T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN NONLİNEER FİLTRASYON DENKLEMİNİN EMİCİ ORTAMDA NÜMERİK İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Oğuzhan GÜZENGİL

İSTANBUL, 2016

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN NONLİNEER FİLTRASYON DENKLEMİNİN EMİCİ ORTAMDA NÜMERİK İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Oğuzhan GÜZENGİL

Öğrenci No:

140860002

Danışman:

Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İSTANBUL, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “**İkinci Mertebeden Nonlineer Filtrasyon Denkleminin Emici Ortamda Nümerik İncelenmesi**” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmanın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 07/01/2016

Oğuzhan GÜZENGİL

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 140860002 no'lu Oğuzhan GÜZENGİL'ın 07/01/2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavı[1] sonucunda 45 dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında[2] oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile, kabul.... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı	: Matematik Bilgisayar
Programı	: Uygulamalı Matematik
Tez Başlığı[3]	: İkinci Mertebeden Nonlineer Filtrasyon Denkleminin Emici Ortamda Nümerik İncelenmesi

---

Tez Sınav Jürisi	**Öğretim Üyesi**	**İmza**
Danışman	: Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL	
Üye	: Prof. Dr. Mahir RESULOV	
Üye	: Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR	

---

[1] Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

[2] Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

[3] İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanma sürecinde her türlü yardımını ve desteğini esirgemeyen, tüm kolaylığı sağlayan kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV ve değerli tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL ’a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her daim destek olan sevgili aileme teşekkürlerimi borç bilir, şükranlarımı sunarım.

Oğuzhan GÜZENGİL

İstanbul, 2016

Adı ve Soyadı : Oğuzhan GÜZENGİL
Danışmanı : Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans Tez / 2016
Alanı : Uygulamalı Matematik
Anahtar Kelimeler : Çözüm algoritmaları, parabolik denklemler, süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözüm

ÖZ

İKİNCİ MERTEBEDEN NONLİNEER FİLTRASYON DENKLEMİNİN EMİCİ ORTAMDA NÜMERİK İNCELENMESİ

Tez çalışmasında nonlineer kaynak fonksiyonuna sahip 2.basamaktan parabolik denklem için yazılmış 1.tür başlangıç sınır değer probleminin genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümünün incelenmesi ile zayıf çözümün gerçek çözüme yakınsaklığı problemi araştırılacaktır.

Bilindiği üzere bir çok mühendislik probleminin çözümü dejenere olan, nonlineer kaynak fonksiyonlarına sahip parabolik tür denklem için yazılmış, Cauchy ve başlangıç sınır değer problemlerinin çözümüne indirgenir. Ayrıca, bu problemlerin çözümleri bazı singülerliğe sahip olduğundan söz konusu problemlerin çözümü için özel inceleme gerekir. Tezin birinci bölümünde gereken altyapı ele alınmıştır. İkinci bölümde nonlineer ısı denkleminin yarım eksende koşan dalga şeklinde çözümü elde edilmiş ve çözümün diferansiyellenebilme özellikleri ispatlanmıştır. Bulunan çözümlerin zayıf çözüm olduğu ispatlanmıştır. Üçüncü bölümde, ikinci bölümde incelenen problemlerin, sayısal çözümleri ele alınmış ve sayısal çözüm için aprior değerlendirmeler elde edilmiştir.

Name and Surname	: Oğuzhan GÜZENGİL
Supervisor	: Assoc. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
Degree and Date	: Master, 2016
Major	: Applied Mathematics
Key Words	: Solution algorithms, parabolic equations, numerical solution in a class of discontinuous functions

ABSTRACT

NUMERICAL INVESTIGATION of the SECOND ORDER NONLINEAR FILTRATION EQUATION in an ABSORBIC MEDIA

In this thesis, the numerical solution of the first-kind initial-boundary value problem for the second order parabolic equation with a nonlinear source function in a class of discontinuous functions is investigated and the convergence of the numerical solution to the exact solution is proven.

As known, the solution of various engineering problems can be reduced to the solutions of the Cauchy and initial value problems that solve degenerate parabolic class equations with nonlinear source functions. Since the solutions of these problems have some singularity, special investigation is required. The first chapter of the thesis establishes the required background. In the second chapter, the solution of the nonlinear heat equation in the form of a traveling wave in the half axis is obtained, and the differentiability of the solution is proven. Also, it is shown that the solutions are weak solutions. In the third chapter, the numerical solutions of the problems in the second chapter are investigated, and a-priori evaluations on the numerical solutions have been obtained.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Mühendisliğin pratik önem taşıyan problemlerinden bir çoğu dejenere olabilen nonlineer parabolik tür denklemler için yazılmış başlangıç sınır değer probleminin çözümünün bulunmasına indirgenilir. Bu tür problemlere orman yangınlarında, deniz ve okyanuslarda oluşan türbülans olaylarının incelenmesinde vb. rastlanılır. Bu tür problemlerin çözümünün diferansiyellenebilme mertebesi denklemin talep ettiğinden az olmaktadır. Bu ise klasik çözümün mevcut olmaması anlamına gelir. Ayrıca, söz konusu problemlerin çözümünde yeri önceden bilinmeyen zayıf süreksizlik noktaları bulunmaktadır. Zayıf süreksizlik kavramıyla çözümün kendisinin sürekli, birinci mertebeden türevinin ise ikinci tür süreksizliğe sahip olması kastedilmektedir. Bazı durumlarda söz konusu problemlerde patlama (blow-up) olayı da gerçekleşebilir. Bu tür özellikleri ifade edebilmek için, sözü edilen özelliklere sahip fonksiyonların da çözüm olabileceği biçimde, çözümü matematiksel olarak genişletmek gerekir.

Göz önüne alınan denklemler genelde nonlineer olduğundan böyle problemlerin gerçek çözümünü elde etmek zor veya olası değildir. Bu nedenle de bu problemlerin çözümü için nümerik çözüm yöntemleri uygulanmaktadır. Literatürde özel durumlar için bazı gerçek çözümler mevcuttur. Bu yöntemlerden en evrenseli sonlu farklar yöntemidir.

Sözünü ettiğimiz problemin çözümünün bulunması hem pratik hem de teorik açıdan önem taşımaktadır. Spesifik özelliğe sahip olan problemlerle çalışma zorunluluğu genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında çözücülüğü daha yüksek olan yeni yöntemlerin oluşturulmasını gerekli kılmıştır. Literatürde homojen şemalar ismi altında bir çok sayısal yöntemler mevcuttur. Bu yöntemlerde çözümün veya türevin süreksizlik noktaları dikkate alınmaksızın sonlu fark şemaları önerilmiştir. Fakat singülerite özelliği fazla olduğu durumlarda söz konusu yöntemler iyi sonuç vermeyebilir.

Tezde ikinci basamaktan dejenere olan nonlineer parabolik tür denklem için yazılmış birinci sınır değer probleminin sayısal çözümü için bir yöntem incelenmiştir. Önerilen yöntemin avantajlarını görebilmemiz için sonraki işlerimizde yararlı olabilecek bazı temel kavramları ele alacağız.

1.1. Temel Kavramlar

$\Re^n$ ile $(x_1, x_2, ..., x_n)$ noktalarının kümesini, $u = u(x_1, x_2, ... x_n)$ ile bilinmeyen fonksiyonu gösterirsek, $u = u(x_1, x_2, ... x_n)$ fonksiyonu için birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin genel yazılım formu

$$F(x_1, x_2, ... x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ... u_{x_n}) = 0 \tag{1.1}$$

olmaktadır. (1.1) türünden denklemlere kuantum mekaniğinde, varyasyonlar hesabında, geometrik optikte ve benzeri alanlarda sıkça rastlanmaktadır.

Tanım 1.1 Eğer F fonksiyonu u ve onun tüm türevlerine göre lineer fonksiyon ise, denkleme birinci mertebeden lineer kısmi türevli denklem denir.

Birinci mertebeden lineer homojen olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem

$$a_0(x_1, ..., x_n)u + a_1(x_1, ..., x_n)u_{x_1} + ... + a_n(x_1, ..., x_n)u_{x_n} = \varphi(x_1, ..., x_n) \tag{1.2}$$

şeklindedir. Burada $a_0, ..., a_n$'lere denklemin katsayıları, φ bilinen fonksiyonuna ise denklemin sağ tarafı denir. (1.2) denklemini

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, ..., x_n)u_{x_1} + a_0(x_1, x_2, ..., x_n)u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.3}$$

biçiminde kısaca yazabiliriz. Eğer $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$ olursa, (1.3) denklemine (1.2) denklemine karşılık gelen birinci mertebeden lineer homojen kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

Örnek 1.1 Aşağıdaki denklemler birinci mertebeden lineer denklemlerdir:

(i) $u_x - u_y + u_z = 0$

(ii) $(x+2)u_x + 2yu_y = 2u$,

(iii) $xu_x + yu_y = ku$, $k \in R$ sabit.

Tanım 1.2 Eğer F bilinmeyen fonksiyonun birinci mertebeden türevlerine göre lineer fonksiyon ise, denkleme kuazi lineer denklem denir ve bu denklemlerin genel yazılım formu

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, ... x_n, u)u_{x_i} + b(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0 \tag{1.4}$$

şeklinde verilir.

Örnek 1.2 Aşağıdaki denklemler birinci mertebeden kuazi lineer denklemlere birer örnek oluşturmaktadır:

$$(i)\ xuu_x - yuu_y = y^2 - x^2,$$

$$(ii)\ yuu_x + xuu_y = x + y\ ,$$

$$(iii)\ (x^2 - y^2 - z^2)\, z_x + 2xyz_y = 2xz\,,$$

$$(v)\ (z-y)\, z_x + (x-z)\, z_y + x - y = 0\,.$$

Tanım 1.3 $$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, ..., x_n)u_{x_i} + b(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0 \qquad (1.5)$$

şeklindeki denklemlere *yarı lineer kısmi türevli denklem* denir.

Örnek 1.3 Aşağıdaki denklemler yarı lineer denklemlerdir:

$$(i)\ (x^2 + y^2)\, u_x + 2u_y = xu^2 + yu\,,$$

$$(ii)\ (x+3)\, u_x + u_y = 2y\sqrt{u}\,.$$

Tanım 1.4 Eğer F fonksiyonu u ve onun türevlerine göre lineer olmayan fonksiyon olursa, denkleme lineer olmayan (nonlineer) denklem denir.

Örnek 1.4 Lineer olmayan denklemlere aşağıdaki örnekleri verebiliriz:

$$(i)\ u_x^2 + u_y^2 = 1,$$

$$(ii)\ u^2 + u_t = u_x^3,$$

(1.1) veya (1.3) cinsinden olan denklemlerin çözümlerini incelemeden önce adi diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklem teorisinden bazı kavramları hatırlayalım. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bildiğimiz, $n.$ mertebeden diferansiyel denklemin

$$\phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1.6)$$

şeklindeki genel yazılım formunu göz önüne alalım. Eğer ϕ fonksiyonu $y, y', ..., y^{(n)}$ değişkenlerine göre lineer ise, (1.6) denklemine lineer diferansiyel denklem denir ve genel yazılım formu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... p_n(x)y = f(x) \qquad (1.7)$$

olur. Burada $f(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonları bilinen ve gereken mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlar olup, $p_i(x)$' ler denklemin katsayıları, f ise denklemin sağ tarafı olmaktadır.

Eğer $f(x) \equiv 0$ olursa, denkleme $n.$ mertebeden homojen lineer diferansiyel denklem denir. $f(x) \neq 0$ olması halinde ise (1.7) $n.$ mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

Bilindiği üzere, $n.$ mertebeden adi diferansiyel denklemin genel çözümü bağımsız değişken, bilinmeyen fonksiyon ve n tane keyfi sabit içermektedir; yani her bir çözüm

$$\psi(x,y,c_1,c_2...,c_n)=0 \tag{1.8}$$

cinsinden verilmektedir. Tersine, (1.8) cinsinden fonksiyonlar ailesi $n.$ mertebeden bir tane adi diferansiyel denklem oluşturur.

(1.6) denkleminin genel çözümünü şöyle de tanımlayabiliriz. Eğer (1.8) fonksiyonundan x e göre n defa türev aldıktan sonra bulduğumuz ifadelerden $c_1,c_2,...,c_n$ sabitlerini yok ettiğimizde (1.6) denklemini elde edersek, bu takdirde (1.8) ifadesine (1.6) denkleminin genel çözümü denir.

Şimdi aşağıdaki gibi bir denklemi göz önüne alalım

$$\Phi(x,y,y',y'',...y^{(k)},c_{k+1},c_{k+2},...,c_n)=0 \tag{1.9}$$

Eğer (1.9) denkleminden x'e göre ($n-k$) defa türev alıp, bulunan ifadelerden $c_{k+1},...,c_n$ sabitleri yok edildikten sonra (1.6) denklemi elde edilirse, (1.9) fonksiyonuna (1.6) denkleminin $k.$ aralık integrali denir.

Göz önüne aldığımız (1.9) aralık integrali kendi başına $k.$ mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla, eğer (1.6) türünden bir denklem için herhangi bir aralık integrali bulabilirsek, bu (1.6) denkleminin mertebesinin düşürülmesi anlamına gelir.

Bu söylediklerimiz kısmi türevli denklemler için söz konusu değildir. Ama burada yine de genel çözümleri bulmak mümkündür. Kısmi türevli diferansiyel denklemde söz konusu keyfi elemanlar artık sabitler değil, keyfi fonksiyonlar olacaktır.

Örnek 1.5 $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0$ denkleminden u fonksiyonunun y değişkenine bağlı olmadığı görülmektedir. O halde w keyfi bir fonksiyon olmak üzere denklemin çözümü $u=w(x)$ şeklinde olacaktır.

Örnek 1.6 $u_{xy}=0$ denkleminin genel çözümünün

$$u(x,y)=w(x)+v(y)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Burada w ve v fonksiyonları keyfi fonksiyonlardır.

Örnek 1.7 $u_{xy}=f(x,y)$ denkleminin genel çözümü

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta+w(x)+v(y)$$

olmaktadır. Burada w ve v keyfi fonksiyonlar; x_0, y_0 ise sabitlerdir. İntegralleme bölgesini eğrisel sınırı $C: y = g(x)$ (veya $x = h(y)$) denklemiyle ifade edilen ve $x =$sabit ve $y =$sabit doğruları ile yalnız bir kez kesişen "Düçgeni" olarak kabul edersek, bu durumda integrali daha genel olarak D bölgesi üzerinden şeklinde

$$u(x,y) = \iint_D f(\xi,\eta)d\xi d\eta + w(x) + v(y)$$

iki katlı integral şeklinde veya

$$u(x,y) = \int_{h(y)}^{x} d\xi \int_{g(x)}^{y} f(\xi,\eta)d\eta + w(x) + v(y)$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan

$$u_x = \int_{g(x)}^{y} f(x,\eta)d\eta + w'(x)$$

ve

$$u_y = \int_{h(y)}^{x} f(\xi,y)d\xi + v'(y)$$

alınır. $w(x) = 0$, $v(y) = 0$ olduğu durumda elde ettiğimiz özel çözüm C eğrisi üzerinde

$$u = u_x = u_y = 0$$

şartını sağlar.

Örnek 1.8 $u_x - u_y = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. $$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$$

değişken dönüşümünü uygularsa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

alırız. Elde ettiğimiz bu ifadeler denklemde yerine konursa $2\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ elde ederiz, yani $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ olur. O halde denklemin çözümü

$$u(x,y) = w(\xi) = w(x+y)$$

şeklinde bulunur. Burada w keyfi bir fonksiyondur.

Örnek 1.9 α ve β sabitler olmak koşuluyla

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu kez

$$\begin{cases} \xi = \beta x + \alpha y, \\ \eta = \beta x - \alpha y \end{cases}$$

değişken dönüşümünü uygularsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

alırız. Elde ettiğimiz bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$\alpha\beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta\alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

buluruz. Buradan,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

ve

$$u = \psi(\eta)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla denklemin genel çözümünü $u = \psi(\beta x - \alpha y)$ şeklinde elde ederiz. Burada ψ diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyondur.

Örnek 1.10 $g(x, y)$ bilinen keyfi fonksiyon olmak üzere

$$u_x g_y - u_y g_x = 0 \tag{1.10}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Analizden bilindiği üzere (1.10) ifadesini

$$\frac{D(u, g)}{D(x, y)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise u ve g fonksiyonlarının bağımlı olduklarını gösterir. O halde,

$$u(x, y) = w[g(x, y)] \tag{1.11}$$

fonksiyonu (1.10) denkleminin çözümünü oluşturur. Gerçekten,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y}$$

ifadelerinden aşağıdaki

$$w'\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-w'\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}=0 \tag{1.12}$$

özdeş eşitliğini elde ederiz. Bu sonucun kuazi lineer denklemler için de geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten de

$$g=g(x,y,u)$$

olmak üzere

$$u_x g_y(x,y,u)-u_y g_x(x,y,u)=0$$

denklemini göze alıp,

$$\frac{D(u,g)}{D(x,y)}$$

Jakobiyenenini hesaplarsak, yine

$$\frac{D(u,g)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}g'-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}g'=0$$

elde ederiz. Örnek 1.10 ' a benzer şekilde, (1.11) denkleminin genel çözümü

$$u(x,y)=W[g(x,y,u)] \tag{1.13}$$

olarak bulunur. Ancak bu ifade u çözümü için kapalı bir formül vermektedir. Bu tür fonksiyonel bağıntıya (1.11) denkleminin alternatif yazılım formu denir.

Teorem 1.1 Birinci mertebeden kuazi lineer

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u) \tag{1.14}$$

kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel çözümü $f(\phi,\psi)=0$ dır. Burada f herhangi bir diferansiyellenebilen fonksiyon, $\phi(x,y,u)=c_1=$ sabit ve $\psi(x,y,u)=c_2=$ sabit

$$\frac{dx}{a}=\frac{dx}{b}=\frac{du}{c} \tag{1.15}$$

karakteristik denkleminin aralık integral eğrileri olmaktadır.

$$\phi(x,y,u)=c_1$$

ve

$$\psi(x,y,u)=c_2$$

integral eğrileri (1.14) denkleminin karakteristikleri olarak isimlendirilir.

İspat. $\phi(x,y,u)=c_1$ ve $\psi(x,y,u)=c_2$ (1.15) denklemini sağladığından, bu denklemler

$$\phi_x dx+\phi_y dy+\phi_u du=0 \qquad (1.16)$$

denklemiyle bağdaşır. Bu da

$$a\phi_x+b\psi_y+c\phi_u=0 \qquad (1.17)$$

denklemine denktir. (1.15) denkleminden

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{du}{c}=dt$$

veya

$$dx=adt, dy=bdt, du=cdt$$

bulunur. Benzer şekilde, (1.15) denklemi

$$a\psi_x+b\psi_y+c\psi_u=0 \qquad (1.18)$$

denklemiyle de bağdaşmaktadır. a,b,c için (1.17), (1.18) cebirsel denklemler sisteminden a ve b' yi c cinsinden $a=\frac{-c\Delta_1}{\Delta}$, $b=\frac{-c\Delta_2}{\Delta}$ olarak bulabiliriz. Burada

$$\Delta=\begin{vmatrix}\phi_x & \phi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}\phi_u & \phi_y\\ \phi_u & \psi_y\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}\phi_x & \phi_u\\ \psi_x & \psi_u\end{vmatrix}$$

olmaktadır. Buradan

$$\frac{a}{\Delta_1}=\frac{b}{\Delta_2}=\frac{-c}{\Delta}$$

veya

$$\frac{a}{\frac{D(\phi,\psi)}{D(y,u)}}=\frac{b}{\frac{D(\phi,\psi)}{D(u,x)}}=\frac{c}{\frac{D(\phi,\psi)}{D(x,y)}} \qquad (1.19)$$

elde ederiz. Yukarıda $f(\phi,\psi)=0$ kapalı fonksiyonunun

$$p\frac{D(\phi,\psi)}{D(y,u)}+q\frac{D(\phi,\psi)}{D(u,x)}=\frac{D(\phi,\psi)}{D(x,y)} \qquad (1.20)$$

şeklindeki bir denklemi sağladığını göstermiştik. (1.20) denkleminde (1.19)' u yerine koyarsak, $f(\phi,\psi)=0$ nin (1.14)'ün çözümü olduğunu buluruz. Gerçekten de,

$$\frac{D(\phi,\psi)}{D(y,u)}=\frac{a}{dt},\ \frac{D(\phi,\psi)}{D(u,x)}=\frac{b}{dt},\ \frac{D(\phi,\psi)}{D(x,y)}=\frac{c}{dt}$$

olup, (1.20) den

$$p\frac{a}{dt}+q\frac{b}{dt}=\frac{c}{dt}$$

veya

$$ap+bq=c$$

olduğu görülür.

Örnek 1.11 $u_x - u_y = 1$ lineer denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Karakteristik denklemler sistemini

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}=\frac{du}{1}$$

şeklinde yazarsak, karakteristikler için

$$\frac{dy}{dx}=-1,\ \frac{du}{dx}=1$$

denklemlerini alırız. Buradan

$$x+y=c_1,\ u-x=c_2$$

elde ederiz. O halde genel çözüm

$$f(u-x,x+y)=0$$

veya

$$u=x+h(x+y)$$

olur.

Örnek 1.12 Birinci mertebeden lineer $xu_x + yu_y = u$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Karakteristik denklemler sistemi

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}$$

olmaktadır. Buradan ilk olarak

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dy}{y}$$

denklemini çözelim. Bu durumda,

$$\ln x+\ln c_1=\ln y$$

den

$$c_1=\frac{y}{x}$$

alınır. İkinci olarak,

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$$

denklemini ele alırsak,

$$\ln x = \ln u + c_2$$

elde ederiz. Buradan

$$c_2 = \frac{u}{x}$$

olur. O halde problemin çözümü

$$u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklinde olur.

Nonlineer problemleri incelemek için henüz genel bir yöntem bulunmamaktadır. Bir nonlineer problem için geçerli olan bir yöntem aynı sınıftan ama farklı nonlineerlik hali için geçerli olmayabilir. Bu nedenle her bir nonlineer problem için özel yöntemlerin oluşturulması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır.

Nonlineer denklemleri incelemeden önce lineer denklemlerin genel teorisi hakkında kısa bilgiler verelim.

1.2. İki Değişkene Bağlı Denklemlerin Sınıflandırılması

İkinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması için baş kısmı lineer olan

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1.21)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $(x,y)\in Q$ bağımsız değişkenler; a ,b, c ve F kendi argümanlarına göre bilinen fonksiyonlar olmaktadır.

(1.21) denklemini ısı, dalga veya Laplace denklemlerinden birisine benzetecek şekilde a, b ve c katsayıları için koşullar araştıralım. Bunun için a, b ve c katsayılarının aynı anda sıfır olmadığını ve $u(x,y)$ fonksiyonunun her iki değişkene göre ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olduğunu varsayalım. Amacımıza ulaşmak için x, y değişkenlerinden yeni ξ ve η değişkenlerine geçişi için aşağıdaki

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) \qquad (1.22)$$

dönüşümü ile yapalım. Buradaki ξ ve η fonksiyonlarının x ve y ye göre iki kez diferansiyellenebilir olduğunu ve ayrıca aşağıdaki Jakobiyenin Q tanım bölgesinde

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğunu varsayalım. Böylece (1.22) sistemini x ve y değişkenlerine göre çözmek mümkün olur ve bu durumda

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta)$$

fonksiyonları da süreklidir. (1.21) denklemini yeni ξ ve η değişkenlerine göre yazabilmek için (1.22) dönüşümü yardımıyla denklemde görülen kısmi türevleri hesaplayalım:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \tag{1.26}$$

(1.23), (1.24), (1.25) ve (1.26) ifadeleri (1.21) denkleminde yerine konulup, düzenlenirse

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \tag{1.27}$$

olduğu görülebilir. Burada,

$$A = a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$B = a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$C = a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

olmaktadır. Gösterelim ki, $(x_0, y_0) \in Q$ noktası etrafında $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ öyle seçmek olur ki, (1.27) denklemi (x_0, y_0) noktası etrafındaki (x,y) ler için basit, yani:

1) $A = C = 0$;

2) $A = B = 0$;

3) $A = C$, $B = 0$ olsun.

Bunun için (1.22) değişken dönüşümünü öyle seçelim ki, (1.27) denkleminde $A = C = 0$ ve $B \neq 0$, yani

$$a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0, \tag{1.28}$$

$$a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{1.29}$$

olsun. Burada, $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ bilinmeyen fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar için 1. mertebeden nonlineer diferansiyel denklemler ele alınmaktadır. Göründüğü gibi (1.28), (1.29) aynı diferansiyel denklemler olmaktadırlar. Onlarda yalnız bilinmeyen fonksiyonların isimleri farklıdır. Bundan dolayı eğer, (1.28) denkleminin iki tane lineer bağımlı olmayan çözümünden birini $\xi(x,y)$, diğerini ise $\eta(x,y)$ ile gösterirsek, (1.28), (1.29) denklemlerinin korunduğu açıktır. Eğer;

$$z = \frac{\partial \xi / \partial x}{\partial \xi / \partial y}$$

dersek, (1.28) denklemini

$$a(x,y)z^2 + 2b(x,y)z + c(x,y) = 0$$

veya

$$a(z - z_1)(z - z_2) = 0$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ olmaktadır. Böylelikle (1.28) eşitliği

$$a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (-b + \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \tag{1.30}$$

$$a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (-b - \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \tag{1.31}$$

biçiminde iki denkleme parçalanmış olur. Adi diferansiyel denklemler konusundan bilindiği üzere (1.30) ve (1.31) denklemleri iki değişkene bağlı birinci mertebeden kısmi türevli homojen diferansiyel denklemler olmaktadır. Açıktır ki, (1.30) ve (1.31) denklemleri için Cauchy probleminin çözümü adi diferansiyel denklemler sisteminin çözümünün bulunmasına indirgenebilir. Sonraki işlemlerimizde kolaylık sağlamak için aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$f_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (1.32)$$

Görüldüğü üzere (1.32), $z(x,y)$ fonksiyonuna göre lineer denklemdir. (1.30) ve (1.31) denklemleri de aynı cinsten denklemlerdir. (1.32) ye karşılık gelen karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{f_1(x,y)} = -\frac{dy}{f_2(x,y)},$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)} \qquad (1.33)$$

biçiminde olmaktadır. Şimdi (1.33) denklemi için Cauchy problemini göz önüne alalım, yani söz konusu denkleme

$$y(x_0) = y_0 \qquad (1.34)$$

başlangıç koşulunu ekleyelim. (1.33), (1.34) problemi için varlık ve teklik teoreminin koşullarının hepsi sağlanmaktadır. Buna ek olarak, (x_0, y_0) noktasının komşuluğunda $f_1(x,y)$ ve $f_2(x,y)$ fonksiyonlarının y değişkenine göre sürekli kısmi türevlerinin mevcut ve $f_1(x,y) \neq 0$ olduğunu varsayalım.

Eğer ξ ve η fonksiyonlarını (x_0, y_0) noktasından geçen ve (1.30), (1.31) denklemlerinin karakteristiklerine dokunmayan $l_i, (i=1,2)$ eğrileri boyunca değerini versek, (1.30), (1.31) denklemlerinin $\varphi_i = \varphi_i(x,y), (i=1,2)$ çözümlerini elde ederiz. Ayrıca, eğer $l_i, (i=1,2)$ eğrilerini ve bunlar üzerinde verilmiş fonksiyonların gerekli olduğu kadar pürüzsüz olduğunu varsayarsak, bu durumda x ve y değişkenine göre sürekli birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevleri olan $\varphi_i = \varphi_i(x,y), (i=1,2)$ çözümlerini elde ederiz. (1.33), (1.34) probleminin çözümünü

$$y = \varphi(x_0, y_0, x) \qquad (1.35)$$

ile gösterelim. Şarta göre x_0 değeri verildiğinde y_0 da sabit kabul edilebilir, yani $y_0 = c$ olabilir. (1.35) kapalı fonksiyonunu y_0 a göre çözelim ve bulunan çözümü

$$y_0 = \psi(x_0, x, y) \qquad (1.36)$$

ile gösterelim.

Varlık ve teklik teoremine göre (x_0, y_0) başlangıç noktasının verilmesi belli bölgede çözümün l_i, $(i = 1,2)$ eğrileri üzerinde değişken (x, y) noktasını tek değerli olarak tanımlayabilir. Bu (1.35) ifadesine denk gelir. Eğer (x, y) ve (x_0, y_0) noktalarının rollerini değiştirirsek, yani (x, y) yi başlangıç noktası kabul edersek, varlık ve teklik teoremine göre (x_0, y_0) noktasında bir değerli tanımlanabilir. Bu ise (1.36) ya denk olur. $y_0 = c$ olduğunu göz önüne alırsak

$$y = \varphi(x, c) \tag{1.37}$$

veya

$$c = \psi(x, y) \tag{1.38}$$

buluruz. Açıktır ki, (1.37) belli bir bölgede (1.33) denkleminin genel çözümü olmaktadır. Burada $\psi(x, y)$ öyle fonksiyondur ki, genelde sabit olmayıp (1.33) denkleminin her bir integral eğrisi üzerinde sabit değer almaktadır.

Tanım 1.5 (1.38) ifadesine (1.33) denkleminin birinci aralık integrali denilir. Görüldüğü gibi, aramakta olduğumuz ξ ve η fonksiyonları (1.30) ve (1.31) denklemlerinin çözümlerine bağımlıdırlar.

Lemma 1.1 Eğer (1.36) ifadesi (1.33) denkleminin integral eğrisi ise, bu durumda $z = \psi(x, y)$ fonksiyonu (1.32) denkleminin çözümüdür ve tersine, eğer $z = \psi(x, y)$ fonksiyonu (1.32) denkleminin çözümü ise, bu durumda (1.36) ifadesi (1.33) denkleminin genel integrali olmaktadır.

İspat. (1.36) da (1.33) denkleminin herhangi bir $y = y(x)$ çözümü yerine konursa $c = \psi(x, y)$ ifadesini alırız. Buradan

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

olur. (1.33) göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{f_2(x, y(x))}{f_1(x, y(x))} = 0$$

veya

$$f_1(x, y(x))\frac{\partial \psi}{\partial x} + f_2(x, y(x))\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{1.39}$$

olur. (1.39) denklemi integral eğrileri boyunca sağlandığından (1.39) dan, henüz sonucu söylemek daha erkendir. (1.32) denklemi ise, zaten keyfi x, y ler için sağlanmaktadır.

Varlık ve teklik teoremine göre tanım bölgesinin keyfi x, y noktasından tek bir integral eğrisi geçtiğinden dolayı, az önce söylediklerimizin bölgenin tüm noktaları için de geçerli olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $z = \psi(x, y)$, (1.32) denklemini sağlamaktadır. Böylece lemmanın birinci tarafı ispatlanmış oldu. İkinci tarafı ispatlamak için farzedelim ki, $z = \psi(x, y)$ fonksiyonu (1.32) denkleminin sabitten özdeş olarak farklı olan çözümüdür, yani

$$f_1(x, y)\frac{\partial\psi}{\partial x} + f_2(x, y)\frac{\partial\psi}{\partial y} \equiv 0$$

dır. Özel durumda, (1.33) ifadesinde keyfi $y = y(x)$ çözümü yerine konursa özdeş eşitlik elde ederiz ve sonuç

$$\frac{d}{dx}\left[\psi(x, y(x))\right] = 0$$

veya

$$\psi(x, y) = c$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle, $\psi(x, y)$ fonksiyonu genelde sabit olmayıp (1.33) ün tanım bölgesinin keyfi integral eğrisi boyunca sabit değer almaktadır. Bu ise $\psi(x, y) = c$ ifadesinin (1.33) denkleminin birinci integrali olduğu anlamına gelmektedir.

Şimdi bu söylediklerimizi (1.30), (1.31) denklemleri için uygulayalım. Onlara karşılık gelen karakteristik denklemleri aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{-b - \sqrt{b^2 - ac}},$$

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{-b + \sqrt{b^2 - ac}}$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{1.40}$$

(1.40) denklemlerinin birinci integrallarini sırasıyla

$$\varphi(x, y) = c_1, \quad \psi(x, y) = c_2 \tag{1.41}$$

ile gösterelim.

Tanım 1.6 (1.41) ifadelerine (1.21) denkleminin *karakteristikleri* denilir. (1.40) denklemlerine ise *karakteristiklerin diferansiyel denklemi* denir.

Tanım 1.7 $D = b^2 - ac$ ifadesine (1.27) denkleminin *diskriminantı* adı verilir.

$b^2 - ac > 0$ olduğu durumda (1.27) denklemine *hiperbolik* tür denklem denir. Görüldüğü gibi $b^2 - ac > 0$ olduğu durumda (1.21) denkleminin iki çeşit karakteristikler ailesi vardır. Tanım bölgesinin keyfi noktasından her ailenin bir karakteristik eğrisi geçmiş olur.

Genel olarak, (1.21) denklemi için karakteristikler ailesinin diferansiyel denklemi

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)(dx)^2 = 0 \tag{1.42}$$

biçiminde de yazılabilir. $a(x,y) \neq 0$ olduğundan (1.30) ve (1.31) den görüldüğü gibi, eğer $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ ve $\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$ olursa, (x_0, y_0) noktasının komşuluğunda

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (b + \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$a(x,y)\frac{\partial \psi}{\partial x} + (b - \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

buluruz. Buradan ise

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \psi}{\partial x} \equiv \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{b - \sqrt{b^2 - ac}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{1.43}$$

dır. $b^2 - ac > 0$ olduğundan $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$ olur. Yani

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y) \tag{1.44}$$

olarak alınabilir. Bu dönüşümden sonra (1.27) denkleminde $A = 0$, $C = 0$ olmakta ve böylece (1.27) denklemi

$$2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \tag{1.45}$$

formunu almaktadır. Buradan

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)J^2 \tag{1.46}$$

olduğu kolayca görülür. Yani, (1.44) dönüşümünden sonra (1.21) denklemi invaryant kalmaktadır. Sonuç olarak (1.46) dan $B \neq 0$ buluruz. Bu durumda (1.45) den

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{1.47}$$

elde ederiz. (1.47) denklemine (1.21) 2. mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin *1. kanonik şekli* denir. Eğer (1.47) denkleminde

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta \tag{1.48}$$

değişken dönüşümü yapar ve (1.47) nin içerdiği türevleri yeni α ve β değişkenleri cinsinden ifade edersek,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\frac{\partial \beta}{\partial \eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}$$

buluruz. Sonuncu ifadeyi (1.47) de yerine yazarsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}+F_2\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial \alpha},\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)=0 \qquad (1.49)$$

elde ederiz. (1.49) denklemine (1.21) denkleminin *2. kanonik şekli* denir.

Örnek 1.13 $u_{tt}-\kappa^2 u_{xx}=0$ dalga denkleminin türünü belirleyiniz.

Çözüm. $a=1,\ b=0,\ c=-a^2$ ve $b^2-4ac=4\kappa^2>0$ olduğundan dalga denklemi her yerde hiperboliktir. Karakteristik denklemi $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\pm\kappa$ dır. Bu denklemin çözümünden $x=\pm\kappa t+c$ veya $\xi=x-\kappa t,\ \eta=x+\kappa t$ elde ederiz. Buradan, $u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$, $u_{tt}=\kappa^2(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})$ olur. Böylece dalga denklemi $-4\kappa^2 u_{\xi\eta}=0$ biçimini alır. $\kappa\neq 0$ olduğundan $u_{\xi\eta}=0$ denklemi iki kez integre edilerek, dalga denkleminin çözümü φ ve ψ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$u(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

veya

$$u(x,t)=\varphi(x-\kappa t)+\psi(x+\kappa t)$$

olarak bulunur.

Örnek 1.14 $u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}+u_y=0$ denkleminin karakteristiklerini bulunuz ve denklemi kanonik şekle indirgeyiniz.

Çözüm. $a=1, b=-2, c=-3$ ve $b^2-4ac=16>0$ olduğundan denklem hiperbolik türdendir. Karakteristik denklemleri ve karakteristikleri

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2a}\left(b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)=\frac{1}{2}\left(-2\pm\sqrt{16}\right)$$

Buradan birinci aralık integrallerini sırasıyla $x-y=c_1$ ve $y+3x=c_2$ olarak elde ederiz.

Şimdi $\xi=x-y,\ \eta=y+3x$ olarak kabul edelim. Buradan

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 3u_\eta,\; u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

$$= -u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

olur. Kısmi türevlerin hesaplanan bu değerleri verilen denklemde yerine konulursa

$$u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} - 2(-u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}) - 3(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - u_\xi + u_\eta = 0$$

olur ve buradan

$$16u_{\xi\eta} - u_\xi + u_\eta = 0$$

veya

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{16}\left(u_\xi + u_\eta\right) = 0$$

elde ederiz.

Örnek 1.15 $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ denklemini kanonik forma indirgeyiniz.

Çözüm. $a = x^2,\ b = 0,\ c = -y^2$ ve $b^2 - 4ac = 4x^2y^2 > 0$ olduğundan denklem hiperbolik türdendir. Karakteristiklerin denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = \pm \frac{y}{x}$$

ifadesinden birinci aralık integralleri

$$c_1 = \frac{y}{x},\ ve\ c_2 = xy$$

olarak bulunur. $\xi(x,y) = xy$, $\eta(x,y) = \dfrac{y}{x}$ kabul edersek

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = yu_\xi - \frac{y}{x^2}u_\eta,\; u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = xu_\xi + \frac{1}{x}u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = y^2u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{xy}u_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_\eta,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}$$

elde edilir. Bu ifadeler verilen denklemde yerine konulursa

$$x^2\left(y^2u_{\xi\xi}-2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta}+\frac{y^2}{xy}u_{\eta\eta}+2\frac{y}{x^3}u_\eta\right)-y^2\left(x^2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+\frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}\right)=0,$$

$$-4y^2u_{\xi\eta}+2\frac{y}{x}u_\eta=0$$

olur ve buradan

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2xy}u_\eta=0 \text{ veya } u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\xi}u_\eta=0$$

bulunur.

II. Şimdi varsayalım ki, diskriminant

$$b^2-ac=0 \tag{1.50}$$

olsun. Yukarıda (1.21) denkleminin $a(x,y)$, $b(x,y)$ ve $c(x,y)$ katsayılarının aynı anda sıfır olmadığını varsaymıştık. (1.50) şartı çerçevesinde a ve c katsayılarından biri sıfırdan farklı olmalıdır. $a\neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (1.30) ve (1.31) denklemleri aynı olmaktadır, yani

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}+b\frac{\partial\xi}{\partial y}=0 \tag{1.51}$$

olur. Açıktır ki, (1.51) denkleminin her bir çözümü (1.50) koşulu çerçevesinde

$$b\frac{\partial\xi}{\partial x}+c\frac{\partial\xi}{\partial y}=0 \tag{1.52}$$

denkleminin de çözümü olmaktadır. Eğer (1.22) değişken dönüşümünde $\xi=\varphi(x,y)$ olursa $A=0$ olur, ama $\eta=\psi(x,y)$ dönüşümü hakkında henüz hiç bir bilgi yoktur.

(1.51) denklemine denk olan karakteristik denklemi yazalım:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b} \qquad veya \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}. \tag{1.53}$$

Açıktır ki, (1.53) denkleminin birinci integrali $\varphi(x,y)=c$ cinsindendir ve $\xi=\varphi(x,y)$ fonksiyonu (1.51) i sağlamaktadır. $\eta=\psi(x,y)$ fonksiyonu için

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

koşulunu sağlayan sürekli diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyon ele alabiliriz. Örneğin, $\varphi(x,y)=x$ kabul edebiliriz. (1.27) denkleminde $A=0$ olduğu açıktır. B katsayısını da

$$B = a(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + b(x,y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + c(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$= \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(b\frac{\partial\varphi}{\partial x} + c\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

olarak buluruz. (1.51) ve (1.52) ifadeleri göz önüne alınırsa $B = 0$ olur. Böylelikle $\psi(x, y)$ fonksiyonunun nasıl bulunacağından bağımsız olarak (1.27) de $B = 0$ olur. Şimdi, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ ifadesinin katsayısını hesaplayalım

$$C = a\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(a\frac{\partial\psi}{\partial x} + b\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$$

Burada, $J = 0$ olamayacağı için $C \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda (1.27) denklemi

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0$$

veya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_3\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \tag{1.54}$$

formunda yazılabilir. (1.54) denklemine *parabolik tip denklemin kanonik şekli* denir.

Eğer F_3 fonksiyonu kendi argümanlarına göre linear olursa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = A_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + B_1\frac{\partial u}{\partial\eta} + C_1 u + D \tag{1.55}$$

alırız. (1.55) denklemini daha basit biçimde yazmak için $u(\xi,\eta) = z(\xi,\eta)v(\xi,\eta)$ değişken dönüşümü yapalım. $v(\xi,\eta)$ fonksiyonunu aşağıda belirteceğiz. Bundan dolayı (1.55) denklemini şöyle yazacağız

$$v\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta} = A_1 v\frac{\partial z}{\partial\xi} + B_1\frac{\partial z}{\partial\eta} + C_2 z + D_1. \tag{1.56}$$

(1.56) denkleminde biz yalnız z, $\dfrac{\partial z}{\partial\xi}, \dfrac{\partial z}{\partial\eta}$ ile ilişkili ifadeleri tuttuk ve geri kalan ifadeleri ise C_2 ile gösterdik. Şimdi $v(\xi,\eta)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki, (1.56) denkleminde $\dfrac{\partial z}{\partial\eta}$ nin katsayısı sıfıra eşit, yani

$$2\frac{\partial v}{\partial\eta} - B_1 v = 0 \tag{1.57}$$

olsun. Bu durumda (1.56) denklemi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = A_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + C_3 z + D_2 \tag{1.58}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$C_2 = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + A_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + B_1 \frac{\partial v}{\partial \eta} + C_1 v, \quad C_3 = \frac{C_2}{v}, \quad D_2 = \frac{D_1}{v}$$

dır. (1.57) denkleminden $v(\xi,\eta)$ fonksiyonunu

$$v(\xi,\eta) = \exp\left(\frac{1}{2}\int b_1(\xi,\eta)d\eta\right)$$

olarak buluruz.

Örnek 1.16 $k^2 =$sabit olmak üzere $u_t - k^2 u_{xx} = 0$ ısı veya difüzyon denkleminin türünü belirleyiniz.

Çözüm. Burada $a = 0, b = 0, c = -k^2$ ve $b^2 - 4ac = 0$ olur, yani difüzyon denklemi parabolik türdendir.

Örnek 1.17 $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ denklemini kanonik forma indirgeyiniz.

Çözüm. Bu durumda $a = 1, b = 2, c = 1$ ve $b^2 - 4ac = 0$ olduğundan denklem parabolik olur.

Karakteristiklerin denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = 1$$

olur ve integralleme ile birinci aralık integrali $y = x + c$ veya $x - y = c_1$ olarak elde edilir.

Bu durumda, $\xi(x,y) = x - y$, $\eta(x,y) = x$ olarak alınırsa

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \; u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} = -u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = u_{\xi\xi}$$

bulunur. Hesaplanan bu değerler verilen denklemde yerine konulursa

$$u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 2(-u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}) + u_{\xi\xi} = 0$$

veya

$$u_{\eta\eta} = 0$$

elde edilir.

III. Son olarak, $b^2 - ac < 0$ durumunu inceleyelim. Fakat bu durumda *a,b* ve *c* katsayılarının analitik fonksiyonlar olduğunu varsayalım. O halde (1.30) ve (1.31) denklemlerinin katsayıları analitik fonksiyonlardır. Farz edelim ki,

$$\varphi(x,y) = \varphi^*(x,y) + i\varphi^{**}(x,y)$$

(1.30) denkleminin analitik çözümüdür ve $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| \neq 0$ dır. (1.22) değişken dönüşümünde

$$\xi = \varphi^*(x,y), \quad \eta = \varphi^{**}(x,y) \tag{1.59}$$

kabul edelim. (1.59) denklemleri x ve y değişkenlerine göre çözülebilir, çünkü

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{1.60}$$

Jakobiyeni tanım bölgesinde sıfırdan farklıdır. Eğer (1.30), (1.31) denklemlerini reel ve sanal kısımlarına ayırırsak,

$$a\frac{\partial \xi}{\partial x} = -b\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{ac-b^2}\,\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$a\frac{\partial \xi}{\partial x} = -b\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{ac-b^2}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{1.61}$$

elde ederiz. (1.61) denklemlerinden $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}$ ifadeleri (1.60) da yerine konursa

$$J = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]$$

ifadesini buluruz. Buradan görünür ki , determinantın sıfıra eşit olması için $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$ sağlanmalıdır. O zaman, $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ olduğunu da (1.61) den görürüz. Böyle noktalar, zaten tanım bölgesinde yoktur. Aksi halde $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$ olurdu.

Şimdi,

$$a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

ifadesini reel ve sanal kısımlarına ayırırsak

$$a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=a\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2, \quad (1.62)$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0 \quad (1.63)$$

buluruz. Açıktır ki, $a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2$ kuadratik formun ($b^2-ac<0$) tanımlı olduğundan dolayı (1.61) ifadesinin sağ ve sol taraflarının sıfıra eşit olması için

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=0 \quad (1.64)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Zaten $\varphi(x,y)$ fonksiyonu, (1.64) tanım bölgesinin hiç bir noktasında sıfıra eşit olmayacak şekilde seçilmiştir. O halde (1.27) denkleminde $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ ifadelerinin katsayıları eşit ve sıfırdan farklı olurlar; C katsayısı ise sıfıra eşit olur. Bu durumda (1.27) aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_4(\xi,\eta,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}) \quad (1.65)$$

formunda yazılabilir. (1.65) denklemine *eliptik tip denklemin kanonik şekli* denir.

Örnek 1.18 $u_{xx}+u_{yy}=0$ Laplace denkleminin eliptik olduğunu gösterelim.

Çözüm. $a=1,\ b=0,\ c=1$ ve $b^2-4ac=-4<0$ olduğundan Laplace denklemi eliptiktir.

Örnek 1.19 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ denkleminin karakteristik denklemlerini ve karakteristiklerini bularak, kanonik şekle indirgeyiniz.

Çözüm. $a=1,\ b=-2,\ c=2$ ve $b^2-4ac=-4<0$ olup, denklem eliptik türdendir. Karakteristik denklemleri

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2a}\left(b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)=\frac{1}{2}\left(-2\pm\sqrt{-4}\right)=-1\pm i$$

olmaktadır. Bu ifadelerin integrallenmesiyle aralık integralleri

$$y=(-1\pm i)x+c_1 \text{ veya } c_1=y+x\mp ix$$

olarak buluruz. Burada,

$$\xi(x,y)=\varphi(x,y)=y+x\,,\quad \eta(x,y)=\psi(x,y)=x$$

olarak alınırsa

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\xi_x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\xi_x\eta_x+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\eta_x^2+\frac{\partial z}{\partial \xi}\xi_{xx}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\eta_{xx}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\xi_y^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\xi_y\eta_y+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\eta_y^2+\frac{\partial z}{\partial \xi}\xi_{yy}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\eta_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\xi_x\xi_y+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\eta_x\eta_y+\frac{\partial z}{\partial \xi}\xi_{xy}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\eta_{xy}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}$$

bulunur. Hesaplanan bu değerler verilen denklemde yerine konulursa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}=0$$

veya

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0$$

elde edilir. Aşağıdaki örneklerde, biraz daha zor problemler ele alınacaktır.

Örnek 1.20 $xu_{xx}+u_{yy}=x^2$ denkleminin karakteristik denklemini ve karakteristiklerini bularak, kononik şekle indirgeyiniz.

Çözüm. Bu problemde $a=x, b=0, c=1$ ve $b^2-4ac=-4x$ dir. Denklem, $x<0$ ise hiperbolik, $x=0$ ise parabolik, $x>0$ ise eliptik olur. Karakteristiklerin denklemini

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2A}\left(B\pm\sqrt{B^2-4AC}\right)=\frac{\pm\sqrt{-4x}}{2x}=\frac{\pm 2\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}\sqrt{-x}}=\pm\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

şeklinde yazalım. Buaradan birinci integralleri $y=\pm 2\sqrt{-x}+c$ şeklinde elde edilir. $x<0$ için denklem hiperbolik olacağından, denklemi kanonik şekle indirgemek için

$$\xi(x,y)=y+2\sqrt{-x},\quad \eta(x,y)=y-2\sqrt{-x}$$

dönüşümlerini göz önüne alalım. Verilen denklemdeki kısmi türevler

$$\xi_x = -\frac{1}{\sqrt{-x}},\ \xi_y = 1,\ \xi_{xx} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(-x)^{3/2}},\ \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = \frac{1}{\sqrt{-x}},\ \eta_y = 1,\ \eta_{xx} = \frac{1}{2}\frac{1}{(-x)^{3/2}},\ \eta_{yy} = 0$$

ifadeleri yardımıyla

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\left(-\frac{1}{x}\right) + 2u_{\xi\eta}\left(\frac{1}{x}\right) + u_{\eta\eta}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{(-x)^{3/2}}u_\xi + \frac{1}{2}\frac{1}{(-x)^{3/2}}u_\eta,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

olarak bulunur. Bu sonuçlar verilen denklemde yerine konursa

$$4u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(u_\eta - u_\xi\right) = x^2$$

olur. Sonuncu denklemde

$$\sqrt{-x} = \frac{\xi - \eta}{4} \text{ ve } x^2 = \frac{(\xi-\eta)^4}{16^2}$$

idafeleri yerine yazılırsa verilen denklemin

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\frac{(\xi-\eta)^4}{16^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\xi-\eta}\left(u_\eta - u_\xi\right)$$

birinci kanonik ifadesi elde edilir. Diğer taraftan, $x > 0$ için $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{-x}}$ ifadesinden integralleme ile $y = \pm 2i\sqrt{x} + c$ elde ederiz. Bu durumda

$$\xi(x,y) = y + 2i\sqrt{x},\quad \eta(x,y) = y - 2i\sqrt{x}$$

dönüşümlerini alırız. Denklemi kanonik şekle indirgemek için aşağıdaki şekilde tanımlanan ξ ve η değişkenlerini

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi+\eta) = y,\quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi-\eta) = 2\sqrt{x}$$

kullanalım. Buradan

$$\alpha_x = 0,\ \alpha_y = 1,\ \alpha_{xx} = 0,\ \alpha_{xy} = 0,\ \alpha_{yy} = 0,$$

$$\beta_x = \frac{1}{\sqrt{x}},\ \beta_y = 0,\ \beta_{xx} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}},\ \beta_{yy} = 0$$

olduğundan verilen denklemin kanonik şekli

$$x\left(u_{\alpha\alpha}\alpha_x^2 + 2u_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_x + u_{\eta\eta}\beta_x^2 + u_\alpha\alpha_{xx} + u_\beta\beta_{xx}\right) +$$

$$+\left(u_{\alpha\alpha}\alpha_y^2 + 2u_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_y + u_{\beta\beta}\beta_y^2 + u_\alpha\alpha_{yy} + u_\beta\beta_{yy}\right) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^4$$

veya

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}u_\beta = \left(\frac{\beta}{2}\right)^4$$

olur.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\beta}$$

olduğundan sonucu

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - \frac{1}{\beta}u_\beta = \left(\frac{\beta}{2}\right)^4$$

olarak yazabiliriz.

Örnek 1.21 $(\ell + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$ denkleminin ℓ ye bağlı olarak hiperbolik, parabolik ve eliptik tür olduğu bölgeleri belirleyiniz .

Çözüm. Bu örnek için $a(x,y) = \ell + x$, $b(x,y) = xy$, $c = y^2$, diskriminant ise

$$b^2 - ac = x^2y^2 + y^2(\ell + x) = y^2(x^2 + x + \ell) \tag{1.66}$$

dır. (1.66) yı $b^2 - ac = y^2(x - x_1)(x - x_2)$ şeklinde yazalım. Burada

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\ell}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\ell}}{2}$$

olmaktadır.

i) Eğer $\ell = \frac{1}{4}$ olursa, eliptiklik bölgesi kaybolur ve $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$ olur. Bu durumda $x = -\frac{1}{2}$ noktasında denklem parabolik olur.

ii) $\ell > \frac{1}{4}$ olursa denklem tanım bölgesinin keyfi noktasında eliptik türe ait olur.

iii) $\ell < \frac{1}{4}$ olursa, x_1 ve x_2 reel ve farklı olur. $x_1 < x$ ve $x > x_2$ olduğunda denklem hiperbolikdir. Ayrıca $x_1 < x < x_2$ eliptiklik bölgesi, $x = x_1$ ve $x = x_2$ ise denklemin parabolik olduğu bölge olur.

Örnek 1.22 $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ denklemini kanonik şekle dönüştürünüz.

Çözüm. *i*) $x < 0$ olduğu durumu göz önüne alalım ve $b^2 - ac$ diskriminantını hesaplayalım, $a(x,y) = 1$, $b(x,y) = 0$, $c = x$ olduğundan $b^2 - ac = -x$ olur. Bu durumda denklem hiperboliktir. Karakteristik denklemleri

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{-x},\quad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{-x}$$

dır. Karakteristik denklemlerin çözümleri;

$$C=\frac{3}{2}y+\left(\sqrt{-x}\right)^3,\quad C=\frac{3}{2}y-\left(\sqrt{-x}\right)^3$$

olmaktadırlar. Buradan,

$$\xi=\frac{3}{2}y+\left(\sqrt{-x}\right)^3,\quad \eta=\frac{3}{2}y-\left(\sqrt{-x}\right)^3 \tag{1.67}$$

olarak ele alıp denklemi kanonik şekle dönüştürelim. Bundan dolayı denklemi (1.67) deki yeni koordinatlarla

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{9}{4}(-x)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{9}{2}x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{9}{4}(-x)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2.\frac{9}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \eta}+\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

şeklinde ifade edelim. Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \eta}+\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0,$$

($\xi>\eta$ olduğunda) kanonik denklemi elde ederiz.

ii) Şimdi $x>0$ olduğu durumu göz önüne alalım. Bu durumda $b^2-ac<0$ dır ve denklem eliptik türe aittir, karakteristik denklem ise

$$\frac{dy}{dx}=i\sqrt{x},\quad \frac{dy}{dx}=-i\sqrt{x}$$

olur. Birinci denklemin çözümününden $C=\frac{3}{2}y-i\left(\sqrt{x}\right)^3$ elde ederiz. Değişken dönüşümünü

$$\xi=\frac{3}{2}y,\quad \eta=\left(\sqrt{x}\right)^3$$

biçiminde yapalım ve denklemi yeni koordinatlarda ifade edelim.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3}{2}(x)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{9}{4}(-x)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{9}{2}x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{9}{4}(-x)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{3}{4}(-x)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Elde ettiğimiz ifadeler denklemde yerine konursa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

alırız.

Örnek 1.23 $u_{xx}+2u_{xy}+signyu_{yy}=0$ denklemini kanonik şekle dönüştürünüz.

Çözüm. b^2-ac hesaplayalım, $a(x,y)=1$, $b(x,y)=1$, $c=signy$ olduğundan $b^2-ac=signy$ dir. $y>0$ olduğunda denklem hiperbolik türe aittir. Karakteristik denklemi yazalım

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-b+\sqrt{signy}}{a}=0,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-b-\sqrt{signy}}{a}=-2.$$

Karakteristik denklemlerin çözümleri $y=-2x+c$ ve $y=c$ olduğundan, değişken dönüşümünü

$$\xi=y-2x,\quad \eta=y \tag{1.68}$$

biçiminde ele alalım. Denkleme dahil olan türevleri, (1.68) deki yeni değişkenlerle aşağıdaki şekilde

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2\frac{\partial u}{\partial \xi},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}(-2+0)$$

bulunan bu ifadeler denklemde yerine konursa, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$ alırız. Böylelikle denklemin $y>0$ olduğu bölgede kanonik şeklini elde etmiş oluruz.

Şimdi, $y<0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda karakteristik denklem

$$\frac{dy}{dx}=-1+i,\quad \frac{dy}{dx}=-1+i$$

olur. Değişken dönüşümünü aşağıdaki gibi yapalım:

$$\xi=y-x,\quad \eta=x$$

ve denklemi yeni değişkenlerde yazabilmek için aşağıdaki ifadeleri hesaplayalım;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}.$$

Bu ifadeler denklemde yerine konursa denklemin kanonik şeklini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

biçiminde elde ederiz. Böylelikle, $y>0$ olduğunda denklem hiperbolik, $y<0$ olduğunda ise denklem parabolik türe ait olur.

1.3. Genelleştirilmiş Fonksiyonlar ve Türevleri

Tanım 1.8 $-\infty<x<\infty$ aralığında tanımlı, reel değerli ve herhangi $a\le x\le b$ sonlu aralığında Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlara adi (ordinary) fonksiyon denir, [7].

Tanımdan görüldüğü gibi, her bir $a\le x\le b$ sonlu aralığında sürekli (ölçülebilir) fonksiyonlar adi fonksiyonlar olmaktadır. $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ adi fonksiyonları hemen her yerde $f_1(x)=f_2(x)$ ise, bunlara eşit fonksiyonlardır denir. Adi fonksiyonlar kümesi *E* ile gösterilecektir. Adi fonksiyonların toplamı ve keyfi reel sabitle çarpımı da adi fonksiyon olur; yani, *E* bir lineer uzay oluşturmaktadır. *E* lineer uzayında limit kavramı da verilebilir.

Eğer $f_1(x),\ f_2(x),...,\ f_\nu(x),...$ adi fonksiyonlar dizisi hemen her yerde *f*(*x*) fonksiyonuna yakınsak ve ayrıca $|f_\nu(x)|\le f_0(x)$ ise (burada $f_0(x)$ önceden bilinen adi fonksiyondur), bu taktirde Lebesque teoremine göre *f*(*x*) limit fonksiyonu da adi fonksiyon olur.

Diğer taraftan, bilinen ve çok gerekli olan diferansiyelleme işlemlerini E de her fonksiyon için tanımlamak mümkün değildir. Örneğin, analizden bilinen Weierstrass fonksiyonu her yerde sürekli ama hiçbir yerde diferansiyellenemeyen fonksiyondur. Aynı şekilde, bazı adi fonksiyonlar için türev mevcut olsa bile ($y=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ örneğindeki gibi), onların türevi adi fonksiyon olmayabilir. Ayrıca $\{f_\nu(x)\}$ adi fonksiyonlar dizisi için $f_\nu(x)$ türevleri mevcut olsa bile $f_\nu(x)\to f(x)$ den her zaman $f_\nu^{'}(x)\to f'(x)$ olması da söz konusu değildir. Bilindiği üzere analitik fonksiyonlar sınıfında yukarıda sözü edilen işlemlerin her biri gerçeklenir ama bu sınıf uygulamalar için çok dardır. O halde uygulama bakımından arzu edilen durum, tüm adi fonksiyonları içeren en azından diferansiyelleme işlemlerinin yürüyeceği bir sınıf oluşturmaktır. İlk bakışta, türev alma işlemleri tanımlanılacak sınıf dar olacak gibi gözükse de, aslında bu sınıf dar değil, tersine daha da genişletilmiş olacaktır.

Bu bölümde E uzayı, üzerinde tanımlanan diferansiyel işlemi limit işlemine göre sürekli olacak şekilde yeni bir sınıfa genişletilmeden önce, ileriki işlerimizde gereken bazı tanım ve kavramlar verilecektir. supp $f(x)=\{\, x \mid f(x)\neq 0 \,\}$ kümesine f fonksiyonunun desteği denir ve supp f ile gösterilir.

$-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı, reel değerli ve her mertebeden sürekli diferansiyellenebilen ve kompakt desteğe sahip fonksiyonlar sınıfına temel (test) fonksiyonlar sınıfı ve bu sınıfın keyfi elemanına ise temel (test) fonksiyon denir.

Örnek 1.24 (Sobolev şapkası)

$$\varphi(x;a)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x|<a \\ 0, & |x|\geq a \end{cases}$$

fonksiyonu bir temel (test) fonksiyondur, [20].

Temel fonksiyonların toplamı ve keyfi reel sayıyla çarpımı yine temel fonksiyon olur, yani temel fonksiyonlar sınıfı lineer uzay oluşturmaktadır. Söz konusu uzayı $\mathfrak{D}$ ile gösterelim ($\mathfrak{D}$ uzayı literatürde bazen **K** ile de gösterilir), [7].

$\mathfrak{D}$ uzayında keyfi $\varphi(x)$ temel fonksiyonu ile sonsuz diferansiyellenebilen ve $|x|$ in yeteri kadar büyük değerlerinde keyfi artma hızına sahip olan g(x) fonksiyonu ile (toplamaya göre distribütiflik özelliğine sahip olan) çarpma işlemi de tanımlanmaktadır.

$\mathfrak{D}$ uzayında limit alma işlemini tanımlayalım. Eğer $\{\, \varphi_\nu(x) \,\}$, $(\nu=1,2,...,n,...)$ temel fonksiyonlar dizisinin tüm elemanları ve onların keyfi mertebeden türevleri herhangi bir $[a,b]$ aralığı dışında sıfıra eşitseler ve $\{\varphi_\nu^{(n)}(x)\,\}$, $(n=0,1,2,...)$ dizileri sıfıra düzgün yakınsak olursa, bu taktirde, $\{\, \varphi_\nu(x) \,\}$, $(n=0,1,2,...)$ dizisine sıfıra yakınsak dizi denir.

Şimdi $\varphi_\nu(x)=\frac{1}{\nu}\varphi(x;a)$, $(\nu=1,2,...)$ dizisini göz önüne alalım. $\{\varphi_\nu(x)\}$, $(\nu=1,2,...)$ $\mathfrak{D}$ de sıfıra yakınsaktır. $\varphi_\nu(x)=\frac{1}{\nu}\varphi(\frac{x}{\nu};a)$ dizisi ise tüm türevleri ile birlikte sıfıra yakınsaktır; fakat $\mathfrak{D}$ de sıfıra yakınsak değildir. Çünkü, $\varphi_\nu(x)$ lerin hepsinin aynı anda dışında sıfıra eşit olduğu bir $[a,b]$ aralığı yoktur.

$\mathfrak{D}$ de $\{\, \varphi_\nu(x)\}$ dizisinin $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsaklığı $\{\, \varphi_\nu(x)-\varphi(x)\}$ dizisinin sıfıra yakınsaklığı anlamına gelmektedir.

Toplama, keyfi reel sayıyla çarpma, sonsuz diferansiyellenebilen bir fonksiyonla çarpma işlemleri yakınsaklık işlemine göre sürekli işlemlerdir. Yani $\mathfrak{D}$ de $\varphi_\nu \to \varphi$ ve

$\psi_\nu \to \psi$ ise, herhangi α ve β sayıları için $\mathfrak{D}$ de $\alpha\varphi_\nu + \beta\psi_\nu \to \alpha\varphi + \beta\psi$ dır. Aynı zamanda herhangi bir sonsuz diferansiyellenebilen $g(x)$ fonksiyonu için $\mathfrak{D}$ de $g(x)\varphi_\nu(x) \to g(x)\varphi(x)$ olmaktadır.

Uyarı 1.1 $\mathfrak{D}$ uzayı metrikleştirilemez. Diğer bir ifade ile, bilinen standart özelliklere sahip $\rho(\varphi,\psi)$ uzaklık fonksiyonu $\mathfrak{D}$ de tanımlanamaz. Çünkü, $\{\varphi_\nu\}$ dizisinin φ ye yakınsaklığı $\rho(\varphi,\varphi_\nu) \to 0$ bağıntısının sağlanmasına denktir.

Eğer $\mathfrak{D}$ bir metrik uzay,

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, ..., \varphi_\nu^{(1)}, ... \to \varphi^{(1)}$$

$$......................................$$

$$\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}, ..., \varphi_\nu^{(m)}, ... \to \varphi^{(m)}$$

yakınsak dizilerin sistemi ve ayrıca $\varphi^{(m)} \to \varphi$ olsaydı. O halde, her satırdan bir eleman seçmekle

$$\varphi_{\nu_1}^{(1)}, \varphi_{\nu_2}^{(2)}, ..., \varphi_{\nu_m}^{(m)}, ...$$

alt dizisi için de $\left\{\varphi_{\nu_m}^{(m)}\right\} \to \varphi$ olmak zorundaydı. Ancak $\mathfrak{D}$ de böyle bir sonuca varılamaz. Örneğin, $\varphi(x;m)$ örnek 1.12 deki fonksiyon olmak üzere,

$$\varphi_\nu^{(m)} = \frac{1}{\nu}\varphi(x;m),\ (\nu = 1,2,..; m = 1,2,...)$$

olsun. Her bir $m \in N$ için $\varphi_\nu^{(m)} \to 0$ dır. Ama $\left\{\varphi_{\nu_m}^{(m)}\right\}$ dizisi sıfıra yakınsak değildir. Çünkü, $\varphi_{\nu_m}^{(m)}$ lerin tümünün dışında sıfır olduğu ortak kapalı bir aralık yoktur.

Çeşitli yollarla verilebilen genelleştirilmiş fonksiyon kavramı ilk kez 1936 yılında Sobolev, S. L. tarafından verilmiştir [20]. Daha sonraları 1950-51 yıllarında Schwartz, L. genelleştirilmiş fonksiyon kavramını sistemleştirerek onu lineer topolojik uzayların esaslandırılması problemlerine uygulamıştır [15]. Bu yöntem günümüzde çok ilerlemiş ve bu konuda oldukça önemli bir çok çalışma yapılmıştır.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisinde ikinci yöntem “dizisel yaklaşım” yöntemidir. Bu yöntemde herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon bir adi fonksiyonlar dizisinin limiti olarak alınmaktadır. Bu yöntem kolay olmanın yanı sıra, fizikçiler için de bir o kadar doğal olmaktadır. Yukarıda sözü edilen iki yöntemin dışında da genelleştirilmiş fonksiyon tanımı mevcuttur.

$\mathfrak{D}$ uzayı üzerinde herhangi bir $f(x)$ adi fonksiyonuna karşılık gelen

$$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad , \varphi \in \mathbf{D} \tag{1.69}$$

lineer fonksiyoneli göz önüne alalım [7]. Burada doğal olarak, integralleme aralığı supp φ üzerinde yoğunlaşmaktadır.

Bu kavram fonksiyon tanımının genişletilmesine olanak sağlamaktadır. Önceleri, bir fonksiyonun tanım aralığının keyfi noktasında (veya hemen her yerde) tanımlı ve tek değerli olması isteniliyordu, ama şimdi göz önüne alınan adi fonksiyonun herhangi bir temel fonksiyonla çarpımının integralinin sonucu bizi ilgilendirmektedir. Eğer bu integral mevcut ise, biz onu genelleştirilmiş fonksiyon olarak isimlendireceğiz.

Bu arada, fonksiyonun ayrı noktalarda değeri belli olmayıp, genel ve temel fonksiyonların çarpımının integralinin nasıl tanımlanılacağı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı çok sadedir. Bu durumda biz integrali yapısal değil aksiyomatik olarak tanımlayacağız.

Diğer yandan, $\forall\ \varphi_{1,}\ \varphi_2 \in \mathbf{D}$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$ için

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f,\varphi_1) + \alpha_2(f,\varphi_2)$$

olduğundan (1.69) cinsinden tanımlanan fonksiyonel lineerdir. Ayrıca (1.69) fonksiyoneli aşağıdaki anlamda sürekli olmaktadır. Eğer $\mathbf{D}$ de $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ... \to 0$ olan temel fonksiyonların bir dizisi ise $\lim\limits_{\nu\to\infty}(f,\varphi_\nu) = 0$ (integralin özelliğinden) dır. Böylece, (1.69) fonksiyoneli $\mathbf{D}$ de sürekli ve lineer bir fonksiyoneldir.

$\mathbf{D}$ de (1.69) cinsinden ifade edilemeyen diğer fonksiyoneller de vardır. Her bir $\varphi(x)$ temel fonksiyonuna $\varphi(0)$ sayısını karşılık getiren δ fonksiyonelini göz önüne alalım.

$(\delta, \varphi(x)) = \varphi(0)$ fonksiyoneli lineer ve süreklidir [7]. Diğer taraftan, her bir $\varphi(x)$ e $\varphi(0)$ sayısını karşılık getiren (1.69) cinsinden fonksiyonel yoktur. Gerçekten de, varsayalım ki $\mathbf{D}$ de keyfi $\varphi(x)$ ve belli bir $f(x)$ adi fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \tag{1.70}$$

olsun. Özellikle $\varphi(x) = \varphi(x;a)$ olarak örnek 1.24 deki fonksiyonu ele alırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x;a)dx = \varphi(0;a) = \frac{1}{e}$$

elde ederiz. Fakat $a \to 0$ olduğunda (1.70) ün sol tarafı sıfıra yaklaşır; bu ise (1.70) gösterimi ile çelişir.

Tanım 1.9 $\mathfrak{D}$ de tanımlı lineer, sürekli fonksiyonele, yani

(i) $(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$,

(ii) $\mathfrak{D}$ de $\varphi_v \to 0$ ise $(f, \varphi_v) \to 0$

koşullarını sağlayan f fonksiyoneline *genelleştirilmiş fonksiyon* denir, [7].

(1.69) cinsinden ifade edilebilen fonksiyonele regüler, edilemeyene de singüler fonksiyonel denir. Bu durumda, $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ fonksiyoneli singülerdir.

Keyfi adi fonksiyona (1.69) cinsinden genelleştirilmiş bir fonksiyon karşılık gelmektedir.

Örnek 1.25 $f(x) \equiv c$ olsun. Tanım 1.9 a göre

$$(f, \varphi) \equiv (c, \varphi) = c\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$$

biçimindeki genelleştirilmiş fonksiyon sabit olarak isimlendirilecektir. Özel olarak genelleştirilmiş 1 fonksiyonu, $(1, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$ anlamındadır [7].

Örnek 1.26 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun oluşturduğu genelleştirilmiş fonksiyonu bulunuz.

Çözüm. Tanım 1.9 a göre

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx\right]$$

$x = -x$ dönüşümü uygularsak

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[-\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}dx$$

bulunur.

Örnek 1.27 $f(x)$ genelleşmiş bir fonksiyon, $\varphi(x)$ reel değerli sonsuz diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyon ve α kompleks olmak üzere $\alpha f(x)$ in genelleşmiş fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $(\alpha f(x),\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)f(x)\varphi(x)dx = (f(x),\alpha(x)\varphi(x))$ olur.

f_1 ve f_2 genelleştirilmiş fonksiyonlarının aynı temel fonksiyonlar üzerinde oluşturduğu fonksiyoneller eşit, yani $(f_1,\varphi)\equiv(f_2,\varphi)$ ise bu taktirde f_1 ve f_2 ye eşittir denir.

Eğer en az bir φ_0 temel fonksiyonu için $(f_1,\varphi_0)\neq(f_2,\varphi_0)$ oluyorsa f_1 ve f_2 fonksiyonlarına *farklı genelleştirilmiş fonksiyonlar* denir.

Ayrıca farklı $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ adi fonksiyonlarına farklı genelleştirilmiş fonksiyonlar karşılık gelir [7].

Toplama ve herhangi bir reel sayı ile çarpma

$$(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,\varphi)=\alpha_1(f_1,\varphi)+\alpha_2(f_2,\varphi)$$

ile tanımlanır. $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2$ in belirlediği fonksiyonel de lineer ve süreklidir. Üstelik $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarına karşılık gelen f_1 ve f_2 fonksiyonelleri regüler ise, $\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)$ fonksiyonuna tekabül eden $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2$ fonksiyoneli de regülerdir.

Sonsuz diferansiyellenebilen herhangi bir $\alpha(x)$ fonksiyonu ile genelleştirilmiş herhangi bir f fonksiyonun $\alpha(x)f$ çarpımı

$$(\alpha(x)f,\varphi)=(f,\alpha(x)\varphi)$$

ile tanımlanır.

Eğer $f(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyon ise, onun $f'(x)$ adi türevi mevcuttur. Bu taktirde $f'(x)$ için

$$(f',\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in \mathbf{D}$$

ifadesini oluşturabiliriz. Şimdi varsayalı ki, $\varphi(x)$ de mutlak sürekli ve sınırlı $\varphi'(x)$ türevine sahip fonksiyon olsun. Son integralden kısmi integrasyon yardımı ile

$$(f',\varphi) = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

elde edilir, yani

$$(f',\varphi)=-(f,\varphi') \qquad (1.71)$$

dır. Eğer f' fonksiyonu klasik anlamda mevcut olmazsa bile $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$ ifadesi keyfi $\varphi(x)$ test fonksiyonları için mutlaka mevcut olmaktadır. Böylelikle elimizde $f'(x)$ olmasa da ve kesinlikle bize $f'(x)$ in sınırlı türeve sahip, kompakt desteği olan sınırlı bir fonksiyonla çarpımının integrali gerekmekte ise bu sonuca, $f'(x)$ in mevcut olduğu var sayılır gibi kabul ederek, (1.69) ifadesinin önüne eksi işareti koyarak ulaşabiliriz.

Bu kavram, temel fonksiyonların iyi seçilmesi durumunda keyfi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi var ve bu türevinde bir genelleştirilmiş fonksiyon olacağını göstermektedir. Diğer bir deyişle, herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon her mertebeden türevlere sahiptir. Bu bağlamda,

$$(f'', \varphi) = (f', -\varphi') = (f, \varphi'')$$

ve benzer şekilde, herhangi bir q için

$$(f^{(q)}, \varphi) = (f, (-1)^q \varphi^{(q)}) = (-1)^q (f, \varphi^{(q)})$$

dır. Kolayca görülür ki, türev lineerlik özelliğine sahiptir. f_1 ve f_2 iki genelleştirilmiş fonksiyon ve α_1, α_2 sabitler ise $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1^{'} + \alpha_2 f_2^{'}$ dır. Ayrıca, $\alpha(x)$ sonsuz diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyon ise $(\alpha f)' = \alpha f' + \alpha' f$ dir.

Eğer $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları sürekli ise, bu taktirde f' fonksiyoneli $f'(x)$ türevini verir. Burada, türevin belirlenmesine dair birkaç örnek ele alalım.

Örnek 1.28 (Heaviside fonksiyonu)

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

adi fonksiyonunun türevini alalım. (1.71) formülüne göre

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = (\theta(x), -\varphi'(x)) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

dır. Böylelikle, $\delta(x)$ fonksiyonunun tanımına göre $\theta'(x) = \delta(x)$ olduğu elde edilir. Genel olarak $\theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ olur [7].

Örnek 1.29 $y = \ln x$ fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi

$$\begin{aligned}((\ln x)', \varphi) &= -(\ln x, \varphi') \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \ln x\varphi' dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ln x\varphi' dx\right] + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln x\varphi' dx\end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(x)}{x} dx < \infty$$

olmaktadır.

Örnek 1.30 $f(x)$, $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ noktalarında $h_1, h_2, ..., h_n, ...$ sıçrayışlarına sahip parçalı mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f'(x)$ fonksiyonu sonlu $x_1, ..., x_n$ noktaları dışında her yerde tanımlı fonksiyon olmaktadır [7].

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım.

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k).$$

Bu fonksiyonunun genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında türevi

$$f_1'(x) = f'(x) - \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

olup

$$f'(x) = f_1'(x) - \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

dır.

Şimdi çok değişkene bağlı genelleştirilmiş fonksiyonun kısmi türevi kavramına geçelim. Varsayalım ki, f fonksiyonu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ değişkenlerine bağlı fonksiyon olduğunda $f(x)$ fonksiyonunun x_i, $(i = 1,2,...,n)$ değişkenine göre kısmi türevleri aşağıdaki formül yardımı ile tanımlanır [7],

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right), \quad (i = 1,2,...,n).$$

Bilindiği gibi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi de genelleştirilmiş fonksiyon olduğundan f fonksiyonunun yüksek mertebeden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, ...$$

türevlerini de aynı yolla tanımlayabiliriz. Böylelikle tüm genelleştirilmiş fonksiyonlar sonsuz diferansiyellenebilirdirler.

İkinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olan, fakat birinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon gösterilebilir. $f(x)$ genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon olmak üzere aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım.

$$F(x,y) = f(x) + f(y).$$

Bu taktirde $F(x,y)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi yoktur [20]. Fakat $f(x,y)$ nin ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevi vardır. Gerçekten de, gereken koşulları sağlayan $\psi(x,y)$ fonksiyonu için

$$\iint_G F(x,y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy = \iint_G f(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy + \iint_G f(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy$$

dır. Diğer taraftan

$$\iint_G f(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy = \int_a^b f(x)\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy = \int_a^b f(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dx = 0$$

$$\psi'_x(x,\varphi_1(x)) = \psi'_x(x,\varphi_2(x)) = 0$$

burada $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)\,G$ nin $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ sınırlarını göstermektedir. Aynı yolla

$$\iint_G f(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$\iint_G F(x,y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}dxdy = 0 = \iint_G 0.\psi(x,y)dxdy$$

yani

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$$

mevcuttur ve özdeş olarak sıfıra eşittir.

Uyarı 1.2 Hemen her yerde türevin olmasından genelleştirilmiş türevin olması çıkarılamaz.

1.4. Zayıf Çözüm Kavramı

Doğadaki birçok pratik problemlerin matematiksel modelleri, kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklemler sistemi için yazılmış başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün bulunmasına indirgenilir. Çoğu zaman problemin söz konusu verileri süreksiz fonksiyonlar olabilir. Bazı durumlarda ise matematiksel problemin çözümünde, diğer deyişle fiziksel olayın dinamiğinde süreksizlik ortaya çıkmaktadır.

Genel olarak nonlineer problemin çözümünde bazı özellikler ortaya çıkmaktadır. Nonlineer problemlerde ortaya çıkan yeni karakteristik özellikler (örneğin, heyecanlanmış cephenin sonlu hızla dağılımı, darbe dalgası, kontakt sıçrayışları vs. gibi fiziksel özellikler) zayıf çözüm kavramı yardımıyla ifade edilebilirler.

Söz konusu zayıf çözümü tanımlamak için göz önüne alınan diferansiyel denkleme karşılık gelen integral gösterimi yazmak gerekmektedir. Genelde, kısmi türevli diferansiyel denklem için zayıf çözüm kavramı farklı yollarla yazılabilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için zayıf çözüm kavramını 1930 yıllarında Sobolev' in verdiğine önceden değinilmişti. Sobolev anlamındaki zayıf çözüm, integral eşitlik yardımı ile tanımlanmaktadır. Bu tanımı açıklamak için, $Q_T \subset R^{n+1}$ Euklid uzayında konveks bir bölge , $u = u(x_1, x_2,...x_n,t)$ ve $f(x_1, x_2,...x_n,t)$ Q_T de ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere operatör biçimde verilmiş

$$Lu=f \tag{1.72}$$

lineer kısmi türevli diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada L sürekli diferansiyellenebilen katsayılara sahip self-adjoint (öz eşlenik) diferansiyel ifadeyi göstermektedir.

Tanım 1.10 Test fonksiyonlar sınıfından keyfi $\varphi(x_1, x_2,...x_n,t)$ fonksiyonları için

$$\int_{Q_T} \{ uM\varphi - f\varphi \} dxdt = 0 \, , \; x = (x_1,..., x_n) \tag{1.73}$$

integral eşitliğini sağlayan u fonksiyonuna (1.72) denkleminin zayıf (veya genelleştirilmiş) çözümü denir. Burada $M = L^*$ dir, yani M, L operatörüne karşılık gelenadjoint operatör olmaktadır [20].

Tanım 1.10 dan görüldüğü gibi (1.72) denkleminin herhangi bir klasik çözümü (1.73) eşitliğini korumak zorundadır. Ama (1.73) eşitliğini sağlayan $u(x_1, x_2,...x_n,t)$ fonksiyonları daha geniş bir sınıf oluşturur. Çünkü (1.73) ün içerdiği u fonksiyonlarının klasik anlamda türevlenebilir olması gerekmiyor.

Zayıf çözümler göz önüne alındığında, denklem için başlangıç ve sınır değer koşullarının hangi anlamda verileceğini özel olarak belirtmek gerekmektedir.

2. NONLİNEER ISI İLETİM DENKLEMİNİN YARI EKSENDE GERÇEK ÇÖZÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Isı dalgalarının dağılımı, buzullardaki erime ve gözenekli ortamda gaz filtrasyonu gibi çoğu problem nonlineer parabolik tür kısmi türevli diferansiyel denklemlerle izah edilir. İlk kez G. I. Barenblatt ile M. I. Vishik, ideal gazın tabakalı ortamda hareketini ifade edebilen denklemin çözümünde lokalleşme özelliğinin mevcut olduğunu ispatlanmıştır, [5]. Daha sonraları non-linear denklemlerin de söz konusu özelliğe sahip olduğu [2], [11] gibi kaynaklarda detaylı araştırılmıştır. Bu tür problemlerin özelliklerinden biri problemin çözümünün ve tanım bölgesinin sınırlarından birinin veya bir kısmının bilinmeyen olmasıdır. Bu tür problemlere serbest sınır problemi (free boundary problem) adı verilir. Dolayısıyla hareketi bilinmeyen sınırı problemin çözümüyle birlikte elde etmek gerekir. Bu problemin analitik çözümünü bulmanın yanı sıra sayısal çözümünü bulmada da bir çok zorluk oluşur.

Analitik çözümlerin bulunmasında bazı özel durumlarda problemin çözümünü koşan dalga şeklinde elde etmek mümkün olur. Fakat elde edilen koşan dalga şeklindeki çözümün diferansiyellenebilme özellikleri denklemin talep ettiği diferansiyellenebilme mertebesinden düşük olur. Bu taktirde problemin klasik çözümü söz konusu olamaz. Bazı durumlarda ise zayıf çözümün de regulerliği bozulur.

Nümerik çözümlerin bulunmasında ise çözümün tanım bölgesinde sabit adımlı düzgün ağ oluşturulması sorunuyla karşılaşılır. Bu sorun ağın bazı noktalarında zaman değişkenine göre türevi bilinmeyen yön boyunca sonlu farklara ayrıklaştırmaya neden olur. Literatürde [1] gibi kaynaklarda serbest sınırlı parabolik tür denklemleri çözerken farklı yöntemler kullanılmıştır.

Serbest sınıra sahip problemlerin çözümlerinin varlık ve teklik problemleri [9], [12] gibi kaynaklarda incelenmiştir. Olga A. Oleinik, Stefan probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlık ve tekliğini ölçülebilen sınırlı fonksiyonlar sınıfında göstermiştir. Kamenomostskaya ise açık fark şeması kullanarak klasik kuazi-lineer ısı iletim denkleminin genelleştirilmiş çözümünü bulmuştur.

Yukarıda belirtildiği serbest sınıra sahip problemler sahip oldukları özellikler nedeniyle nümerik çözümlerinin oluşturulmasında literatürde iyi bilinen nümerik yöntemlerin uygulamasına engel teşkil ederler. Literatürde problemin gerçek çözümünde bulunan bu özellikleri dikkate almaksızın diferansiyel problemi direkt olarak sonlu farklara ayrıklaştıran homojen sonlu fark şemaları [1], [3], [6] gibi kaynaklarda mevcuttur.

Bu bölümde serbest sınıra sahip problemin nümerik çözümünü bulmak için [13], [14] takip edilerek özel yardımcı problem içerilecektir. Yardımcı problemin avantajları kullanılarak problemin nümerik çözümünü elde etmek için etkin algoritmalar önerilecektir.

2.1. Esas Problemin Koşan Dalga Şeklinde Çözümü

Aşağıdaki problemi başlangıç ve sınır koşuluyla göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in R_+^2 \tag{2.1}$$

$$u(x,o) = u_0(x) = 0, \quad x \in I = [0,\infty) \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = u_1 t = \mu_0 t^{\eta}, \quad t > 0. \tag{2.3}$$

Burada $R_+^2 = I \times [0,T)$ dir; μ_0 ve n ise bilinen reel sabitlerdir. Basitlik için σ bir sabit olmak üzere $\varphi(u) = u^{\sigma}$ durumunu göz önüne alalım. $\varphi(u)$ ise aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur:

1. $\varphi(u) \in C^2(R_+^2)$
2. $u \geq 0$ ve $\sigma \geq 2$ için $\varphi'(u) \geq 0$ dır,
3. $u(x,t) \neq 0$ olduğu bölgede $u \geq 0$ için $\varphi''(u) \geq 0$.

[18] ve [19] da (2.1)-(2.3) probleminin aşağıda yazıldığı gibi koşan dalga şeklinde çözümü

$$u(x,t) = \begin{cases} \left(D\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} (Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}, & 0 < x < Dt \\ 0, & x \geq Dt \end{cases} \tag{2.4}$$

olarak elde edilmiştir. Basit bir hesaplamayla

$$w(x,t) = -\frac{\partial u^{\sigma}(x,t)}{\partial x} = Du(x,t)$$

olduğu gösterilebilir. Gerçekten de, (2.1)-(2.3) probleminin çözümünü

$$u(x,t) = f(\xi) = f(Dt - x) \tag{2.4}$$

biçiminde olduğunu varsayarsak, $\xi = Dt - x$ olmak üzere u fonksiyonunun t ve x e göre türevleri sırasıyla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Df'(Dt-x) = Df'(\xi)$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f'(Dt-x) = -f'(\xi)$$

olur. Diğer taraftan $\dfrac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}$ ifadesinin türevinden

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^{\sigma}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{d}{d\xi}\left[\frac{df^{\sigma}}{d\xi}(-1)\right](-1)$$

$$=\frac{d^{2}f^{\sigma}}{d\xi^{2}}=\frac{d}{d\xi}\left[\frac{df^{\sigma}}{d\xi}\right]=\frac{d}{d\xi}\left[\sigma f^{\sigma-1}\frac{df}{d\xi}\right]$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz bu ifadeleri (2.1) de yerine yazarsak

$$D\frac{df}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}\left[\sigma f^{\sigma-1}\frac{df}{d\xi}\right]$$

ifadesinden $Df=\sigma f^{\sigma-1}\dfrac{df}{d\xi}$ veya $Dd\xi=\sigma f^{\sigma-2}df$ buluruz. Buradan $Dd\xi=\dfrac{\sigma}{\sigma-1}df^{\sigma-1}$ veya $D\dfrac{\sigma-1}{\sigma}d\xi=df^{\sigma-1}$ şeklinde düzenlersek $D\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\xi = f^{\sigma-1}$ alırız. O halde f fonksiyonu için

$$f(\xi)=\left(D\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}\xi^{\frac{1}{\sigma-1}}=\left(D\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

ifadesini elde ederiz. f için bulunan bu değer (2.4)' de yerine yazıldığında (2.1)-(2.3) probleminin çözümü

$$u(x,t)=\begin{cases}\left(D\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}, & x<Dt,\\ 0, & x\geq Dt\end{cases}$$

olur.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^{2}u^{\sigma}}{\partial x^{2}}$$

$$u(x,t)=f(ct-x)\rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}=cf'(\xi),\frac{\partial u}{\partial x}=-f'(\xi),\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=f''(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma\cdot u^{\sigma-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\Rightarrow cf'=\frac{d}{d\xi}\left(\sigma f^{\sigma-1}f'\right)'$$

$$\Rightarrow cf=\sigma f^{\sigma-1}f'+C_{1}$$

$$\Rightarrow cf=\sigma f^{\sigma-1}f'$$

$$f' = \frac{cf}{\sigma f^{\sigma-1}} = \frac{c}{\sigma} f^{1-(\sigma-1)} = \frac{c}{\sigma} f^{2-\sigma} \Rightarrow \frac{df}{d\xi} = \frac{c}{\sigma} f^{2-\sigma} \Rightarrow \int \frac{df}{f^{2-\sigma}} = \int \frac{c}{\sigma} d\xi$$

$$\Rightarrow \frac{f^{\sigma-2+1}}{\sigma-1} = \frac{c}{\sigma}\xi + C_1 \Rightarrow f^{\sigma-1} = c \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma}(ct - x_1) + C_1$$

$$f = \begin{cases} \left(c\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} (ct-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}, & 0 < x < ct \\ 0, & x \geq ct \end{cases}$$

$x = 0$ olduğunda,

$$u(0,t) = u_0 t^n = \left(c\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} (ct)^{\frac{1}{\sigma-1}} = \left(c^2\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} t^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{\sigma-1} \qquad \text{ve}$$

$$u_0 = \left(c^2 \frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \Rightarrow u_0^{\sigma-1} = c^2 \frac{\sigma-1}{\sigma} \Rightarrow c^2 = \frac{\sigma}{\sigma-1}\upsilon_0^{\sigma-1}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}u_0^{\sigma-1}}$$

elde ederiz. Şimdi, $\dfrac{\partial}{\partial x}u^{\sigma}$ türevini inceleyelim:

$$u^{\sigma}(x,t) = \begin{cases} \left(c\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{\iota}{\sigma-1}} (ct-x)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, & 0 < x < ct \\ 0, & x \geq ct \end{cases}$$

$$u_{\sigma} t^n = \left(D\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} (Dt)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$= \left(D^2 \frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} t^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$u_{\sigma} = \left(D^2 \frac{\sigma-1}{\partial}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \quad , n = \frac{1}{\sigma-1}$$

$$u_{\sigma}^{\sigma-1} = D^2 \frac{\sigma-1}{\sigma}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma-1}\ u_{\sigma}^{\ \sigma-1}=D^2$$

$$\mathrm{D}=\mp\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}\ u_{\sigma}^{\sigma-1}}$$

Gerçektende,

$$u^{\sigma}=\left(D\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\quad,\ 0<x<Dt$$

ifadesinin x e göre türevi,

$$\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}=-\left(D\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\frac{\sigma}{\sigma-1}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$=\text{-}\,D^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{-1}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$=-D^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$=-DD^{\frac{1}{\sigma-1}}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$=-Du$$

olmaktadır.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sigma-1}\left(D\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{1}{\sigma-1}\left(D\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2-\sigma}{(\sigma-1)^2}\left(D\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{3-2\sigma}{\sigma-1}}$$

1. $u(x,t)$ ve $w(x,t)\ =\ -\dfrac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}=Du(x,t)$ fonksiyonları

$$D_{\ell(t)}=\{(x,t)|\ 0\le x\le Dt,\ 0\le t\le T\}$$

bölgesinde süreklidir, ancak u_t ve u_x türevleri $\sigma>2$ olduğunda mevcut değildir.

Gerçekten de,

2. σ =2 olduğunda u_t ve u_x türevleri sonludur. Gerçekten de $u_x = -\dfrac{D}{2}$, $u_t = \dfrac{D^2}{2}$ olmaktadır.

3. 1 < $\sigma < 3/2$ için u_t, u_x ve u_{xx} türevleri mevcuttur.

4. $3/2 < \sigma < 2$ için u_t ve u_x türevleri mevcut, fakat u_{xx} türevi mevcut değildir.

Bunlara ek olarak, 0< σ < 1 için sonlu T sınırında çözüm sonsuzluğa yaklaşır, yani çözümde patlama (blow-up) oluşur.

Bu nedenle, $\sigma > 2$ olduğunda (2.1)-(2.3) problemi için sadece zayıf çözümü göz önüne almamız gerekir. (2.1) denklemini,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma u^{\sigma-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \sigma(\sigma-1)^{u^{\sigma-2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sigma u^{\sigma-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma(\sigma-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sigma u^{\sigma-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

şeklinde yazabiliriz. (5) den görüldüğü gibi $u = 0$ olduğunda denklem dejenere olur ve

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma(\sigma-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0 \tag{2.6}$$

şekline dönüşür, yani $u > 0$ olduğunda (2.5) denklemi parabolik türden, $u = 0$ olduğunda birinci basamaktan nonlineer dalga denklemine dönüşür. (2.4) den görüldüğü gibi $\eta = \dfrac{1}{\sigma-1}$ olduğunda çözüm $x = Dt$ noktasında sıfıra eşit olur, burada

$$D = \pm\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}u_0^{\sigma-1}}$$

hızıyla hareket eden dalganın ön cephesini oluşturur, yani

$$u(\ell(t),t) = 0 \tag{2.7}$$

olur, burada $\ell(t) = Dt$ olmaktadır. (2.7) ve (2.4) den $\dfrac{dx}{dt} = D$ olduğu kolayca görülür.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial u/\partial t}{\partial u/\partial x} = -\frac{D\dfrac{1}{\sigma-1}\left(D\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}}}{-\dfrac{1}{\sigma-1}\left(D\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}}}$$

$$\frac{dx}{dt} = D$$

Kolayca gösterebiliriz ki, (2.6) denkleminin genel çözümü;

$$u(x,t) = -\sigma(\sigma-1)a^2 x + at + b \tag{2.8}$$

cinsinden olmaktadır. Burada a ve b herhangi bir sabitlerdir. Söz konunu sabitleri (2.2) ve (2.3) koşullarından $a = b = 0$ olarak buluruz. Dolayısıyla (2.5) denkleminin dejenere olduğu noktalarda (2.6) nın da çözümü sıfırla eşit olur,yani difuzupun terimin etkisi kendini açık şeklinde göstermektedir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\sigma(\sigma-1)}_{A}\left(\frac{\partial u}{\partial u}\right)^2 = 0$$

$$p = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad q = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \mathrm{A} = \sigma(\sigma-1)$$

$$\mathrm{F}(p,q) = p + Aq^2 = 0 \quad \begin{matrix} \to Fp = 1 \\ \to Fq = 2Aq \end{matrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t}$$

$$x: \ F_X = \frac{\partial p}{\partial x} + 2Aq\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$t: \ F_t = \frac{\partial p}{\partial t} + 2Aq\frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2Aq\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2Aq} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + 2Aq\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$q = a \qquad F(p,a) = p + Aq^2 = 0 \qquad\qquad p = -Aq^2$$

$$du = p \ dt + q \ dx$$

$$du = -Aa^2 dt + adx$$

$$u(x,t) = -Aa^2 t + ax + c$$

$$u(x,t) = -\sigma(\sigma-1)a^2 + tax + c$$

$$t = 0, \quad 0 = u(x,o) = a \ x + c \ \Rightarrow \ ax + c = 0$$

$$x = 0,$$

$$u_0 t^{\upsilon} = u(0,t) = -\sigma(\sigma-1)\ a^2 t + c \Rightarrow -\sigma(\sigma-1)\ a^2 t + c = u_0 t^{\eta}$$

$$u_0 = -\sigma(\sigma-1)a^2$$

$$\eta = 1$$
$$c = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$u(t,x) = 0$$

dejenere olduğu yerde çözüm sıfır olmalıdır.

2.2. Problemin Zayıf Çözümü

Şimdi gösterelim ki , (2.4) formülü ile tanımlanan çözüm (2.9) integral eşitliğini korur, yani, (2.1)-(2.3) probleminin zayıf çözümüdür.

I. $\sigma > 2$ durumu:

Yukarıdaki söylediğimiz gibi $\sigma > 2$ olduğunda (2.1)-(2.3) ve (2.7) probleminin yalnız zayıf çözümü söz konusu olmaktadır ve bu durum için zayıf çözümü aşağıdaki gibi tanımlayalım. Bunun için $D_{\ell(t)}$ ile aşağıdaki

$$D_{\ell(t)} = \{(x,t) \mid 0 \le x \le Dt, 0 \le t \le T\}$$

bölgesini gösterelim. $f(x,t)$, $D_{\ell(t)}$ bölgesinin sınırlarında ve $x = T$ de sıfıra eşit olan herhangi bir test fonksiyonu olsun.

Tanım 2.1 (2.2) başlangıç koşulu ile (2.3)-(2.7) sınır koşullarını sağlayan ve $\overset{0}{\underset{1.1}{C}}\left(D_{\ell(t)}\right)$ sınıfından olan her bir $f(x,t)$ test fonksiyonu için

$$\int\int_{D\ell(t)} \left\{ u(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u^{\sigma}(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right\} dxdt = 0 \qquad (2.9)$$

integral eşitliğini koruyan, negatif olmayan $u(x,t)$ fonksiyonuna (2.1)-(2.3) probleminin zayıf çözümü denir.

Gerçekten de,

$$0 = \int_0^T \int_0^{\ell(t)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^{\sigma}}{\partial x^2} \right\} f(x,t) dxdt$$

$$=\underbrace{\int_0^T\int_0^{\ell(t)}\frac{\partial u}{\partial t}\,f(x,t)dxdt}_{\mathrm{I}_1}-\underbrace{\int_0^T\int_0^{\ell(t)}\frac{\partial^2u^\sigma}{\partial x^2}f(x,t)dxdt}_{\mathrm{I}_2}$$

$$\mathrm{I}_2=\int_0^T\int_0^{\ell(t)}\frac{\partial^2u^\sigma}{\partial x^2}\,f(x,t)dxdt\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2u^\sigma}{\partial x^2}dx=dV,\ f=U\\ \dfrac{\partial u^\sigma}{\partial X}=V,\ f_x^{dx}=dU\end{bmatrix}$$

$$=\int_0^T\left[f(x.t)\cdot\frac{\partial u^\sigma}{\partial x}\Big|_0^{\ell(t)}-\int_0^{\ell(t)}\frac{\partial u^\sigma}{\partial x}f_x dx\right]dt$$

$$=\int_0^T f(\ell(t),t)\cdot\underbrace{\frac{\partial u^\sigma(\ell(t),t)}{\partial x}}_{Du(\ell(t),t)}dt-\int_0^T f(0.t)\underbrace{\frac{\partial u^\sigma(0,t)}{\partial x}}_{Du(0,t)}dt-\underbrace{\int_0^T\int_0^{\ell(t)}\frac{\partial u^\sigma}{\partial x}\,f_x dxdt}_{t\lambda}$$

$$\mathrm{I}_1=\int_0^T\int_0^{\ell(t)}\frac{\partial u}{\partial t}\,f(x,t)dxdt$$

(İntegralleme sırasını değiştiriyoruz.)

$$\mathrm{I}_1=\int_0^T\left[\int_0^{Dt}f\cdot u_t dx\right]dt$$

$$=\int_0^{Dt}\left[\int_{X/D}^{T}fu_t dt\right]dx \qquad \begin{cases}U=f\Rightarrow dU=f_t dt\\ dV=u_t\Rightarrow V=u\end{cases}$$

$$=\int_0^{Dt}\left[fu\Big|_{X/D}^{t=T}-\int_{X/D}^{T}uf_t dt\right]dx$$

$$=\int_0^{Dt}\left\{\underbrace{f(x,T)u(x,T)-f\left(x,\frac{X}{D}\right)u\left(x,\frac{X}{D}\right)}_{-\int_0^{Dt}f\left(x,\frac{X}{D}\right)u\left(x,\frac{X}{D}\right)dx}\right\}dx-\int\int_{D\ell(t)}u\cdot f_t dxdt$$

$0\le x\le Dt \quad \dfrac{X}{D}=t \quad t\to y$ dersek

$0\le t\le T \quad x=Dy \Rightarrow \partial x=Ddy$

$$-D\int_0^T f(Dy,y)\underbrace{u(Dy,x)}_{u(Dt.x)}dy$$

olmaktadır. Şimdi

$$u(x,t)=\begin{cases}\left(D\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}, & x<Dt\\ 0, & x\geq Dt\end{cases}$$

ifadesinin (2.1)-(2.3) probleminin zayıf çözümü olduğunu gösterelim, yani

$$\int\int_{D\ell(t)}\left\{u(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mp\frac{\partial u^{\sigma}(x,t)}{\partial x}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\}dxdt=0$$

sağlandığını ispatlayalım. Bunun için denklemin içerdiği türevleri alırsak,

$$u^{\sigma}(x,t)=\begin{Bmatrix}\left(D\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, & x<Dt\\ 0, & x\geq Dt\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial u^{\sigma}(x,t)}{\partial x}=\begin{cases}\left(D\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\dfrac{\sigma}{\sigma-1}(Dt-x)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, x<Dt\\ 0, x\geq Dt\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-D^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\cdot\left(\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}, & x<Dt\\ 0, & x\geq Dt\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-Du(x,t), & x<Dt\\ 0, & x\geq Dt\end{cases}$$

buluruz. Bulunan ifadeler yerine konulursa,

$$\iint_{D(l(t))}\left\{u(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u^{\sigma}(x,t)}{\partial x}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\}dxdt=0$$

$$0=A\int_0^T\int_0^{Dt}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}\frac{\partial f}{\partial t}dxdt+A.D\int_0^T\int_0^{Dt}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}\frac{\partial f}{\partial x}dxdt$$

$$=A\int_0^{DT}\left[\underbrace{\int_{x/D}^{T}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}\frac{\partial f}{\partial t}dt}_{\mathrm{I}_1}\right]dx+A.D\int_0^T\left[\underbrace{\int_0^{Dt}(Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}}\frac{\partial f}{\partial x}dx}_{\mathrm{I}_2}\right]dt$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_{x/D}^{T} (Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}} \frac{\partial f}{\partial t} dt \qquad \begin{bmatrix} u = (Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}} \Rightarrow du = \frac{D}{\sigma-1}(Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} dt \\ d\nu = \frac{\partial f}{\partial t} dt \Rightarrow \nu = f \end{bmatrix}$$

$$= (Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}} f(x,t) \Big|_{x/D}^{T} - \frac{D}{\sigma-1} \int_{x/D}^{T} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f dt$$

$$= (DT-x)^{\frac{1}{\sigma-1}} f(x,T) - \left(D.\frac{x}{D} - x \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} f\left(x, x/D\right) - \frac{D}{\sigma-1} \int_{x/D}^{T} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f dt$$

$$= -\frac{D}{\sigma-1} \int_{x/D}^{T} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f dt$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_{0}^{Dt} (Dt-x)^{\frac{1}{\sigma-1}} \frac{\partial f}{\partial x} dx \qquad \begin{bmatrix} dV = \frac{\partial f}{\partial x} dx \Rightarrow V = f \\ U = \left(Dt - x^{\frac{1}{\sigma-1}} \right) \Rightarrow dU = \frac{-1}{\sigma-1}(Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} dx \end{bmatrix}$$

$$= \left(Dt - x^{\frac{1}{\sigma-1}} \right) f(x,t) \Big|_{0}^{Dt} + \frac{1}{\sigma-1} \int_{0}^{Dt} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f(x,t) dx$$

$$= (Dt-Dt)^{\frac{1}{\sigma-1}} f(Dt,t) - (Dt-0)^{\frac{1}{\sigma-1}} f(0,t) + \frac{1}{\sigma-1} \int_{0}^{Dt} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f(x,t) dx$$

$$= \frac{1}{\sigma-1} \int_{0}^{Dt} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f(x,t) dx$$

$$0 = A \int_{0}^{DT} \left[-\frac{D}{\sigma-1} \int_{x/D}^{T} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f(x,t) dt \right] dx + A.D \int_{0}^{T} \left[\frac{1}{\sigma-1} \int_{0}^{Dt} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f(x,t) dx \right] dt$$

$$= -A.D \frac{1}{\sigma-1} \int_{0}^{DT} \int_{x/D}^{T} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f(x,t) dt dx + A.D \frac{1}{\sigma-1} \int_{0}^{T} \int_{0}^{Dt} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f(x,t) dx dt$$

$$\int_{0}^{T} \int_{0}^{Dt} (Dt-x)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} f(x,t) dx dt \qquad (2.18)$$

$$0=\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_2$$

$$0=-\int\int_{D\ell(t)} u(x,t)\, f_t dxdt-\left(-\int\int_{D(t)}\frac{\partial u^{\sigma}(x,t)}{\partial x} f_x(x,t)dxdt\right)$$

$$0=\int\int_{D\ell(t)} u(x,t)\frac{\partial f}{\partial t}dxdt-\int\int_{D\ell(t)}\frac{\partial u^{\sigma}(x,t)}{\partial x}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dxdt$$

olduğu görülür.

$$0=\int_0^T\int_0^{Dt}\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u^{\sigma}}{\partial x^2}\right] f(x,t)dxdt=\underbrace{\int_0^T\int_0^{Dt}\frac{\partial u}{\partial t} f(x,t)dxdt}_{\mathrm{I}_1}-\underbrace{\int_0^T\int_0^{Dt}\frac{\partial^2 u^{\sigma}}{\partial x^2} f(x,t)dxdt}_{\mathrm{I}_2}$$

$$\mathrm{I}_2=\int_0^T\int_0^{Dt}\frac{\partial^2 u^{\sigma}}{\partial x^2} f(x,t)dxdt=\int_0^T\left[\int_0^{Dt}\frac{\partial^2 u^{\sigma}}{\partial x^2} f(x,t)dx\right]dt$$

$$=\int_0^T\left\{ f(x,t)\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}\Big|_0^{X-Dt}-\int_0^{Dt}\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x} f_x dx\right\}dt$$

$$=\int_0^T f\left(X=Dt,t\right)\frac{\partial u^{\sigma}\left(Dt,t\right)}{\partial x}dt-\int_0^T f(0,t)\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}dt-\int\int_{D\ell(t)}\frac{\partial u^{\sigma}(x,t)}{\partial x} f_x(x,t)dxdt$$

$$\mathrm{I}_1=\int_0^T\int_0^{Dt}\frac{\partial u}{\partial t} f(x,t)dxdt=\int_0^{DT}\left\{\int_{X/0}^{T}\frac{\partial u}{\partial t} f(x,t)dt\right\}dx$$

$$=\int_0^{DT} u(x,t) f(x,t)\Big|_{t=X/D}^{t=T} dx-\int\int_{D\ell(t)} u(x,t) f_t dtdx$$

$$=\int_0^{DT}\left[u(x,T)\, f(x,T)-u\left(x,\frac{X}{D}\right) f\left(x,\frac{X}{D}\right)\right]dx-\int\int_{D\ell(t)} u(x,t)\, f_t dxdt$$

$$x=Dt\qquad \frac{x}{D}=t\qquad 0\le t\le T$$

$$=-D\int_{t=0}^{T}\underbrace{u\left(Dt,t\right)}_{=0} f\left(Dt,t\right)dt=0$$

2.3. Yardımcı Problem ve Gerçek Çözümü

Bu bölümde (2.1)-(2.7) probleminin çözümünü elde edip, çözümün diferansiyelenebilme özelliklerini inceleyelim.

Bunun için (2.9) denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{M}^2 u^{\sigma} \tag{2.10}$$

şeklinde yazalım. Burada $\mathrm{M}\bullet = \dfrac{\partial \bullet}{\partial x}$ operatörü olmaktadır. (2.10) denkleminin her iki tarafına M^{-1} uygulayarak

$$\mathrm{M}^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{M} u^{\sigma} \tag{2.11}$$

olduğunu elde ederiz,

$$\mathrm{M}^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} = v(x,t) \tag{2.12}$$

olarak gösterirsek (2.11) denklemini

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\sigma} \tag{2.13}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.13) denklemi için başlangıç ve sınır koşulu

$$v(x,0) = v_0(x) \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = u_0 t^n \tag{2.15}$$

olur, burada $v_0(x)$; fonksiyonu $\dfrac{d v_0(x)}{dx} = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü olmaktadır. (2.13)-(2.15) problemini [13] ü takip edecek yardımcı problem olarak adlandıracağız. (2.13)-(2.15) probleminin koşan dalga şeklinde çözümü

$$v(x,t) = \begin{cases} D^{\frac{1}{\sigma-1}}\left(\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\right)(Dt-x)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, & x < Dt \\ 0, & x > Dt \end{cases} \tag{2.16}$$

olmaktadır, [19].

Not 2.1 (2.16) fonksiyonunun (2.13)-(2.15) problemini koruduğunu kolayca ispatlanabilir. (2.16) dan görüldüğü gibi $v(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliği $u(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliğinden bir mertebe fazladır.

(2.12) den

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \tag{2.17}$$

olduğu görülmektedir.

Teorem 2.1 Eğer $v(x,t)$ fonksiyonu (2.13)-(2.15) probleminin yumuşak (soft) çözümü ise (2.17) eşitliği ile tanımlanan $u(x,t)$ fonksiyonu (2.1)-(2.3) probleminin (2.9) anlamında zayıf çözümü olmaktadır.

İspat. $$\int\int_{D\ell(t)} \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\sigma}\right] dxdt = 0$$

olduğu kolayca görülmektedir.

II. $0 < \sigma < 1$ olduğu durum:

(2.4) formülünden görüldüğü gibi $0 < \sigma < 1$ olduğu takdirde (2.1)-(2.3) probleminin çözümü $x = Dt$ ön cephesi üzerinde sonsuzluğa dönüşür, yani çözümdeki singülerlik daha fazla olmaktadır. Bu durumda (2.1)-(2.3) probleminin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanıyalım.

Tanım 2.2 (2.2) başlangıç koşulu ile (2.3) sınır koşullarını sağlayan ve $\overset{0}{C}_{2,1}(D\ell(t))$ sınıfından olan her bir $f(x,t)$ test fonksiyonu için

$$\iint_{D\ell(t)} \left\{ u(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - u^{\sigma}(x,t)\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \right\} dxdt = 0 \tag{2.19}$$

integral bağıntısını koruyan $u(x,t)$ fonksiyonuna (2.1)-(2.3) probleminin bir zayıf çözümü denir.

$\sigma = 0.5$ olduğu durumda (2.4) formülü

$$u(x,t) = \frac{1}{D^2(Dt - x)^2} \tag{2.20}$$

şekline dönüşür. (2.20) den görüldüğü gibi $x \to Dt$ olduğundan $u(x,t)$ fonksiyonu sonsuzluğa yaklaşır, diğer bir deyişle çözüm sonlu zaman zarfında sonsuz büyük değer alır, yani "blow-up" gibi özellik ortaya çıkar. (2.19) anlamında zayıf çözümü bulmak için aşağıdaki yardımcı problemi içerelim. Bunun için (2.18) i dikkate alarak, (2.14) denklemini

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

olduğunu dikkate alarak

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\sigma}$$

denklemini

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \mathrm{M}(\mathrm{M}\nu)^{\sigma}$$

şeklinde yazalım ve bu denklemin her iki tarafına M^{-1} ile uygularsak

$$\mathrm{M}^{-1}\frac{\partial \nu}{\partial t} = (\mathrm{M}\nu)^{\sigma} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\mathrm{M}^{-1}\nu\right)}_{\psi} = \left[\mathrm{M}^{2}\left(\underbrace{\mathrm{M}^{-1}\nu}_{\psi}\right)\right] \tag{2.21}$$

elde ederiz.

$$\mathrm{M}^{-1}\nu(x,t) = \psi(x,t) \tag{2.22}$$

dersek, (2.21) den

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\mathrm{M}^{2}\psi\right)^{\sigma} \tag{2.23}$$

alırız. (2.23) denklemi için başlangıç ve sınır koşulları

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) \tag{2.24}$$

$$\mathrm{M}^{2}\psi(0,t) = u_0 t^{n} \tag{2.25}$$

(2.23)-(2.25) problemine *2.tür yardımcı problem* diyeceğiz. (2.23)-(2.25) probleminin koşan dalga şeklindeki çözümünün

$$\psi(x,t) = \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\right)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} D^{\frac{1}{\sigma-1}}(Dt-x)^{\frac{2\sigma-1}{\sigma-1}} \tag{2.26}$$

şeklinde olduğunu gösterelim:

$$\psi = f(Dt-x)$$

olsun. Buradan $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{df}{d\xi}$ ve $\frac{\partial \psi}{\partial t} = D\frac{df}{d\xi}$ olduğu görülür. Ayrıca $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}$ dir.

O halde

$$D\frac{df}{d\xi} = \left(\frac{d^2 f}{d\xi^2}\right)^{\sigma} \quad \text{dir.}$$

$P(\xi) = \frac{dt}{d\xi}$ diyecek olursak, bu ifadeyi

$$DP(\xi) = \left(\frac{dP(\xi)}{d\xi}\right)^{\sigma}$$ şeklinde yazabiliriz. Her iki tarafın $1/\sigma$ kuvveti

alınırsa,

$$D^{1/\sigma} P\left(\xi^{1/\xi}\right) = \frac{dP(\xi)}{d\xi} \Rightarrow D^{1/\sigma} d\xi = P(\xi)^{-1/\sigma} dP(\xi)$$

$$D^{1/\sigma}\xi = \frac{\sigma}{\sigma-1}P(\xi)^{\sigma-1/\sigma}$$

elde edilir. Düzenlemeyle

$$\frac{\sigma-1}{\sigma}D^{1/\sigma}\xi = P(\xi)^{\sigma-1/\sigma} \Rightarrow \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\sigma/\sigma-1} D^{1/\sigma-1}\xi^{\sigma/\sigma-1} = P(\xi) \equiv \frac{df}{d\xi}$$

$$df = \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\sigma/\sigma-1} D^{1/\sigma-1}\xi^{\sigma/\sigma-1}d\xi \Rightarrow \psi = f = \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\sigma/\sigma-1} D^{1/\sigma-1}\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\right)\xi^{2\sigma-1/\sigma-1}$$

$$\mathrm{M}\psi = f_x = -\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)D^{1/\sigma-1}\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\right)\cdot\left(\frac{2\sigma-1}{\sigma-1}\right)\xi^{\sigma/\sigma-1} = v$$

$$\mathrm{M}^2\psi = f_{xx} = \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{1/\sigma-1} D^{1/\sigma-1}(Dt-x)^{1/\sigma-1} = u$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2. Eğer $\psi(x,t)$ fonksiyonu (2.23)-(2.25) ikinci tür yardımcı probleminin yumuşak (soft) çözümü ise

$$M^2\psi(x,t) = u(x,t)$$

esas problemin (2.19) anlamında zayıf çözümü almaktadır. Gösterelim ki, (2.26) ifadesi (2.19) eşitliğini korumaktadır.

Zayıf çözümün tanımına göre,

$$\iint_{Dl(t)}\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right)^{\sigma}\right] f_{xx}\,dxdt$$

$$= \underbrace{\int_0^T\int_0^{Dt}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} f_{xx}(x,t)dxdt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^T\int_0^{Dt}\left(\frac{\partial^2(x,t)}{\partial x^2}\right)^{\sigma}}_{I_2} f_{xx}dxdt$$

$$M\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = v$$

$$M^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = u \Rightarrow \psi = \iint u(x,t)dxdt$$

$$w(x,t) = -\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x} = Du(x,t)$$

$$=-\int_0^T\int_0^{Dt}\frac{\partial v}{\partial x}f_t dxdt - D\int_0^T\int_0^{Dt}u(x,t)f_x dxdt = 0$$

(2.9) dan, $D_{l(t)}$ nin sınırlarından ε kadar uzaklıkta duran noktalarının $\Gamma^{\varepsilon}_{l(t)}$ ile gösterelim.

$$D^{\varepsilon}_{l(t)} = D_{L(t)}/\Gamma^{\varepsilon}_{l(t)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D^2_{l(t)} = D_{l(t)}$$

$$I_1 = \int_0^T\left[\int_0^{Dt}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}f_{xx}(x,t)dx\right]dt \qquad \begin{bmatrix} u = \dfrac{\partial\psi}{dt} & du = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}dx \\ dv = f_{xx}dx & v = f_x \end{bmatrix}$$

$$=\int_0^T\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}f_x(x,t)\Big|_0^{Dt} - \int_0^{Dt}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}f_x(x,t)dx\right]dt$$

$$=\int_0^T\left[\frac{\partial\psi(Dt,t)}{\partial t}f_x(Dt,t) - \frac{\partial\psi(0,t)}{\partial t}f_x(0,t)\right]dt - \int_0^T\int_0^{Dt}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)f_x(x,t)dxdt$$

$$=-\int_0^T\int_0^{Dt}\frac{\partial v}{\partial t}f_x(x,t)dxdt \qquad \begin{bmatrix} u = \dfrac{\partial v}{\partial t} & du = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}dx \\ dv = f_x dx & v = f \end{bmatrix}$$

$$=-\int_0^T\left[\frac{\partial v}{\partial t}.f\Big|_0^{Dt} - \int_0^{Dt}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}fdx\right]dt$$

$$=+\int_0^T\int_0^{Dt}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}fdxdt = \int_0^{DT}\left[\int_{X/D}^{T}f.\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}dt\right]dx \qquad \begin{bmatrix} u = f & du = f_t dt \\ dv\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}dt & v = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$=\int_0^{DT}\left[\frac{\partial v}{\partial x}.f\Big|_{X/D}^{T} - \int_{X/D}^{T}\frac{\partial v}{\partial x}.f_t dt\right]dx = -\int_0^{Dt}\int_{X/D}^{T}\frac{\partial v}{\partial x}.f_x dtdx$$

$$I_2 = \int_0^T\int_0^{Dt}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^{\sigma}f_{xx}dxdt = \int_0^T\left[\int_0^{Dt}u^{\sigma}f_{xx}dx\right]dt \qquad \begin{bmatrix} U = u^{\sigma} & dU = \dfrac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}dx \\ dV = f_{xx}dx & V = f_x \end{bmatrix}$$

$$=\int_0^T\left[u^{\sigma}(x,t)f_x(x,t)\Big|_0^{Dt} - \int_0^{Dt}\frac{\partial u^{\sigma}}{\partial x}f_x dx\right]dt$$

$$=\int_0^T \left[u^\sigma(Dt,t) f_x(Dt,t) - u^\sigma(0,t).f_x(0,t) - \int_0^{Dt} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x} f_x dx \right] dt$$

$$= -\int_0^T \int_0^{Dt} \frac{\partial u^\sigma}{\partial x}.f_x dxdt \qquad \left(-\frac{\partial u^\sigma}{\partial x} = Du(x,t) \right)$$

$$= D\int_0^T \int_0^{Dt} u(x,t) f_x(x,t) dxdt$$

Şimdi sıçrayış üzerindeki Rankine-Hugoniot koşulunu gösterelim.

$$\text{O} = \int_D \{uf_t + \varphi(u) f_x\} dxdt$$

$$= \int_{D1} \{uf_t + \varphi(u) f_x\} dxdt + \int_{D2} \{uf_t + \varphi(u) f_x\} dxdt = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{D_1} \{uf_t + \varphi(u) f_x\} dxdt = \int_D uf_t dxdt + \int_{D_1} \varphi(u) f_x dxdt$$

$$= \int_0^T \int_a^{\gamma-0} uf_t dxdt + \int_0^T \int_a^{\gamma-0} \varphi(u) f_x dxdt$$

Fibuni teoremine göre,

$$= \int_0^T dx \int_\alpha^{\gamma-0} uf_t dt + \int_0^T \int_a^{\gamma-0} \varphi(u) f_x dxdt = I_1 + I_2$$

$$\begin{bmatrix} U = u & dU = u_t dt \\ dV = f_t dt & V = f \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} U = \varphi(u) & dU = \varphi_x dx \\ dV = f_x dx & V = F \end{bmatrix}$$

$$I_{11} = \int_0^T dx \left[uf \Big|_a^{\gamma-0} - \int_a^{\gamma-0} fu_t dt \right] = \int_0^T uf \Big|_{\gamma-0} dx - \int_{D_1} fu_t dxdt$$

$$I_{12} = \int_0^T \left\{ \varphi(u) f \Big|_a^{\gamma-0} - \int_a^{\gamma-0} f\varphi_x dx \right\} dt = \int_0^T \varphi(u) f \Big|_{\gamma-0} dt - \int_{D_1} f\varphi_x dxdt$$

$$I_1 = \int_0^T uf \Big|_{\gamma-0} dx + \int_0^T \varphi f \Big|_{\gamma-0} dt - \int_{D_1} \{u_t + \varphi_x\} fdxdt$$

Bu koşul sıçrayışın üzerinde ve arkasındaki parametreleri birleştiren bir (bağıntı) kuraldır.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[\varphi]}{[u]}$$

Burada $[\varphi]$, φ deki sıçrayışı, $[u]$, ise u daki sıçrayışı gösterir.

3. SONLU FARKLAR YÖNTEMİNİN BİR BOYUTLU DEJENERE OLAN PARABOLİK DENKLEM İÇİN İNCELENMESİ

3.1. İkinci Mertebeden Nonlineer Filtrasyon Denkleminin Emici Ortamda Nümerik İncelenmesi

Sıcaklığın dağıldığı ortamda ısıyı yutan (veya emen) bir kaynağın olduğunu varsayalım. Bu tür problemlere yeraltı gaz dinamiğinin zayıf kontakt tabakaları olan filtrasyon problemlerinde, yanma problemlerinde, vs. rastlanır. $\overline{D}$ ile

$$\overline{D} = \{a \le x \le b,\, 0 \le t \le T\}$$

bölgesini gösterelim ve D bölgesinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} - \psi(u) \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad a \le x \le b \tag{3.2}$$

$$u(a,t) = u_a(t), \quad u(b,t) = u_b(t), \qquad t > 0 \tag{3.3}$$

problemini göz önüne alalım. $\varphi(u)$ ve $\psi(u)$ fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları korunduğunu varsayalım:

1. $\varphi(u)$ ve $\psi(u)$ fonksiyonları $u \ge 0$ olduğunda sınırlı ve süreklidir,

2. $\varphi(u), \varphi'(u), \psi(u)$ ve $\psi'(u)$ fonksiyonları $u > 0$ için pozitif fonksiyonlardır,

3. Negatif olmayan $u \ge 0$ için $\varphi'(0) = \psi(0) = 0$ ve $\varphi''(u) \ge 0$ dır.

$$\psi(u) \equiv 0$$

olduğu durum literatürde iyi öğrenilmiştir. Böyle denklemlerin lokalleşme etkisine sahip olduğu, yani çözümün sonlu zaman zarfında sonlu mesafeye kadar dağılabildiği ispatlanmıştır [11]. Bu özellik iyi bilinen nümerik yöntemlerin denkleme uygulanmasında zorluk çıkarmaktadır. [11] de aşağıdaki denklemler incelenmiştir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^{\mu}}{\partial x^2} - cu, \quad \mu > 0, \quad c > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu^{\upsilon}, \quad 0 < \upsilon < 1, \qquad c > 0\,.$$

Bu denklemlerde de çözümün pürüzsüzlüğü bozulmaktadır ve bu durumda da klasik çözümün mevcut olmadığı ispatlanmıştır. [8] de φ ve ψ üzerine koyulan koşullar çerçevesinde çözümün varlık ve teklik teoremi ispatlanmıştır.

Zayıf çözümü aşağıdaki gibi tanıyalım.

Tanım 3.1 Negatif olmayan sürekli başlangıç sınır koşullarını koruyan D bölgesinde Lebesque anlamında integrallanebilen $\frac{\partial f}{\partial x}$ türevine sahip ve D de sürekli diferansiyellenebilen $x=a$, $x=b$, $t=T$ de sıfıra dönüşen herhangi bir $f(x,t)$ fonksiyonu için

$$\int_D \left\{ u\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{dx}\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} + f\psi(u) \right\} dxdt + \int_a^b f(x,0)u(x,0)dx = 0 \qquad (3.4)$$

integral eşitliğini koruyan $u(x,t)$ fonksiyonuna (3.1)-(3.3) probleminin zayıf çözümü denir.

Zayıf çözümü bulmak için [13], [14] de olduğu gibi özel yolla kurulmuş yardımcı problem içerelim. Bunun için

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) - w(x,t), \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \psi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right), \qquad (3.5')$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad a \le x \le b, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=a} = u_{a(t)}, \quad \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=b} = u_b(t), \quad t>0, \quad w(a,t)=0 \qquad (3.7)$$

problemini göz önüne alalım. (3.5)-(3.7) problemine *yardımcı problem* denir.

$$w(x,t) = \int_a^x \psi(\bar{u}(\xi,t))d\xi \qquad (3.8)$$

ve

$$y(x,t) = \int_a^x \bar{u}(\xi,t)\partial\xi \qquad (3.9)$$

fonksiyonlarını dahil edelim. (3.9) dan

$$y(x,0) = \int_a^x \bar{u}(\xi,0)d\xi = \int_a^x \bar{u}_0(\xi)d\xi = y_0(x) \qquad (3.10)$$

elde ederiz. Görüldüğü gibi, (3.5) denklemi (3.1) denklemine nazaran daha pürüzsüz çözüme sahiptir.

Not 3.1 Genelde önerilen yardımcı problem ya klasik çözüme ya da regüler zayıf çözüme

$$\int_D \frac{\partial f(\xi,t)}{\partial \xi}\left\{\frac{\partial y(\xi,t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi\left(\frac{\partial y(\xi,t)}{\partial \xi}\right)}{\partial \xi} + w(\xi,t)\right\} d\xi dt = 0 \tag{3.11}$$

regüler zayıf çözümüne sahip olduğunu varsayalım.

Teorem 3.1 Eğer $y(x,t)$ (3.5)-(3.7) probleminin klasik çözümü ise, (3.9) ifadesi ile tanımlanan $\bar{u}(x,t)$ fonksiyonu (3.1)-(3.3) probleminin (3.4) anlamında zayıf çözümüdür.

İspat. Gerçekten de, eğer $y(x,t)$ (3.5)-(3.7) nin klasik çözümü ise söz konusu denklemi korumaktadır ve açıktır ki, yukarıda tanımladığımız $f(x,t)$ fonksiyonu için (3.11) ifadesi korunmaktadır. Küme parantezini açıp elde edilen ifadeleri ξ ye göre integrallersek

$$\int_D f(\xi,t)\left\{\frac{\partial \bar{u}(\xi,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi(\bar{u}(\xi,t))}{\partial \xi^2} + \psi\left(\bar{u}(\xi,t)\right)\right\} d\xi dt = 0 \tag{3.12}$$

elde ederiz. Buradaki türevlerden genelleşmiş türev anlamındadır. (3.12) ifadesinde birinci integrale t ye göre, ikinci integrale ξ ye göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak (3.4) ifadesini elde ederiz. Bu da, $\bar{u}(x,t)$ nin zayıf çözüm olduğunu göstermektedir. Problemin tek bir çözümünün olmasından $u(x,t)$ nin $\bar{u}(x,t)$ ile hemen hemen her yerde çakıştığı anlaşılır. Şimdi (3.1)-(3.3) probleminin sayısal çözümünün bulunması için bir algoritma üretelim. Bunun için D bölgesini aşağıdaki gibi tanımlanmış

$$\omega_{h\tau} = \{x_i = ih, t_k = k\tau, i = 0,1,2,...,n, \quad k = 0,1,2,..., h = \frac{b-a}{n}, \tau > 0\}$$

ağı ile örtelim. (3.1)-(3.3) problemini

$$U_t = \varphi_{\bar{x}\bar{x}} - (U_{i,k+1}) - \psi(U_{i.k+1}) \tag{3.13}$$

$$U_{i,0} = u_0(ih), U_{0,k} = u_a(t_k), U_{n,k} = u_b(t_k), \tag{3.14}$$

şeklinde sonlu farklara ayrıklaştıralım. Burada

$$\varphi_{\bar{x}\bar{x}}(U_{i,k+1}) - \psi(U_{i,k+1}) = h^{-2}\left[\varphi(U_{i+1}) - 2\varphi(U_i) + \varphi(U_{i-1})\right]_{k+1}$$

olmaktadır. Bundan sonraki işlerimizde [16] da olan sembolleri kullanacağız. Önce (3.13)-(3.14) probleminin bazı özelliklerini inceleyelim:

1.özellik. (3.13)-(3.14) probleminin çözümü sınırlı, negatif olmayan ve aşağıdaki eşitsizliğe sahiptir

$$0 \le U_{i,k+1} \le m = \max\{u_0(ih), u_a(t_k), u_b(t_k)\}.$$

İspat. İspat maksimum prensibinden kolayca görülür.

Teorem 3.2 Aşağıdaki eşitsizlikler çerçevesinde

$$\max\{|u_a|, |u_b|, |\varphi(u_a)|, |\varphi(u_b)|\} \le sabit,$$

$$\max\left\{|u_a|, |u_b|, \left|\frac{du_a}{dt}\right|, \left|\frac{du_b}{dt}\right|\right\} \le sabit,$$

$U_{i,k}$ yaklaşık çözümü için

$$\|U\|_{L_2(\omega_h)} + \|U_{\bar{x}}\|^2_{L_2(\omega_{ht}),\varphi'} \le sabit, \tag{3.15}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. (3.13) denklemini

$$w_{i,k} = U_{i,k} + u_a(t_k)\frac{x_i - b}{b-a} - u_b(t_k)\frac{x_i - a}{b-a}$$

fonksiyonu ile çarpıp i,k indislerine göre toplarsak

$$\tau h\sum_{i,k}(w_{i,k+1}, U_t) = \tau h\sum_{i,k}\left(w_{i,k+1}, \varphi_{\bar{x}x}(U_{i,k+1})\right) - \tau h\sum_{i,k}\left(w_{i,k+1}, \psi(U_{i,k+1})\right) \tag{3.16}$$

elde ederiz. (3.16) eşitliğini

$$\alpha(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\left[\alpha^2 - \beta^2 + (\alpha-\beta)^2\right], \ \alpha, \beta > 0$$

ifadesini kullanarak

$$\frac{h}{2}\sum_i (U,U)^{i,l} + \tau h\sum_{i,k}\left(U_{\bar{x}}, \varphi_{\bar{x}}(U_{i,k+1})\right)$$

$$\le \frac{h}{2}\sum_i (U,U)^{i,0} + \tau h\sum_{i,k}\left[\frac{x_i - b}{b-a}\left(u_a(t_k), U_t\right) - \frac{x_i - a}{b-a}\left(u_b(t_k), U_t\right)\right]$$

$$+ \tau h\sum_{i,k}\left[\left(\frac{(x_i - b)_{\bar{x}}}{b-a}, \varphi_{\bar{x}}(U_{i,k+1})\right)u_a(t_k) - \left(\frac{(x_i - a)_{\bar{x}}}{b-a}, \varphi_{\bar{x}}(U_{i,k+1})\right)u_b(t_k)\right]$$

$$+ \tau\sum_k \left(w_{i,k+1}, \varphi_x(U_{i,k+1})\right)$$

$$- \tau\sum_k \left(w_{i,k+1}, \varphi_{\bar{x}}(U_{i+1})\right)\Big|_{i=0}^{i=n} + \tau h\sum_{i,k}\left(w_{i,k+1}, \psi(U_{i,k+1})\right) \tag{3.17}$$

şeklinde yazarız.

(3.17) nin sağ tarafındaki ifadeyi değerlendirirsek (3.15) eşitsizliğinin doğruluğu ispatlamış oluruz.

3.2. Yardımcı Problemin Sonlu Farklara Ayrıklaştırılması

(3.5) ile (3.6) problemini aşağıdaki gibi sonlu farklara ayrıklaştıralım

$$Y_t = \varphi_{\bar{x}}\left(\hat{Y}_x\right) - < \hat{\Omega} \qquad (3.18)$$

$$Y_{i,0} = y_0(ih),\ Y_x\big|_{X=0} = u_a(\kappa\tau),\ Y_{\bar{x}}\ |_{i=n} = u_b(\kappa\tau) \qquad (3.19)$$

Burada

$$\hat{\Omega}_x = \psi\left(U_{i,k+1}\right) \qquad (3.20)$$

bulunur, $\mathrm{Y}_0(ih)$ ise

$$(Y_0)_x = u_0(ih)$$

denkleminin herhangi bir çözümü olmaktadır. (3.20) dikkate alınırsa (3.18) den herhangi i, k için

$$\widehat{U} = \widehat{Y}_x \qquad (3.21)$$

eşitliğini elde etmek mümkündür.

$\lambda_{i,k}$ $\gamma_{i,l}$ ve $\delta_{i,k}$ sırasıyla, $\dfrac{\partial\varphi(u(x,t))}{\partial x}$, $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ türevlerinin sonlu farklara ayrıklaştırdığımız zaman yaptığımız hatalar, $Y_{i,k}$ ise $y(x_i, t_k)$ ağ fonksiyonunun yaklaşık değeri olsun. Bu durumda

$$R_{i,k} = y_{i,k} - \mathrm{Y}_{i,k}$$

için,

$$R_t = \left[\varphi'\left(u^*\right)\hat{R}_{\bar{x}}\right]_x + \hat{\eta} \qquad (3.22)$$

cebirsel denklemler sistemini aşağıdaki

$$R_{i,0} = \eta_0 = 0(h),\ R_x\ |_{i=0} = 0,\ R_{\bar{x}}\ |_{i=n} = 0, \qquad (3.23)$$

koşulları çerçevesinde elde ederiz. Burada

$$u_i^* \in \left[u_i, U_i\right],\ \hat{\eta} = \lambda_{i,k+1} - \delta_{i,k+1} + \mu_{i,k+1},\ \hat{\mu}_l = \hat{w}_i - \widehat{\Omega}_i$$

dır. Kolayca gösterebiliriz ki, $h \to 0$ iken $\gamma \to 0$ dır. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ ve $w(x,t)$ nin sürekli olması koşulundan $\tau, h \to 0$ iken $\lambda_{i,k}$ ve $\delta_{i,k} \to 0$ olur.

Teorem 3.3 Herhangi τ, h için (3.13), (3.14) ve (3.18), (3.19) problemlerinin çözümü için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir,

$$\|y - Y\|_{L_2}(w_h) + \|u - U\|_{L_2}(w_{h\tau}), \varphi'$$
$$\leq sabit\left\{\|\eta_0\| L_2(w_h) + \|\eta\|_{L_2}(w_h) + \|\eta_1^*\|_{L_2}(w_\tau)\right\} \qquad (3.24)$$

Burada

$$\left\|\eta_1^*\right\|_{L_2}(w_\tau)=\|\eta_1\|L_2(w_\tau),\ \varphi'(\upsilon_h)^{i=n}-\|\eta_1\|_{L_0}(w\tau),\ \varphi'(\upsilon_{i+1})^{i=0},\ \eta_1=y_{\bar{x}}-Y_X$$

elde ederiz.

İspat. (3.22) denklemini $R_{i,k+1}$ ile çarpıp, i ve k üzerinden toplarsak

$$\tau h\sum_{i,k}\left(R_{i,k+1},R_t\right)=\tau h\sum_{i,k}\left(R_{i,k+1},\left[\varphi'(u^*)R_{\bar{x}}\right]_x\right)+\tau h\sum_{i,k}\left(R_{i,k+1},\hat{\eta}\right) \qquad (3.25)$$

alırız. (3.25) eşitliğini bilinen yolla dönüştürerek enerjitik eşitsizlik elde etmek mümkündür ki, bu eşitsizlikten $\mathrm{Y}_{i,k+\nu}$ $U_{i,k+1}$ yaklaşık çözümlerinin $y(x,t)$, $u(x,t)$ gerçek çözümlerine yakınsak olduğu görülmektedir. (3.15) eşitsizliğinden daha kuvvetli olan bir eşitsizlik elde etmek mümkündür.

Teorem 3.4 Aşağıdaki eşitsizlikler korunduğu takdirde

$$\max\{|u_a|,|u_b|,|\varphi(u_a)|,|\varphi(u_b)|\}\le \text{sabit},$$

$$\max\left\{\left|\frac{\partial\varphi(u_a)}{\partial t}\right|,\left|\frac{\partial\varphi(u_b)}{\partial t}\right|\right\}\le \text{sabit},$$

$$\|u\|^2_{L_2(w_h)}\le \text{sabit},$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi(u_0)}{\partial x}\right\|_{L_2(w_h)}\le \text{sabit},$$

$$\|\Psi(U)\|_{L_2(w_{h\tau})}\le \text{sabit},$$

aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir,

$$\|\varphi_{\bar{x}}\|^2_{Ll_2(w_h)}+\|U_t\|^2_{L_2(w_{h\tau})}\le \text{sabit},$$

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 3.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır, ama Teorem 3.2 de bulunan $w_{i,k+1}$ in yerine

$$V_{i,k+1}=[\varphi(U)]_t+[\varphi(u_a)]_t\,\frac{x_i-b}{b-a}-[\varphi(u_b)]_t\,\frac{x_i-a}{b-a}$$

almak gerekir.

Rankine-Hugoniot Koşulu darbe dalgalarının mevcut olduğu problemlerde ortaya çıkar. Bu problemler genelde hiperbolik türdendir.

$$\frac{1}{2}\|U\|^2_{L_2(\omega_h)}+\left\|\hat{U}_{\bar{x}}\right\|^2_{L_2(\omega_{h\tau}),\varphi'}\le sabit. \qquad (3.26)$$

$$u_t=\varphi_{x\bar{x}}(\hat{U})-\psi(\hat{U})$$

denklemini $\hat{W}$ ile çarpıp $i,\ k$ üzerinden toplayalım.

$$\tau h\sum_{i,k}(\hat{W},U_t)=\tau h\sum_{i,k}(\hat{W},\varphi_{x\bar{x}}(\hat{U}))-\tau h\sum_{i,k}(\hat{W},\psi(\hat{U})) \tag{3.27}$$

Burada,

$$\hat{W}=\hat{U}+\frac{x_i-b}{b-a}u_a(t_{k+1})-\frac{x_i-b}{b-a}u_b(t_{k+1}) \tag{3.28}$$

olmaktadır.

$$a(a-b)=\frac{1}{2}\left[a^2-b^2+(a-b)^2\right]$$

formülünü ve (3.28) ile kullanarak (3.27) yi aşağıdaki gibi dönüştürelim,

$$\tau h\sum(\hat{W},U_t)=\tau h\sum_{I,K}\hat{U},U_t)+I_1$$

$$=\frac{h}{2}\sum_{I}(U,U)^{I,[T/\tau]}-\frac{h}{2}\sum_{I}(U,U)^{I,0}+I_1+\tau h\sum_{I,K}\frac{(\hat{U}-U)^2}{\tau}, \tag{3.29}$$

Burada

$$I_1=\tau h\sum_{I,K}\left[\frac{x_i-b}{b-a}(u_a(\hat{t}),U_t)-\frac{x_i-a}{b-a}(u_b(\hat{t}),U_t)\right]$$

(3.27) ye green formülünü uygularsak,

$$\tau h\sum_{I,K}(\hat{W},\varphi_{x\bar{x}}(\hat{U}))=-\tau h\sum_{I,K}(\hat{U}_{\bar{x}},\varphi_{\bar{x}}(\hat{U})]+I_2+I_3\ , \tag{3.30}$$

$$I_2=\tau h\sum_{I,K}\left[\left(\frac{(x_i-a)\bar{x}}{b-a},\varphi_{\bar{x}}(\hat{U})\right)u_b,(t)-\left(\frac{(x_i-b)\bar{x}}{b-a},\varphi_{\bar{x}}(\hat{U})\right)u_a(t)\right],$$

$$I_3=\tau h\sum_{K}(\hat{W}\,|_n,\varphi_x(\hat{U})\,|_{n-1})-\tau\sum_{K}(\hat{W},\varphi_x(\hat{U}))\,|_0 \tag{3.31}$$

olur. (3.30), (3.31) i (3.29) da yerine yazarsak

$$\frac{h}{2}\sum_{I}(U,U)^{t=T}+\tau h\sum_{I,K}(\hat{U}_{\bar{x}},\varphi_{\bar{x}}(\hat{U})$$

$$\leq\frac{h}{2}\sum_{I}(U,U)^{t=0}+\tau h\sum_{I,K}(\hat{U},\psi(\hat{U}))+I_1+I_2+I_3+I_4$$

elde ederiz. Burada

$$\tau h\sum_{I,K}(\hat{W},\psi(\hat{U})) = \tau h\sum_{I,K}(\hat{U},\psi(\hat{U})) + I_4$$

şimdi I_j, $(j = 1,2,3,4)$ leri hesaplayalım. $x_i = a,\ \ x_i = b$ noktalarında $\hat{W} = 0$ olduğundan $I_3 = 0$ olur.

$$I_2 = \tau h\sum_{I,K}\left[u_a(\hat{t})((x_i - b)_{\bar{x}}, \varphi_{\bar{x}}(\hat{U}))\right) - u_b(t)\left((x_i - a)_{\bar{x}}, \varphi_{\bar{x}}(\hat{U})\right](b-a)^{-1} |$$

$$\leq 4T(b-a)^{-1}\ \max\left\{|u_a|,|u_b|,|\varphi(u_{a)}|,|\varphi(u_b)|\right\} \leq sabit\,;$$

$$I_4 = \tau h\sum_{I,K}\left(\frac{x_i - b}{b-a}u_a(t) - \frac{x_i - a}{b-a}u_b(t), \hat{\Omega}_{\bar{x}}\right)$$

$$\leq 2\max\left\{|u_a|,|u_b|\right\}\ \max_{0\leq u\leq m}\ \psi(u)\ \ mes\ D\,;$$

$$\left|\tau h\sum_{I,K}(\hat{U},\psi(\hat{U}))\right| = \left|\tau h\sum_{I,K}(\hat{U},\hat{\Omega}_{\bar{x}})\right| \leq (b-a)\|U_x\|$$

$$\leq \left\|\hat{U}_x\right\|^2 \psi^2(u)(b-a)^2 T + \frac{(b-a)}{2}$$

I_1 i değerlendirirken aşağıdaki eşitliği kullanalım,

$$\tau\sum_K (g(t),U_t) = \tau\sum_K (g(t)U)_t - \tau\sum_K U g_t(t)$$

$$= g(t)U\,|_0^l - \tau\sum_K U[g(t)]_t \qquad (3.32)$$

(3.32) yi dikkate alarak I_1 için aşağıdaki değerlendirmeyi elde ederiz,

$$|I_1| \leq (b-a)\left[\max\{u_a U\,|_{t=T} - u_a U\,|_{t=0}\} + M\max\{u_a(T) - u_a(0)\}\right]$$

$$= 2(b-a)M^2 + M^2$$

$$= M^2(2(b-a)+1) = sabit.$$

Bu değerlendirmeleri dikkate alarak,

$$\frac{1}{2}\|U\|^2_{L_2(\omega h)} + \left\|\hat{U}_{\bar{x}}\right\|^2_{L_2(\omega h\tau),\varphi'} \leq \frac{1}{2}\|U_0\|^2_{L_2(\omega h)} + sabit.$$

eşitsizliğini sağlamış oluruz.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmadaki elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

1. Dejenere olan parabolik tür denklem için yarım eksende yazılmış problemin gerçek çözümü bulunmuş ve çözümün diferansiyellenebilme özellikleri incelenmiştir.

2. Esas problemde bulunmayan avantajlara sahip yardımcı problem önerilmiş ve söz konusu problemin çözümü ile esas problemin zayıf gerçek çözümü elde edilmiştir.

3. Bulunan çözümün integral anlamında zayıf çözüm olduğu ispatlanmıştır.

4. İncelenen problemin çözümüm için sonlu farklar yöntemi incelenmiş ve yaklaşık çözüm için bazı değerlendirmeler yapılmıştır. Söz konusu eşitsizlikler yardımı ile yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaklığı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Abramov, A. A., Gaipova, A. N., On the Numerical Solution of Some Sets of Differential Equations for Problems of Stefan’s Type, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 11, no. 1, 162-170, 1971.

[2] Antoncev, S. N., On the Localization of Solutions of Non-linear Degenerate Elliptic and Parabolic Equations, Soviet Mathematics. Doklady, vol.24, 420-424, 1981.

[3] Baklanovskaya, V. F., The Numerical Solution of a Nonstationary Filtration Problem, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 1, no. 1, 114-122, 1962.

[4] Barenblatt, G. I., Entov, V. M., Rijik V. M., The Theory of Nonstationary Filtration of Oil and Gas, Nedra Pub.,

[5] Barenblatt, G. I., Vishik, M. I., On Finite Velocity of Progagation in Problems of Non-stationary Filtration of a Liquid or Gas , Prikladnaja Matematika i Mehanika, vol 20, 411-417, 1956.

[6] Budak, B. M., Uspenskii, A. B., A Difference Method with Front Straightening for Solving Stefans-Type Problems, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 9 , no. 6, 83-103, 1969.

[7] Gelfond, I. M., Shilov, G. E., Generalized Functions, Academic Press, New York, 1968.

[8] Kalashnikov, A. S., On a Non-linear Equation Arising in the Theory of Non-Stationary Filtration, Trudy. Sem. Petrovskaya 137-146, 1978.

[9] Kamenomostskaya, S. L., On Stefans’s Problem, Mathematics Sbornik, vol.53, 489-514, 1961.

[10] Lions, J. L., Some Methods of Solution of Non-linear Boundary Value Problem, Mir, 1972.

[11] Martinson, L. K., Pavlov, K. B. On the Problem of Spatial Localitization of Thermal Perturbations in the Theory of Non-linear Heat Conduction, USSR Computational Math and Math Physics, vol. 12, no. 4, 261-268, 1972.

[12] Oleinik, O. A., A method of Solution of the General Stefan Problem, Soviet Mathematics. Doklady, vol. 1, 1350-1354, 1960.

[13] Rasulov, M. A., A Numerical Method of Solving a Parabolic Equation with Degeneration, Differential Equations, vol. 18, no. 8, 1418-1427, 1992.

[14] Rasulov, M. A., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin, İstanbul, 2012.

[15] Schwartz, L., Mathematical Methods for Physical Sciences, 1965.

[16] Samarskii, A. A., Theory of Difference Schemes , Moscow, Nauka, 1977.

[17] Samarskii, A. A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., Mikahailov, V.P., Blow-up Quasi Linear Parabolic Equations, Moscow, Nauka, 1987.

[18] Sinsoysal, B., A New Numerical Method for Stefan-Type Problems in a Class of Unsmooth Functions, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, vol. 5 no. 27, 1323-1335, 2010.

[19] Sinsoysal, B., The Analytical and a Higher-Accuracy Numerical Solution of Free Boundary Problem in a Class of Discontinuous Functions, Mathematical Problems in Engineering, vol.2012, doi: 10.1155/2012/791026, 2012.

[20] Sobolev, S. L., Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, 3rd ed., Providence, 1991

[21] Tikhonov, A. N., Samarskii A. A., Equations of Mathematical Physics Dover Publications, New York, 1963.

[22] Zel’dovich, Y. B., Raizer, Y. P., Physics of Shock Wawes and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena, Mineola, N. Y., Dover Publications, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında bir memur ailenin tek çocuğu olarak İstanbul'da doğdu. İlköğretim ve ortaöğretim eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2014 yılında Beykent Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar bölümünü bitirdi. 2014 yılında Beykent Üniversitesi'nde Uygulamalı Matematik Bölümünde Yüksek Lisans öğrencisi olarak eğitimine devam etmektedir.

Oğuzhan GÜZENGİL