

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**BİR BOYUTLU SKALER KORUNUM KURALI İÇİN  
HAREKETLİ CEPHENİN İZLENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:  
**Mehmet Reşit BİNGÖL**

İSTANBUL, 2016

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**BİR BOYUTLU SKALER KORUNUM KURALI İÇİN  
HAREKETLİ CEPHENİN İZLENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

**Mehmet Reşit BİNGÖL**

Öğrenci No:

130860003

Danışmanı:

Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İSTANBUL, 2016

## YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Bir Boyutlu Skaler Korunum Kuralı İçin Hareketli Cepenin İzlenmesi**” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 07.01.2016

Mehmet Reşit BİNGÖL



T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 130860003 no'lu Mehmet Reşit BİNGÖL'in 07/01/2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavı<sup>1</sup> sonucunda 45 dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında<sup>2</sup> oybirliği / oyçokluğu ile, kabul... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

---

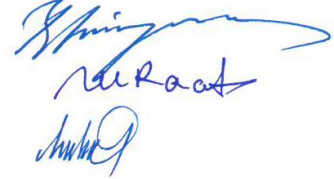
**Anabilim Dalı** : Matematik Bilgisayar  
**Programı** : Uygulamalı Matematik  
**Tez Başlığı<sup>3</sup>** : Bir Boyutlu Skaler Korunum Kuralı İçin Hareketli Cephenin İzlenmesi

**Tez Sınav Jürisi**

**Öğretim Üyesi**

**İmza**

**Danışman** : Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL  
**Üye** : Prof. Dr. Mahir RESULOV  
**Üye** : Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR



<sup>1</sup> Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

<sup>2</sup> Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında “kabul”, “düzeltme” veya “red” kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

<sup>3</sup> İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanma sürecinde her türlü yardımını ve desteğini esirgemeyen, tüm kolaylığı sağlayan kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV ve değerli tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL 'a teşekkürlerimi sunarım. Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her daim destek olan ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan sevgili annem Hadice BİNGÖL'e teşekkürlerimi borç bilir, şükranlarımı sunarım.

Bu çalışmanın tüm safhalarında bana devamlı yardımcı olan ve motive eden değerli eşim Dilek BİNGÖL'e derin sevgilerimi sunarım. Ayrıca, bu süreçte bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım sevgili arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

Mehmet Reşit BİNGÖL

İstanbul, 2016

Adı Soyadı : Mehmet Reşit BİNGÖL  
Danışmanı : Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL  
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans Tezi, 2016  
Alanı : Uygulamalı Matematik  
Anahtar Kelimeler : Kuazi Lineer Hiperbolik Denklemler, Hareket Eden Cepheler,  
Zayıf Çözüm

## ÖZ

### BİR BOYUTLU SKALER KORUNUM KURALI İÇİN HAREKETLİ CEPHENİN İZLENMESİ

Tezde iki fazlı sıvıların tabakalı ortamda akışını ifade edebilen denklemlerin gerçek çözümü elde edilmiş, çözümün özellikleri incelenmiştir. Bu amaçla tezin birinci bölümünde sıkışabilir sıvıların ve iki fazlı sıvıların tabakalı ortamlardaki hareket denklemleri çıkarılmıştır.

Tezin ikinci kısmında birinci mertebeden nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış başlangıç değer probleminin (başlangıç fonksiyonu sürekli ve parçalı sürekli olduğu durumlar için) gerçek çözümü yeni bir yöntemle elde edilmiş ve çözümün diferansiyellenebilme özellikleri incelenmiştir.

Nihayet, tezin üçüncü bölümünde ikinci bölümde incelenen yöntem iki fazlı sıvıların hareketini ifade eden matematiksel modelin teorik incelenmesi için uygulanmıştır. Ayrıca, bir laboratuvarında yapılan bir deneyin modeli yazılmış ve petrolün süzülme sürecindeki susuz ve sulu periyotları da incelenmiştir.

Name and Surname : Mehmet Reşit BİNGÖL  
Supervisor : Assoc.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL  
Type and Date : Master, 2016  
Scope : Applied Mathematics  
KeyWords : Kuazi-Linear Hyperbolic Equations, Moving Fronts, Weak Solutions

## **ABSTRACT**

### **TRACKING OF MOVING FRONT ONE DIMENSIONAL SCALAR CONSERVATION LAW**

In this thesis, the exact solution of the equation describing the motion of a two-phase fluid in a porous medium is obtained, and its properties are investigated. To this end, in the first section, the equations describing the motion of compressible fluids and two-phase mixtures in a porous medium are derived.

In the second section, a new method to find the exact solution of the initial value problem of a nonlinear partial differential equation with continuous and piecewise continuous initial function is considered, and the differentiability properties of the solution are investigated.

Finally, in the third chapter, the method discussed in the second chapter is applied for the theoretical investigation of the motion of a two-phase mixture. Additionally, a model has been developed for a laboratory experiment, and the waterless and dry periods in the filtration process of oil have been investigated.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa No.
<b>ÖZ</b> .....	i
<b>ABSTRACT</b> .....	ii
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	iii
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b> .....	iv
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
1.1 Sıkışabilir Sıvıların Esnek-Elastik Tabakalı Ortamdaki Hareket Denklemi .....	1
1.2 İki Fazlı Sıvıların Tabakalı Ortamda Birlikte Hareket Denklemi .....	2
<b>2. BİRİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ...</b>	<b>5</b>
<b>ÇÖZÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ</b> .....	<b>5</b>
2.1 Yardımcı Problem ve Çözümü .....	11
2.2 Sıçrayışın Kurulması ve Genişletilmiş Çözüm.....	14
2.3 Süreksiz Başlangıç Koşul .....	19
<b>3. TABAKALI ORTAMDA PETROLÜN SU İLE ÇIKARILMASI PROBLEMİNİN</b>	
<b>ÇÖZÜMÜ</b> .....	<b>33</b>
3.1 Cauchy Problemi .....	33
3.2 Yardımcı Problem .....	34
3.3 Ön Cephenin Bulunması (Front Tracking).....	35
3.4 Başlangıç-Sınır Değer Problemi.....	37
3.5 Hareket Eden Cephenin Geliştirilmesi .....	39
3.6 Laboratuvar Deneylerinin Modellenmesi.....	41
<b>4. SONUÇLAR</b> .....	<b>45</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>46</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>47</b>



## ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No.

Şekil 2.1: $u > 0$ için karakteristikler .....	6
Şekil 2.2: Çözümün zamana göre değişmesi.....	6
Şekil 2.3: .....	10
Şekil 2.4: $ABC$ eğrisel bölgesi.....	17
Şekil 2.5: Karakteristikler .....	20
Şekil 2.6: $u(x,t)$ fonksiyonu, $u_1 < u_2$ .....	21
Şekil 2.7: $u_1 > u_2$ durumunda karakteristikler .....	24
Şekil 2.8: $u_1 > u_2$ durumunda çözümün profili.....	24
Şekil 2.9: $A'BDD'$ bölgesi.....	25
Şekil 2.10: Zayıf çözüm .....	26
Şekil 2.11: Başlangıç Profilinin Grafiği ve Karakteristikler .....	30
Şekil 3.1: Deneyle ilgili $k_w(\sigma)$ , $k_p(\sigma)$ ve $F_w(\sigma)$ fonksiyonları .....	43
Şekil 3.2: Aynı $t$ zamanlarındaki (soft çözüm) $\sigma(x,t)$ fonksiyonunun gerçek çözümü.....	43
Şekil 3.3: Su satürasyonları 1) $T = 10^5$ sn, 2) $T = 1.5 \cdot 10^5$ sn, 3) $T = 2 \cdot 10^5$ sn.....	44

## 1. GİRİŞ

Bu bölümde, sıkışabilir sıvıların (örneğin petrolün) ve iki fazlı sıvıların esnek plastik ortamda hareket denklemlerini çıkaracağız.

### 1.1 Sıkışabilir Sıvıların Esnek-Elastik Tabakalı Ortamdaki Hareket Denklemi

Yeraltı hidrodinamik teorisinden bilindiği üzere (bkz. [4] ) süreklilik denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

olmaktadır. Burada  $m$  -tabakalı ortamın gözenekliliği,  $\rho$  -sıvının yoğunluğu,  $v$  - akışkanın tabakalı ortamdaki akış (süzülme) hızını göstermektedir.

[4] de olduğu gibi Darcy kuralı

$$v = -\frac{\kappa}{\mu} \text{grad } p \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\kappa$  - geçirgenlik katsayısı,  $\mu$  - petrolün viskozitesi,  $p$  - basınç dır.

Sıvının zayıf sıkışabilir olduğunu varsayarsak, durum (hal) denklemi

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \beta_f (p - p_0)$$

şeklinde olur. Burada,  $\beta_f$  -sıkışabilme katsayısı,  $\rho_0$ ,  $p_0$  ise sırasıyla basınç ve sıvının başlangıç yoğunluğunu ifade eder.

Tabakalı ortamın da zayıf sıkışabilir olduğunu kabul edersek, gözeneklilik katsayısını, deneylerin sonucuna dayanarak birinci yaklaşımda  $\sigma$  ya (gerginlik tensörüne) bağlıdır, yani tabakalı ortamı etkileyen  $m = m(\sigma)$  olduğu kabul edilmektedir. Tabakalı ortam esnek ise

$$\frac{m}{m_0} = 1 - \beta_r (\sigma - \sigma_0) \quad (1.3)$$

dır. Burada  $\beta_r$  -tabakalı ortamın sıkışabilme katsayısı,  $\sigma_0$  ve  $m_0$  yine de başlangıçtaki gerginlik tensörünün ve gözenekliliğin başlangıç değeri olmaktadır.

Derin katlardaki tabakalı ortamlarda toplam gerginlik “sıvı-tabakalı ortam” sisteminde sabit kaldığından,

$$\sigma + p = \sigma_0 + p_0$$

eşitliği korunur. Buradan

$$\sigma - \sigma_0 = -(p - p_0)$$

olur. Bu ifadeler ve (1.2) ifadesi (1.1) denkleminde yerine konulduğunda ve  $\beta(p - p_0)$  büyüklüğünün etkisinin az olması koşulunu da dikkate alarak, sıvıların derin tabakalı ortamlardaki hareketini incelemek için  $p(r, t)$  basınç fonksiyonu için

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta_p \quad (1.4)$$

elde ederiz. Burada,  $\kappa$  klasik ısı denkleminde olan ısı geçirme katsayısına benzer olarak pseudo geçirgenlik olmaktadır ve

$$\kappa = \frac{k}{\mu} (m_0 \beta_f + \beta_r)$$

dır. Diğer taraftan, tabakalı ortamın plastik olması nedeniyle deformasyon sonucu önceki şekli olamaz. Bu durumda

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m_0 \beta_r \frac{\partial \sigma}{\partial t} = m_0 \beta_r \frac{\partial p}{\partial t}$$

ifadesi  $\sigma$  nın artması ile (basıncın azalması) hesabına sistemin toplam gerginlik durumu değişmemektedir ve

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m_0 \beta_{r_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = m_0 \beta_{r_1} \frac{\partial p}{\partial t}$$

burada  $\beta_{r_1} \neq \beta_r$  dir.

## 1.2 İki Fazlı Sıvıların Tabakalı Ortamda Birlikte Hareket Denklemi

Petrol ve suyun gözenekli ortamdaki eşzamanlı hareketinin matematiksel modelinin, iki temel fizik kanununa dayandığı bilinir, bunlardan biri petrol ve su kütlelerinin korunumu kanunu, diğeri ise Darcy kanunudur, [4]. Bazı fiziksel varsayımlar dahilinde, iki fazlı sıvının gözenekli ortamdaki hareketi aşağıdaki denklemler sistemi ile tanımlanır

$$m \frac{\partial \sigma_\ell}{\partial t} + \text{div}(u_\ell) = 0, \quad (1.5)$$

$$u_\ell = -\frac{kk_\ell(\sigma)}{\mu_\ell} \text{grad}P_\ell, \quad (1.6)$$

$$P_p - P_w = \wp_k(\sigma_w), \quad (1.7)$$

$$\sigma_p + \sigma_w = 1, \quad (\ell = w, p). \quad (1.8)$$

Burada  $\sigma_\ell$ , ve  $P_\ell$ , ( $\ell = w, p$ ) sırasıyla su ve petrol ile doyma fonksiyonları ile su ve petrol fazlarının basınçlarının bilinmeyen fonksiyonlarıdır.  $u_\ell$ , su ve petrolün hareket hızı,  $k_\ell$ , ( $\ell = w, p$ ) ise petrol ve suyun oransal geçirgenliğidir,  $\wp_k$  su ve petrol arasındaki kapiler basınç,  $m$  ve  $k$  ise sırasıyla gözeneklilik ve geçirgenliktir. Basitlik için  $\sigma_w \equiv \sigma$  olsun. İstismarın doğasına uygun olarak (1.5)-(1.8) denklemler sistemine başlangıç ve sınır koşulları eklenir.

(1.6) da (1.7) yi göz önüne alarak,

$$k \left( \frac{k_w(\sigma)}{\mu_w} + \frac{k_p(\sigma)}{\mu_p} \right) \text{grad} P_w + \frac{k_p(\sigma)}{\mu_p} \text{grad} \wp_k(\sigma) = -u$$

elde ederiz. Burada  $u = u_w + u_p$  dir. Buradan

$$\text{grad} P_w = \frac{-u}{k \left( \frac{k_w(\sigma)}{\mu_w} + \frac{k_p(\sigma)}{\mu_p} \right)} - \frac{\frac{k_p(\sigma)}{\mu_p} \text{grad} \wp_k(\sigma)}{k \left( \frac{k_w(\sigma)}{\mu_w} + \frac{k_p(\sigma)}{\mu_p} \right)} \quad (1.9)$$

olur. Son ifadeyi suyun korunumu kanununun denkleminde yerine koyarak

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div} \left\{ \frac{k k_w(\sigma)}{\mu_w} \left[ \frac{-u}{k \left( \frac{k_w(\sigma)}{\mu_w} + \frac{k_p(\sigma)}{\mu_p} \right)} - \frac{\frac{k_p(\sigma)}{\mu_p} \text{grad} \wp_k(\sigma)}{k \left( \frac{k_w(\sigma)}{\mu_w} + \frac{k_p(\sigma)}{\mu_p} \right)} \right] \right\} = 0 \quad (1.10)$$

elde ederiz. Aşağıdaki biçimde tanımlanan Buckley-Leverett fonksiyonlarını kullanarak

$$F_w(\sigma) = \frac{\frac{k_w(\sigma)}{\mu_w}}{\frac{k_w(\sigma)}{\mu_w} + \frac{k_p(\sigma)}{\mu_p}}, \quad F_p(\sigma) = \frac{\frac{k_p(\sigma)}{\mu_p}}{\frac{k_w(\sigma)}{\mu_w} + \frac{k_p(\sigma)}{\mu_p}},$$

$$F_w(\sigma) + F_p(\sigma) = 1$$

(1.10) denklemi

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div}(u F_w(\sigma)) + \text{div} \left( \frac{k_p(\sigma)}{\mu_p} F_w(\sigma) \text{grad} \wp_k(\sigma) \right) = 0, \quad (1.11)$$

şeklinde yazılabilir, [1]. (1.3)-(1.8) problemi uygun başlangıç ve sınır koşulları ile kapiler basıncın göz önüne alındığı durumda [2] ve [4] de detaylı çalışılmıştır.

Bir boyutlu durumda kapiler basınç  $\wp_k(\sigma) = 0$  ise, (1.11) denklemini birinci mertebeden nonlinear bir denkleme dönüştür, [2]

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u(t) \frac{\partial F_w(\sigma)}{\partial x} = 0. \quad (1.12)$$

Karakteristikler yöntemi ile elde edilen (1.12) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi kapalı bir forma sahip olur

$$\sigma(x, t) = f \left( x - \frac{F'_w(\sigma)}{m} \int_0^t u(\eta) d\eta \right). \quad (1.13)$$

Burada  $f$  türevlenebilir herhangi bir fonksiyondur. Ancak (1.13) den bilinmeyen fonksiyona ilişkin açık bir formül elde etmek genellikle mümkün değildir. Elde edilen (1.13) fonksiyonel bağıntısını (1.12) denkleminin alternatif biçimi olarak adlandıracağız.

$\tau = \frac{1}{m} \int_0^t u(\eta) d\eta$  dönüşümü yardımıyla, (1.14) denkleminin daha basit olarak

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial F_w(\sigma)}{\partial x} = 0 \quad (1.14)$$

şeklinde yazılabileceği kolaylıkla gösterilebilir. (1.14) denklemini birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem olmaktadır. Burada  $F_w(\sigma)$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

1.  $\sigma \geq 0$  için,  $F_w(\sigma) \geq 0$  dır,
2.  $\sigma \geq 0$  için  $F'_w(\sigma) \geq 0$  dır,
3.  $F''_w(\sigma)$  işaret değiştiren fonksiyondur, yani  $F_w(\sigma)$  fonksiyonun hem konveks hem de konkav kısımlara sahiptir.

(1.6) denklemini aşağıdaki başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyeceğiz

$$\sigma(x, 0) = \begin{cases} \sigma_0, & x \neq 0, \\ \sigma_1, & x = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

(1.6), (1.15) problemini incelemeye başlamadan önce (1.14) denkleminin çözümünün özelliklerini inceleyelim.

## 2. BİRİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Genelliği bozmaksızın aşağıdaki gibi bir problemi inceleyelim

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (2.2)$$

Burada  $F(u)$ , yukarda bahsedilen  $F_w(u)$  için söylediğimiz özelliklere sahip bilinen bir fonksiyondur.  $u_0(x)$  ise sistemin başlangıç durumunu ifade eden verilen bir fonksiyonu göstermektedir. Ayrıca,  $\text{supp } u_0(x)$  in sonlu bir küme oluşturduğunu varsayalım.

(2.1) denklemindeki nonlineerliğin etkisini incelemek için, önce sözkonusu denklemi (2.2) başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. Bunun için (2.1), (2.2) probleminin sürekli  $u(x,t)$  çözümüne sahip olduğunu varsayalım.  $(x,t)$  düzleminde ve

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (2.3)$$

eşitliği ile tanımlanan  $x = x(t)$  eğrisini gözönüne alalım. Sözkonusu eğriyi önceden bulmak imkansızdır. Çünkü (2.3) denklemi bilinmeyen  $u$  fonksiyonunun bu eğri üzerindeki değerini içermektedir. (2.3) eğrisi üzerinde (2.1) denklemi

$$\frac{du}{dt} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Sonuncu denklemden görüldüğü gibi  $u(x,t)$  fonksiyonu  $x = x(t)$  eğrisi üzerinde sabit değer alır, yani  $u = \text{sabit} = c$  dir. Böylelikle, (2.1) denkleminin genel çözümünün bulunması  $(x,t)$  düzleminde tanımlanan ve eğimi  $u(x,t)$  olan eğriler ailesinin bulunmasına indirgenilir. Bu eğriler (2.1) denkleminin karakteristikleri olmaktadır. (2.1) denkleminin karakteristikler ailesinin grafikleri Şekil 2.1 de gösterilmiştir.

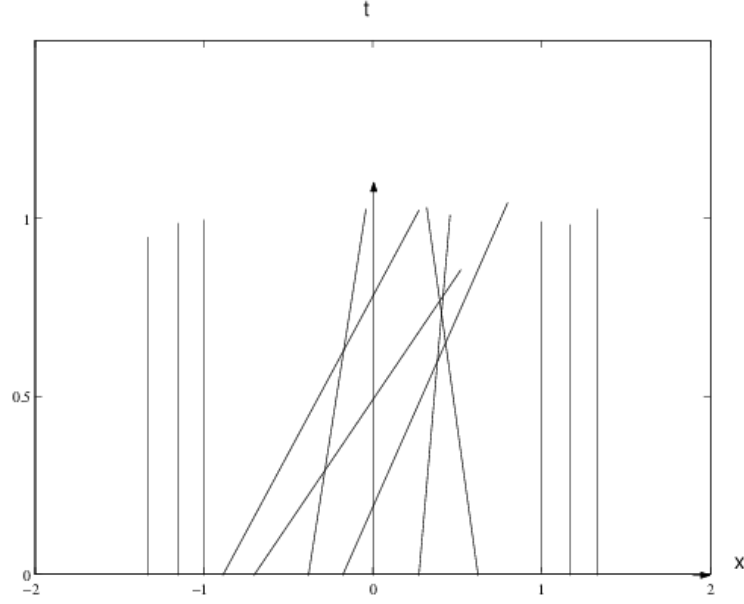
Diğer bir deyişle, (2.1) denkleminin çözümü aynı zamanda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{du}{dt} = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

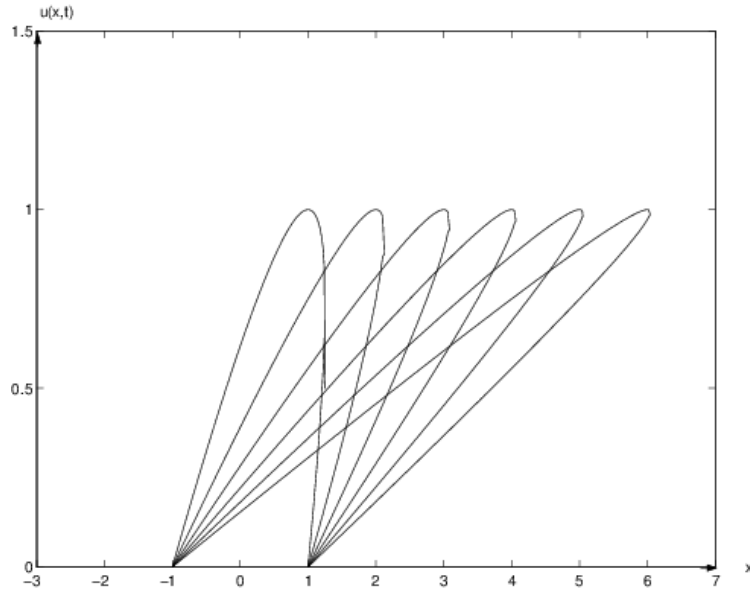
adi diferansiyel denklemler sisteminin de çözümü olmaktadır ve tersine (2.4) ün herbir çözümü (2.1) denkleminin de çözümü olmaktadır. (2.4) denklemler sistemine aşağıdaki

$$x|_{t=0} = \xi, \quad u|_{t=0} = u(\xi) \quad (2.5)$$

başlangıç koşulları ekleyelim. Burada  $\xi$  eğimi  $u(x,t)$  olan herhangi bir doğrular ailesinin  $ox$  eksenini ile kesiştiği noktasının apsisini gösterir.



**Şekil 2.1:  $u > 0$  için karakteristikler**



**Şekil 2.2: Çözümün zamana göre değişmesi**

(2.4), (2.5) probleminin çözümü

$$u(x,t) = u_0(\xi), \quad (2.6)$$

$$\xi = x - ut \quad (2.7)$$

olmaktadır. Olayın dinamiğini detaylı şekilde incelemek için  $F(u) = \frac{u^2}{2}$  özel durumunu ve  $u_0(x)$  için de

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Fonksiyonunu göz önüne alalım. (2.8) dikkate alınırsa çözüm için son olarak

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 - (x - ut)^2, & |x - ut| < 1 \\ 0, & |x - ut| \geq 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

ifadesi elde edilir. (2.9) ü hareket eden  $\xi$  koordinatında

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 - \xi^2, & |\xi| < 1 \\ 0, & |\xi| \geq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde de yazabiliriz. (2.10) ifadesi (2.1), (2.2) probleminin stasyoner çözümü olmaktadır. Görüldüğü gibi (2.9) ifadesi  $u(x,t)$  fonksiyonu için kapalı bir fonksiyon oluşturmaktadır ve sözkonusu kapalı fonksiyondan  $u(x,t)$  çözümü için açık şekilde bir ifade

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{(2xt - 1) \pm \sqrt{1 - 4xt + 4t^2}}{2t^2}, & |x - ut| < 1 \\ 0, & |x - ut| \geq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

elde edebiliriz.  $u(x,t)$  fonksiyonunun zamanın çeşitli değerlerinde  $x$  e göre değişmesi Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Genelde, dalgaların karakteristik özelliği herhangi bir sinyalin herhangi bir ortamda sonlu hızla dağılmasıdır. Hiperbolik tür denklemlerle ifade edilen dalgalarda bu olay karakteristikler ile bağlı olmaktadır.  $(x, t)$  düzleminde herbir karakteristik  $x$  uzayında bir dalgayı ifade eder ve çözümün karakteristik üzerindeki değişmesi ise dalganın fiziksel dağılmasına karşılık gelir. Bu anlamda, (2.4) ün birinci denklemi şöyle yorumlanabilir:  $u$  nun çeşitli değerleri  $u$  hızı ile "dağılmaktadır". Dolayısıyla, problemin çözümünün grafiği herbir  $t$  için başlangıç profilinin, yani  $u = u_0(x)$  eğrisinin herbir noktasının  $ut$  kadar sağa kaydırılması ile elde edilmektedir öyle ki, bu mesafeler çeşitli " $u$ " lar için farklı olmaktadır. Şekil 2.2 den görüldüğü gibi,  $u > 0$  olduğu durumda  $u$  nun büyük değerleri,  $u$  nun küçük değerlerine oranla daha hızlı dağılmaktadır. Bu da çözümün profilinde bir bozulmaya neden olur.  $u < 0$  olduğu durumda ise  $u$  nun büyük değerleri küçük değerlerine oranla daha zayıf şekilde dağılmaktadır. Bu ise çözümün  $ox$  ekseninin negatif yönünde bozulmasına neden olur. Böylelikle dalganın  $x$  e göre azalan fonksiyon olduğu bölgelerde kırılması kaçınılmazdır ve çözümde çokdeğerlilik ortaya çıkar. Kırılma (breaking) dalganın profilinde ilk kez dik teğetin olduğu  $t = T_0$  anında meydana çıkar. Sözkonusu  $T_0$  değerini bulalım. (2.8) den görüldüğü gibi başlangıç profili hem negatif hem de pozitif eğime sahiptir. Örneğin,  $x = 1$  noktasında başlangıç profili negatif eğime sahiptir. Gerçekten de,  $u_x(x, 0) = -2x|_{x=1} = -2 < 0$  dır. Açıktır ki,  $u(x, t)$  fonksiyonunun  $x \geq 1$  değerlerinde çokdeğerli olmaması için  $u_x(1, t) > 0$  eşitsizliğinin korunması gerekmektedir. Bu eşitsizliğin olduğu minimum zaman değeri, aranan  $T_0$  değeri olmaktadır ve  $u_x(1, t)$  nin negatif değerden pozitif değerlere dönüşmesi için  $u_x(1, t) = \infty$  noktasından geçmektedir. (2.11) formülünden

$$u_x(1, t) = \frac{1}{2t^2} \left[ 2t \pm \frac{2t}{1-2t} \right]$$

elde ederiz. Buradan  $T_0 = 0.5$  olarak bulunur. Nonlineer hiperbolik denklemlerin çözümünde oluşan singülerliğin yapısı [3], [6] da incelenmiştir.

Çözümün çokdeğerli olması fiziksel açıdan kabul edilemez. Fiziksel açıdan anlamlı olan bir değerli ve sınırlı çözümlerdir. Bazı fiziksel yaklaşımlara göre çözümde kırılma noktaları oluştuğunda, (2.1) denklemi artık fiziksel olayı gerçek şekilde tam olarak ifade etmemektedir. Bu durumda problemi fiziksel açıdan bir daha incelemek, ek yaklaşımları dikkate almak ve denklemi yeniden incelemek gerekmektedir. Ama, bazı durumlarda

çokdeğerli sürekli çözümleri, süreksiz çözümlerin mevcut olduğunu varsayarak kurtarmak mümkündür. Bu durumda sürekli çokdeğerli çözümler bir değerli, lakin 1.tür süreksizliğe sahip çözümlere dönüştürülür. Bu işlevler ise matematiksel çözüm kavramının öyle biçimde genişletilmesini gerektirir ki, süreksiz fonksiyonlar da bilinen anlamda çözüm olabilsinler. Bu tür genişletilme genelleştirilmiş (veya zayıf çözüm) kavramı içermekle gerçekleştirilebilir.

Bazı fiziksel olaylarda rastlanan darbe dalgaları vardır ki, burada viskozite ve sıcaklık çok önemli rol oynamaktadır. Darbe dalgalarının haricinde sözkonusu etkileri dikkate almamak da mümkündür. Genelleştirilmiş teoride viskozite dikkate alınmadığı durumda sözünü ettiğimiz darbe dalgası fiziksel olarak çözümde bulunan sıçrayışla ifade edilmektedir. Bu ise kendi sırasında sıçrayış üzerinde akış parametrelerini birbiriyle bağlayan koşulun yazılmasını gerektirir.

Böylelikle, matematiksel açıdan genelleştirilmiş çözümü iki kısımdan, ilki sürekli diferansiyellenebilen ve (2.1) denklemini sağlayan, diğeri ise Rankine-Hugoniot koşulunu koruyan sıçrayıştan oluşan fonksiyon olarak yorumlamak mümkündür.

**Tanım 2.1** (2.2) koşulunu koruyan,  $(x, t)$  uzayının üst yarı kısmında her iki değişkene göre diferansiyellenebilen ve  $t + |x|$  nin büyük değerlerinde sıfır olan herhangi bir  $\varphi(x, t)$  temel fonksiyonları için

$$\iint_D \left\{ \varphi_t(x, t)u(x, t) + \varphi_x(x, t) \frac{u^2(x, t)}{2} \right\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\varphi(x, 0)dx = 0 \quad (2.12)$$

integral eşitliğini sağlayan  $u(x, t)$  fonksiyonuna (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümü denir.

$u(x, t)$  ve  $\frac{u^2(x, t)}{2}$  fonksiyonları sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olduğunda (2.1) ile (2.12) denklemleri denk olmaktadır. Genelde ise, (2.12) denklemini koruyan fonksiyonlar sınıfı (2.1) denklemini koruyan fonksiyonlar sınıfından daha geniş sınıf oluşturmaktadır. (2.12) denklemini koruyan fonksiyonlar süreksiz de olabilirler ve hatta onların diferansiyellenebilir olmaları istenmeyebilir. (2.12) denklemini koruyan çözümlere (2.1), (2.2) probleminin genelleştirilmiş çözümü de denir, [6], [7].

(2.1) denkleminin zayıf çözümünün diğeri tanımını "suni viskozite" kavramı dahil ederek gerçekleştirebiliriz. Sözkonusu yaklaşım olayın fiziksel yapısına da uygun olmaktadır. Bu durumda (2.1) denkleminin yerine küçük  $\mu > 0$  parametresine bağlı olan

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + u_\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2}, \quad \mu \neq 0, \quad (2.13)$$

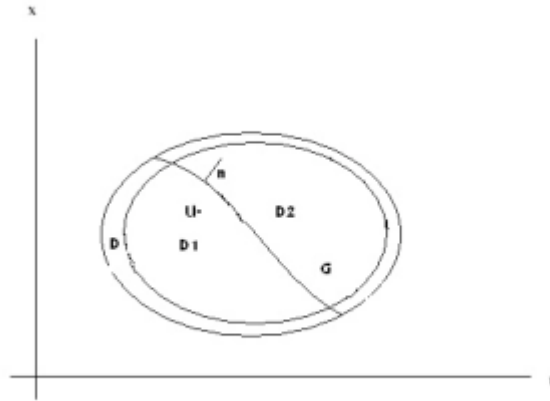
denklemini gözönüne alınır. Fizikte  $\mu > 0$  parametresine suni viskozite denir, [3].

**Tanım 2.2.**  $\mu \rightarrow 0$  iken  $u_\mu(x,t)$  fonksiyonlarının limitine (2.1) denkleminin zayıf çözümü denir.

(2.1) denkleminin zayıf çözümünün mevcut olduğunu varsayalım.  $u(x,t)$  fonksiyonu  $D$  bölgesinin alt bölgeleri olan  $D_1$  ve  $D_2$  de sürekli ve  $D_1$  ve  $D_2$  nin sınırı olan  $\Gamma$  da 1. tür süreksizliğe sahip çözüm olsun. (2.1) denklemini test fonksiyonlar sınıfından olan  $\varphi(x,t)$  fonksiyonuyla çarpıp  $D = D_1 \cup D_2$  bölgesi üzerinden integrallersek

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right\} \varphi(x,t) dxdt + \iint_{D_2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right\} \varphi(x,t) dxdt \\ + \int_\Gamma \left\{ [u] \ell + \left[ \frac{u^2}{2} \right] m \right\} \varphi(x,t) ds = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

alırız. Burada,  $(\ell, m)$   $\Gamma$  eğrisinin dış normalini,  $[f]$  ise herhangi bir  $f(x,t)$  fonksiyonunun  $\Gamma$  üzerindeki sıçrayışını göstermektedir.



**Şekil 2.3:**

$\Gamma$  eğrisi boyunca eğrisel integral,  $D_1$  ve  $D_2$  bölgelerinde yapılan kısmi integrasyon sonucu ortaya çıkan terimlerden oluşmuştur, Şekil 2.3. (2.14) eşitliği keyfi  $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{C}_1$  fonksiyonları için gerçekleştiğinden

$$[u]dx + \left[ \frac{u^2}{2} \right] dt = 0 \quad (2.15)$$

olmak zorundadır. (2.15) e sıçrayış üzerindeki Rankine-Hugoniot koşulu denir.  $U = -\frac{\ell}{m}$  olduğunu varsayarsak

$$\frac{dx}{dt} = U = \frac{\left[ \frac{u^2}{2} \right]}{[u]} = \frac{u_+^2 - u_-^2}{2(u_+ - u_-)} = \frac{u_+ + u_-}{2} \quad (2.16)$$

buluruz. Burada  $u_+$  ve  $u_-$  sırasıyla hızın sıçrayışın önünde ve arkasındaki değerini göstermektedir.

## 2.1 Yardımcı Problem ve Çözümü

(2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümünü elde etmek için aşağıdaki yardımcı problemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (2.17)$$

$$v(x,0) = v_0(x) \quad (2.18)$$

ele alalım, [5], [6]. Burada,  $v_0(x)$  fonksiyonu

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = u_0(x) \quad (2.19)$$

denkleminin herhangi bir sürekli diferansiyellenebilen çözümü olmaktadır.

**Teorem 2.1** Eğer  $v(x,t)$  (2.17), (2.18) yardımcı probleminin pürüzsüz çözümü ise,

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad (2.20)$$

eşitliği ile bulunan  $u(x,t)$  fonksiyonu esas problemin yumuşak (soft) çözümü olmaktadır.

Teoremin doğruluğu direkt hesaplama yolu ile ispatlanabilir.

Yardımcı problemin avantajları şunlardır:

1. Yardımcı problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliği esas problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliğinden bir merteye daha fazladır.

2. Yardımcı problemin çözümü mutlak sürekli fonksiyon olmaktadır. Altını çizerek

belirtelim ki, yardımcı problemin çözümü tek değildir. Gerçekten de, eğer (2.1) denklemini  $x$  e göre integrallersek

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u(x,t) dx + \frac{1}{2} u^2(x,t) = c \quad (2.21)$$

buluruz. Burada  $c$  genelde  $t$  ye bağlı keyfi bir fonksiyon olmaktadır, yani  $A(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$  olmak üzere  $c(t) \in \ker A$  dır.

$$v(x,t) = \int u(x,t) dx + c \quad (2.22)$$

olsun. (2.22) ifadesi (2.21) de yerine konulursa (2.17) denklemini elde ederiz. (2.21) den görüldüğü gibi bu durumda  $u(x,t)$  süreksiz fonksiyon da olabilir. Böylelikle, (2.21) denklemini sağlayan fonksiyonlar sınıfı (2.12) eşitliğini koruyan fonksiyonlar sınıfı ile aynı olmaktadır. Gerçekten de, (2.17) denklemini  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  çarpıp,  $D_T$  bölgesi üzerinden integrallersek

$$\int_{D_T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt = 0$$

elde ederiz. Burada,  $\varphi \in \overset{\circ}{C}_1$  ve  $\varphi(x,T) = 0$  koşuluna sahip herhangi bir test fonksiyonudur. Sonuncu integrale  $x$  e göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\int_{D_T} \varphi \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right] dx dt = 0$$

buluruz. Bu integrali iki toplama dağıtıp, ilkinde  $t$  ye, ikincisine ise  $x$  e göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak (2.12) ifadesini elde ederiz.

Yardımcı problemin diğer bir avantajı esas problemin çözümünü hesaplarken  $u(x,t)$  fonksiyonunun hiçbir değişkene göre türevlerinin kullanılmamasıdır ki, zaten bu türevler genelde mevcut değildir. Gerçekten de, (2.6) ve (2.7) den

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u'_0}{1+tu'_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-uu'_0}{1+tu'_0}$$

türevleri  $t \geq T = \left( \frac{-1}{u'_0} \right)_{min}$  değerlerinde sonsuzluğa yaklaşır. Diğer deyişle, (2.1), (2.2)

probleminin klasik çözümü mevcut değildir.

Şimdi (2.17), (2.18) yardımcı probleminin gerçek çözümünü bulalım. Bunun için,

$\frac{\partial v}{\partial t} = p$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = q$  notasyonlarını kullanarak (2.17) yi

$$\pi(p, q) = p + \frac{1}{2} q^2 \quad (2.23)$$

gibi yazalım. (2.23) ü  $x$  ve  $t$  ye göre diferansiyellersek,

$$\frac{\partial p}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + q \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

elde ederiz.  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t}$  olduğunu varsayarsak sonuncu denklemler

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + q \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

şeklini alır.  $(x, t, p, q, v)$  bilinmeyenleri için aşağıdaki Charpit diferansiyel denklemler sistemini

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = q, \quad \frac{dp}{ds} = 0, \quad \frac{dq}{ds} = 0, \quad \frac{dv}{ds} = p + q^2 \quad (2.26)$$

yazalım. (2.26) sistemindeki bilinmeyen  $(x, t, p, q ve v)$  fonksiyonlarını  $s$  ye göre tek olarak bulmak için aşağıdaki başlangıç koşullarını

$$t|_{s=0} = 0, \quad x|_{s=0} = \xi, \quad p|_{s=0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2, \quad q|_{s=0} = -\frac{\partial v_0}{\partial x},$$

$$v|_{s=0} = \begin{cases} v_0(x), & |\xi| < 1 \\ 0, & |\xi| \geq 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

ekleyelim, burada,  $s$  - parametreyi göstermektedir. (2.26) dan

$$p = c_1, \quad q = c_2, \quad t = s + c_3, \quad x = c_2 s + c_4, \quad v = (c_1 + c_2^2) s + c_5 \quad (2.28)$$

elde ederiz. (2.28) den  $c_j$ , ( $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ) sabitlerini

$$c_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 = -\frac{1}{2}u_0^2, \quad c_2 = \frac{\partial v_0}{\partial x} = u_0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \xi,$$

$$c_5 = v|_{s=0} = \begin{cases} v_0(x), & |\xi| < 1 \\ 0, & |\xi| \geq 1 \end{cases} \quad (2.29)$$

olarak buluruz. Buradan  $x, t, v$  için aşağıdaki formülleri

$$x = ut + \xi, \quad \xi = x - ut, \quad t = s,$$

$$v = \frac{1}{2}u^2t + v_0(\xi) \quad (2.30)$$

elde ederiz. (2.8) i dikkate alırsak yardımcı problemin çözümü için

$$v(x, t) = \frac{1}{2}u^2t + (x - ut) - \frac{(x - ut)^3}{3} \quad (2.31)$$

alırız. (2.31) den  $\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = u(x, t)$  olduğunu görmek zor değildir. Gerçekten de,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} t + \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} t\right) - (x - ut)^2 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} t\right) = u \frac{\partial u}{\partial x} t + 1 - \frac{\partial u}{\partial x} t$$

$$- (x - ut)^2 + (x - ut)^2 \frac{\partial u}{\partial x} t = u \frac{\partial u}{\partial x} t - t \frac{\partial u}{\partial x} [1 - (x - ut)^2] + 1 + (x - ut)^2 = u(x, t)$$

dır.

## 2.2 Sıçrayışın Kurulması ve Genişletilmiş Çözüm

Bilindiği gibi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad (2.32)$$

cinsinden yazılabilen her bir denklem bir korunum kanununu ifade etmektedir. Burada  $T$  korunan yoğunluk,  $X$  ise akış fonksiyonu olup, yalnız  $u$  ve onun  $x$  ve  $t$  ye göre türevlerini içeren polinomsal fonksiyonlar olmaktadır. (2.1) denklemi için sonsuz sayıda korunum kanunları mevcuttur. Açık ki, Hopf denkleminin kendisi de aşağıdaki şekilde yazılmış

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (2.33)$$

korunum kanununu ifade etmektedir. Yukarıda söylediğimiz gibi diferansiyellenebilen  $u(x,t)$  fonksiyonları için tüm korunum kanunları denk olmaktadır. Lakin onların integral formları farklı olduklarından, sözkonusu formlar sıçrayış üzerinde farklı koşulların yazılmasına neden olurlar. Yukarıda gördüğümüz gibi, (2.1) denkleminin (2.12) cinsinden zayıf çözümü (2.15) şeklinde sıçrayış koşulunu oluşturmuştur. Diferansiyel şeklinde yazılmış (2.32) korunum kanununu

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} T dx + X \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (2.34)$$

olarak integral formda da yazabiliriz. (2.34) ifadesinden  $\int_{x_1}^{x_2} u(x,t) dx$  enerji integralinin değerinin  $t$  ye bağlı olmadığı görülür.

Şimdi sürekli olduğu bölgede (2.1) denklemini sağlayan ve sıçrayış eğrisi üzerinde ise (2.15) koşulunu koruyan süreksiz çözümün elde edilmesi problemi ile uğraşalım. Yukarıda sözünü ettiğimiz gibi, bu tür çözümlerin elde edilmesi için çokdeğerli çözümden, gözönüne aldığımız problemin fiziksel özelliğini gerçek gösterebilen bir değerli, fakat 1. tür sıçrayışa sahip çözüm elde etmek gerekmektedir. Sözkonusu sıçrayışın gerçek yerini aşağıdaki yöntem ile belirleyelim.

Açıktır ki, (2.34) cinsinden olan korunum kanunlarını hem sürekli, hem de süreksiz fonksiyonlar sağlamaktadır. Böylelikle,  $E(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t) dx$  cinsinden olan enerji integralinin değeri her iki fonksiyonlar için aynı kalmaktadır. Aradığımız sıçrayış noktasının gerçek geometrik yeri dalganın herhangi bir  $t=T$  anındaki profilinin oluşturduğu alandan, alanı enerji integralinin değerine eşit olan bir alan kesmek zorundadır. Önemle belirtelim ki, bu tanım yeteri kadar genel bir tanım olmaktadır. Sıçrayış noktalarının bulunması için ciddi bir matematiksel yöntem oluşturalım.



Aşağıdaki enerji integralini

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx \quad (2.35)$$

gözönüne alalım. Yukarıda söylediğimiz gibi, dalganın oluşturduğu alan, yani  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx$  nin değeri zaman değişkenine bağlı değildir ve bu değer  $\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx$  e eşit olmaktadır.

**Tanım 2.3** (2.35) eşitliği ile tanımlanan  $E(0)$  sayısına herhangi bir  $t$  için  $v(x,t)$  fonksiyonunun kritik değeri denir.

**Tanım 2.4**  $v(x,t)$  fonksiyonunun kritik  $E(0)$  değerini aldığı noktaların apsislerinin geometrik yerine sıçrayış veya front (cephe) noktası denir.

Front noktasını  $x_f(t)$  ile gösterelim. Teorem 2.1'e ve verdiğimiz tanımlara dayanarak,

$$v(x_f(t), t) = \int_{-\infty}^{x_f(t)} u(x,t) dx = E(0) \quad (2.36)$$

buluruz.

**Tanım 2.5** Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan  $v_{\text{gen}}(x,t)$  fonksiyonuna

$$v_{\text{gen}}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & v(x,t) < E(0), \\ E(0), & v(x,t) \geq E(0) \end{cases} \quad (2.37)$$

(2.17), (2.18) probleminin genişletilmiş çözümü denir.

Teorem 2.1'e göre  $u_{\text{gen}}(x,t)$  için aşağıdaki formülü alırsınız

$$u_{\text{gen}}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & v(x,t) < E(0), \\ 0, & v(x,t) \geq E(0). \end{cases} \quad (2.38)$$

Önerilen bu teoriye dayanarak (2.1) denkleminin (2.2) başlangıç koşulu çerçevesinde genişletilmiş çözümünü araştıralım. Bu amaçla, önce  $E(0)$  ı hesaplayalım.

(2.8) den

$$E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) dx = \int_{-1}^1 u_0(x) dx = \frac{4}{3}$$

alırız.

**Tanım 2.6**  $u(x,t)$  fonksiyonunun kırıldığı noktanın apsisine kırılma (dönüm) noktası denir.

Kırılma noktasını  $x_b(t)$  ile,  $u^+$  ve  $u^-$  ile ise sırasıyla  $u(x,t)$  fonksiyonunun kırılma noktasına kadar ve ondan sonraki kısımlarını, yani

$$u^+ = \frac{1}{2t^2} \left[ (2xt - 1) + \sqrt{1 - 4xt + 4t^2} \right],$$

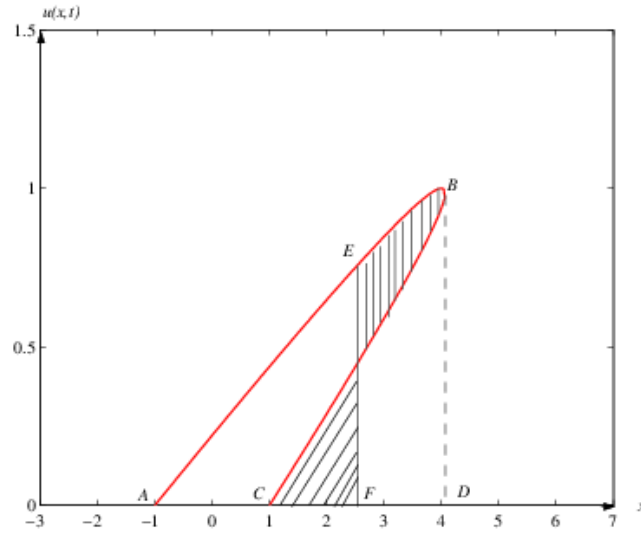
$$u^- = \frac{1}{2t^2} \left[ (2xt - 1) - \sqrt{1 - 4xt + 4t^2} \right]$$

gösterelim. O halde,  $x_b(t)$  noktası  $u^+ = u^-$  denkleminin çözümü olur ve

$$x_b(t) = \frac{1 + 4t^2}{4t} \quad (2.39)$$

olarak bulunur.

Şimdi,  $ABC$  (Şekil 2.4) eğrisel bölgesinin  $S_{ABC}$  alanını hesaplayalım. Şekilden görüldüğü gibi,



**Şekil 2.4: ABC eğrisel bölgesi**

$$S_{ABC} = S_{ABD} - S_{CBD} = \int_{-1}^{x_b(t)} u^+(x,t) dx - \int_{-1}^{x_b(t)} u^-(x,t) dx = \frac{4}{3}.$$

$E(0) = S_{ABC} = \frac{4}{3}$  olduğunu dikkate alırsak, (2.37) yi

$$v_{\text{gen}}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & v(x,t) < \frac{4}{3}, \\ \frac{4}{3}, & v(x,t) \geq \frac{4}{3} \end{cases} \quad (2.40)$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 2.1 ve (2.38) ifadesine dayanarak (2.1), (2.2) probleminin çözümü

$$u_{\text{gen}}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & u(x,t) < \frac{4}{3}, \\ 0, & u(x,t) \geq \frac{4}{3} \end{cases} \quad (2.41)$$

olarak elde edilir. Böylelikle,  $u(x,t)$  fonksiyonu için front noktası öyle  $x_f(t)$  ler olur ki, bu noktanın sağında  $u(x,t)$  sifira eşit olur.

(2.36) ifadesinden  $x_f(t)$  için

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = \frac{\left[\frac{u^2}{2}\right]}{[u]} \Big|_{x=x_f} = \frac{1}{2}[u(x_f+0,t) + u(x_f-0,t)] \quad (2.42)$$

buluruz. Bu da literatürdeki Rankine-Hugoniot koşulunun aynısıdır.

Böylelikle, (2.41) formülü ile bulunan  $u_{\text{gen}}(x,t)$  (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümü olur.  $u_{\text{gen}}(x,t)$ , 1.tür süreksizliğe sahip bir değerli fonksiyondur. Önemle belirtelim ki,  $u_{\text{gen}}(x,t)$  çözümünde bulunan 1.tür süreksizlik fiziksel olarak darbe dalgası olarak nitelendirilir.

Önerilen yardımcı denklemlerle ilişkili olan ilginç bir özelliğe de dikkat çekelim. Gösterelim ki, (2.1) ile ifade edilen mekanik sistemin (yani, (2.1), (2.2) probleminin) çözümü, yardımcı denklemler aracılığıyla ve özel bir yolla oluşturulan  $L(p,q)$  Lagrange fonksiyonunun ekstremumları olmaktadır.  $\pi(p,q)$  fonksiyonu yardımı ile yazılan

$$L(p,q) = q_x \pi(p,q) \quad (2.43)$$

Lagrange fonksiyonunu dikkate alıp, bu fonksiyon için Euler- Lagrange

$$\frac{\partial L_p}{\partial t} + \frac{\partial L_q}{\partial x} = 0 \quad (2.44)$$

denklemini yazalım. (2.43) den  $L_p = q_x, L_q = qq_x$  elde ederiz. Bu ifadeler (2.44) de yerine konursa (2.1) denklemini elde etmiş oluruz.

### 2.3 Süreksiz Başlangıç Koşul

Önceki bölümde Hopf denklemi için Cauchy problemini incelerken, başlangıç profilinin hem negatif, hem de pozitif eğime sahip sürekli bir fonksiyon olduğunu varsaymıştık. Bunun yanı sıra öyle bir  $T_0$  değerinin de mevcut olup,  $t \geq T_0$  durumunda problemin çözümünün yeri önceden belli olmayan sıçrayış noktalarına sahip olduğunu da göstermiştik. Limit durumu, yani dalganın başlangıç dağılımının 1.tür süreksizlik noktasına sahip olduğu durumların incelenmesi ayrıca önem taşımaktadır.

(2.1) denklemini (2.2) başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. (2.1), (2.2) Riemann problemindeki nonlineerliğin oluşturduğu özellikleri görebilmek için, bu problemin gerçek çözümünü bulup uygun lineer problemin çözümü ile karşılaştıracamız.

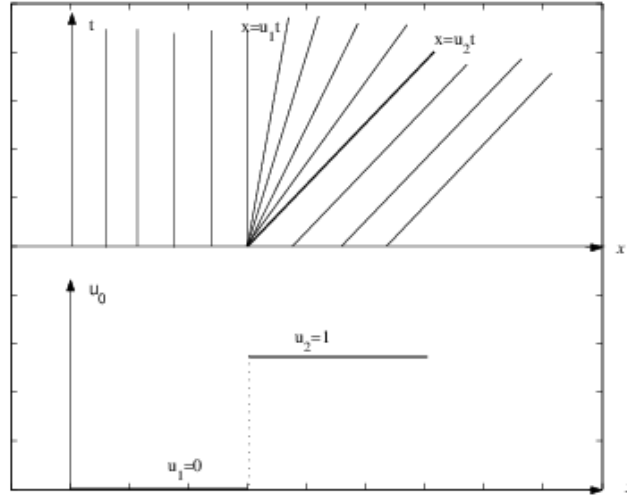
(2.1) denkleminin (2.2) başlangıç koşulu çerçevesinde çözümü  $u = u_0(x-ut)$  biçiminde olmaktadır. Sezgisel olarak  $u > 0$  olduğunda  $u$  nun büyük değerleri küçük değerlerine oranla daha hızlı hareket ettiği anlaşılmaktadır. Buna göre de  $u_1 > u_2$  olduğunda dalganın dağılım sürecinde başlangıç profili bozulur ve çözümde çokdeğerlilik ortaya çıkar.  $u_1 < u_2$  olduğunda ise çokdeğerlilik sözkonusu değildir. Şimdi bunları detaylı şekilde inceleyelim.

Önce  $u_1 < u_2$  durumunu inceleyelim. Karakteristikler metodunun genel prensibine göre (2.1) denkleminin çözümü için

$$u(x,t) = u_o(\xi) = \begin{cases} u_1, & \xi < 0 \\ u_2, & \xi > 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

elde ederiz, burada  $\xi = x-ut$  olmaktadır.

Ayrıca  $u_1 < u < u_2$  olduğundan,  $x = u_1t$  ve  $x = u_2t$  ışınlarının oluşturduğu sektörün içerisinde yerleşen tüm karakteristiklerin yalnız bir ortak noktası  $\xi = 0$  olmaktadır. Dolayısıyla, (2.1) denkleminin tüm çözümleri  $x = ut$  cinsinden olmaktadır ve çözüm sözkonusu karakteristikler üzerinde sabit kalır. (2.1) denkleminin (2.2) başlangıç koşuluna karşılık gelen karakteristikleri Şekil 2.5 de gösterilmiştir.



**Şekil 2.5: Karakteristikler**

Böylelikle (2.1), (2.2) probleminin  $u(x, t)$  çözümü için

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} \leq u_1 \\ \frac{x}{t}, & u_1 < \frac{x}{t} < u_2 \\ u_2, & \frac{x}{t} \geq u_2 \end{cases} \quad (2.46)$$

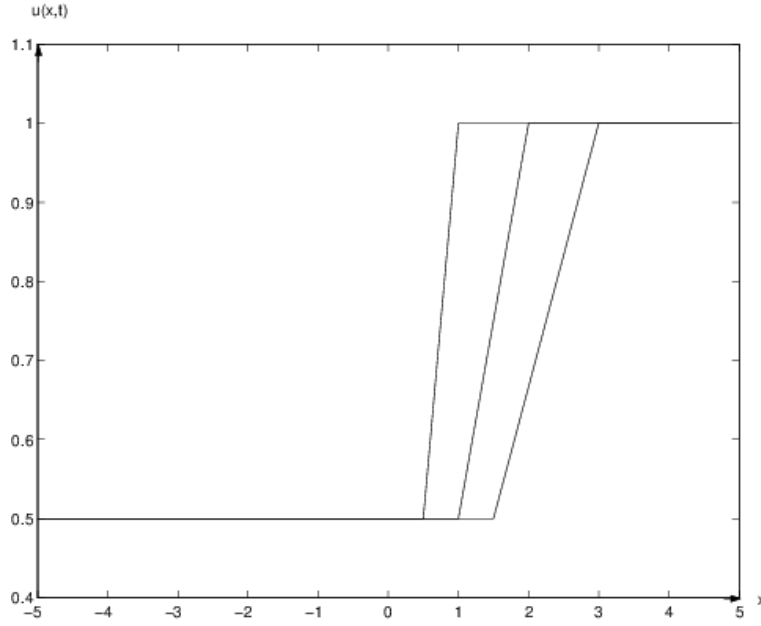
ifadesini elde ederiz. Bu ifade fiziksel açıdan tam yararlı ve parçalı sürekli çözümlerdir.

**Örnek 2.1** Aşağıdaki problemin

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

çözümünü bulunuz.



**Şekil 2.6:**  $u(x,t)$  fonksiyonu,  $u_1 < u_2$

**Çözüm.** Bu durumda  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  olmaktadır. (2.45) formülü ile bulunan çözüm

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

olmaktadır.

Şimdi,  $u = u_1$ ,  $u = u_2$  ve  $x = ut$  doğrularını başlangıç koşulunun korumasını sağlayarak birleştirelim

- a)  $\xi < 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow x < 0$ ,
- b)  $\xi > 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x - t > 0 \Rightarrow x > t$ ,
- c)  $\xi = 0 \Rightarrow x - ut \Rightarrow u = \frac{x}{t}$ .

Böylelikle problemin çözümünü

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & x > t \end{cases} \quad (2.48)$$

şeklinde elde ederiz.  $u(x,t)$  fonksiyonunun evrimi Şekil 2.6 da gösterilmiştir.

Şimdi gösterelim ki, elde ettiğimiz (2.48) fonksiyonu (2.1) denkleminin (2.2) koşulunu sağlayan zayıf çözümü olmaktadır.

$\varphi(x,t)$  temel fonksiyon olduğundan sonlu taşıyıcıya sahip olmaktadır, yani öyle  $a > 0$  ve  $T$  sayıları vardır ki,  $\text{supp}(\varphi) \subset [-a, a] \times [0, T]$  olmaktadır. Zayıf çözümün tanımına göre,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left( u(x,t) \varphi_t(x,t) + \frac{u^2(x,t)}{2} \varphi_x(x,t) \right) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) \varphi(x,0) dx \\
&= \int_0^T \int_0^a \left( \frac{x}{t} \varphi_t(x,t) + \frac{x^2}{2t^2} \varphi_x(x,t) \right) dx dt + \int_0^T \int_t^a \left( \varphi_t(x,t) + \frac{1}{2} \varphi_x(x,t) \right) dx dt + \\
& \int_0^a \varphi(x,0) dx = \int_0^T \int_x^T \frac{x}{t} \varphi_t(x,t) dt dx + \int_0^T \int_0^t \frac{x^2}{2t^2} \varphi_x(x,t) dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^x \varphi_t(x,t) dt dx + \int_T^T \int_0^T \varphi_t(x,t) dt dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_t^a \varphi_x(x,t) dx dt \\
&+ \int_0^a \varphi(x,0) dx = \int_0^T \left\{ \frac{x}{t} \varphi(x,t) \Big|_{t=x}^{t=T} - \int_x^T \left( -\frac{x}{t^2} \right) \varphi(x,t) dt \right\} dx \\
&+ \int_0^T \left\{ \frac{x^2}{2t^2} \varphi(x,t) \Big|_{x=0}^{x=t} - \int_0^t \frac{x}{t^2} \varphi(x,t) dx \right\} dt + \int_0^T (\varphi(x,x) - \varphi(x,0)) dx \\
&+ \int_0^T (\varphi(x,a) - \varphi(x,T)) dx + \frac{1}{2} \int_0^T (\varphi(a,t) - \varphi(t,t)) dt + \int_0^a \varphi(x,0) dx \\
&= \int_0^T \left( \frac{x}{T} \varphi(x,T) - \varphi(x,x) \right) dx + \int_0^T \int_x^T \frac{x}{t^2} \varphi(x,t) dt dx + \frac{1}{2} \int_0^T \varphi(t,t) dt \\
&- \int_0^T \int_x^T \frac{x}{t^2} \varphi(x,t) dt dx + \int_0^T f(x,x) dx - \int_0^T \varphi(x,0) dx \\
&- \frac{1}{2} \int_0^T \varphi(a,t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \varphi(t,t) dt + \int_0^a \varphi(x,0) dx = 0
\end{aligned}$$

olmaktadır.

Gösterebilir ki,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < \frac{t}{2} \\ 1, & x > \frac{t}{2} \end{cases}$$

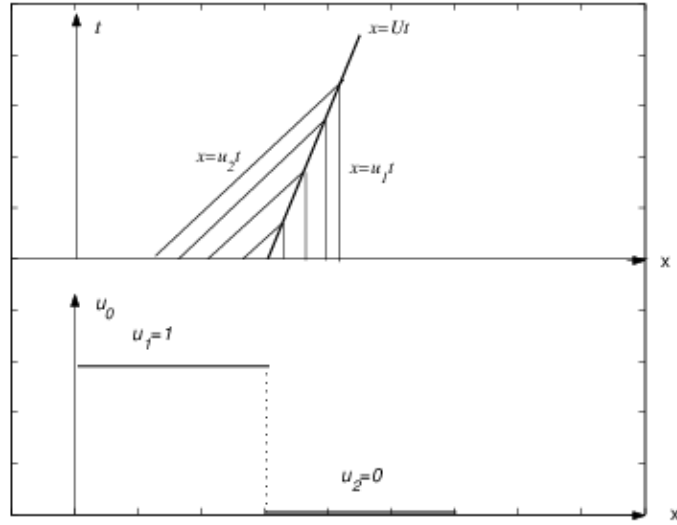
fonksiyonu da gözönüne aldığımız denkleminin zayıf çözümüdür. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left( u(x,t) \varphi_t(x,t) + \frac{u^2(x,t)}{2} \varphi_x(x,t) \right) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) \varphi(x,0) dx \\ &= \int_0^T \int_{-a}^a \left( u(x,t) \varphi_t(x,t) + \frac{u^2(x,t)}{2} \varphi_x(x,t) \right) dx dt + \int_{-a}^a u_0(x) \varphi(x,0) dx \\ &= \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a \left( \varphi_t(x,t) + \frac{1}{2} \varphi_x(x,t) \right) dx dt + \int_0^a \varphi(x,0) dx = \int_0^T \int_0^{2x} \varphi_t(x,t) dt dx \\ &+ \int_{\frac{T}{2}}^a \int_0^T \varphi_t(x,t) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\frac{t}{2}}^a \varphi_t(x,t) dx dt + \int_0^a \varphi(x,0) dx \\ &= \int_0^{\frac{T}{2}} (\varphi(x,2x) - \varphi(x,0)) dx + \int_{\frac{T}{2}}^a (\varphi(x,T) - \varphi(x,0)) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \left( \varphi(a,t) - \varphi\left(\frac{t}{2}, t\right) \right) dt + \int_0^a \varphi(x,0) dx \\ &= \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(x,2x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(y,2y) 2dy = 0 \end{aligned}$$

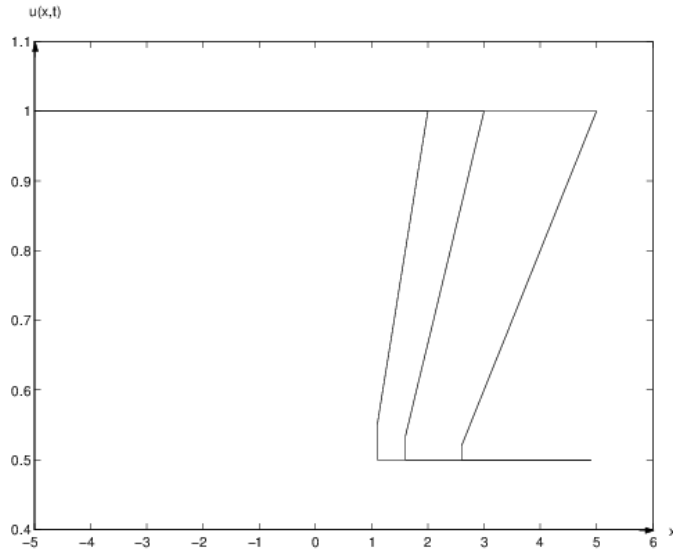
eşitliği korunmaktadır. Dolayısıyla (2.1) denklemini için yazılmış Cauchy probleminin zayıf çözümü tek olmamaktadır.

Şimdi 2. durumu inceleyelim, yani  $u_1 > u_2$  olsun. Bu durumda  $u_2 < u < u_1$ , dir ve  $x = u_1 t$  ve  $x = u_2 t$  sektörünün içerisinde yerleşen her bir karakteristiğin eğimi  $u_2$  den büyük olmaktadır. Böylece, diğer karakteristikler ile kesişirler, Şekil 2.7. Bu nedenle çözümün profilinde çokdeğerlilik hemen başlar. Şekil 2.8 den görüldüğü gibi çözümün profilinde geriye dönme oluşur.  $u_1 > u_2$  olduğu durumda  $(t,x)$  düzlemindeki karakteristikler yelpazesi dönmeye başlar ve dalganın yeniden ileri dönmesini sağlar. Çözümün geriye ve ileriye dönme noktalarını sırasıyla  $x_b(t)$  ve  $x_o(t)$  ile gösterelim.



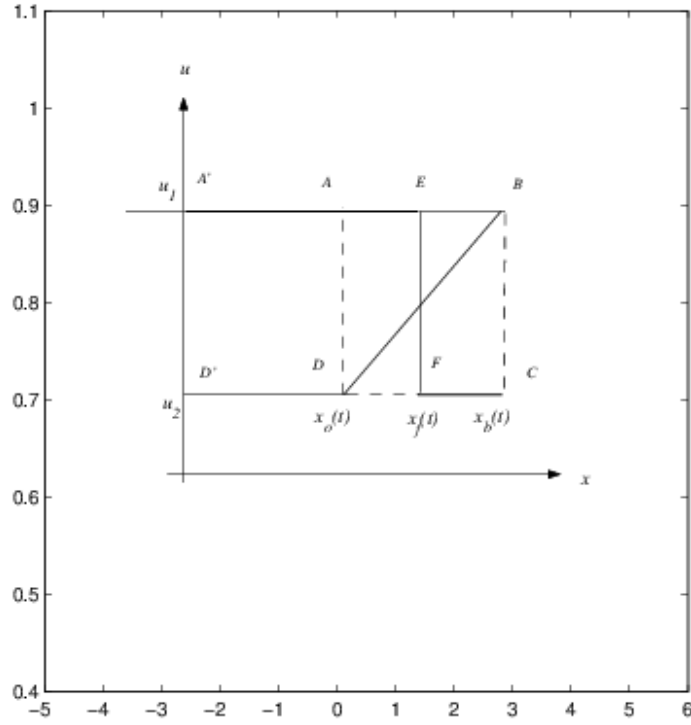


**Şekil 2.7:**  $u_1 > u_2$  durumunda karakteristikler



**Şekil 2.8:**  $u_1 > u_2$  durumunda çözümün profili

Sıçrayış noktasının yerini belirlemek için (2.48) formülü ile elde ettiğimiz, örneğin  $t = T_1$  zaman değerine karşılık gelen çözümlerden birisini gözönüne alalım (Şekil 2.9).



Şekil 2.9:  $A'BDD'$  bölgesi

$u(x, T_1)$  fonksiyonunun grafiği ile sınırlanan  $S_{A'BDD'}$  bölgesinin alanı  $S_{A'BDD'} = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)t$  olmaktadır. Sıçrayış noktasının yerini öyle seçelim ki,  $S_{A'EFD'} = (u_1 - u_2)x_f(t)$  dikdörtgeninin alanı  $S_{A'BDD'}$  ye eşit, yani  $\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)t = (u_1 - u_2)x_f(t)$  olsun. Sonuncu eşitlikten sıçrayış noktası için

$$x_f(t) = \frac{u_1 + u_2}{2}t$$

denklemini elde ederiz. Buradan

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = U = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (2.49)$$

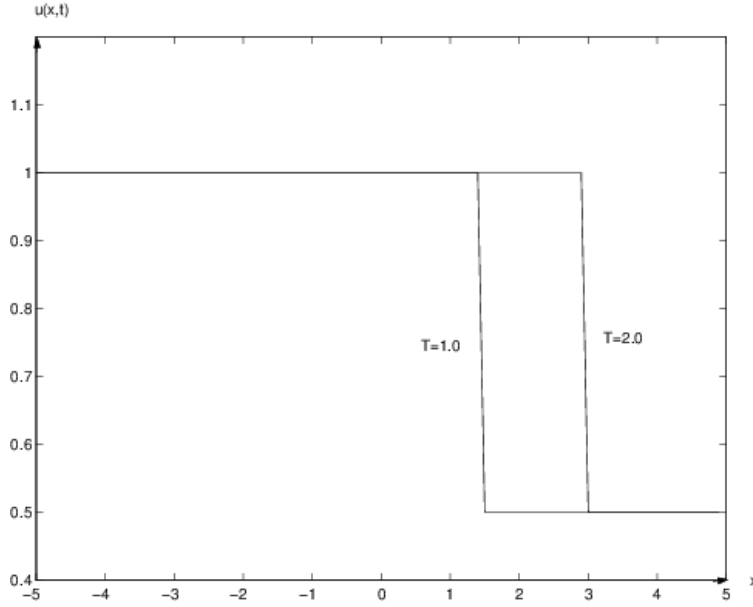
olur. (2.49) u dikkate alarak (2.1), (2.2) problemin zayıf çözümü için

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} < U, \\ u_2, & \frac{x}{t} > U \end{cases} \quad (2.50)$$

formülünü elde ederiz. Böylelikle, çokdeğerli çözümden bir değerli, ama birinci tür

süreksizliğe sahip ve aynı zamanda enerji integralini koruyan fiziksel yararlı çözümü elde etmiş oluruz.

Söz konusu zayıf çözümün grafiği Şekil 2.10 da gösterilmiştir.



Şekil 2.10: Zayıf çözüm

**Örnek 2.2** Aşağıdaki problemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

çözünüz.

**Çözüm.** Problemin koşullarına göre  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 0$  olmakta ve bu problemin de çözümü (2.7) formülüne göre

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \xi < 0 \\ 0, & \xi > 0 \end{cases}$$

olur. Bu durumda problemin karakteristikleri kesişir ve çözümün profilinde çokdeğerlilik hemen başlar. Dolayısıyla incelediğimiz problemin klasik çözümü mevcut değildir. Şimdi

de  $u = 1$ ,  $u = 0$  ve  $x = ut$  doğrularını başlangıç koşulunu koruyacak şekilde birleştirelim.

$$\text{a) } \xi < 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x - t < 0 \Rightarrow x < t,$$

$$\text{b) } \xi > 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow x > 0$$

olur. Böylelikle aradığımız çözüm

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \frac{x}{t} > 0 \\ \frac{x}{t}, & 1 < \frac{x}{t} < 0 \\ 1, & \frac{x}{t} < 1 \end{cases}$$

elde ederiz. Şekil 2.8 den de görüldüğü gibi elde ettiğimiz fonksiyonun grafiği üç değerli olmaktadır. Bu ise fiziksel açıdan kabul edilemez. Zayıf çözümü yukarıda gösterdiğimiz yolla (2.50) şeklinde yazabiliriz. (2.50) formülünden görüldüğü üzere çözümdeki şüresizlik  $x = \frac{t}{2}$  doğrusu üzerinde  $U = \frac{1}{2}$  hızıyla hareket etmektedir ve incelediğimiz problemin fiziksel gerçek çözümü

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \frac{x}{t} < U \\ 0, & \frac{x}{t} > U \end{cases} \quad (2.51)$$

olmaktadır.

Sonuncu ifadenin ele aldığımız problemin zayıf çözümü olduğunu gösterelim. Zayıf çözümün tanımına göre

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( u(x, t) \varphi_t(x, t) + \frac{u^2(x, t)}{2} \varphi_x(x, t) \right) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_0^T \int_{-a}^a \left( u(x, t) \varphi_t(x, t) + \frac{u^2(x, t)}{2} \varphi_x(x, t) \right) dx dt + \int_{-a}^a u_0(x) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_0^T \int_{-a}^{\frac{t}{2}} \left( \varphi_t(x, t) + \frac{1}{2} \varphi_x(x, t) \right) dx dt + \int_{-a}^0 \varphi(x, 0) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-a}^0 \int_0^T \varphi_t(x,t) dt dx + \int_0^{\frac{T}{2}} \int_{2x}^T \varphi_t(x,t) dt dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{-a}^{\frac{t}{2}} \varphi_x(x,t) dx dt + \int_{-a}^0 \varphi(x,0) dx \\
&= \int_{-a}^0 (\varphi(x,T) - \varphi(x,0)) dx + \int_0^{\frac{T}{2}} (\varphi(x,T) - \varphi(x,2x)) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \left( \varphi\left(\frac{t}{2}, t\right) - \varphi(-a, t) \right) dt + \int_{-a}^0 \varphi(x,0) dx \\
&= -\int_0^{\frac{T}{2}} \varphi(x,2x) dx + \frac{1}{2} \int_0^T \varphi\left(\frac{t}{2}, t\right) dt = 0
\end{aligned}$$

olur.

**Örnek 2.3** Aşağıdaki Cauchy problemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

çözünüz.

**Çözüm.** Başlangıç profilinin grafiği Şekil 2.11 de gösterilmiştir. Bu problemin karakteristikler yöntemi ile bulunan çözümü

$$u(x,t) = u_0(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 0 \\ 1-\xi, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0, & \xi > 1 \end{cases}$$

dır. Karakteristikler ailesinin grafiklerini  $(t, x)$  düzleminde görelim:

a)  $\xi < 0$  olduğunda  $u = 1$  olur. Buradan  $\xi = x - t < 0$ , yani  $x < t$ ;

b)  $\xi > 1$  olduğunda  $u \equiv u_0 = 0 \Rightarrow \xi = x > 1 \Rightarrow x > 1$ ;

c)  $0 \leq \xi \leq 1$  olduğunda  $u = 1 - \xi = 1 - x + ut$  dir. Buradan  $u(-1-t) = 1 - x$  veya

$$u(x,t) = \frac{1-x}{1-t} \text{ olur.}$$

Bunları dikkate alarak problemin çözümünü

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t < 1 \\ \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu fonksiyon  $t < 1$  olduğunda sürekli fonksiyon olur;  $u = 1 - \xi$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $t = 1$  olduğunda karakteristikler kesişmeye başlar ve çözüm çokdeğerli fonksiyona dönüşür. Çok değerli çözümlerden bir değerli ama süreksiz çözümler oluşturalım. Bunun için, önce (2.42) den front noktasının hareket hızını  $U = \frac{1}{2}$  bulalım, sonra ise  $u = 1$ ,  $u = 0$  ve  $x = ut$  doğrularını başlangıç koşulunu koruyacak şekilde birleştirelim.

Açıktır ki,  $U$  sayısı da bir karakteristiğin eğimi olmaktadır ve dalga  $t > 1$  olduğunda  $U = \frac{1}{2}$  hızı ile hareket eder, yani darbe dalgaları ile oluşan

$$\frac{1}{2} = \frac{1-x}{1-t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u = \frac{1}{2} = \frac{1-x}{1-t}$$

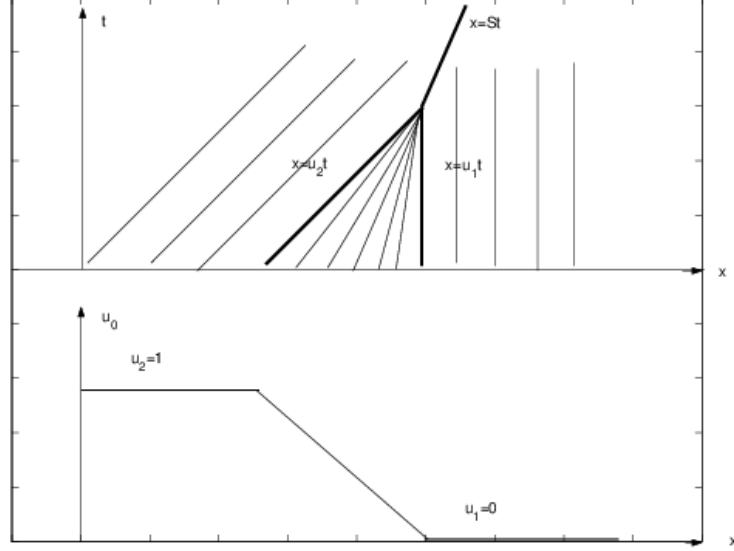
veya

$$x = 1 - \frac{1-t}{2} = 1 + \frac{1}{2}(t-1)$$

doğrusu elde edilir. Böylelikle, problemin global çözümünü

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < 1 + \frac{1}{2}(t-1) \\ 0, & x > 1 + \frac{1}{2}(t-1) \end{cases} \quad (2.52)$$

şeklinde elde ederiz.



**Şekil 2.11: Başlangıç Profiline Grafiği ve Karakteristikler**

*Yardımcı Problem ve Çözümü:* Şimdi (2.1), (2.2) problemini yardımcı problem aracılığıyla çözelim. Yukarıda gördük ki,  $u_1 < u_2$  olduğu durumda problemin çözümünde, başlangıç profilinde bulunan sıçrayış zamanının artan değerlerinde kaybolur ve  $t$  nin büyük değerlerinde çözüm parçalı sürekli fonksiyona dönüşür. Lakin,  $u_1 > u_2$  olduğunda başlangıç profilinde çok değerlilik oluşturur, yani klasik çözümü mevcut değildir. Bu durumda zayıf çözümü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

**Tanım 2.7** Negatif olmayan, (2.2) koşulunu sağlayan, temel fonksiyonlar sınıfından ve  $\varphi(x, T) = 0$  olan herhangi bir  $\varphi(x, t)$  test fonksiyonu için

$$\iint_{D_T} \left[ u(x, t) \varphi_t(x, t) + \varphi_x(x, t) \frac{u^2(x, t)}{2} \right] dx dt + \int_{-\infty}^0 u_2 \varphi(x, 0) dx + \int_0^{\infty} u_1 \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (2.53)$$

integral eşitliğini koruyan  $u(x, t)$  fonksiyonuna (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümü denir.

Şimdi, (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümünü ve sıçrayış noktasını elde etmek için yardımcı problemi kullanalım. Bu durum için de yardımcı problem (2.17), (2.18) şeklinde olmaktadır. Burada,  $v_0(x)$  fonksiyonu

$$v_0(x) = \begin{cases} u_1 x, & x > 0 \\ u_2 x, & x < 0. \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Sözkonusu yardımcı problemin gerçek çözümünü

$$v(x,t) = \begin{cases} v^+, & \frac{x}{t} > u_1 \\ v^-, & \frac{x}{t} < u_2 \end{cases} \quad (2.54)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.30) formülünü dikkate alarak

$$v^- = \frac{1}{2} u_1^2 t + u_1 (x - u_1 t),$$

$$v^+ = \frac{1}{2} u_2^2 t + u_2 (x - u_2 t)$$

yazabiliriz. Basit hesaplamalarla

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = u(x,t)$$

olduğunu görmek zor değildir.

Şimdi sıçrayış noktasını yerini belirleyelim. Tanım 2.4'e göre  $v(x_f(t), t) = E(t)$  olduğundan  $x_f(t)$  front noktasının koordinatları  $v^+ = v^-$  denklemini korumak zorundadır. Sonuncu eşitlikten  $x_f(t)$  için

$$x_f(t) = \frac{u_2 + u_1}{2} t$$

elde ederiz.

Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan fonksiyona

$$v_{\text{gen}}(x,t) = \begin{cases} v^+, & \frac{x}{t} > U \\ v^-, & \frac{x}{t} < U. \end{cases} \quad (2.55)$$



(2.17), (2.18) yardımcı probleminin genişletilmiş çözümü denir. Teorem 2.1' i kullanarak esas problemin  $u_{\text{gen}}(x,t)$  çözümünü elde ederiz.  $u_{\text{gen}}(x,t)$  fonksiyonunun grafiği Şekil 2.10 da gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi (2.1), (2.2) probleminin başlangıç profilinde bulunan sıçrayışın korunarak  $\frac{u_1 + u_2}{2}$  hızı ile sağa doğru hareket ettiği görülmektedir. Böylelikle (2.1), (2.2) probleminin fiziksel yapısını gerçek ifade eden çözümünü elde etmiş bulunmaktayız.

### 3. TABAKALI ORTAMDA PETROLÜN SU İLE ÇIKARILMASI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde yukarıda incelediğimiz yöntemi iki fazlı sıvıların tabakalı ortamda birlikte akış probleminin dinamiğinin teorik incelenmesine uygulayacağız. Bu amaçla (1.16) denkleminin çözümünü aşağıda verilen

$$\sigma(x,0) = \sigma_0(x) \quad (3.1)$$

koşulu çerçevesinde ele alacağız. Burada  $\sigma_0(x)$  petrolün tabakalı ortamda  $t = 0$  anındaki su ile doyma oranını göstermektedir.

Başlangıç fonksiyonu hem pozitif hem de negatif eğimlere sahip ya da parçalı sabit olduğunda, genel olarak,  $\sigma(x,0) \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$  ve  $F_w''(\sigma) > 0$  (ya da  $F_w''(\sigma) < 0$ ) ise, bu takdirde Cauchy probleminin çok değerli çözümlerinin olduğu bilinmektedir. Çok değerli çözümlerden entropi denilen koşul uygulanarak fiziksel olarak yararlı bir çözüm elde edilebileceği de belirtilmektedir, [3], [6], [8]. Oleinik,  $F_w''(\sigma)$ 'nin işaret değiştirmedeği varsayımı altında, entropi koşulunu karşılayan zayıf çözümü elde etmek için bir yöntem önermiştir.

Zayıf çözüm kavramını dahil ettiğimizde, süreksizlik noktalarının yeri ve zamanı gibi ek problemler ortaya çıkmaktadır. Nonlinear diferansiyel denklemler için tanımlanan bir zayıf çözümün, sıçrayış koşulu otomatik korunduğu açıktır. Ancak bu ifade soft çözüm için geçerli değildir.

Bu çalışmada,  $F_w''(\sigma)$  alternatif işaretlere sahip olduğunda, süreksiz fonksiyonlar sınıfında gerçek çözümü elde etmek için bir boyutlu birinci mertebeden nonlinear dalga denklemi için yazılmış başlangıç ve sınır değer problemlerini inceleyeceğiz.

#### 3.1 Cauchy Problemi

$R^2(x,t)$  ile  $(x,t)$  noktalarının Euclid uzayını gösterelim ve  $Q_T = \{x \in (-\infty, \infty), 0 \leq t \leq T\} \subseteq R^2(x,t)$  olsun.

$\sigma_0(x)$  fonksiyonunun hem pozitif hem de negatif eğime sahip, kompakt destekli bilinen sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu farz edelim. Ayrıca,  $F_w(\sigma)$ 'nin bilinen bir fonksiyon olduğunu aşağıdaki koşulları gerçeklediğini varsayalım.

(i) sınırlı  $\sigma$  için,  $F_w(\sigma)$  iki kez sürekli diferansiyellenebilir ve sınırlı bir fonksiyondur.

(ii)  $\sigma \geq 0$  için  $F_w'(\sigma) \geq 0$  dir.

(iii)  $F_w''(\sigma)$  alternatif işaretleri olan bir fonksiyondur, yani  $F_w$  konveks ve konkav kısımlara sahiptir.

(1.16), (3.1) problemi için bir çözüm karakteristikler yöntemi ile kolaylıkla oluşturulabilir ve

$$\sigma(x, t) = \sigma_0(\xi) \quad (3.2)$$

biçiminde olur. Burada

$$\xi = x - F_w'(\sigma)t, \quad (3.3)$$

$F_w'(\sigma)$  hızıyla hareket eden uzaysal koordinattır.

(3.2) ve (3.3) ten

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = \frac{\sigma_0'(\xi)}{(1 + \sigma_0'(\xi)F_w''(\sigma)t)}, \quad \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} = -\frac{\sigma_0'(\xi)F_w'(\sigma)}{(1 + \sigma_0'(\xi)F_w''(\sigma)t)}$$

elde ederiz. Birinci bağıntı, başlangıç profilinin ( $x = \xi, t = 0$ ) daki eğim açısına göre, ( $x, t$ ) noktasında  $\sigma(x, t)$  profilinin eğimini ifade eder.  $\sigma_0' < 0$  ve  $F_w'' > 0$ , (ya da  $\sigma_0' > 0$  ve

$F_w'' < 0$ ) ise, bu taktirde  $t = \frac{-1}{\sigma_0'(\xi)F_w''(\sigma)}$  için  $\sigma_x(x, t) = \infty$  elde ederiz. Bu noktalarda

$\sigma_t(x, t)$  de sonsuz olur. Bu nedenle (1.16), (3.1) probleminin klasik bir çözümü yoktur.

**Tanım 3.1** (3.1) başlangıç koşulunu sağlayan, yeterince büyük  $t + |x|$  ler için sıfır olan ve üst yarı düzlemde tanımlı ve iki kez diferansiyellenebilir her bir  $\varphi(x, t)$  fonksiyonu için

$$\iint_{Q_T} \{\varphi_t(x, t)\sigma(x, t) + \varphi_x(x, t)F_w(\sigma(x, t))\} dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, 0)\varphi(x, 0) dx = 0 \quad (3.4)$$

integral bağıntısını koruyan  $\sigma(x, t)$  fonksiyonuna (1.16), (3.1) probleminin zayıf çözümü denir.

### 3.2 Yardımcı Problem

(1.16), (3.1) probleminin zayıf çözümünü tespit etmek amacıyla [5] ve [6] yı dikkate alarak

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + F_w \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.5)$$

$$v(x,0) = v_0(x) \quad (3.6)$$

yardımcı problemini önerelim. Burada,  $v_0(x)$ ,

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = \sigma_0(x) \quad (3.7)$$

denklemini sağlayan mutlak sürekli herhangi bir fonksiyondur.

(3.5), (3.6) probleminin çözümü

$$v(x,t) = \left[ \sigma F_w'(\sigma) - F_w(\sigma) \right] t + v_0(\xi), \xi = x - F_w'(\sigma)t. \quad (3.8)$$

biçiminde kolayca elde edilir. Hesaplama yoluyla,  $\sigma(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$  olduğu kolaylıkla gösterilebilir. İntegrallenebilen bir soft çözümün (1.16) nın zayıf bir çözümü olduğu, yani aşağıdaki teoremin geçerli olduğu da kolaylıkla görülebilir.

**Teorem 3.1** (3.5), (3.6) yardımcı probleminin çözümü  $v(x,t)$  ise, bu taktirde

1<sup>o</sup>. Aşağıdaki şekilde tanımlanan  $\sigma(x,t)$  fonksiyonu

$$\sigma(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad (3.9)$$

esas problemin zayıf çözümüdür;

2<sup>o</sup>.  $v(x,t)$  mutlak sürekli bir fonksiyondur.

Yardımcı problemin avantajları şunlardır:

(i)  $v(x,t)$  fonksiyonu,  $u(x,t)$  den aha düzgündür;

(ii) süreksizlik noktalarının civarında tanımlı olmayan  $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$  türevlerini

kullanmaksızın  $\sigma(x,t)$  belirlenebilir.

### 3.3 Ön Cephenin Bulunması (Front Tracking)

Esas problemin çözümünde ortaya çıkan süreksizlik noktalarının konumunu elde etmek için  $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x,t) dx = \text{sabit}$  olması gerçeğinden ve bu integralin yalnız çok değerli ve sürekli fonksiyonlar için değil, aynı zamanda da tek değerli parçalı sürekli fonksiyonlar

için de var olduğu gerçeğinden faydalanacağız. Bu gerçeklik, kütle korunum kanununu ifade eden (1.16) denkleminin bir sonucudur.  $E_1(t)$  ile  $E_1(t) = \int_R \sigma(x,t) dx$  integralini gösterelim.

**Tanım 3.2**  $E_1(0) = \int_R \sigma(x,0) dx$  ile tanımlanan  $E_1(0)$  sayısına  $v(x,t)$  fonksiyonunun kritik değeri denir.

Şimdi,  $\sigma(x,t)$  fonksiyonunun süreksizlik noktalarının yerini ve bu noktaların zamana göre evrimini araştıracağız. Daha önce belirtildiği gibi, yardımcı problemin çözümü tek değildir. Tek ve fiziksel olarak anlamlı bir çözüm bulabilmek için bazı ilave koşullar gereklidir.

**Tanım 3.3** Her  $t$  için,  $v(x,t)$  nin kritik bir değer aldığı noktaların geometrik konumuna ön eğri (front curve) denir.

$x_f = x_f(t)$ ,  $v(x,t)$  nin süreksizlik eğrisinin denklemi olsun. Tanım 3 ile (3.9) ifadesini göz önüne alırsak,

$$v(x_f(t), t) = \int_{-\infty}^{x_f} \sigma(x,t) dx = E_1(0)$$

buluruz. Son bağıntıdan

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = \frac{[F_w(\sigma)]}{[\sigma]} \Big|_{x=x_f(t)} \quad (3.10)$$

elde ederiz. Burada  $[f]$ , bir  $x = x_0$ , noktasında  $f$  fonksiyonunun şokunu gösterir, yani  $[f] = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  dır.

**Tanım 3.4**

$$v_{ext}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & v < E_1(0), \\ E_1(0), & v \geq E_1(0) \end{cases} \quad (3.11)$$

ile tanımlanan fonksiyona (3.5), (3.6) probleminin genişletilmiş çözümü denir.

Teorem 3.1 den, (1.16), (3.1) esas probleminin zayıf çözümü için  $\sigma_{ext}(x,t) = \frac{\partial v_{ext}(x,t)}{\partial x}$  elde ederiz. Bu şu anlama gelir:  $\sigma(x,t)$  ye ilişkin bir süreksizlik noktası, (1.16), (3.1) probleminin çözümünün sıfıra eşit olduğu sağdaki noktadır.

(3.10) dan kolaylıkla

$$t = \int_0^{x_f(t)} \frac{dx}{F_w(\sigma)}$$

elde edebiliriz. Dolayısıyla,  $\sigma(x,t)$  için bir sıçrayışın varlığına ilişkin gerekli ve yeterli

koşul integralin  $\int_0^{x_f(t)} \frac{dx}{F_w(\sigma)} < \infty$  olmasıdır.

Şimdi herhangi bir  $a > 0$  için  $\frac{v(x,t) - v(x-a,t)}{a}$  bağıntısını değerlendirelim:

$$\frac{v(x,t) - v(x-a,t)}{a} = \frac{1}{a} \int_0^t [F(u(x,\tau)) - F(u(x-a,\tau))] d\tau \quad (3.12)$$

$$\leq \frac{1}{a} \int_0^t [F(u(x,\tau)) - F(u(x-a,\tau))] d\tau \leq \frac{E_2}{t}.$$

Burada  $E_2 = \frac{2}{a} \sup_u F(u)$  dur. Bu, karakteristiklerin dağılım oranını gösteren entropi koşuludur. Dolayısıyla  $v(x,t)$  fonksiyonu (3.5), (3.6) probleminin entropi çözümüdür.

### 3.4 Başlangıç-Sınır Değer Problemi

Önceki bölümde, birinci mertebeden nonlinear hiperbolik tip denklem için yazılmış probleminin gerçek çözümünü bulduk. Ancak, gözenekli bir ortamda suyla akışkanın yerinden çıkarılması, trafik akış problemi vb. gibi birçok pratik problem, bahsedilen denklemler için başlangıç-sınır değer problemi ile ifade edilir, [6].

$D = \{x > 0, t > 0\}$  de belli bir sinyalin dağılımını açıklayan tipik başlangıç-sınır değer problemi

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial F_w(\sigma)}{\partial x} = 0, \quad (3.13)$$

$$\sigma(x,0) = \sigma_0(x), \quad (3.14)$$

$$\sigma(0,t) = \sigma_1(t) \quad (3.15)$$

olarak ifade edilir. Burada  $\sigma_0(x)$  ve  $\sigma_1(t)$  verilen fonksiyonlardır ve  $\sigma_1(0) > \sigma_0(0)$  dir.

$F'_w(\sigma) > 0$  olduğunda, 2. bölümde bahsedilen koşulları sağlayan  $F_w(\sigma)$  fonksiyonu için, (3.13)-(3.14) probleminin çözümü iki Cauchy probleminin çözümüyle ilişkilendirilebilir. O halde, aşağıdaki

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial F_w(\sigma)}{\partial x} = 0, \quad (3.16)$$

$$\sigma(x,0) = \sigma_0(x); \quad (3.17)$$

ve

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial F_w(\sigma)}{\partial x} = 0, \quad (3.18)$$

$$\sigma(0,t) = \sigma_1(t). \quad (3.19)$$

Cauchy problemlerini dahil edelim.

(3.13)-(3.15) esas probleminin gerçek çözümü [7] de bulunmuş olup,

$$\sigma(x,t) = \begin{cases} \sigma_0(\xi), & \frac{x}{t} > F'_w(\sigma_0), \\ G\left(\frac{x}{t}\right), & F'_w(\sigma_0) < \frac{x}{t} < F'_w(\sigma_1), \\ \sigma_1(\tau), & \frac{x}{t} < F'_w(\sigma_1) \end{cases} \quad (3.20)$$

formundadır. Burada  $G(\xi)$ ,  $[\sigma_0, \sigma_1]$  üzerinde  $F'_w(\sigma)$  fonksiyonunun tersidir. Bilindiği gibi, (3.20) çözümü herhangi bir  $x > 0$  ve  $t > 0$  için çok değerli bir fonksiyondur.

(3.13)-(3.15) probleminin zayıf çözümü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

**Tanım 3.5** (3.14), (3.15) koşullarını sağlayan ve  $f(x,T) = 0$  olan keyfi  $f(x,t)$  test fonksiyonları için

$$\begin{aligned} & \iint_D \{f_t(x,t)\sigma + f_x(x,t)F_w(\sigma)\} dxdt + \int_0^\infty \sigma(x,0)f(x,0)dx \\ & + \int_0^T F_w(\sigma(0,t))f(0,t)dt = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

integral bağıntısını koruyan  $u(x,t)$  fonksiyonuna (3.13)-(3.15) probleminin zayıf çözümü denir.

(3.13)-(3.15) probleminin (3.21) anlamında zayıf çözümünü elde etmek için, [6] ve [7] yi izleyerek ikinci tip yardımcı problem olarak bilinen aşağıdaki

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + F_w\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) = 0, \quad (3.22)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \sigma_1(t) \quad (3.24)$$

yardımcı problemi göz önüne alalım.

Yukarıda belirtildiği gibi, (3.22)-(3.24) problemini

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + F_w \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) = 0,$$

$$v(x,0) = v_0(x);$$

ve

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + F_w \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \sigma_1(t)$$

şeklinde iki Cauchy problemine ayıracağız.

(3.22)-(3.24) probleminin çözümü, bu problemlerin çözümleri kullanılarak

$$v(x,t) = \begin{cases} v_0(\xi) + (\sigma_0(\xi)F'_w(\sigma_0(\xi)) - F_w(\sigma_0(\xi))), & \frac{x}{t} > F'_w(\sigma_0), \\ \int G\left(\frac{x}{t}\right)dx, & F'_w(\sigma_0) < \frac{x}{t} < F'_w(\sigma_1), \\ \left( -\frac{F_w(\sigma_1)}{F'_w(\sigma_1)x} + \sigma_1(\tau) \right) \sigma_1(\tau)x - \int_0^\tau F_w(\sigma_1(\tau_1))d\tau_1, & \frac{x}{t} < F'_w(\sigma_1). \end{cases} \quad (3.25)$$

şeklinde elde edilir.

### 3.5 Hareket Eden Cephenin Geliştirilmesi

Çözümde görünen sıçrayışı geliştirmek için, (3.22) yerine

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \sigma(\xi,t) d\xi = F_w(\sigma_1(t)) - F_w(\sigma(x,t)) \quad (3.26)$$

ikinci tür yardımcı denklemini kullanacağız. (3.26) denkleminde anlaşıldığı üzere, bu durumda  $\sigma(x,t)$  fonksiyonu da süreksiz olabilir. Öte yandan,



$$v(x,t) = \int_0^x \sigma(\eta,t) d\eta + \sigma(0,t) = \sigma_1(t) + \int_0^x \sigma(\eta,t) d\eta \quad (3.27)$$

elde ederiz. Sıvının sıkıştırılmaz olması sebebiyle, gözenekli ortama pompalanan su miktarı

$$v_{\text{gozenek}}(x) = \sigma_1(0) + \int_0^x \sigma_0(\eta) d\eta$$

ifadesine eşittir.  $v_{\text{gozenek}}(x)$  sayısı,  $v(x,t)$  fonksiyonunun kritik bir değeri olsun. Ayrıca,  $v(x,t)$  fonksiyonunun kritik değer aldığı noktayı  $x_f(t)$  ön (front) (ya da şok) noktası olarak adlandıracağız. Böylece,

$$v(x_f(t),t) = \sigma_1(t) + \int_0^{x_f(t)} \sigma(\eta,t) d\eta = v_{\text{gozenek}}(x) \quad (3.28)$$

olur. Tanım 3.4 ve Teorem 3.1' i göz önüne alarak,

$$v_{\text{ext}}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & v(x,t) < v_{\text{gozenek}}(x), \\ v_{\text{gozenek}}(x), & v(x,t) > v_{\text{gozenek}}(x), \end{cases} \quad (3.29)$$

elde ederiz ve buradan

$$\sigma_{tr}(x,t) = \frac{\partial v_{tr}(x,t)}{\partial x} \quad (3.30)$$

olduğu görülür. (3.30) da görüldüğü üzere ön nokta, artık su saturasyonunun sağında bir yerde  $\sigma_0$  a eşit olduğu bir noktadır.

(3.28) den  $x_f(t)$  için

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = \left( \frac{\sigma_1(t)}{\sigma} - \frac{F_w(\sigma)}{\sigma} \right) \Big|_{x=x_f(t)}$$

elde ederiz. (3.26) yı ve (3.9) da göz önüne alarak ,  $t > 0$  ve  $a > 0$  değer için

$$\begin{aligned} \frac{v(x,t) - v(x-a,t)}{a} &= \frac{1}{a} \int_0^t [F_w(u(x-a,\tau)) - F_w(u(x,\tau))] d\tau \\ &\leq \frac{1}{a} \int_0^t [F_w(u(x-a,\tau)) - F_w(u(x,\tau))] d\tau \leq \frac{E_3}{t} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada  $E_3 = 2 \sup_u \frac{F(u)}{a}$  dır. Dolayısıyla (3.13)-(3.15) probleminin çözümü entropi çözümüdür

### 3.6 Laboratuvar Deneilerinin Modellenmesi

Petrolün su ile çıkarılmasını taklit eden laboratuvar deneylerini modellemek için, petrol-su bağıl geçirgenlik fonksiyonlarını belirlemek gereklidir. Söz konusu fonksiyonlar genel olarak deneyleme yoluyla tespit edilir. Saha ölçekli analiz yapmak için bu parametre değerleri esastır. Bununla birlikte elde edilen fonksiyonların incelenen problemin fiziksel niteliklerini ne kadar doğru bir şekilde açıklaması ilgi çekicidir.

Deney yapmak için petrol yataklarından silindirik şekilde bir parça izole etsek bile, numunenin kimyasal niteliklerinde değişiklikler meydana gelir. Bu durumda matematiksel model sonuçları, fiziksel olguya denk olmayabilir. Öte yandan laboratuvar deneyleri esnasında yalnız sululuk süresi gözlemlenir. Ancak, petrol-su bağıl geçirgenlik fonksiyonlarını daha gerçek elde etmek suretiyle susuzluk süresinin de göz önüne alınması gereklidir.

Genel olarak, suyla petrolün yerinden çıkarılmasına ilişkin hem sululuk süresi hem de susuzluk süresini göz önüne alarak petrol-su bağıl geçirgenlik fonksiyonlarını belirlemek basit bir problem değildir. Bir deneyi doğru olarak modellemek için filtrasyon sürecinin tamamını kapsayan petrol-su bağıl geçirgenliklerini belirlemek gereklidir.

Bu bölümde  $k_w(\sigma)$ ,  $k_p(\sigma)$ ,  $F_w(\sigma)$  ve  $F_p(\sigma)$  fonksiyonlarını sağlaması gereken doğal koşullardan yararlanarak,  $k_w(\sigma)$ ,  $k_p(\sigma)$  yı elde etmek için kuramsal bir yöntem önerelim.

Söz konusu koşullar şunlardır:

$$k_p(\sigma_1) = 1, k_p(\sigma_0) = 0, F'_w(\sigma_1) = 0, \quad (3.31)$$

$$k_w(\sigma_1) = 1, k_w(\sigma_0) = 0, F'_w(\sigma_0) = 0. \quad (3.32)$$

(3.31) ve (3.32) koşullarını koruyabilen  $k_p(\sigma)$  ve  $k_w(\sigma)$  fonksiyonlarını

$$k_w(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + a_2\sigma^2, \quad k_p(\sigma) = b_0 + b_1\sigma + b_2\sigma^2 \quad (3.33)$$

şeklinde arayacağız. Burada  $a_i$  ve  $b_i$ , ( $i = 0,1,2$ ) henüz bilinmeyen sabit değerlerdir. Bilinmeyen sabit değerleri elde etmek için (3.32), (3.33) koşullarını göz önüne alarak

aşağıdakilere ulaşırız:

$$a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_1^2 = 0,$$

$$a_0 + a_1\sigma_0 + a_2\sigma_0^2 = 1,$$

$$a_1 + 2a_2\sigma_1 = 0;$$

ve

$$b_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_1^2 = 1,$$

$$b_0 + b_1\sigma_0 + b_2\sigma_0^2 = 0,$$

$$b_1 + 2b_2\sigma_0 = 0.$$

Elde edilen cebirsel denklem sistemlerini çözersek, elde edilen değerleri (3.33) de yerine koymak suretiyle elde ederiz:

$$k_w(\sigma) = \frac{(\sigma - \sigma_1)^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}, \quad k_p(\sigma) = \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \quad (3.34)$$

elde ederiz.

Şimdi yukarıda önerilen yöntem yardımı ile aşağıdaki deneyi modelleyelim. Gözenekli ortam olarak filtresiz kuvars kumu ile doldurulan silindir şeklinde bir boru kullanıldı. Boru uzunluğu ve kesiti, sırasıyla  $l = 1.2m$  ve  $S = 9.6 \cdot 10^{-4} m^2$  olarak verilmiştir. Geçirgenlik katsayısı,  $k$ ,  $2.22 \mu m^2$  ve gözeneklilik ( $m$ ) 0.298.. Sıvı modeli olarak viskozitesi  $47.9sP$  olan transformatör yağı kullanıldı ve su ile sıvı arasındaki yüzey gerilimi  $37 \mu N/m$  idi. Boru bir uçtan basınç farkı  $\Delta p = 0.03mPa$  olan bir su kaynağına bağlandı. Tabakalı ortama bağlı su saturasyonu  $\sigma_0 = 0.23$  idi. Deneyin süresi 27 saat oldu. Deneyde susuzluk süresi yaklaşık 14 saat ve sürenin tamamı ise 14 saate erişti. Susuzluk süresi içinde verimlilik katsayısı  $\eta_{suiledoyma} = 0.32$  olarak hesaplandı ancak toplam verimlilik katsayısı  $\eta_{total} = 0.51$  e eşitti.

Buckley-Leverett modeline göre bu deney aşağıdaki başlangıç koşulları ve sınır koşullar ile (1.14) denklemleri ile modellenmiştir

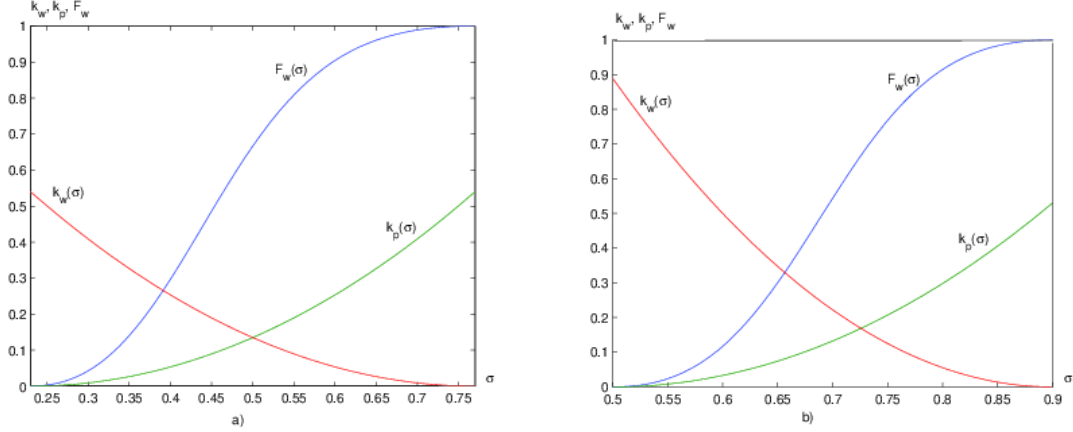
$$\sigma(x,0) = \sigma_0 = 0.23,$$

$$\sigma(0,t) = \sigma_1 = 0.77.$$

(3.34) göz önüne alınarak  $k_p(\sigma)$  ve  $k_w(\sigma)$  fonksiyonları şu şekilde elde edildi:

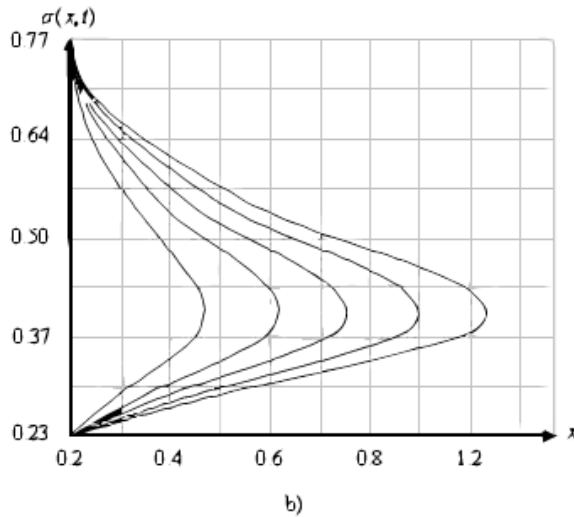
$$k_p(\sigma) = \frac{(\sigma - 0.77)^2}{0.54}, \quad k_w(\sigma) = \frac{(\sigma - 0.23)^2}{0.54}.$$

$k_p(\sigma)$ ,  $k_w(\sigma)$  ve  $F_w(\sigma)$  fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.1 de gösterilmiştir.



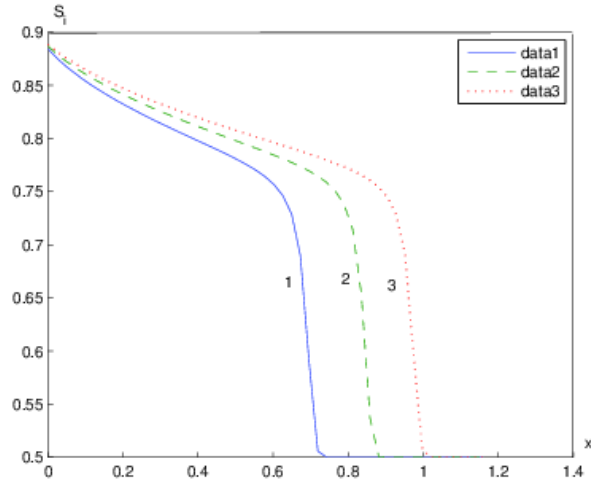
**Şekil 3.1: Deneyle ilgili  $k_w(\sigma)$ ,  $k_p(\sigma)$  ve  $F_w(\sigma)$  fonksiyonları**

(3.20) ile elde edilen fonksiyon grafiklerine Şekil 3.2 de yer verilmiştir. Herhangi bir  $t$  için (3.13)-(3.15) yardımcı problemin çözümünden yararlanılarak suyla petrolü yerinden çıkarma cephesi tespit edilmiştir. Görüldüğü gibi bu çözümün grafiğinde çok değerlilik oluşur. Bu da fiziksel açıdan anlamsız olur.



**Şekil 3.2: Aynı  $t$  zamanlarındaki (soft çözüm)  $\sigma(x, t)$  fonksiyonunun gerçek çözümü**

(3.11) formülü kullanılarak bulunan çözümün grafiği Şekil 3.3 de gösterilmiştir.



**Şekil 3.3: Su satürasyonları 1)  $T = 10^5$  sn, 2)  $T = 1.5 \cdot 10^5$  sn, 3)  $T = 2 \cdot 10^5$  sn**

$\sigma_f = 0.406$  ve  $F_w(\sigma_f) = 0.69$  olduğu için, susuzluk ve sululuk dönemlerinde kuramsal verimlilik katsayısı aşağıdaki şekilde değerlendirilmiştir:

$$\eta_{suiledoyma} = \frac{\sigma_f - \sigma_0}{1 - \sigma_0} \cdot \frac{1 - F_w'(\sigma_0)}{F_w(\sigma_f) - F_w(\sigma_0)} = 0.331 = 33,$$

$$\eta_{total} = \frac{(\bar{\sigma} - \sigma_0) + \frac{1 - F_w(\bar{\sigma})}{F_w'(\bar{\sigma})}}{1 - \sigma_0} = 0.51.$$

Burada  $\bar{\sigma}$ , model sonundaki satürasyon değeridir.

Esas olarak, böyle bir çalışmanın petrol ve gaz rezervlerinden en uygun biçimde istifade edilmesine yönelik ilerideki bir çalışma için ön çalışma olması amaçlanmıştır.

#### 4. SONUÇLAR

Elde edilen sonuçlar şöyledir:

1. Başlangıç dağılımı sürekli ya da parçalı sürekli bir fonksiyon olduğunda, konveks olmayan hal fonksiyonlu ve başlangıç değer probleminin gerçek çözümü elde edilmiştir.

2. Çözümde ortaya çıkan sıçrayışının yerinin tespit edilmesine yönelik özgün bir yöntem geliştirilmiştir.

3. Gözenekli bir ortamda iki fazlı sıvının makroskopik akışını ifade edebilen Buckley-Leverett probleminin gerçek çözümü bulunmuştur. Bir laboratuvar modeli incelenmiştir. Bu deneyleri modellemek amacıyla, petrol ve su fazlarının bağıl geçirgenliğini ifade eden fonksiyonların belirlenmesi için bir yöntem önerilmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] Buckley, S.E, Leverett, M.C., Mechanism of Fluid Displacement in Sands, Trans. AIME, 146, (1942), 107-116.
- [2] Collins, R. E., Fluids Flow in Porous Materials, New York, Reinhold Publishing, 1961.
- [3] Goritskii, A. A., Krujkov, S. N., Chechkin, G. A., A First Order Quasi-Linear Equations with Partial Differential Derivatives, Moscow, Pub. Moscow University, 1997.
- [4] Muskat, M., The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Medium, New York, McGraw-Hill, 1946.
- [5] Rasulov, M. A., On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dokl., 43(1), (1991), 150-153.
- [6] Rasulov, M. A., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kanunları, Seçkin Yayınevi, Ankara, 2011.
- [7] Tikhonof, Samarskii, A. A., Equations of Mathematical Physics, Moscow, Nauka, 1977.
- [8] Toro, E. F., Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Berlin, Springer-Verlag, 1999.

## ÖZGEÇMİŞ

1991'de Midyat'ta doğdu. İlkokul öğrenimini Midyat'a bağlı Söğütlü İlköğretim okulunu bitirdi. Lise öğrenimini İstanbul Arnavutköy Korkmaz Yiğit Anadolu Lisesinde tamamladı. 2008 yılında Kayseri Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. Erasmus programı ile Almanya'da 2 dönem lisans dersleri ve dil kursu aldı. Lisans eğitimini 2012 de tamamladı. 2013 te özel bir kolejde matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2014 te Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim dalında uygulamalı matematik üzerine yüksek lisansa başladı. Halen özel bir kolejde Matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

Mehmet Reşit BİNGÖL