T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

BİRİNCİ BASAMAKTAN KUAZİ LİNEER KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN CAUCHY PROBLEMİ VE SIKIŞABİLİR VİSKOZİTESİZ GAZ DİNAMİĞİ PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Gamze KUMRU

İSTANBUL, 2014

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

BİRİNCİ BASAMAKTAN KUAZİ LİNEER KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN CAUCHY PROBLEMİ VE SIKIŞABİLİR VİSKOZİTESİZ GAZ DİNAMİĞİ PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Gamze KUMRU

Öğrenci No:

120860002

Danışman:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2014

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans tezi olarak sizlere sunduğum “**Birinci Basamaktan Kuazi Lineer Kısmi Türevli Denklemler Sistemi İçin Cauchy Problemi ve Sıkışabilir Viskozitesiz Gaz Dinamiği Probleminin Sayısal Çözümü** ” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlaka ve geleneklere uygun bir biçimde tarafımdan yazıldığını, faydalandığım eserlerin hepsinin kaynaklarda belirtildiği ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde atıf yapıldığını açıklar ve bunu onurumla doğruluğunu belirtirim. 01.08.2014

Gamze KUMRU

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 120860002 no'lu Gamze KUMRU'nun 01/08/2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavı[1] sonucunda 50 (Elli) dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında[2] oybirliğiyle, kabul kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Başlığı[3] : Birinci Basamaktan Kuazi Lineer Kısmi Türevli Denklemler İçin Cauchy Problemi ve Sıkışabilir Viskozitesiz Gaz Dinamiği Probleminin Sayısal Çözümü

Tez Sınav Jürisi		Öğretim Üyesi	İmza
Danışman	:	Prof.Dr. Mahir RESULOV	
Üye	:	Prof.Dr. Abdullah YILDIZ	
Üye	:	Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL	

---

[1] Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

[2] Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi başarısız bulunan öğrencinin Enstitü ile ilişiği kesilir. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. Bu savunma sınavında da tezi kabul edilmeyen öğrencinin enstitü ile ilişiği kesilir. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

[3] İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a ve Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim.

İstanbul, 2014 **Gamze KUMRU**

BİRİNCİ BASAMAKTAN KUAZİ LİNEER KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN CAUCHY PROBLEMİ VE SIKIŞABİLİR VİSKOZİTESİZ GAZ DİNAMİĞİ PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Tezi Hazırlayan: **Gamze KUMRU**

ÖZET

Bu çalışmada genel olarak birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için Cauchy probleminin çözümü incelenmiştir.

Birinci bölümde karakteristikler yönteminin teorik yapısı açıklanmıştır. Skaler denklem ve denklemler sistemi için karakteristikler yönteminin prensip olarak farkları açıklanmıştır.

İkinci bölümde, önce sabit katsayılı denklemler sisteminin genel çözümü bulunmuş, sonra söz konusu denklemler sistemi için Cauchy probleminin çözümü elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde ise sıkışabilir viskozitesi çok az olan gazların hareketini ifade eden nonlineer denklemler sisteminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümünün bulunması için bir yöntem önerilmiştir. Ayrıca sayısal çözümün özellikleri ve bazı gerekli aprior değerlendirmeler de elde edilmiştir. Söz konusu değerlendirmelerin yardımı ile sayısal çözümün gerçek çözüme yakınsaklık teoremi de ispatlanmıştır.

Anahtar kelimler; Karakteristikler, Cauchy problemi, Gaz Dinemiği

CAUCHY PROBLEM FOR THE FIRST ORDER QUASI LINEAR PARTIAL SYSTEM OF EQUATIONS AND NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF COMPRESSIBLE INVISCID GAS DYNAMICS

Presented by: **Gamze KUMRU**

ABSTRACT

In this thesis solution of the Cauchy problem for system of the partial differential equations of first order is investigated.

In the first part theoretical structure of the method of characteristics as for scalar equation as well as for the system of equations are explained.

In the second part the general solution of the system equations with constant coefficients is found, and then solution of the Cauchy problem for mentioned system of equations is obtained.

In the third part the special method for finding the numerical solution in a class of discontinuous functions for the nonlinear system of equations, which describes the flow of a compressible inviscid gas is suggested. Addition to, some properties of the numerical solution are studied. Using these the theorem of convergence of the numerical solution to exact solution is proven.

Key Words; Characteristics, Cauchy problem, Gas Dynamics

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

İki bölümden oluşan tezin amacı, lineer ve kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler systemi için Riemann invaryantlarının incelenmesidir. Literatürden bilindiği üzere, tek denklemler için karakteristikler yönteminin anahtarı, karakteristik eğri kavramı içermek ile verilmiş denklemi bu karakteristik üzerinde tam diferansiyel şeklinde yazmaktır. Yani, kısmi türevli diferansiyel denklemi adi diferansiyel denklemler sistemine indirgenilir ki, böylece bu adi diferansiyel denklemler sistemini çözerek esas problemin gerçek çözümünü ele alabiliriz.

Karakteristikler yönteminin mantığını kısmi diferansiyel denklemler sistemine direk uygulamak mümkün değildir. Çünkü, sistemin her bir denklemi, farklı bilinmeyen fonksiyonların çeşitli yönlerde türevlerini içermektedir. Karakteristikler yöntemini diferansiyel denklemler sistemine uygulayabilmemiz için özel şekilde bulunmuş öyle bir karakteristikler bulunur ki, bu karakteristikler üzerinde invaryant kalan ifadeler elde etmek mümkün olur. Bunlara Riemann invaryantları denir. Riemann invaryantları dikkate alınarak göz önüne aldığımız sistemin her bir denklemini uygun karakteristikler üzerinde tam diferansiyel şeklinde ifade etmek mümkündür. Dolayısı ile, yine de kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi adi diferansiyel denklemler sistemine indirgenebilir. Söz konusu adi diferansiyel denklemler sistemini çözerek, verilmiş problemin gerçek çözümlerini elde ederiz.

Yukarıda söylediklerimizi gerçekleştirmek için lineer cebirden gereken kavramlar tezin birinci bölümünde verilmiştir. Tezin sonuncu bölümünde ise, Riemann invaryantlarını kullanarak bazı kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için yazılmış Cauchy probleminin gerçek çözümleri ele alınmıştır.

2. RİEMANN PROBLEMİ VE RİEMANN İNVARYANTLARI

2.1 Sabit katsayılı Diferransiyel Denklemler Sistemi

Önce sabit katsayılı denklemler sistemi için Riemann problemini inceleyelim. Bunun için aşağıdaki problemi gözönüne

$$U_t + AU_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty \tag{1.1}$$

$$U(x,0) = U^{(0)}(x) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

alalım. Burada, $A\, n \times n$ ölçülü sabit elemanlı bir matris olmaktadır .

Farz edelimki, sistem tamamen hiperboliktir yani A matrisi reel ve, farklı özdeğerlere sahiptir, ayrıca onlar aşağıdaki gibi düzenlenebilir

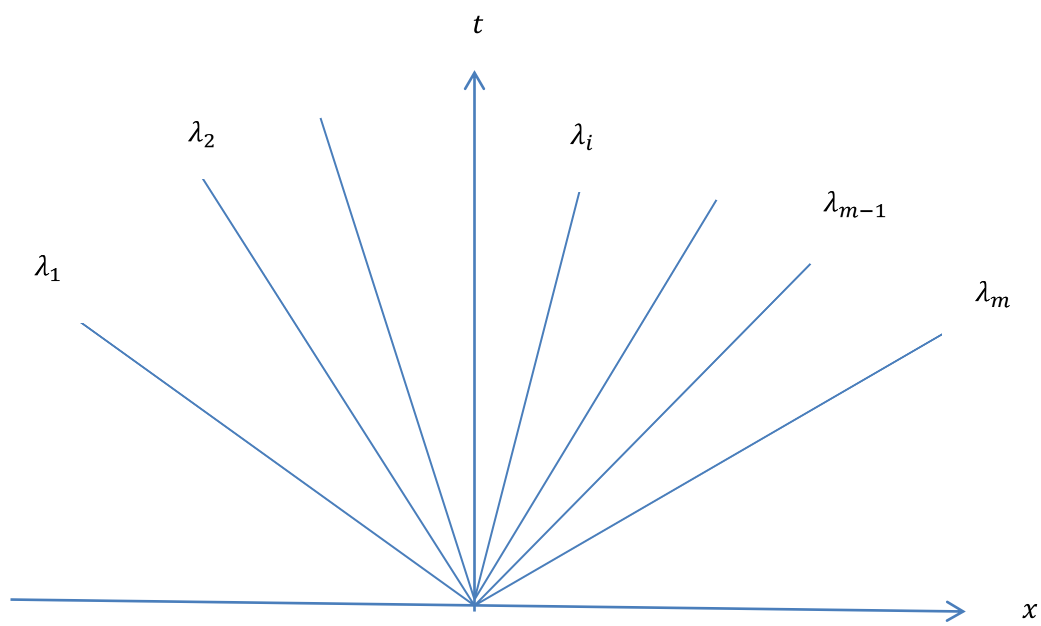
$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < .... < \lambda_m$. (1.3)

$W = K^{-1}U$ değişken dönüşümünü yapalım. Değişken dönüşümü yaptıktan sonra (1.1) denklemini bağımsız denklemler sistemine

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \qquad i = 1,2,3,...,m \tag{1.4}$$

parçalayalım; (x-t) düzleminde gösterelim, Şekil 1.

$U = KW$ eşitliğinde K, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ özdeğerlerine karşılık gelen ve $K^{(i)}$, $(i = 1,...,m)$ özvektörlerinden oluşan bir matristir.



Şekil 1.1

Bilindiği üzere $K^{(i)}$ ler lineer bağımlı değildir. Bu durumda biz U_L ve U_R verilerini $K^{(i)},(i=1,...,m)$ lere göre

$$U_L=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i K^{(i)}, \qquad U_R=\sum_{i=1}^{m}\beta_i K^{(i)} \tag{1.5}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikte α_i ve β_i ler sabitlerdir, $(i=1,...,m)$.

(1.5) denkleminin çözümünü şöyle yazabiliriz.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_m \end{pmatrix} = W_1 \begin{pmatrix} K_1^{(1)} \\ K_2^{(1)} \\ \cdots \\ K_M^{(1)} \end{pmatrix} + W_2 \begin{pmatrix} K_1^{(2)} \\ K_2^{(2)} \\ \cdots \\ K_M^{(2)} \end{pmatrix} + \ldots + W_m \begin{pmatrix} K_1^{m} \\ K_2^{m} \\ \cdots \\ K_m^{m} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

veya şöyle ifade edebiliriz

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{m} W_i(x,t) K^{(i)} . \tag{1.7}$$

$W_i(x,t) = W^{(0)}(x - \lambda_i t)$ olduğunu da dikkate alırsak

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{m} W_i^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)} \tag{1.8}$$

olarak yazabiliriz.

Böylelikle, $x - t$ düzleminin her bir (x,t) noktasında $U(x,t)$ fonksiyonu yalnız başlangıç verilerinin m noktasından $(x_0^{(i)} = x - \lambda_i t)$ bağımlı olmaktadır. Bu noktalar λ_i hızına sahip karakteristiklerin x-ekseni ile kesiştiği noktalar olmaktadırlar. (1.8) denkleminin çözümüne m dalganın süper pozisyonu gibi bakılabilir. Öyle ki, bu dalgaların her birisi bağımsız olarak formunu değişmeden dağılmaktadır. i nolu dalganın formu $W_i^{(0)}(x) K^{(i)}$ e eşittir ve bu dalganın değişme hızı λ_i dir.

Şimdi (1.1),(1.2) Riemann problemini göz önüne alalım. (1.1),(1.2) problemlemlerinin genel çözümü Şekil 1.1 de verildiği gibi olmaktadır. Bu çözüm her bir λ_i özdeğerine sahip ve orijinden çıkan m dalgadan oluşmaktadır. Her i dalga U da bulunan süreksizlik sıçrayışlarını λ_i hızı hareket ettirmektedir.

Normalde çözüm λ_1 dalgadan solda sadece U_L başlangıç verisine, λ_m dalgadan sağda ise U_R başlangıç verisine eşit olmaktadır. Problemin çözümü λ_1 ve λ_m dalgaları arasındaki yelpazede bulunmaktadır. $K^{(1)}, K^{(2)}, ..., K^{(m)}$ özvektörleri lineer bağımsız olduklarından sırasıyla U_L ve U_R özvektörleri üzerinde lineer kombinasyon şeklinde

$$U_L = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K^{(i)}, \quad U_R = \sum_{i=1}^{m} \beta_i K^{(i)} \tag{1.9}$$

olarak yazabiliriz.Burada α_i, β_i , $(i = 1,2,...,m)$ sabitlerdir.

Formel olarak (1.1),(1.2) probleminin (1.8) şeklindeki çözümü karakteristik $W_i^{(0)}(x)$ başlangıç verilerinde ve sağ $K^{(i)}$ özvektörleri terminde ifade edilmektedir.

Belirtelim ki, (1.9) un her bir ifadesi (1.8) in özel durumları olmaktadır. (1.8) ve (1.9) ifadelerinden karakteristik W_i değişkenlerinde m sayıda skaler Riemann problemini elde ederiz.

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0\,, \tag{1.10}$$

$$W_i^{(0)}(x) = \begin{cases} \alpha_i, & if \;\; x < 0 \\ \beta_i, & if \;\; x > 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

(1.10), (1.11) probleminin çözümü,

$$W_i(x,t) = W_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i, & x - \lambda_i t < 0 \\ \beta_i, & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

şeklinde olmaktadır.

Verilmiş (x,t) için öyle bir λ_i özdeğeri vardır ki,

$$\forall i,\, i < I\;; \qquad \lambda_I < \frac{x}{t} < \lambda_{I+1}\;; \qquad x - \lambda_i t > 0$$

olur. Böylelikle, (1.1), (1.2) probleminin çözümünü son olarak şöyle yazabiliriz

$$U(x,t) = \sum_{i=I+1}^{m} \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=1}^{I} \beta_i K^{(i)}. \tag{1.13}$$

Burada I $x - \lambda_i t > 0$ eşitliğini koruyan i indislerinin maksimumudur.

Not: Yukarıda verilmiş (1.10) denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \tag{1.14}$$

A matrisinin özdeğerleri ve özvektörler

$$| A - \lambda I | = 0$$

denkleminden elde edilir.

L_i sağ vektörler olsun. Yani,

$$L_i A = \lambda L_i$$

Sağlansın. Eğer (1.14) denklemini L_i ile sağdan çarparsak

$$L_i\left(\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x}\right) = L_i\frac{\partial U}{\partial t} + L_i A\frac{\partial U}{\partial x}$$

veya

$$L_i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial}{\partial x}\right)U = 0 \qquad (1.15)$$

olur.

2.1.1 2×2 Boyutlu Sistem

Sadelik için 2×2 ölçülü sistem için aşağıdaki Riemann problemini

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \qquad (1.16)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + a_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \qquad (1.17)$$

göz önüne alalım. Aşağıdaki notasyonları

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (1.18)$$

içerelim. Bu notasyonlarda (1.16), (1.17) sistemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1.19)$$

biçiminde yazabiliriz.

A matrisini iki tane birbirinden farklı reel özdeğerlerinin olduğunu varsayalım. Bunları sırasıyla λ_1 ve λ_2 olarak gösterelim. $\lambda_1 < \lambda_2$ olduğunu kabul edelim.

$K^{(i)}$ ile λ_i lere karşılık gelen özvektörleri gösterelim. (1.19) denklemini sağdan $K^{(i)}$ özvektörlere çarpalım.

$$K^{(i)}\frac{\partial U}{\partial t}+K^{(i)}A\frac{\partial U}{\partial x}=0, \qquad (1.20)$$

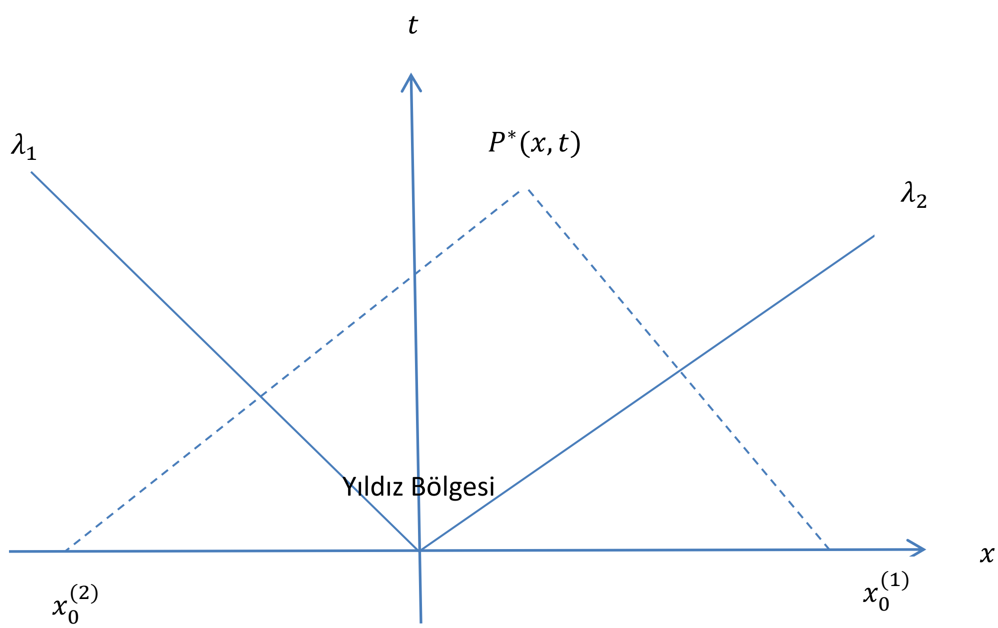
$$K^{(i)}\frac{\partial U}{\partial t}+\lambda_i K^{(i)}A\frac{\partial U}{\partial x}=K^{(i)}(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial}{\partial x})U=0 \qquad (1.21)$$

$W=KU$ özel değişkenlerinde (1.19) denklemini,

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial W_i}{\partial x}=0, \qquad (i=1,2) \qquad (1.22)$$

skaler denklem şeklinde elde ederiz. Burada

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\lambda_i \text{ veya } \xi=x-\lambda_i t \text{ olmaktadır.} \qquad (1.23)$$



Şekil 1. 2

Genel teoriye göre

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_1 \text{ dan solda çözüm}$$

$$U_L=\alpha_1K^{(1)}+\alpha_2K^{(2)} \qquad (1.24)$$

ve

$\frac{dx}{dt} = \lambda_2$ dan sağda çözüm ise

$$U_R = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \tag{1.25}$$

olmaktadır.

λ_1 ve λ_2 dalgaları arasındaki bölgeye yıldız bölgesi denir ve bu bölgede çözümü U^* ile gösteririz. Bu değer süreksiz başlangıç verilerinden oluşan ve orijinden çıkan iki dalganın devamının değeri olmaktadır. Şekil 1.2 de $P^*(x, t^*)$ noktasından geriye λ_1 ve λ_2 hızıyla karakteristikleri çizelim. Bunlar orijinden çıkan karakteristiklere paralel olur. P^* noktasından çıkan karakteristikler $x_0^{(2)} = x - \lambda_2 t$ and $x_0^{(1)} = x - \lambda_1 t$ başlangıç noktalarından çıkmaktadırlar.

Böylelikle, (1.8) ile bulunan $U(x,t)$ nin katsayıları tanımlanmaktadır. P^* noktasındaki çözüm (1.8) gibi tanımlanır. Esas problem α_i ve β_i katsayılarını doğru seçmek olmaktadır.

$U(x_L, t^*) = U_L$ eşitliğini koruyan dalgadan solda t^* ve x_L noktasını seçelim. Açıktır ki, x_L, t^* noktasından çıkan dalga

$$U_L = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i K^{(i)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} \tag{1.26}$$

şeklinde olmaktadır. Yani, açılışının tüm katsayıları α lar olmaktadır. Yani, x_L, t^* noktası her bir dalganın solunda yerleşmektedir. Ne zamanki, horizontal $t = t^*$ doğrusu üzere hareket ediyoruz, $\frac{dx}{dt} = \lambda_1$ dalgasını keseriz. Böylelikle, $x - \lambda_1 t$ negatiften pozitife değişir. Buna göre de α_1 katsayısı β_1 katsayısına çevrilir. O zaman çözüm λ_1 ve λ_2 dalgaları arasındaki yıldız bölgesinde şu şekilde olur

$$U^*(x,t) = \beta_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)}\,. \tag{1.27}$$

Sağa doğru hareket etmeyi devam ettirdikçe λ_2 dalgasını keseriz ve $x - \lambda_2$ negatiften pozitife değişir. (1.27) ifadesindeki λ_2 katsayısı β_2 ye dönüşür ve sonuçta (1.27) ifadesi

$$U_R = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \tag{1.28}$$

şeklini alır.

2.1.2 Örnekler

Örnek 1. Aşağıdaki şekilde verilmiş dalga denklemini göz önüne alalım

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \tag{1.29}$$

(1.29) denklemini birinci basamaktan diferansiyel denklemlere çevirelim. Önce $c^2 = 1$ olan durumu inceleyelim.

$$u_t = v, \quad u_x = w \tag{1.30}$$

olsun. Buradan

$$u_{tt} = (u_t)_t, \quad u_{xx} = (u_x)_x$$

olur.

$$u_{tt} = v_t, \quad u_{xx} = w_x$$

$$v_x - w_t = 0, \quad w_t - v_x = 0 \tag{1.31}$$

dikkate alırsak (1.29) denklemini

$$\begin{cases} v_t - w_x = 0 \\ w_t - v_x = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

veya

$$u_t + Au_x = 0 \tag{1.33}$$

şeklinde yazarız. Burada

$$u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

Örnek 2. Şimdi $c^2 \neq 1$ olduğunu varsayalım.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{1.34}$$

denkleminde

$$u_t = v, \quad cu_x = w \tag{1.35}$$

değişken dönüşümlerini yapalım.

$$cu_t = cv, \quad cu_x = w$$

$$cu_{xt} = v_x, \quad cu_{xt} = wt$$

dönüşümlerini dikkate alırsak

$$\begin{cases} v_t - cw_x = 0 \\ w_t - cv_x = 0 \end{cases} \tag{1.36}$$

elde ederiz.

Örnek 3. Sonra aşağıdaki denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.37}$$

göz önüne alalım. (1.37) denklemini şu şekilde yazalım

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_1, \quad -\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial x} = u_2$$

olsun. Buradan,

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad -\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

elde ederiz. Sonra

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2}\frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$$

veya

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

olur. Böylelikle,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{1.38}$$

(1.38) denklemini aşağıdaki denklem sistemi gibi yazabiliriz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{a^2}{\rho_0}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{1.39}$$

veya vektöriyel formda yazabiliriz.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \tag{1.40}$$

Burada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ \dfrac{a^2}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

Şimdi elde ettiğimiz denklemler

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{a^2}{\rho_0}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0\,. \end{cases} \tag{1.41}$$

(1.41) denklemi için başlangıç koşulu şöyledir.

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L, & x < 0 \\ \rho_R, & x > 0, \end{cases} \tag{1.42}$$

ve

$$u(x,0)=\begin{cases}u_L, & x<0\\ u_R, & x>0,\end{cases} \tag{1.43}$$

veya

$$u(x,0)\equiv u(x,0)=u_0=\begin{cases}u_L, & x<0\\ u_R, & x>0,\end{cases}$$

$$\rho(x,0)\equiv\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1=\begin{cases}\rho_L, & x<0\\ \rho_R, & x>0,\end{cases}$$

dır. A matrisinin özdeğerleri

$$\begin{vmatrix}-\lambda & \rho_0\\ \dfrac{a^2}{\rho_0} & -\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow \lambda^2-a^2=0 \quad\Rightarrow \lambda_1=-a, \quad \lambda_2=a.$$

olur. Özvektörler ise şöyle ifade edilir.

Öncelikle, $\lambda_1=-a$ ya karşılık gelen özvektörü

$$AK^{(i)}-\lambda K^{(i)}=0$$

denkleminden bulalım.

$$\begin{cases}a\alpha_1+\rho_0\alpha_2=0\\ \dfrac{a^2}{\rho_0}\alpha_1+a\alpha_2=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad a\alpha_1+\rho_0\alpha_2=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha 1=\rho_0 \quad , \quad \alpha_2=-a,$$

λ_1 e karşılık gelen özvektör şöyledir:

$$K^{(1)}=(\rho_0,-a)^T \quad\Rightarrow\quad K^{(1)}=\begin{pmatrix}\rho_0\\ -a\end{pmatrix};$$

Şimdi $\lambda_2=a$ yı ele alalım. Benzer şekilde

$$\begin{cases}-a\alpha_1+\rho_0\alpha_2=0\\ \dfrac{a^2}{\rho_0}\alpha_1-a\alpha_2=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad a\alpha_1+\rho_0\alpha_2=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=\rho, \quad \alpha_2=a,$$

$$K^{(2)} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}.$$

alırız.

Önce, $u_L = (\rho_L, u_L)^T$ sol başlangıç verilerinin özvektörler üzerine ayrılışını yazalım

$$u_L = \begin{pmatrix} p_L \\ u_L \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i K_L^{(i)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)} = \alpha_1 K^{(1)} + \alpha_2 K^{(2)},$$

Buradan

$$\begin{cases} \rho_L = \alpha_1 \rho_0 + \alpha_2 \rho_0 \\ \\ u_L = -\alpha_1 a + \alpha_2 a \end{cases}$$

elde ederiz.

Bu sistemin çözümü Cramer yöntemi ile bulunmuştur, yani

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ -a & a \end{vmatrix} = a\rho_0 + a\rho_0 = 2a\rho_0;$$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho_L & \rho_0 \\ u_L & a \end{vmatrix}}{2a\rho_0} = \frac{\rho_L a - \rho_0 u_L}{2a\rho_0},$$

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_L \\ -a & u_L \end{vmatrix}}{2a\rho_0} = \frac{\rho_L u_L + a\rho_L}{2a\rho_0}.$$

Şimdi, $u_R = (\rho_R, u_R)^T$ sağ başlangıç verileri $K^{(i)}$ ler üzere ayrılışını yapalım:

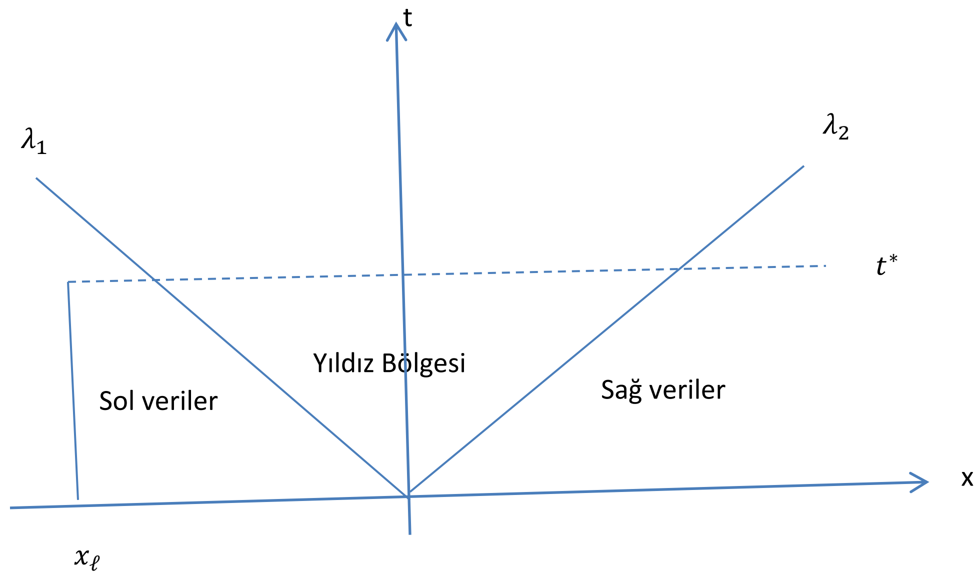
$$u_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \end{pmatrix} = \beta_1 K^{(1)} + \beta_2 K^{(2)} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 \rho_0 + \beta_2 \rho_0 \\ -\beta_1 a + \beta_2 a \end{cases}$$

$$\beta_1 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0},$$

$$\beta_2 = \frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0}.$$

Yıldız bölgesinde $u^*(x,t)=\beta_1 K^{(1)}+\alpha_2 K^{(2)}$ olduğunu dikkate alırsak, çözümü

$$u^* = \begin{pmatrix} p^* \\ a^* \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -a \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ a \end{pmatrix}$$



Şekil 1.3

Yani,

$$\rho^* = \beta_1\rho_0 + \alpha_2\rho_0 = \frac{a\rho_2 - u_R}{2a\rho_0}\rho_0 + \frac{\rho_0 u_R + a\rho_R}{2a\rho_0}\rho_0$$

$$= \frac{a\rho_L}{2a} - \frac{\rho_0 u_L}{2a} + \frac{\rho_0 u_R}{2a} + \frac{a\rho_R}{2a}$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{\rho_0}{2a}(u_R - u_L),$$

$$u^* = -\beta_1 a + \alpha_2 a = -\frac{a\rho_R - \rho_0 u_R}{2a\rho_0}a + \frac{\rho_0 u_L + a\rho_L}{2a\rho_0}a$$

$$= -\frac{a\rho_R}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 u_R}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 u_L}{2\rho_0} + \frac{a\rho_L}{2\rho_0}$$

$$= -\frac{a}{2\rho_0}(\rho_R - \rho_L) + \frac{1}{2}(u_L + u_R)$$

sonuç olarak,

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{\rho_0}{2a}(u_R - u_L),$$

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L - u_R) - \frac{a}{2\rho_0}(\rho_R - \rho_L).$$

olduğunu görürüz.

Örnek 4 .

$p_0 = 1, \quad a = 1$ ve $p_L = 1, \quad p_R = \frac{1}{2};$

ve

$$u_L = 0, \quad u_R = 0$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases} \quad ; \quad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Verilerine sahip problemin çözümleri

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L, & \frac{x}{t} < \lambda_1 \\ \rho^*, & \lambda_1 < \frac{x}{t} < \lambda_2 \\ \rho_R, & \frac{x}{t} > \lambda_2 \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} u_L \,, & \dfrac{x}{t} < \lambda_1 \\ u^*, & \lambda_1 < \dfrac{x}{t} < \lambda_2 \\ u_R, & \dfrac{x}{t} > \lambda_2 \end{cases}$$

olmaktadır.

2.2 Birinci Basamaktan Kuazi Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler Sistemi

2.2.1 Hiperbolik Sistemler

Günümüzde bir çok fiziksel problem skaler denklemden ziyade birinci basamaktan kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi şeklinde ifade edilebiliyor. Böyle denklemler bilinmeyen fonksiyonların türevIerine göre lineer olur. Katsayıları ise bilinmeyen fonksiyonlara ve serbest değişenlere bağlı olabilir. Eğer böyle denklemler dalgalar dağılım durumlarını ifade ederse bir çok problemin çözümüne dalga denklemleri çözmekle ulaşabiliriz. Bundan dolayı biz burada iki boyutlu problemleri göz önüne alacağız. Değişkenlerden biri x-ekseni diğeri ise t-zaman değişkenleri olacaktır. Eğer bilinmeyen fonksiyonlar $u_i(x,t)$, $i = 1,2,..,n$ olursa, birinci mertebeden kuazi lineer diferensiyel denklemler sisteminin genel yazılım formu şöyle olacaktır

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t}(x,t) + b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}(x,t) + c_i = 0, \qquad i = 1,2,...,n. \tag{1.44}$$

(1.44) sistemini kolaylık için n=2 durumunda açık şekilde yazalım.

$$a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t} + b_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + b_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} + c_1 = 0,$$

$$a_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t} + b_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + b_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} + c_2 = 0, \tag{1.45}$$

burada, $a_{ij}(i, j = 1,2)$ x ve t ye bağlı bilinen fonksiyonlardır.

Öncelikle (1.45) sisteminin hiperbolik bir sistem olması için bir koşul bulalım. Ayrıca hiperbolik sistemin bazı sonuçlarını inceleyelim. Birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü ararken öncelikle bu denklemin karakteristiklerini bulup bunu adi diferensiyel denklemler sistemine dönüştürüyorduk. Bazı durumlarda elde ettiğimiz adi diferensiyel denklemlerin çözümünü bulabiliyorduk. En azından ele aldığımız diferansiyel denklemler sistemini sayısal olarak çözmek mümkündür. Her iki durumda da göz önünde bulunan kısmi türevli diferansiyel denklem "yerel" olarak çözülür. Bu ise genelde dalgaların dağılım durumlarına denk gelmektedir. Gerçekten de küçük bir zaman diliminde keyfi bir noktanın hareketine, o noktaya yakın olan noktanın etkisi olabilir. Doğal olarak karşımıza şöyle bir soru çıkar. "(1.44) denklemler sistemi içinde böyle bir yerel hesaplama işlemleri yapılabilir mi?" Eğer bu işlemleri yapmak mümkün ise o zaman sistem hiperbolik türe ait olur.

Hiperbolik sistemin tanımını vermeden önce bazı bilgilere göz atalım. Genelde (1.44) sisteminde keyfi u_j fonksiyonları $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ ve $\frac{\partial u_j}{\partial x}$ türevlerinin keyfi kombinasyonlarını içermektedir. Yani (1.44) veya (1.45) denklemler sisteminin her bir denklemi u_j fonksiyonunun $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ ve $\frac{\partial u_j}{\partial x}$ türevlerini lineer bağımlı durumda içerir. Bu, şu anlama gelir, denklemler keyfi u_j fonkiyonun çeşitli yerlerdeki değişim hızı hakkında bilgi verir ve bu denklemlerden keyfi u_j fonksiyonunun söz konusu değişim hızlarının bilinen bir yönde değişmesi hakkında herhangi bir bilgi almak mümkün değildir. (1.44) denklemler sistemi üzerinde çeşitli dönüşümler yapsak acaba yukarıda bahsettiğimiz bilgileri elde edebilir miyiz? Bunu araştıralım.

(1.44) denklem sistemini henüz bilinmeyen

$$\vec{l} = (l_1(x,t,y),...,l_n(x,t,u))$$

vektörü ile çarpıp toplayalım

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x}) + c_i\right) = 0\,, \tag{1.46}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x}\right] + \sum_{i=1}^{n} l_i c_i = 0\,. \tag{1.47}$$

$n = 2$ için (1.46) şöyle olur

$$l_1(a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t}+b_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t}+b_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x})+$$

$$l_2(a_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t}+b_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t}+b_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x})+l_1c_1+l_2c_2=0\,. \tag{1.48}$$

$$\begin{cases} x=x(\eta)\,, \\ t=t(\eta) \end{cases} \tag{1.49}$$

dönüşümünü yapalım. Buna göre,

$$\frac{\partial u_j}{\partial \eta}=t'\frac{\partial u_j}{\partial t}+x'\frac{\partial u_j}{\partial x} \tag{1.50}$$

elde edilir. Burada

$$\alpha=x'(\eta), \qquad \beta=\tau'(\eta) \tag{1.51}$$

olur. (1.48) denklemini değiştirirsek (1.51) denklemi aşağıdaki forma döner.

$$\sum_{j=1}^{2}m_j\frac{\partial u_j}{\partial \eta}+b_jl_j=0. \tag{1.52}$$

Gerçekten (1.48) ifadesini düzenlersek

$$(l_1a_{11}+l_2a_{21})+\frac{\partial u_1}{\partial t}+(l_1b_{11}+l_2b_{21})\frac{\partial u_1}{\partial x}+(l_1a_{12}+l_2c_{22})\frac{\partial u_2}{\partial t}$$

$$+(l_1b_{12}+l_2b_{22})\frac{\partial u_2}{\partial x}+l_1c_1+l_2c_2=0 \tag{1.53}$$

(1.53) formunu elde ederiz. Burada

$$l_1a_{11}+l_2a_{21}=m_1\beta \qquad l_1a_{12}+l_2a_{22}=m_2\beta \tag{1.54}$$

$$l_1b_{11}+l_2b_{21}=m_1\alpha \qquad l_1b_{12}+l_2b_{22}=m_2\alpha \tag{1.55}$$

olarak tanımlanırsa (1.18) denklemini

$$\sum_{j=1}^{2}(m_j\beta\frac{\partial u_j}{\partial t}+m_l\alpha\frac{\partial u_j}{\partial x}+l_ic_i)=0$$

veya

$$\sum_{j=1}^{2}[m_j(\beta\frac{\partial u_j}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u_j}{\partial x})+l_i c_i]=0 \tag{1.56}$$

şeklinde yazabiliriz.

(1.54) sisteminde eşitliğin her iki yanını α ile (1.55) sisteminde eşitliğin her iki yanını β ile çarpıp birbirine eşitleyelim.

$$\alpha l_1 a_{11}+\alpha l_2 a_{21}=m_1\alpha\beta$$

$$\alpha l_1 a_{12}+\alpha l_2 a_{22}=m_2\alpha\beta \tag{1.57}$$

$$\beta l_1 b_{11}+\beta l_2 b_{21}=m_1\beta\alpha$$

$$\beta l_1 b_{12}+\beta l_2 b_{22}=m_2\beta\alpha \tag{1.58}$$

Buradan

$$\alpha l_1 a_{11}+\alpha l_2 a_{21}=\beta l_1 b_{11}+\beta l_2 b_{21}$$

$$\alpha l_1 a_{12}+\alpha l_2 a_{22}=\beta l_1 b_{12}+\beta l_2 b_{22} \tag{1.59}$$

veya

$$l_1(\alpha a_{11}-\beta b_{11})+l_2(\alpha a_{21}-\beta b_{21})=0$$

$$l_1(\alpha a_{12}-\beta b_{12})+l_2(\alpha a_{22}-\beta b_{22})=0 \tag{1.60}$$

alırız. (1.60) sisteminin tek bir çözümü olması için

$$\begin{vmatrix}\alpha a_{11}-\beta b_{11} & \alpha a_{21}-\beta b_{21}\\ \alpha a_{12}-\beta b_{12} & \alpha a_{22}-\beta b_{22}\end{vmatrix}=0 \tag{1.61}$$

yeterli ve gerekli koşul olmalıdır. Yani

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} \tag{1.62}$$

olarak tanımlarsak (1.61) denklemi şöyle olmalıdır.

$$|A_{ij}X'-B_{ij}T'|=0 \tag{1.63}$$

(1.63) denklemine karakteristiklerin denklemi denir.

2.2.2 Karakteristikler

Söylediklerimizi daha kolay anlatabilmek için aşağıdaki sistemi göz önüne alalım.

$$\begin{cases} A_{11}(x,t)\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+A_{12}(x,t)\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+B_{11}(x,t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+B_{12}(x,t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x}= f_1(x,t)\,, \\ A_{21}(x,t)\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+A_{22}(x,t)\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+B_{21}(x,t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+B_{22}(x,t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x}= f_2(x,t)\,. \end{cases} \tag{1.64}$$

(1.64) sistemini matris formunda yazalım

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}= f(x,t). \tag{1.65}$$

Burada, *A*,*B*,*u* ve *f*

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},$$

$$u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix},\qquad f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix} \tag{1.66}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Farz edelim ki, (1.65) sisteminin $(x,t)\in D$ bölgesinde pürüzsüz (türevlenebilir) çözümü vardır. D bölgesinde bulunan bir (x_0,t_0) noktasını göz önüne alalım. Bu noktadan bir γ eğrisi geçirelim. Bu eğri üzerinde (x_0,t_0) noktasındaki küçük kaydırma vektörlerini (dx,dt) ile gösterelim. Farz edelim ki, (1.65) sisteminin çözümleri γ eğrisi üzerinde verilmiştir. Amacımız ise u_1 ve u_2 nin γ eğrisi üzerinde verilen değerlerine ve sağladıkları (1.66) sistemine göre tüm D bölgesinde tanımlamak ve ele alarak incelemektedir. Bilinen γ eğrisinin etrafında verilmiş değerlere göre (1.66) sisteminin çözümünün bulunmasına "Cauchy problemi" diyoruz.

u_1 ve u_2 fonksiyonları γ eğrisi üzerinde bilindikleri için, bu eğri üzerinde türevIeri de bilinmektedir. Dolayısıyla normal türevlerinin değerlerine göre keyfi yön üzerinde olan türevleri

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

γ eğrisi üzerinde bulabiliriz. Tersine bu dört türev biliniyorsa, yön üzerinde türevlerini bulabiliriz. Bu taktirde problemi şöyle ifade edelim, u fonksiyonunun γ eğrisi üzerinde bilinmekte olduğunu varsayarak, bu eğrinin tüm noktalarında $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevlerini buluruz.

Söz konusu olan türevleri (x_0, t_0) noktasında u fonksiyonunun bilindiği durumda (dx,dt) vektörü üzerinde bilindiğini varsayarak hesaplamaya çalışacağız. du diferensiyellerini türevler yardımıyla yazalım.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}dt + \frac{\partial u_1}{\partial x}dx = du_1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}dt + \frac{\partial u_2}{\partial x}dx = du_2 \qquad (1.67)$$

Bu sistemdeki diferansiyeller γ eğrisi üzerinde belirlidir. (1.67) ifadelerini (1.64) denklemler sistemine ekleyerek $\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial x}$ bilinmeyen fonksiyonları ele almak için aşağıdaki denklemler sistemini göz önüne alalım

$$\begin{cases} A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1, \\ A_{21}\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}\frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_2, \\ dt\frac{\partial u_1}{\partial t} + dx\frac{\partial u_1}{\partial x} = du_1, \\ dt\frac{\partial u_2}{\partial t} + dx\frac{\partial u_2}{\partial x} = du_2. \end{cases} \qquad (1.68)$$

(1.68) ifadesini matris formunda yazalım.

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}=f\ ,$$

veya

$$dtE\,\frac{\partial u}{\partial t}+dxE\,\frac{\partial u}{\partial x}=du\ . \tag{1.69}$$

Burada,

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

dir. (1.69) sisteminin bilinmeyenlerini bulmak için

$$det\begin{pmatrix}A & B\\ dtE & dxE\end{pmatrix}\neq 0 \tag{1.70}$$

(1.65) denklemi için

$$det\begin{pmatrix}A & B\\ dtE & dxE\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12}\\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22}\\ dt & 0 & dx & 0\\ 0 & dt & 0 & dx\end{vmatrix} \tag{1.71}$$

olur.

$$det\begin{pmatrix}A & B\\ dtE & dxE\end{pmatrix}=0$$

eşitliğini sağlayan eğrilere (1.64) sisteminin karakteristikleri denir.

Farz edelim ki, γ eğrisinin kendisi karakteristik eğridir. (1.69) sisteminin determinantının sıfıra eşit olduğuna bakmadan bu sistemin çözümü vardır.

Varsayımıza göre (1.65) sisteminin γ eğrisi üzerinde tanımlanan bir çözümü vardır. Bu ise genişletilmiş olan

$$\begin{pmatrix}A & B & f\\ dtE & dxE & du\end{pmatrix}$$

matrisinin rankının dejenere olan

$$\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix}$$

matrisin rankına eşit olması anlamına gelir. Böylelikle du vektörü, karakteristikler boyunca keyfi olamaz ve aşağıdaki koşulu sağlamak zorundadır.

$$rank\begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix}. \tag{1.72}$$

(1.72) ifadesine, karakteristiklerin koşulu denir.

Karakteristikleri daha iyi anlayabilmek için şöyle bir örneğe dikkat edelim. Ses dalgalarını ifade eden denklem sistemini göz önüne alalım.

Örnek 5.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1.73}$$

(1.73) sistemini aşağıdaki gibi düzenleyerek matris şeklinde ifade edelim

$$1\frac{\partial u}{\partial t} + 0\frac{\partial u}{\partial x} + 0\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,,$$

$$0\frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 1\frac{\partial p}{\partial t} + 0\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,, \tag{1.74}$$

veya

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.75}$$

(1.74) sistemini şu şekilde yazabiliriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ du \\ dp \end{pmatrix}. \tag{1.76}$$

Karakteristikler denklemi ise şöyle olur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ 0 & dx & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix}$$

$$= dx \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 \\ 0 & dx \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 \\ dt & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\rho_0} = (dx)^2 - c_0^2 (dt)^2 = 0. \tag{1.77}$$

Böylelikle karakteristikler için

$$(dx)^2 - c_0^2 (dt)^2 = (dx - c_0 dt)(dx + c_0 dt) = 0 \tag{1.78}$$

$$\Rightarrow dx = \mp c_0 dt$$

$$\Rightarrow x \mp c_0 t = sabit \tag{1.79}$$

elde ederiz. Şimdi karakteristikler için olan koşulu ele alalım. Bunun için

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & dp \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı ile bu matrisinin keyfi dört sütunundan düzenlenmiş olan yeni matrisin rankı aynı olsun. Sonucunda da determinantı sıfırdır. Dolayısıyla bu sonucu matrisin keyfi 4×4 minörünün birisi sıfıra eşit olmalıdır. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{1.80}$$

dır. Buradan,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ 0 & dx & du \\ dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx & du \\ 0 & d\rho \end{vmatrix} + \rho_0 c_0^2 \begin{vmatrix} 0 & du \\ dt & d\rho \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$dxdp + dtdu\rho_0 c_0^2 = 0\,. \tag{1.81}$$

Birinci karakteristik üzerinde,

$$\frac{dx}{dt} = c_0 \quad \Rightarrow \quad dx = c_0 dt\,. \tag{1.82}$$

Son ifadeyi (1.81) da yerine yazalım.

$$c_0 dtdp + \rho_0 c_0^2 dudt = 0$$

$$dp + \rho_0 c_0^2 dudt = 0,$$

$$du + \frac{1}{\rho_0 c_0} dp = 0,$$

$$d(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}) = 0,$$

$$u + \frac{\rho}{\rho_0 c_0} = sabit. \tag{1.83}$$

ikinci karakteristik üzerinde

$$\frac{dx}{dt} = -c_0 \qquad \Rightarrow dx = -c_0 dt \tag{1.84}$$

Bu ifadeyi (1.81) de yerine yazarsak

$$d(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}) = 0,$$

$$u - \frac{\rho}{\rho_0 c_0} = sabit \tag{1.85}$$

elde edilir. Buradaki (1.84) ve (1.85) ifadelerine Riemann invaryantları denir.

Örnek 6. İkinci bir örnek olarak aşağıdaki Cauchy-Riemann sistemini göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1.86}$$

Bu ifadeyi daha geniş şekilde yazarak matris formunda ifade edelim

$$1\frac{\partial u}{\partial x} + 0\frac{\partial u}{\partial y} + 0\frac{\partial v}{\partial x} - 1\frac{\partial v}{\partial y} = 0\,,$$

$$1\frac{\partial u}{\partial x} + 0\frac{\partial u}{\partial y} + 0\frac{\partial v}{\partial x} + 1\frac{\partial v}{\partial y} = 0\,. \tag{1.87}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \tag{1.88}$$

Şimdi karakteristik determinantı yazalım

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ dx & 0 & dy & 0 \\ 0 & dx & 0 & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ dx & 0 & dy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ dx & 0 & dy \\ 0 & dx & 0 \end{vmatrix}$$

$$= dy\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ dx & dy \end{vmatrix} - dx\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ dx & dy \end{vmatrix} = (dy)^2 + (dx)^2 = 0,$$

$$\Rightarrow dy = \mp i dx \tag{1.89}$$

Cauchy-Riemann sistemi reel karakteristiklere sahip değildir.

Tanım 1. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemler sisteminin tüm karakteritikleri reel ise, böyle bir sisteme hiperbolik sistem denir.

2.3 Hiperbolik Denklemler Sistemi İçin Cauchy Problemi

Hiperbolik denklemler sistemi için Cauchy problemini incelerken, başlangıç verilerinin $t = 0$ noktasında bilindiğini varsayacağız, yani

$$u_i(x,0) = u_i^{(0)}(x) \tag{1.90}$$

şeklinde ele alacağız. Farz edelim ki, ox ekseni karakteristik değil, yani $u(x,0)$ keyfi değerlerine göre sistem, t ye göre türevlerin bulunmasına olanak sağlamaktadır. Buna göre aşağıdaki sistemi göz önüne alalım

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f. \tag{1.91}$$

Burada $detA \neq 0$ dır. Bu taktirde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A^{-1}B\frac{\partial u}{\partial x} = A^{-1}f \tag{1.92}$$

veya $A^{-1}B = C$, $A^{-1}f = g$ olarak ifade edilirse (1.92) yi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = g$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu sistem için karakteristik determinantı yazalım

$$\begin{vmatrix} E & C \\ dtE & dxE \end{vmatrix}_{2n} = (dt)^n \begin{vmatrix} E & C \\ E & \dfrac{dx}{dtE} \end{vmatrix}$$

$$= (dt)^n \begin{vmatrix} 0 & C - \dfrac{dx}{dtE} \\ E & \dfrac{dx}{dtE} \end{vmatrix} = (-1)^n (dt)^n \ det\left| C - \frac{dx}{dt}E \right|.$$

Böylelikle elde edebileceğimiz karakteristikler

$$\frac{dx_i}{dt} = K_i(x,t) \tag{1.93}$$

denklemlerini sağlayacaktır. Böyle keyfi karakteristiklerin eğim açısı K_i ler

$$det(C - KE) = 0 \tag{1.94}$$

denklemin kökleri olur. Bu köklere C matrisinin öz değerleri denir.

Şimdi aşağıdaki kuazi lineer denklem sistemini inceleyelim.

$$A(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u) \tag{1.95}$$

Bu durumda karakteristikler çözümlere de bağlı olacaktır. Bir çözüm için elde edilen karakteristikler diğer çözüm için uygun olmayacaktır. Örneğin, gaz dinamiğindeki bir sistemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p'(\rho)}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1.96}$$

Şimdi bu son sistem için karakteristik denklemi yazalım, bundan dolayı

$$1\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + 0\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{p'}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

$$1\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + 0\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.97}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \frac{p'}{\rho} \\ \rho & u \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} = 0. \tag{1.98}$$

yazalım. Karakteristiklerin denklemini şöyle yazarız

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & \frac{p'}{\rho} \\ 0 & 1 & \rho & u \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = 0, \tag{1.99}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho & u \\ 0 & dx & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 0 & u & \frac{p'}{\rho} \\ 1 & \rho & u \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = \begin{vmatrix} dx & 0 \\ 0 & dx \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} \rho & u \\ dx & 0 \end{vmatrix} + dt[- \begin{vmatrix} u & \frac{p'}{\rho} \\ 0 & dx \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & \frac{p'}{\rho} \\ \rho & u \end{vmatrix} dt]$$

$$(dx)^2 - udxdt + dt[-udx + dt(u^2 - p')] = 0\,,$$

$$(dx)^2 - udxdt - udxdt + (dt)^2(u^2 - p') = 0\,,$$

$$(dx)^2 - 2udxdt + u^2(dt)^2 - p'(dt)^2 = 0\,,$$

$$(\frac{\partial x}{\partial t})^2 - 2u\frac{\partial x}{\partial t} + (u^2 - p') = 0\,,$$

$$(\frac{\partial x}{\partial t})_{1,2} = u \mp \sqrt{u^2 - (u^2 - p')} = u \mp \sqrt{p'}\,, \tag{1.100}$$

Buradan

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{p'}, \tag{1.101}$$

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'}, \tag{1.102}$$

olur. Şimdi invaryantları bulalım. Bunun için genişletilmiş matris yazalım

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & \dfrac{p'}{\rho} & 0 \\ 0 & 1 & \rho & u & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & d\rho \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (1.103)$$

(1.103) ifadesinde determinant sıfıra eşit olduğu için keyfi 4×4 minörü sıfıra eşit olmalıdır. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & \rho & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.104)$$

yani,

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho & 0 \\ 0 & dx & du \\ dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 0 & u & 0 \\ 1 & \rho & 0 \\ dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (1.105)$$

$$dxd\rho + \rho dtdu - udtd\rho = 0 \qquad (1.106)$$

Buradan birinci karakteristik üzerinde

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{p'}$$

$$\Rightarrow dx = (u + \sqrt{p'(\rho)})dt \qquad (1.107)$$

Bu son ifadeyi (1.106) eşitliğindede yerine yazalım

$$d\rho(u + \sqrt{p'(\rho)})dt + \rho dudt - ud\rho dt = 0$$

$$\sqrt{p'(\rho)}d\rho + \rho du = 0$$

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho}\quad .$$

ikinci karakteristik üzerinde yeni

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'(\rho)}$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho}. \tag{1.108}$$

elde edilir. Böylelikle

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{p'(\rho)}$$

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho} \tag{1.109}$$

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{p'(\rho)}$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{\sqrt{p'(\rho)}}{d\rho}. \tag{1.110}$$

adi diferansiyel denklemler sistemini elde etmiş oluruz.

3. SIKIŞABİLİR VİSKOZİTESİZ GAZ DİNAMİĞİ PROBLEMİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde sıkışabilir viskozitesiz gazların hareketini ifade edebilen birinci basamaktan nonlineer denklemler sisteminin bir sayısal çözümünü elde edelim. Bu amaçla aşağıdaki sistemi göz önüne alalım.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0, \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(p+\rho u^2)}{\partial x}=0, \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\varepsilon+u^2/2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u(\varepsilon+u^2/2)+pu\right]=0 \qquad (2.3)$$

Burada

ρ -yoğunluk

p -basınç

ε - birim hacimdeki gazın özel kütlesi

u - gazın ox ekseni yönündeki hızı

Görüldüğü gibi (2.1) – (2.3) denklemler sisteminde $(\rho, u, p, \varepsilon)$ bilinmeyen var. Dördüncü denklemi

$$d\varepsilon+\rho dV=TdS$$

termodinamik eşitliğini kullanarak elde edebiliriz. Burada

S -entropi, $V=\dfrac{1}{\rho}$, T mutlak sicaklik

(2.1) – (2.3) sistemin aşağıdaki başlangıç koşullarını ekleyelim

$$\rho(x,0)=\rho^0(x), \qquad (2.4)$$

$$u(x,0)=u^0(x), \qquad (2.5)$$

$$\varepsilon(x,0) = \varepsilon^0(x). \qquad (2.6)$$

Tanım 2. (2.4) başlangıç koşulunu ve temel fonksiyonlar sınıfından olan ve f(x,T) = 0 olan herhangi bir test fonksiyonu için aşağıdaki integral

$$\int_D [\rho f_t + \rho u f_x] dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) f(x,0) dx = 0 \qquad (2.7)$$

eşitliğini koruyan fonksiyona (2.1) – (2.6) probleminin zayıf çözümü denir.

(2.7) eşitliğini ispatlamak için,

$$0 = \int_D\int_D \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right\} f(x,t) dxdt = I_1 + I_2$$

integralinde kısmi integrasyon formulü uygulayalım. Burada

$$I_1 = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} f(x,t) dxdt = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int_0^T \frac{\partial \rho}{\partial t} f(x,t) dt \right\},$$

integralini kısmi integrasyon yöntemiyle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt = dv \Rightarrow v = \rho; \quad f(x,t) = u \Rightarrow du = \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

değişken dönüşümü yaparak

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ uf \,|_0^T - \int_0^T \rho f_t dt \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ u(x,T) f(x,T) - u(x,0) f(x,0) - \int_0^T \rho f_t dt \right\}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) f(x,0) dx - \int_D \rho f_t dxdt.$$

şeklinde hesaplarız. Benzer şekilde

$$I_2 = \int_D \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) f dxdt = \int_0^T dt \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) f dx \right\}$$

integralinde de

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx = dv \Rightarrow v = \rho u; \quad f(x,t) = u \Rightarrow du = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

değişken dönüşümü yapılarak

$$I_2 = \int_0^T dt\left\{f\rho u\,|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\rho u f_x dx\right\}$$

$$= \int_0^T dt\left\{f(\infty)\rho u\,|_{\infty} - f(-\infty)\rho u\,|_{-\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\rho u f_x dx\right\} = -\int_D \rho u f_x dxdt$$

hesaplanılır. Elde edilen ifadeler yerine konursa,

$$\int_D [\rho f_t + \rho u f_x] dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) f(x,0) dx = 0 \qquad (*)$$

alırız.

$$0 = \int_D [\frac{\partial}{\partial t}\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho + \rho u^2)] f dxdt = I_3 + I_4;$$

$$I_3 = \int_D \frac{\partial}{\partial t}\rho u f dxdt = \int_{-\infty}^{\infty} dx[\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\rho u f]$$

integralini hesaplayabilmek için

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} dt = dv \Rightarrow v = \rho u; \quad f(x,t) = u \Rightarrow du = \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

değişken dönüşümünü dikkate alarak, kısmi integrasyon uygularsak

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx[f\rho u\,|_0^T - \int_0^T \rho u f_t dt] = \int_{-\infty}^{\infty} dx[f(x,T)\rho u\,|_T - f(x,0)\rho u\,|_0 - \int_0^T \rho u f_t dt]$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) u_0(x) f(x,0) dx - \int_D \rho u f_t dxdt$$

elde ederiz. I_4 integrali de

$$I_4 = \int_D \frac{\partial}{\partial x}(\rho + \rho u^2) f dxdt = -\int_D (\rho + \rho u^2) f_x dt$$

olur. Buradan

$$\int_D \left\{\rho u f_t + (\rho + \rho u^2) f_x\right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) u_0(x) f(x,0) dx = 0 \qquad (**)$$

$$\int_D \left\{\rho\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) f_t + [\rho u\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) + pu] f_x\right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\varepsilon_0(x) + \frac{u_0^2(x)}{2}\right) f(x,0) dx = 0 (***)$$

bulunur. Benzer yolla $\rho(x,t)$ ve $\varepsilon(x,t)$ fonksiyonları için de zayıf çözüm kavramlarını dahil edebiliriz, (**) ve (***) ifadelerine bakabiliriz.

3.1. Yardımcı Problem

Literatürden bilindiği üzere (2.1) – (2.3) denklemler sisteminin çözümleri yeri, önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahiptir. Bu sebepten söz konusu denklemleri direkt sonlu farklara ayrıklaştırmak mümkün değildir. Bu nedenle de aşağıdaki yardımcı problemi ele alalım.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \rho u = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \rho + \rho u^2 = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \rho u\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) + pu = 0, \tag{2.10}$$

$$q(x,0) = q^0, \tag{2.11}$$

$$\pi(x,0) = \pi^0, \tag{2.12}$$

$$N(x,0) = N^0 \tag{2.13}$$

Burada q^0, π^0 ve N^0 aşağıdaki denklemleri koruyan herhangi bir sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlardır.

$$\frac{\partial q^0}{\partial x} = p^0, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \pi^0}{\partial x} = u^0, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial N^0}{\partial x} = \varepsilon^0. \tag{2.16}$$

Teorem 1. Eğer q, π ve N fonksiyonları (2.8)-(2.16), yardımcı probleminin zayıf çözümleri ise

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \rho(x,t),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi}{\partial x} = u(x,t),$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{u^2}{2} = \varepsilon(x,t),$$

ile tanımlanan ρ, u ve ε fonksiyonları (2.1)-(2.6) probleminin zayıf çözümleridir.

3.2 Nümerik Algoritma

(2.8)-(2.16) denklemleri üzerinde etkin sonlu farklar şemaları yazmak mümkündür

$$Q_{i,k+1} = Q_{i,k} - \tau \wp_{i,k} U_{i,k} \tag{2.17}$$

$$\Pi_{i,k+1} = \Pi_{i,k} - \tau[\wp_{i,k} + \wp_{i,k} U_{i,k}^2] \tag{2.18}$$

$$N_{i,k+1} = N_{i,k} - \tau \wp_{i,k} U_{i,k}[\Sigma_{i,k} + \frac{U_{i,k}^2}{2}\wp_{i,k} U_{i,k}] \tag{2.19}$$

$$Q_{i,k} = q^0(x_i) \tag{2.20}$$

$$\Pi_{i,k} = \pi^0(x_i) \tag{2.21}$$

$$N_{i,k} = n^0(x_i). \tag{2.22}$$

Teorem 2. Eğer $Q_{i,k+1}$, $\Pi_{i,k+1}$ ve $N_{i,k+1}$ (2.17)-(2.22) sayısal çözümleri ise

$$Q_{\bar{x},k+1} = \wp_{i,k+1},$$

$$\frac{1}{\wp_{i,k+1}}\Pi_{\bar{x},k+1} = U_{i,k+1},$$

$$N_{\bar{x},k+1} = \varepsilon_{i,k+1},$$

eşitlikleri ile tanımlanan $Q_{i,k+1}, U_{i,k+1}$ ve $\varepsilon_{i,k+1}$ (2.1) – (2.6) problemin nümerik çözümleri olmaktadır.

3.2.1 Yakınsaklık Teoremi

Teorem 3. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $\sum_{i,k} \wp_{i,k+1} = const$

b) $\sum (\rho U)_{i,k+1} = const$

c) $\sum \varepsilon_{i,k} = const$

Teorem 3, yardımcı problem üzerinde kurulmuş sayısal şemaların konservatif olduğunu göstermektedir.

4. SONUÇLAR

Tezde elde edilen ve önemli olduğunu düşündüğümüz sonuçları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür.

1. Birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için karakteristikler ve Riemann invaryantları bulunmuştur.
2. Sabit katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklemleri için yazılmış cauchy probleminin çözümü elde edilmiştir.
3. Sıkışabilir viskozitesiz gazların hareketini ifade eden nonlineer diferansiyel denklemler sisteminin sayısal çözümünün bulunması için bir teorik yöntem önerilmiş ve sayısal çözümün özellikleri incelenmiştir.
4. Sayısal çözümün gerçek çözüme yakınsaklığını gösteren değerlendirmeler bulunmuştur.

5. KAYNAKLAR

[1] Acheson, D. Elementary Fluid Dynamics. vlarendon Press. Oxford, 1990.

[2] Rasulov, M.A. On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok. 43, No.1, 1991.

[3] Rasulov, M.A., Ragimova, T.A. A Numerical Method of the Solition of ne Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First Order Differential Equations, Minsk, Vol. 28, No.7, pp. 2056-2063, 1992.

[4] Richmyer, R.D., Morton, K.W. Difference Methods for Initial Value Problems, New York, Wiley, Int., 1967

[5] Samarskii, A.A. Theory of Difference Schemes. Moskow, Nauka, 1977.

[6] Smoller, J.A. Shock Wave and Reaction Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.

ÖZGEÇMİŞ

11 Ocak 1987 tarihinde İzmit' te doğdum. İlköğretim ve liseyi Kocaeli ilinin Gölcük ilçesinde bitirdim. Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik bölümünden 2010 yılında mezun oldum ve aynı üniversiteden Formasyon belgemi aldım. 2012 yılında Beykent Üniversitesi, Matematik-Bilgisayar Anabilimdalı, Uygulamalı Matematik bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladım.

Yabancı dilim İngilizce olup bekarım.

Aday: Gamze KUMRU