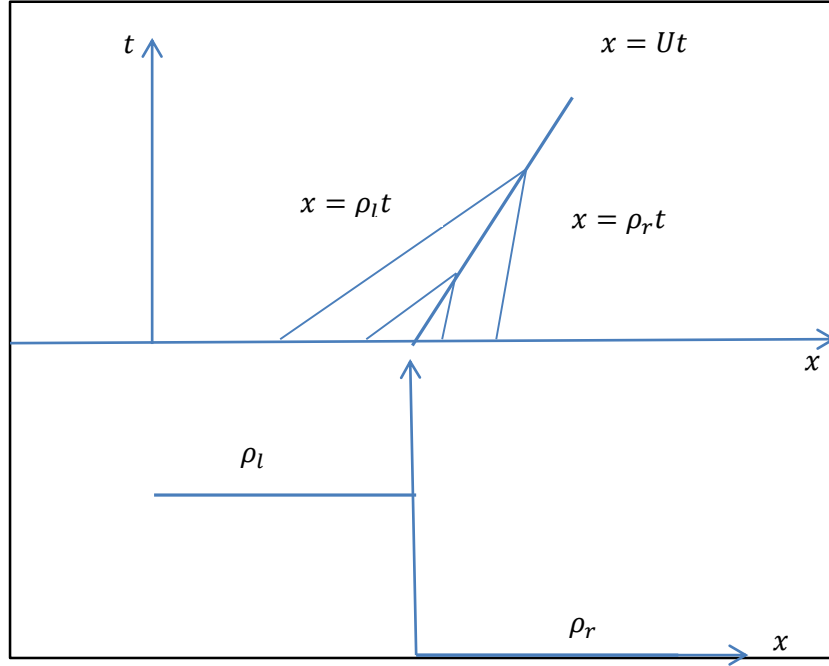
Burada

$$u_- = -\frac{v_{max}}{\rho_{max}} \rho_l^2 t + \rho_l \left[ x - v_{max} \left( 1 - \frac{2\rho_l}{\rho_{max}} \right) \right] t \quad (3.13)$$

ve

$$u_+ = -\frac{v_{max}}{\rho_{max}} \rho_r^2 t + \rho_r \left[ x - v_{max} \left( 1 - \frac{2\rho_r}{\rho_{max}} \right) \right] t \quad (3.14)$$

dır.



Şekil 3.8

şeklinde yazılabilir. Genel teoriye göre bu durumda çözüme sıçrayış oluşur. Sıçrayışın yerini  $u_- = u_+$  denkleminde

$$\frac{x}{t} = v_{max} - \frac{v_{max}}{\rho_{max}} (\rho_l + \rho_r) \equiv U \quad (3.15)$$

olarak buluruz. Sonucu ifadeyi dikkate alarak (5) , (6) probleminin çözümünü

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_l, & \frac{x}{t} < U \\ \rho_r, & \frac{x}{t} > U \end{cases} \quad (3.16)$$

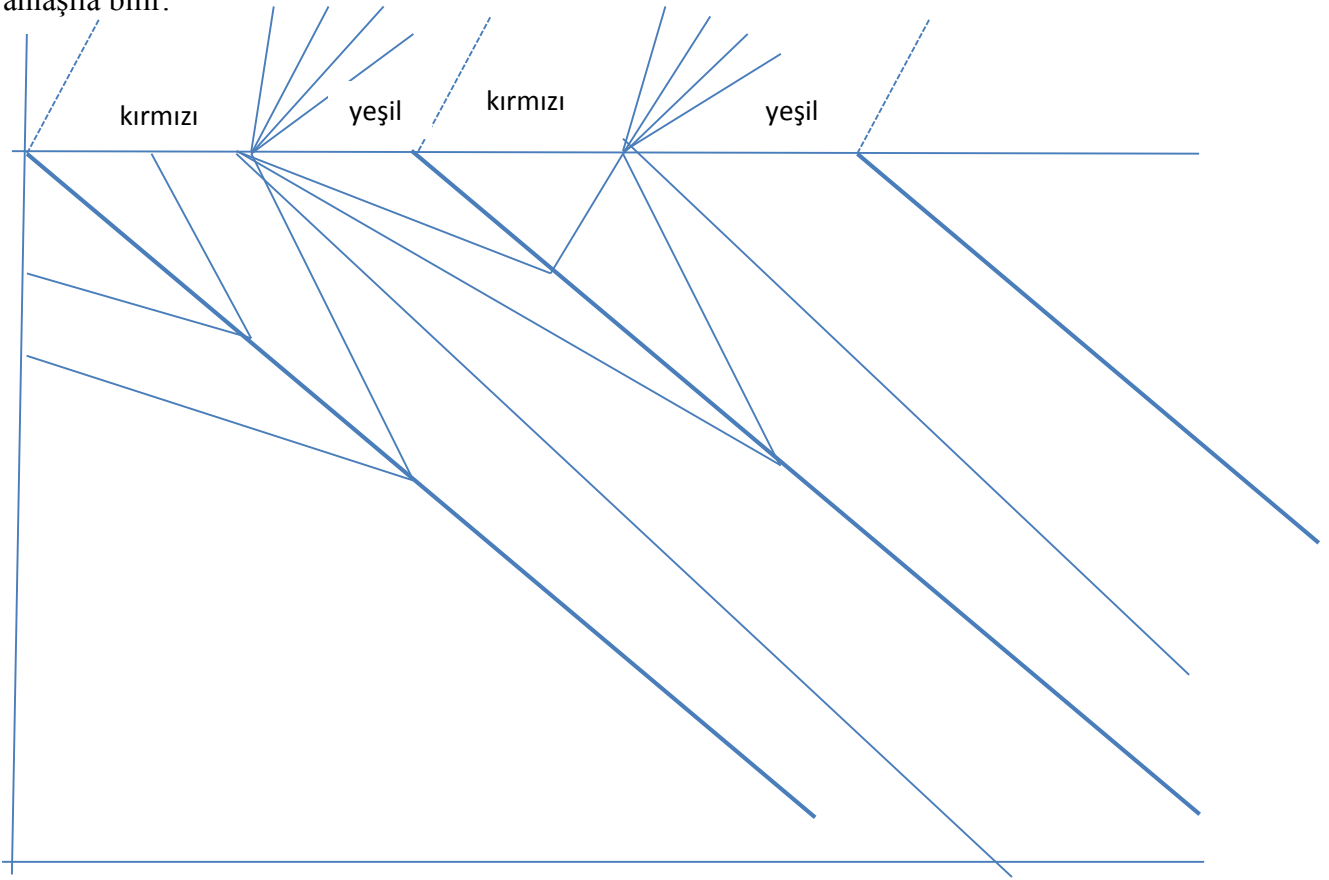
şeklinde yazabiliriz. Bu duruma karşılık gelen çözüm ve karakteristikler ailesinin grafikleri Şekil 8 de gösterilmiştir.

### 3.3 Trafik Işık Problemi

Bu sonuçlar çerçevesinde trafik ışıklarını düzenlemek mümkün olur. Bunun için  $(x, t)$  düzleminde karakteristikler ailesinin grafiklerini kurmak yeterlidir. Bunlar sabit

yoğunluklu doğrulardır, öyle ki, onların  $c(\rho)$  eğimi  $\rho(x,t)$  nun bu doğrular üzerinde aldığı sabit değerlerini belirlemektedir.

Trafik ışıkları önünde ağır hareket eden trafik akış dinamiği Şekil 9 dan kolayca anlaşılabilir.



Şekil 3.9

### 3.4. Payne-Whitham Modeli

Sadece tek durum değişkeni (trafik yoğunluğu) olduğu için Lighthill-Whitham modelinin bazı sınırlamaları bulunmuş, bu sınırlamalar Payne tarafından 1971'de, ortalama hız-yoğunluk ilişkisi içeren ikinci bir diferansiyel denklem ve sürücü beklentilerini, trafik akış rahatlamalarını ve trafik hacim değişikliklerini (trafik akışına katılan veya ayrılan araçlar) gözönüne alan değişkenler eklenerek aşılmıştır.

(3.5) nolu Lighthill-Whitham süreklilik denkleminde trafikteki anlaşılması güç hız-yoğunluk ilişkisini içeren momentum denklemi eklenmiş, bu denkleme yukarıdaki homojen denklem ile beraber 2-denklemlilik Payne'nin modeli denmektedir.



$$(\rho v)_t + (\rho(v^2 + c_0^2))_x = \frac{\rho(U(\rho)-v)}{\tau} \quad (3.16)$$

Burada  $v(x, t)$  ortalama hız (km/saat),  $\tau$  rahatlama sabiti,  $c_0^2$  positif bir sabit ve  $U(\rho)$  ise hız-yoğunluk ilişkisi kararlılığını göstermektedir.

(3.16) denkleminde  $\tau$  ve  $c_0$  zaman ve uzay değişkenine bağlı olmayan, fakat sistem üzerinde açıkça direkt etkiye sahip olan iki parametre vardır. Bu iki parametre tezin konusunu oluşturmakta, en iyi tahmini yapmak için bu parametrelerin en ideal değerlerini kestirmekle ilgilenmektedir.

(3.5) ve (3.16) denklemleri matris formunda

$$\begin{pmatrix} \rho \\ (\rho v) \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ (\rho v) \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho(U(\rho)-v)}{\tau} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir ve böylece denklemin homojen formu yani rahatlama şekli aşağıdaki gibi

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0 \quad (3.18)$$

olur. Burada (17) denkleminin sağ tarafındaki terim kaynak terimini, (18) deki  $A(\mathbf{u})$  ise

$$A(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix}$$

matrisini göstermektedir.

Eğer  $A(\mathbf{u})$  matrisi reel özdeğerlere sahip ve diyagonalleştirilebilirse veya özdeğerleri farklı reel sayılardan oluşuyorsa (3.17) denkleminin hiperbolik olduğu kolayca gösterilebilir. (J. C. Strikwerda [5]).

$A(\mathbf{u})$  matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = v + c_0, \quad \lambda_2 = v - c_0$$

dır ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c_0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c_0 \end{pmatrix}$$

olur.  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  farklı reel özdeğerler olduğundan sistem hiperboliktir. Hiperbolik denklemlere sahip sistemlerin temel özelliği karakteristik eğriler boyunca sabit bir hıza sahip olmalarıdır. Bu karakteristik eğriler kesistikleri zaman çözümler bölünür(parçalanır) ve herbir karakteristik farklı bir hıza sahip olduğu için çözüm farklı hızlarla hareket eden iki dalgadan oluşur. Bu dalgalar ya seyrekleşme(rarefaction) ya da şok tipinde olabilirler.

Şok dalgası, kısmi türevli diferansiyel denklemlerle üstesinden gelinemeyen model çözümdeki süreksizlik değişimini gösterir. Seyreltik bir dalga süreksizliğin bir sonucu

olarak meydana gelir, yelpaze şeklinde çıkar ve karakteristik eğrilerin azaldığı  $(x, t)$  düzlemini doldurur.

(3.17) ifadesi ile gösterilen hiperbolik sistemleri çözmek için sayısal şemalar kullanılır. Ancak doğru dalga tipi için süreksizliğin yerini bulmada uygun bir fiziksel çözüm seçilmesi önemlidir. Bunun yapılmaması halinde süreksizliğin hızını yanlış olmasına ve gerçek olayların çarpıtılmasına sebep olacaktır. Örneğin, kırmızıya dönüşen bir trafik ışığı varsa ve şema da şok dalgasını yakalamada başarısız olursa, bu taktirde gerçekte olmaması gereken kırmızı ışıpta geçen araçlar görülebilir.

Bu projede kullanılması düşünülen sayısal şemalar ileriki çalışmalarda ele alınacaktır.

#### 4. SONUÇ

1. Otobanın herhangi bir noktasındaki araba yoğunluklarının belirlenmiştir.
2. Otobanda maksimum araba akışını tahmin etmek için ortalama araba hızının tahmini mümkündür.
3. Olası trafik tıkanmalarının karşısını almak amacıyla trafik ışıklarının idare edilmesinin tahmini yapılmıştır.

## 5. KAYNAKLAR

- [1] Rasulov, M., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin Yayınevi, İstanbul 2011.
- [2] Whitham, G.B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley Int., New York, 1974.
- [3] Lighthill, M.J., Whitham, G.B., On Kinematic Waves, I. Flood Movement in Long Rivers; II. Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads, Proc. Royal Soc. London Ser. A(229), pp. 281-345,1955.
- [4] Richards, P.I., Shock Waves on the Highway, Operations Research, 4, pp.42-51, 1956.
- [5] Siebel, F., Mauser, W., On the Fundamental Diagram of Traffic Flow, SIAM J. Appl. Math., Vol. 66, No 4, pp. 1150-1162, 2006.
- [6] Herty, M., Pareschi, L., Seaid, M., Discrete-Velocity Models and Relaxation Schemes for Traffic Flows, SIAM J. Sci. Comp., Vol. 28, No 4, pp. 1582-1596, 2006.
- [7] Sobolev, S.L., Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1978.

## ÖZGEÇMİŞ

22.03.1972 tarihinde Bingöl de doğdu. İlk-Orta-Lise eğitimini Bingöl de aldıktan sonra İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2002 yılında mezun oldu. Uzun yıllar dersane eğitimi verdikten sonra, 2012 yılında Nişantaşı Üniversitesine öğretim görevlisi olarak atandı ve halen adı geçen üniversitede çalışmaktadır. Kendine ait matematik öğrenme teknikleri modeli geliştirerek 12 adet kitap yazmıştır. Evli ve bir çocuk babasıdır.

Hasan CARFİ