

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**TRAFİK AKIŞ PROBLEMİNİN ANİSOTROPİK
MODELİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Emine BORAN

İSTANBUL, 2016

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**TRAFİK AKIŞ PROBLEMİNİN ANİSOTROPİK
MODELİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Emine BORAN

Öğrenci No:

130860005

Danışman:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “**Trafik Akış Probleminin Anisotropik Modelinin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü** ” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiği ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım.
07/01/2016

Emine BORAN



T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

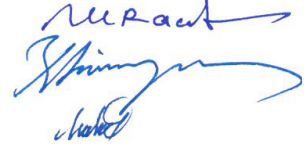
Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 130860005 no'lu Emine BORAN'ın 07/01/2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavı¹ sonucunda 45 dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında² oybirliği / oyçokluğu ile, Kabul... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik Bilgisayar
Programı : Uygulamalı Matematik
Tez Başlığı³ :Trafik Akış Probleminin Anisotropik Modelinin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü

<u>Tez Sınav Jürisi</u>	<u>Öğretim Üyesi</u>
Danışman	: Prof. Dr. Mahir RESULOV
Üye	: Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
Üye	: Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR

İmza



¹ Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

² Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında “kabul”, “düzeltme” veya “red” kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

³ İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Trafik denklemini ilk gördüğüm andan itibaren, bu denklem üzerine çalışmayı ve daha fazla bilgi öğrenmeyi çok istedim. Anlaşılması ve algılanması zor olan bu denklem üzerine çalışmaya başladığım ilk günden, bu aşamaya kadar şevkimi kırmadan bütün içtenliğiyle bilgi birikimini benimle paylaşan, yüksek lisans öğrenimim boyunca her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a ve çok sevdiğim Boran ailesine en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim.

İstanbul, 2016

Emine BORAN

Adı ve Soyadı : Emine BORAN
Danışmanı : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans, 2016
Alanı : Uygulamalı Matematik
Anahtar Kelimeler : Trafik Akış, Anisotropik Model, Sayısal Çözümü

ÖZ

TRAFİK AKIŞ PROBLEMİNİN ANİSOTROPİK MODELİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Üç esas bölümden oluşan tezin birinci bölümünde otobanda arabaların hareketini ifade edebilen nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümlerinin bulunması için orijinal bir yöntem geliştirilmiştir. Önce mikroskobik model çerçevesinde akış dinamiği incelenmiş ve gerçek çözümün bulunması için esas probleme denk olan ve esas problemde bulunmayan, bazı özelliklere sahip yardımcı problem önerilmiştir. Yardımcı problem vasıtasıyla esas problemin çözümleri elde edilmiştir. Önerilen yardımcı problemin avantajlarını da kullanarak süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümlerin bulunması için algoritmalar önerilmiştir. Tezin ikinci bölümünde birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için karakteristikler ve Riemann invaryantları incelenmiştir. Üçüncü bölümde otobandaki akış dinamiği, sürücülerin refleksi de dikkate alınarak incelenmiştir. İkinci bölümdeki teorik sonuçları kullanarak problemin Riemann invaryantları bulunmuş. Ayrıca, akış sürecini ifade eden denklemler sistemi için süreksiz fonksiyonlar sınıfında sonlu farklar yöntemi incelenmiştir.

Name and Surname : Emine BORAN
Supervisor : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Degree and Date : Master, 2016
Major : Applied mathematics
Key Words : Traffic Flow, Numerical Solution, Anisotropic Model

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS OF ANISOTROPIC YEAR MODEL OF TRAFFIC FLOW PROBLEM

Numerical Solution of the Anisotropic Model of Traffic Flow Problems in a Class of Discontinuous Functions In the first section of this thesis for obtaining the numerical solution of the nonlinear partial equation which describes the motion of vehicles on a highway in a class of discontinuous function the original method is suggested. In the first section of this thesis the original method for obtaining the numerical method in a class of discontinuous nonlinear partial equation which describes the motion of vehicles on a highway is suggested. For this, at first on the basis of the microscopic model the dynamical behaviour of motion is investigated and for finding of the exact solution the auxiliary problem is proposed. Using of advantages the exact solution of the main problem is constructed. Besides, using of the auxiliary problem a new algorithm for finding of a numerical solution is suggested.

In the second section the some important notions of the theory of 1.order partial system of equations are investigated. Finally, in this section according to the concentration of reflexes of drivers the system of differential equations which describe the motion is considered. For this system the characteristics and Riemann's invariants are found. The numerical algorithms for numerical solution in a class of discontinuous functions is also developed.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

ÖZ	
ABSTARACT	
GİRİŞ	1
1. KİNEMATİK DALGALAR	2
1.1. Akış Parametrelerinin Bulunması	3
1.2. Yüksek Mertebeli Türevlerin Etkileri, Dağılma ve Tepki Süresi	5
1.3. Mikroskopik Model ve Çözümü	6
1.3.1. Önerilen Metodun Genel Yapısı	6
1.3.2. Başlangıç Fonksiyonunun Süreksiz Olduğu Durum	8
1.3.3. Başlangıç Fonksiyonunun Sürekli Olan Durum	15
2. BİRİNCİ BASAMAKTAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL	
DENKLEMLER SİSTEMİ	21
2.1 Hidrodinamik Model ve Çözümü	21
2.2. Birinci Basamaktan Diferansiyel Denklemler Sistemi İçin Genel
Bilgiler	23
2.3 Karakteristikler ve Riemann İnvaryantları	29
3. ANİSOTROPİK MODELİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR	
SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ	35
3.1. Yüksek Mertebeli Terimlerin Etkisi Difüzyon Ve Refleks (Yanıt) Süresi.....	35
3.2. Riemann İnvaryantları	35
3.3. Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar	39
3.3.1. μ ve τ 'un Küçük Olduğu Durum, Yardımcı Problem	40
3.3.2. μ ve τ 'un Büyük Olduğu Durum	42
3.4. Sayısal Çözüm	45
SONUÇLAR	47
KAYNAKÇA	48

GİRİŞ

Bilindiği üzere otobanlarda arabaların akışının incelenmesi ve idare edilmesi günümüzün en aktüel problemlerinden biridir. Trafikteki tıkanıklık problemini minimuma indirmek veya çözmek için sadece fiziksel gözlemler yapmakla ve enstrümantal yollarla müdahale yeterli değildir. Bu tür problemleri çözmek için bir matematiksel modellerinin oluşturulmasına ihtiyaç vardır. Bu alanda ilk ve önemli araştırmalar [4] ve [16] de yapılmıştır.

Fiziksel olayların modelleri yazılırken bazı fiziksel yaklaşımları kabul etmek gerekir. Trafik akışındaki yaklaşımlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Otobanda araba akışının yeteri kadar yoğun olduğu varsayılır.
2. Arabaların yoğun olduğu bölgede otobandan araba çıkışı ve girişinin olmadığı varsayılır (yani, akışın konservatif olduğu varsayılır).
3. Arabaların otobanda bir şeritte seyir ettikleri kabul edilir.

Bu yaklaşımlar çerçevesinde otobanın herhangi bir $[a, b]$ kısmındaki araba akışının $\Delta t = t_2 - t_1$ zaman zarfındaki değişimini inceleyeceğiz ve bu bölgedeki denge kuralını yazacağız.

Sonunda ise elde edilen denklemin çözümünü kullanarak akış dinamiğini inceleyeceğiz. Bu amaçla önce akış parametrelerini tahmin edeceğiz.

1. KİNEMATİK DALGALAR

Arabaların otobandaki hareket denklemini çıkarmak için aşağıdaki kavramları dahil edelim.

1. $\rho(x, t)$ ile yoğunluk fonksiyonu ile otobanın birim uzunluğundaki araba sayısını,
2. $q(x, t)$ ile akış fonksiyonu, yani otobanın herhangi bir noktasından birim zamanda geçen araba sayısını tanımlayalım.

Kinematik teoriye göre akış hızı

$$V(\rho) = \frac{q}{\rho} \quad (1.1)$$

olmaktadır. Ortamın konservatif olması koşulu çerçevesinde, toplam araba miktarının herhangi bir $x_1 > x > x_2$ aralığındaki değişim hızı, x_1 ve x_2 noktalarından geçen araba sayıları ile aşağıdaki

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} \rho(x, t) dx + q(x_1, t) - q(x_2, t) = 0 \quad (1.2)$$

denge denklemi ile ifade edilmektedir. $\rho(x, t)$ yoğunluk fonksiyonunun her iki değişkene göre sürekli diferansiyellenebilen olduğunu varsayarak (1.2) ifadesinde $x_1 \rightarrow x_2$ olmak suretiyle limite geçerse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

korunum denklemini elde ederiz.

En basit dalga problemi, $q(x, t)$ akış fonksiyonunun $\rho(x, t)$ yoğunluk fonksiyonuna direk bağlı olduğu durumda ortaya çıkar. Bu bağlantıyı

$$q = Q(\rho) \quad (1.4)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu takdirde (1.1) eşitliğini dikkate alarak (1.3) denklemi

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $c(\rho) = Q'(\rho)$ olmaktadır.

1.1. Akış Parametrelerinin Bulunması

Göz önüne aldığımız $[a, b]$ aralığında arabaların tampon-tampona dizildiğini varsayalım. Bu durumda arabaların hareketi Şekil 1 de gösterildiği gibidir.

Açıktır ki, $A(0, v_{max})$ ve $B(\rho_{max}, 0)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$v(\rho) = v_{max} - \frac{v_{max}\rho}{\rho_{max}} \quad (1.6)$$

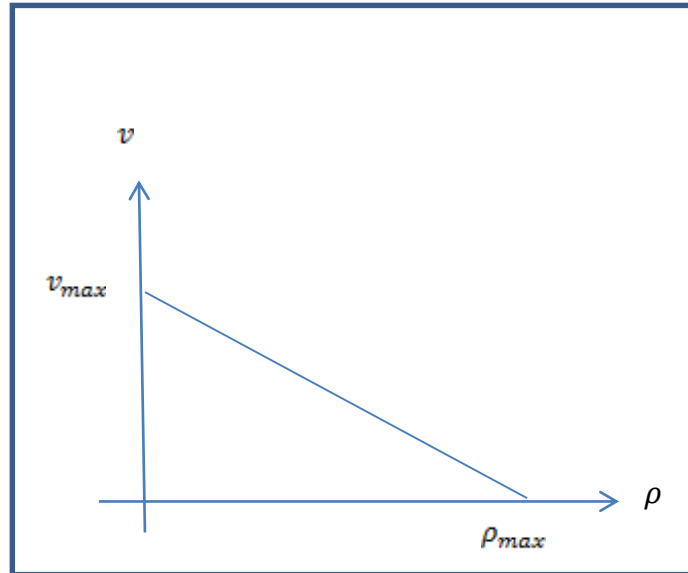
olur. (1.1) ifadesinden

$$Q(\rho) = \rho v(\rho) = v_{max} \left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_{max}} \right) \quad (1.7)$$

alırız. Otopandaki reel sayılar onu gösterir ki, bir şeritli yollarda

$$\rho_{max} = 225 \frac{araba}{mil}, \quad \rho_j = 80 \frac{araba}{mil}, \quad q_{max} = 1500 \frac{araba}{saat}$$

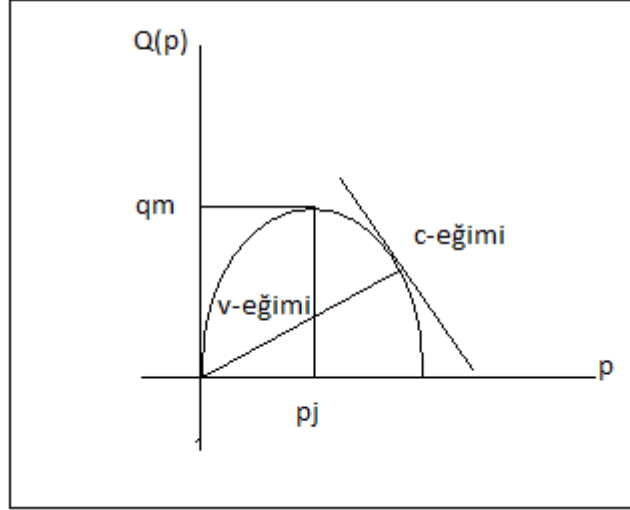
olmaktadır, [16]. Otopan da bir şerittir bu sayılar birinci yaklaşım olarak kabul edilebilir ve bu yaklaşım tüm otopandaki araba sayılarının şeritlerin sayısına çarpılması ile elde edilir.



Şekil 1

Otobandaki reel deneylere dayanarak akış maksimum değerini düşük hızlarda

$$v = \frac{q_{max}}{\rho_{max}} = 20 \frac{mil}{saat} \text{ değerinde alır.}$$



Şekil 2

Dalganın dağılım hızı

$$c(\rho) = Q'(\rho) = v(\rho) + \rho v'(\rho) \quad (1.8)$$

olur. $v'(\rho) < 0$ olduğundan $c(\rho)$ hızı arabaların hareket hızından küçük olmaktadır, dalga trafik akışının aksine hareket ederek sürücülere ileride bir problemin olduğu hakkında bilgi verir. $c(\rho)$ hızı $Q(\rho)$ eğrisinin eğimine eşit olur, yani dalga $\rho < \rho_j$ olduğunda ileriye doğru, $\rho > \rho_j$ olduğunda ise geriye doğru hareket ediyor. $\rho = \rho_j$ olduğunda, yani $\rho = \rho_j$ maksimum değer aldığı anda dalga yola nazaran hareketsiz kalır. $\rho = \rho_j$ civarında basit tepki süresi için biz kaba taslak bir değerlendirme yapabiliriz.

Eğer varsayarsak ki, sürücü ve onun aracı ilerideki değişmeyen δ süresinde tepki verirse arabaların emniyeti için mesafe δ olarak tutulmalıdır. Birbirini izleyen arabalar arasındaki h-kat edilen yol, L ise tipik araba uzunluğu olduğu takdirde

$$V = \frac{h - l}{\delta}$$

olur.

$h = \frac{1}{\rho}, L = \frac{1}{\rho_j}$ olduğundan $V(\rho) = \frac{L}{\delta}(\frac{\rho_j}{\rho} - 1)$ ve $Q(\rho) = \frac{L}{\delta}(\rho_j - \rho)$ olur. Büyük bir olasılıkla bunu $Q(\rho)$ nün eğrisinin, $Q(\rho)$ 'nun ρ 'ya bağlı olmasının yerine, ρ_j 'deki eğimi olarak yorumlayabiliriz. Herhalde bu hız dağılımı için $c_j = -\frac{L}{\delta}$ ilişkisini verir. Trafik akış problemlerinde, genelde δ süresi 0.5-1.5 saniye aralığında değişirken, fakat bazı koşullarda insan tepki süresi daha hızlı olabilir. Örneğin, $L=6.1\text{m}$, $\delta = 1$ saniye olduğunda $c_j \sim 6.25 \frac{m}{s}$ olur.

1.2. Yüksek Mertebeli Türevlerin Etkileri, Dağılıma ve Tepki Süresi

Kinematik dalga teorisinin birçok problemlerinde $q(x, t)$ akış fonksiyonuna daha iyi yaklaşım, $\rho(x, t)$ fonksiyonu ile $\rho_x(x, t)$, yoğunluk gradyanının lineer birleşimi şeklinde, yani

$$q = Q(\rho) - v\rho_x \quad (1.9)$$

biçiminde olmaktadır, [16].

Burada v katsayısı sürücülerin olaylara tepki verme zamanının ölçüsüdür.

Yukarıda sözü edilen δ büyüklüğüne yakın bir sayı olmaktadır.

Trafik problemlerinde (1.8) ifadesi, sürücülerin ilerideki araba yoğunluğuna bağlı olarak hızlarını artırıp veya azaltmaları gibi yorumlanabilir. Bu hüküm v sabitinin pozitif olduğu durumda önerilmektedir, fakat sonralar onun işaretinin önemi açıklanacaktır. Eğer v sabiti yeteri kadar küçük olursa, uygun boyutsuz ölçüde, (1.4) ifadesi yeteri kadar iyi yaklaşım olabilir. Kırılma durumunda $\rho_x(x, t)$ büyük değer alır ve hatta v sabiti yeteri kadar küçük olduğunda bile eklenmiş terim kritik olur. Bu koşullar çerçevesinde (1.5) denklemini

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = v \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

şeklinde yazılabilir. (1.10) denklemindeki $c(\rho) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}$ terimi çözümde kırılma ve

dikleşme olaylarına neden olmaktadır. Diğer taraftan ise $v \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$ terimi (ısı

dağılım probleminde olduğu gibi) difüzyon etkisi yaratmaktadır.

Trafik akış problemi teorisinde apaçık görülen iki etkiyi inceleyelim. Yukarıda

söylediğimiz gibi birinci önemli etki $q(x,t)$ nün $\rho(x,t)$ ve $\rho_x(x,t)$ den bağımlı olmasıdır ki, bu durumda sürücüler ilerideki koşulların farkındadır ve dalgaların difüzyonuna neden olur. Bu varsayım aşağıdaki gibi

$$q = Q(\rho) - v\rho_x, \quad v = V(\rho) - \frac{v}{\rho}\rho_x \quad (1.11)$$

ifade edilir.

İkinci etki, akış koşullarındaki herhangi bir değişime sürücülerin verdikleri reaksiyon süresidir. Bu anlamda (1.11) ifadesindeki v nin ifadesi hız için arzu edilen bir formüldür ki, sürücü ivmesini uyumlu şekilde seçebilir. Bu taktirde

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} \left\{ v - V(\rho) + \frac{v}{\rho}\rho_x \right\} \quad (1.12)$$

denklemini ivme için kullanılabılır. (1.12) denklemini aşağıdaki korunum kural denklemini

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(x,t)v(x,t))}{\partial x} = 0 \quad (1.13)$$

ile birlikte çözülmelidir. v, τ küçük olduğunda (1.12) denklemini $v = V(\rho)$ ifadesine dönüşür.

Önce otobanda arabaların hızını belirlemek için bir formül oluşturulalım. Fakat bu formülün oluşturulması teorik ve deneysel verilere dayanarak elde edilebilir. Bu formülleri araba hızını ifade etmek için birinci yaklaşım olarak kabul edebiliriz.(1.12),(1.13) modelinin teorik incelemesi [4],[7],[8],[12],[14] detaylı şekilde incelenmiştir.

1.3. Mikroskopik Model ve Çözümü

Yukarıda söylediğimiz gibi, trafik akışını ifade eden denklemler spesefik özelliklere sahip olan nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi oluşturmaktadır. Bu denklemler genelde Korunum Kurallarının hiperbolik denklemleri olur.

1.3.1. Önerilen Metodun Genel Yapısı

Bilindiği üzere nonlinear hiperbolik denklemlerin çözümleri yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına (darbe dalgaları) sahip olur. Bu özellik ise sistemin

çözümünü elde etmek için literatürde iyi bilinen klasik yöntemlerin direk uygulanmasına engel çıkarır.

Bu nedenle de olayın fiziksel özelliklerini düzgün ifade edebilen çözümlerin bulunmasına, etkin çözüm algoritmalarının kurulmasına ihtiyaç vardır.

Fiziksel problemi ifade eden denklemler sistemini aşağıdaki gibi vektörel

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = F \quad (1.14)$$

şekilde ifade edelim. Burada

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ve L ise bilinmeyen fonksiyonların türevlerinden oluşan bir diferansiyel ifade olmaktadır. (1.14) problemini sonraki bölümlerde biz esas problem olarak adlandıracağız.

Varsayalım ki, L operatörünü M ve N operatörlerinin faktörizesi şeklinde, yani

$$L = MN \quad (1.15)$$

gibi yazabiliriz. Burada, genelliği bozmadan M 'in tersinin mevcut, $N\varphi$ 'nin ise tanım bölgesinde sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda (1.14) denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + MNu = f \quad (1.16)$$

biçiminde gösterebiliriz.

(1.16) denkleminin her iki tarafına M^{-1} uygularsak

$$M^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} + M^{-1}MNu = M^{-1}F$$

alırız. $M^{-1} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} M^{-1}$ eşitliğinin gerçekleştiği takdirde sonuncu denklemi

$$\frac{\partial M^{-1}u}{\partial t} + Nu = M^{-1}F \quad (1.17)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$f = M^{-1}F \quad \text{veya} \quad Mf = F \quad (1.18)$$

denklemini koruyan, dolayısıyla $F \in \ker M$ olan herhangi bir fonksiyondur.

$$M^{-1}u = v \quad (1.19)$$

olarak gösterelim. Buradan

$$u = Mv \quad (1.20)$$

olur. (1.20) ifadesini dikkate alırsak (1.17) denklemini

$$\frac{\partial v}{\partial t} + N(Mv) = f \quad (1.21)$$

yazabiliriz.

(1.21) problemine yardımcı problem denir ve bu problemin aşağıdaki gibi avantajları vardır;

1. (1.21) denkleminin çözümünün diferansiyellenebilme özelliği, (1.14) denkleminin diferansiyellenme özelliğinden fazladır,
2. Esas problemin çözümünü bulurken $u(x, t)$ fonksiyonunun hiçbir değişkene göre türevlerinden kullanılmamaktadır, zira bu türevler mevcut olmaya da bilir.

Esas problemin çözümü ile yardımcı problemin çözümü formel olarak (1.20) eşitliği ile gerçekleştirilir.

Not 1. Altını çizelim ki , M^{-1} tersinin mevcudluğu ve lineer operatör olduğu halde bile özel olarak ispatlanması gerekir. İkincisi , M^{-1} tersi tek olmayada bilir. Açıktır ki, zayıf çözümlerin tekliği için ek koşulların (entropi) gösterilmesi de gerekmektedir.

1.3.2. Başlangıç Fonksiyonunun Süreksiz Olduğu Durum

Trafikteki akış dinamiğini incelemek için

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho(x, t))}{\partial x} = 0 \quad (1.22)$$

denkleminin aşağıdaki başlangıç

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_\ell, & x < 0 \\ \rho_r, & x > 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

koşul çerçevesinde çözmemiz gerekir.

Önce $\rho_\ell > \rho_r$ olan durumu göz önüne alalım.

Literatürden bilindiği üzere $Q(\rho)$ fonksiyonu konkav fonksiyon olduğunda, problemin çözümünde $\rho_\ell < \rho_r$ olduğu durumda,

$$Q''(\rho) = -\frac{2v_{max}}{\rho_{max}} < 0$$

koordinat başlangıcından itibaren hemen sıçrayış meydana gelir [1],[2],[13],[16].

$\rho_\ell > \rho_r$ olduğunda çözüm monoton parçalı sürekli fonksiyona dönüşür.

Kolayca gösterilebilir ki, (1.22) , (1.23) probleminin çözümü

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_\ell, & \xi < 0 \\ \rho_r, & \xi > 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

olmaktadır. Burada

$$\xi = x - Q'(\rho)t \quad (1.25)$$

şeklinde yazılabilir. (1.25) ifadesi ile tanımlanan karakteristikleri inceleyelim. Bunun için önce ξ fonksiyonunu bulalım

$$\xi = x - v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho\right) t$$

ve karakteristikleri (1.24) başlangıç koşulunu koruyacak şekilde birleştirelim:

a) $\xi < 0$ olduğunda $\rho = \rho_\ell$

$$\frac{x}{t} < v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_\ell\right),$$

b) $\xi > 0$ olduğunda $\rho = \rho_r$

$$\frac{x}{t} > v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_r\right),$$

c) $\xi = 0$ olduğunda

$$0 = x - v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho\right) t,$$

olur. Buradan

$$\rho = -\frac{\rho_{max}}{v_{max}} \frac{x}{2t} + \frac{\rho_{max}}{2}$$

elde edilir. Bu ifadeleri dikkate alarak problemin çözümünü aşağıdaki şekilde alırız.

Bu durumun karakteristikleri Şekil.3 de gösterilmiştir.

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_\ell, & \frac{x}{t} < v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_\ell\right) \\ \frac{\rho_{max} x}{v_{max} 2t} + \frac{\rho_{max}}{2}, & v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_\ell\right) < \frac{x}{t} < v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_r\right) \\ \rho_r, & \frac{x}{t} > v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho_r\right) \end{cases} \quad (1.26)$$

Genel teoriden bilindiği üzere $\rho_\ell > \rho_r$ olduğunda çözümde çok değerlilik oluşamaz, dolayısıyla normal seyirlerine devam ederler.

Yukarıdaki teoriği trafikteki yeşil ışık problemine uygulayalım. Varsayalım ki, $\rho_\ell = \rho_{max}$ ve $\rho_r = 0$ olsun. Bu durum fiziksel olarak $x = 0$ noktasında kırmızı ışık yandıktan sonra trafiğin durmasını ifade etmektedir. Görüldüğü gibi araba yoğunluğu $x = 0$ noktasında sıçrayışa sahip olur. Söz konusu arabaların dağılım durumu (başlangıç durum) Şekil.4 de gösterilmiştir. Trafik ışığı kırmızıdan yeşile değiştiğinde arabaların dağılım dinamiğinin bulunması talep olmaktadır.

Genel teoriye göre,

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) = Q'(\rho) = v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho\right),$$

karakteristikler üzerinde sabit kaldığı görülmektedir. Görüldüğü gibi ox eksenini pozitif yönündeki herhangi bir $x = x_0 > 0$ noktasında kesen karakteristiğin eğimi

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) = Q'(\rho) = v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho(x, 0)\right) = v_{max}$$

olur. Bu tür karakteristikler ailesinin denklemleri $x = v_{max}t + x_0$ olur.

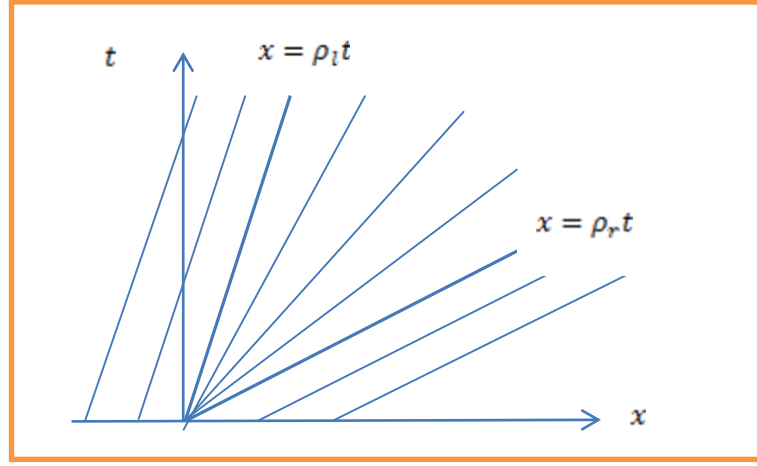
Diğer yandan ox eksenini negatif yönündeki noktalarla kesişen karakteristiklerin eğimi ise,

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) = Q'(\rho) = v_{max} \left(1 - \frac{2}{\rho_{max}} \rho(x, 0)\right) = -v_{max}$$

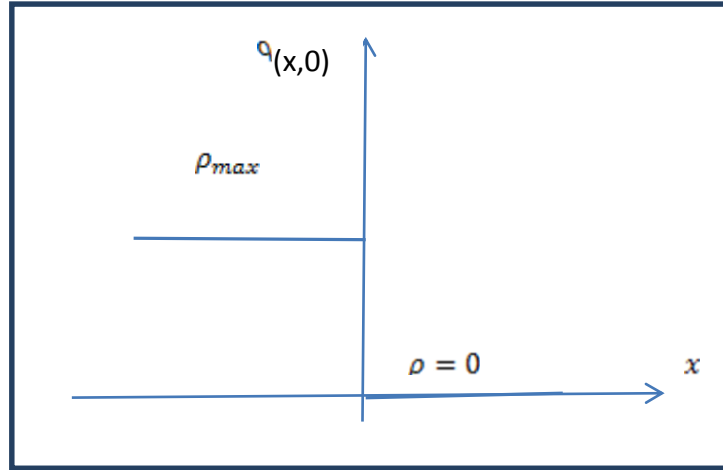
olmaktadır.

Açıktır ki, bu tür karakteristikler ailesinin denklemi $x = -v_{max}t + x_0$ gibi

$-v_{max}t < x < v_{max}t$ bölgesinde yerleşen karakteristiklerin hepsinin bir ortak noktası olmaktadır, yani $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$ olur. Bu durumda karakteristikler ailesinin denklemi Şekil 5 de gösterildiği gibi olur. Bu bilgiler çerçevesinde otobanda araba akışı dinamiği Şekil 6 da gösterilmiştir.



Şekil 3

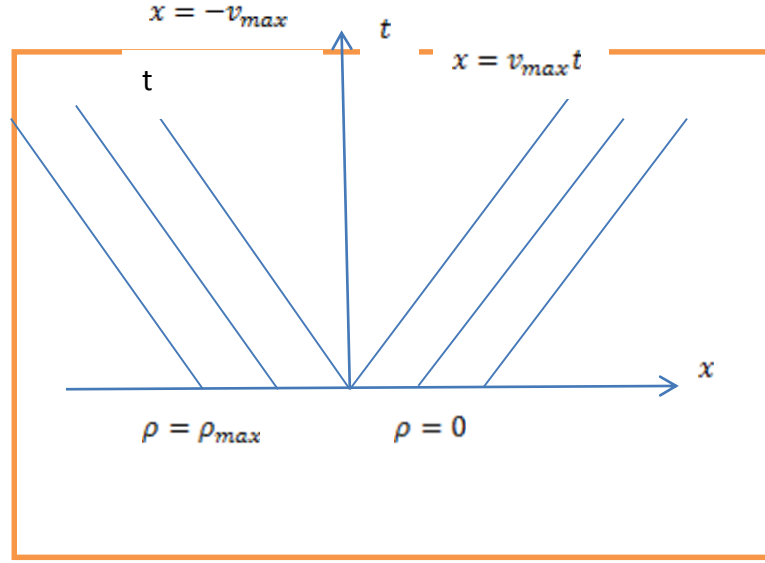


Şekil 4

Şimdi arabaların başlangıç dağılımının Şekil 7 de gösterildiği biçimde olduğu, yani $\rho_l < \rho_r$ durumunu inceleyelim. Bu durumda (1.22) , (1.23) probleminin yerine

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = 0 \quad (1.27)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \rho_l x, & x < 0 \\ \rho_r x, & x > 0 \end{cases} \quad (1.28)$$



Şekil 5

problemi çözmemiz gerekir. Söz konusu çözüm

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-, & \xi < 0 \\ u_+, & \xi > 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

olmaktadır. (1.27), (1.28) problemi [9]-[11] de incelenmiştir ve

$$\rho(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

ifadesinin (1.22), (1.23) probleminin çözümü olduğu ispatlanmıştır. Burada

$$u_- = -\frac{\rho_{max}}{v_{max}} \rho_\ell^2 t + \rho_\ell [x - v_{max} \left(1 - \frac{2\rho_\ell}{\rho_{max}}\right)] t \quad (1.30)$$

ve

$$u_+ = -\frac{\rho_{max}}{v_{max}} \rho_r^2 t + \rho_r [x - v_{max} \left(1 - \frac{2\rho_r}{\rho_{max}}\right)] t \quad (1.31)$$

şeklinde yazılabilir.

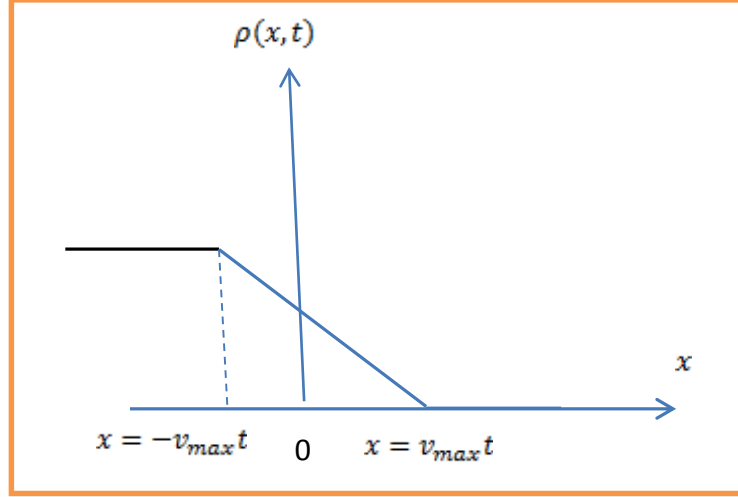
Hiperbolik tür denklemlerin teorisine göre bu durumda çözüme sıçrayış oluşur.

Sıçrayışın yerini $u_- = u_+$ denkleminde

$$\frac{x}{t} = v_{max} - \frac{v_{max}}{\rho_{max}} (\rho_\ell + \rho_r) \equiv U \quad (1.32)$$

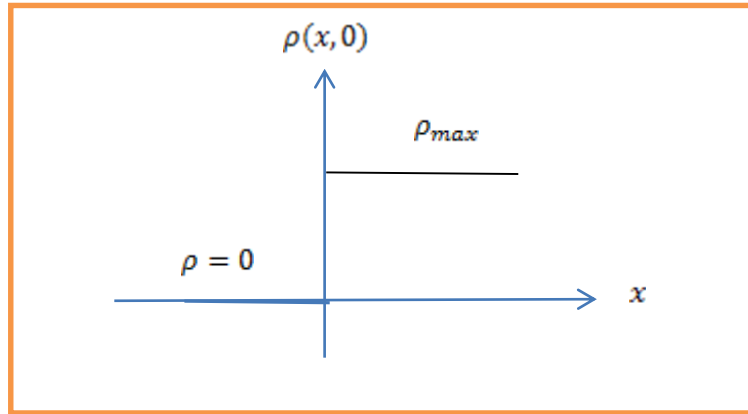
olarak buluruz. Sonucu ifadeyi dikkate alarak (1.22), (1.23) probleminin çözümünü

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_\ell, & \frac{x}{t} < U \\ \rho_r, & \frac{x}{t} > U \end{cases} \quad (1.33)$$



Şekil 6

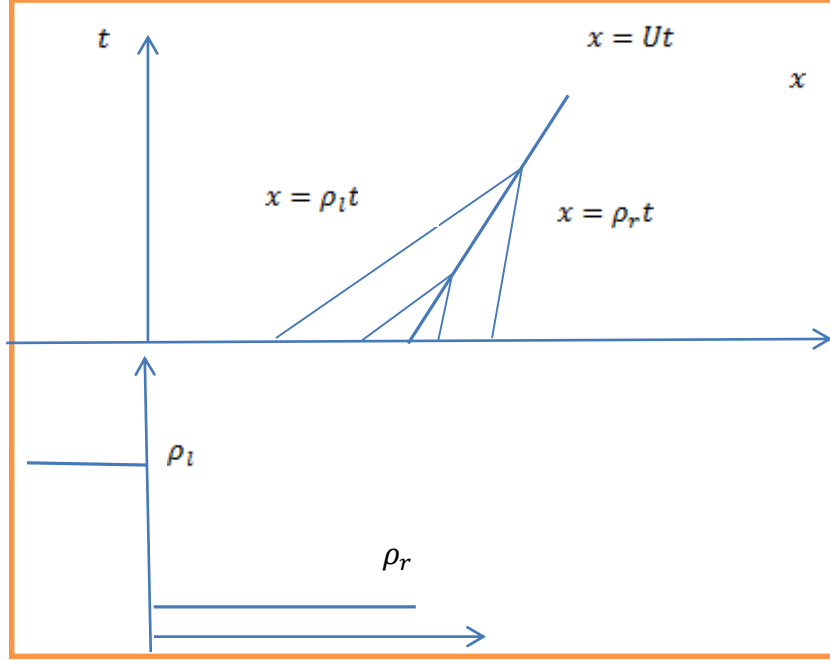
şeklinde yazabiliriz. Bu duruma karşılık gelen çözüm ve karakteristikler ailesinin grafikleri Şekil.8 de gösterilmiştir.



Şekil 7

Bu sonuçlar çerçevesinde trafik ışıklarını düzenlemek mümkün olur. Bunun için (x, t) düzleminde karakteristikler ailesinin grafiklerini kurmak yeterlidir. Bunlar sabit yoğunluklu doğrulardır, öyle ki, onların $c(\rho)$ eğimi $\rho(x, t)$ nun bu doğrular

üzerinde aldığı sabit değerlerini belirlemektedir. Trafik ışıkları önünde ağır hareket eden trafik akış dinamiği Şekil.9 dan kolayca anlaşılabilir.



Şekil 8

1.3.3. Başlangıç Fonksiyonunun Sürekli Olan Durum

Bu bölümde biz varsayacağız ki, arabaların başlangıç dağılımı kompakt şekildedir. Yani,

$$\rho(x, 0) = f(x) \quad (1.34)$$

$$\text{supp}f(x) = \{x \mid f(x) \neq 0\}$$

başlangıç koşulundaki $f(x)$ fonksiyonunun taşıyıcısı sonludur. $f(x)$ fonksiyonunun grafiği arabaların otobanda dağılım yoğunluğunu gösterir. (Şekil 10)

[10],[12],[16] ispatlandığı gibi (1.19),(1.34) probleminin çözümü belli bir T_0 anından sonra süreksiz fonksiyona dönüşecektir. Söz konusu T_0 sayısının bulunması [12] de olduğu gibi gerçekleşir.

Dolayısıyla (1.19),(1.34) probleminin klasik çözümü mevcut değil ve zayıf çözümü



Şekil 9

aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım.1:

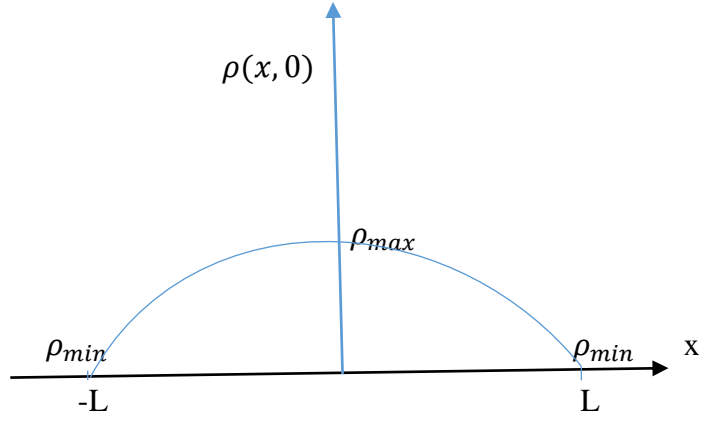
Negatif olmayan ve (1.34) başlangıç koşulunu ve $\varphi(x, T) = 0$ özelliğine sahip keyfi test fonksiyonları için aşağıdaki integral

$$\int_{D_T} \{\varphi_t \rho + \varphi_x Q(\rho)\} dx dt + \int_{-L}^L u(x, 0) \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (1.35)$$

eşitliğini koruyan $u(x, t)$ fonksiyonuna (1.19), (1.34) probleminin zayıf çözümü denir. $f(x)$ fonksiyonunun bulunması için 1.1 bölümündeki fiziksel verileri kullanarak aşağıdaki işlemleri yapalım.

Genelde araç uzunluğu = 4 metre, arabalar arası boşluk = 1 metre, olduğundan yani toplam 5 metre her araç için yer gerekli olduğunu varsayalım.

$$\rho_{ort} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad A_{uzunluk} = 0.2 \cdot 2000 = 400 \text{ araç sayısı}$$



Şekil 10

$$E(0) = \frac{2e}{3} [2\rho_{max} - \rho_{min}] = 400$$

$$\frac{2000}{3} 2\rho_{max} = 400$$

$$\rho_{max} = \frac{1200}{4000} = 0.3$$

Şekil 10' da ifade edilen başlangıç profilin denklemini çıkaralım. Bunun için $\rho(x, 0)$ fonksiyonunu aşağıdaki,

$$\rho(x, 0) = f(x) = ax^2 + bx + c$$

şeklinde arayalım. Burada a, b ve c şimdilik bilinmeyen sabitler olsun. Söz konusu sabitleri Şekil.10 da gösterilen özellikten bulacağız, yani

$$\begin{cases} aL^2 - bL + c = \rho_{min} \\ c = \rho_{max} \\ aL^2 + bL + c = \rho_{min} \end{cases}$$

Buradan

$$2aL^2 + 2\rho_{max} = 2\rho_{min}$$

veya,

$$a = \frac{-(\rho_{max} - \rho_{min})}{L^2}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}\frac{-(\rho_{max} - \rho_{min})}{L^2} \cdot L^2 - bL + \rho_{max} &= \rho_{min} \\ -\rho_{max} + \rho_{min} - bL + \rho_{max} &= \rho_{min} \\ b &= 0;\end{aligned}$$

Böylelikle bulduğumuz sabitler yerine konursa,

$$\rho(x, 0) = -\frac{(\rho_{max} - \rho_{min})}{L^2} \cdot x^2 - bL + \rho_{max} \quad (1.36)$$

alırız.

(1.36)'i dikkate alırsak $E(0)$ kritik sayısını

$$\begin{aligned}E(0) &= \int_{-l}^l \left[\rho_{max} - \frac{(\rho_{max} - \rho_{min})}{l^2} \cdot x^2 \right] dx = \\ &= \int_{-l}^l \rho_{max} dx - \int_{-l}^l \frac{(\rho_{max} - \rho_{min})}{l^2} \cdot x^2 dx = \\ &= \rho_{max} \Big|_{-l}^l - \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{l^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-l}^l = \\ &= 2l\rho_{max} - \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{l^2} \cdot \frac{2l^3}{3} = \\ &= 2l\rho_{max} - (\rho_{max} - \rho_{min}) \cdot \frac{2}{3}l = \\ &= 2l\rho_{max} - \rho_{max} \frac{2}{3}l + \rho_{min} \cdot \frac{2}{3}l = \\ &= \frac{4}{3}l\rho_{max} + \frac{2}{3}l\rho_{min} = \frac{2}{3}l(2\rho_{max} + \rho_{min})\end{aligned}$$

şeklinde buluruz.

Yani

$$E(0) = \frac{2}{3}l(2\rho_{max} + \rho_{min}) \quad (1.37)$$

olur. Yukarıdaki fiziksel verileri kullandığımızda,

$$\begin{aligned}\rho_{yoğunluk} &= \frac{\text{araba sayısı}}{\text{yolun uzunluğu}} \\ \frac{300}{2000} &= \frac{3}{20} = 0.15,\end{aligned}$$

yani

$$\rho_{max} = 0.15$$

olur. Buradan

$$E(0) = \frac{2000}{3} (2 \cdot 0.15) = \frac{2000}{3} \cdot 0.3$$

veya

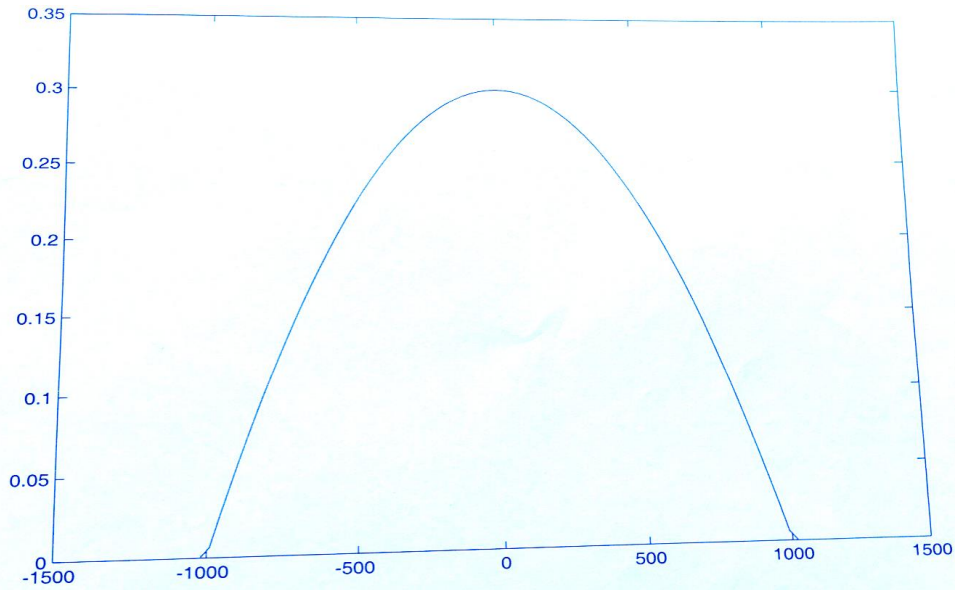
$$E(0) = 200$$

olarak bulunur.

Böylelikle $\rho(x, t)$ fonksiyonu için başlangıç dağılımı

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} -\frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{L} \cdot x^2 + \rho_{max} & , |x| < 1000 \\ 0 & , |x| > 1000 \end{cases} \quad (1.38)$$

alırız. (1.38) fonksiyonunun grafiği Şekil.11'de gösterilmiştir.



Şekil .11

Başlangıç profil hem pozitif, hem de negatif eğime sahip olduğu için denklemin çözümünde belli bir T_0 zamanından sonra çok değişiklik oluşacaktır [12],[16] . Bunun için [12],[16] takip ederek aşağıdaki yardımcı problemi,

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + Q \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.39)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad (1.40)$$

içerelim.

Burada $v_0(x)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \rho_0(x)$$

denklemini koruyan keyfi bir fonksiyon olmaktadır. [12] takip ederek $E(0)$ kritik sayısını içerelim.

$$E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 200$$

olmaktadır. Dolayısıyla $E(0)$ otopanın $(-L,L)$ kısmındaki arabaların toplam sayısına eşittir.

Şimdi $v_0(x)$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \int_0^x \rho_0(x) dx = - \int_0^x \frac{(\rho_{max} - \rho_{min})}{l^2} \cdot x^2 dx + \int_0^x \rho_{max} dx \\ &= - \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{3l^2} \cdot x^3 + \rho_{max} x \end{aligned}$$

Genelleştirilmiş $v_0(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$v_0(x) = \begin{cases} -200, & x < -1000 \\ - \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{3l^2} \cdot x^3 + \rho_{max} x, & |x| < 1000 \\ 200, & x > 1000 \end{cases} \quad (1.41)$$

[12]'i takip ederek genelleştirilmiş çözümü yazalım,

$$v_{gen}(x, t) = \begin{cases} -\frac{V_m}{\rho_m} u^2(x, t)t + v_0(\xi), & V \leq E(0) \\ E(0), & V > E(0) \end{cases} \quad (1.42)$$

Esas teoreme göre

$$u_{gen}(x, t) = \frac{\partial v_{gen}(x, t)}{\partial x} \quad (1.43)$$

olur.

2. BİRİNCİ BASAMAKTAN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİ

Bu bölümde 1. Basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi için karakteristikler yöntemini inceleyeceğiz. Bunun için önce hidrodinamikte karşılaşılan model sistemi göz önüne alalım.

2.1 Hidrodinamik Model ve Çözümü

Aşağıdaki nonlinear denklem sistemini göz önüne alalım;

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & , & (2.1) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 & & (2.2) \end{cases}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2.3)$$

$$\rho(x, 0) = g(x) \quad (2.4)$$

burada $u(x, t)$ ve $\rho(x, t)$ sırasıyla hız ve yoğunluk fonksiyonlarını göstermektedir. (2.1) denklemi sistemin diğer denklemlerden bağımsız olduğu için, önce bu denklemi çözelim. (2.1) denklemini (2.3) başlangıç koşulu çerçevesinde çözümünü bulmak için

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (2.5)$$

denklemini ile tanımlanan $x = x(t)$ eğrisini içereyim. O zaman

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (2.6)$$

$t = 0$ olduğu durumda başlangıç koşullarını yazalım

$$x|_{t=0} = a \quad u|_{t=0} = u_0(a) = f(a)$$

(2.6)'dan sonra $u = \text{sabit}$ olduğunu görürüz.

$$x = ut + a \quad (2.7)$$

veya

$$a = x - ut \quad (2.8)$$

elde ederiz. (2.1),(2.3) probleminin gerçek çözümü

$$u(x, t) = f(a) = f(x - ut)$$

olur.

Şimdi (2.2) denkleminin çözümünü bulmak için (x, t) koordinat sisteminde jakobiyani sıfırdan farklı olan ve aşağıdaki gibi tanımlanabilen değişken dönüşümü

$$\begin{cases} a = a(x, t) = x - ut \\ \tau = t \end{cases} \quad (2.9)$$

yapalım. Bu dönüşümün jakobiyani

$$J = \frac{D(a, \tau)}{D(x, t)} = \left(\frac{D(x, t)}{D(a, \tau)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial a} t + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial u}{\partial a} t = 1 + f'_a t \quad (2.10)$$

olur.

(2.9)'dan u_x türevinin ifadesini bulalım.

Bundan dolayı,

$$u = u(x, t) = u(x(a, \tau), \tau) = \bar{u}(a, \tau)$$

olsun. Buradan

$$u_x = \bar{u}_a a_x = \bar{u}_a (1 - u_x t)$$

veya

$$u_x = \frac{\bar{u}_a}{1 + t \bar{u}_a} = \frac{f'_a(a)}{1 + t f'_a(a)} \quad (2.11)$$

elde ederiz.

(2.10) ifadesi (2.11)' de dikkate alınırsa

$$u_x = \frac{\frac{dJ}{dt}}{J} = \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} \quad (2.12)$$

buluruz. Şimdi (2.2) denklemini

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho u_x \quad (2.13)$$

şeklinde yazıp, (2.12) ifadesini (2.13)'de yerine yazarsak

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = 0 \quad (2.14)$$

olduğunu elde ederiz. (2.14) denklemini

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{J} dJ$$

şeklinde yazıp, sonuncu denklemi t 'ye göre 0'dan t 'ye kadar integrallersek, buradan

$$\rho(x, t)J(x, t) = \rho(a, 0)J(a, 0)$$

elde ederiz. $J(a, 0) = 1$ olduğundan (2.1)-(2.4) probleminin çözümünü

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x, t) = \frac{\rho(a, 0)}{J(a, t)} = \frac{g(x-ut)}{1+tf'(x-ut)} \\ u(x, t) = f(x - ut) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

şeklinde buluruz. Kolayca göstere biliriz ki, zamanın öyle değeri vardır ki,

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} = \infty, \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial x} = \infty$$

Burada açıkça görülür ki, (2.1),(2.4) probleminin belli bir T_0 zamandan sonra çözümü olmayabilir. Böyle durumlarda çözümü zayıf çözüm anlamında kullanmamız gerekir.

2.2. Birinci Basamaktan Diferansiyel Denklemler Sistemi İçin Genel Bilgiler

Skaler denklem için geliştirilmiş karakteristikler yönteminin mantığını direkt

olarak 1.basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemine uygulamak mümkün değildir.

Çünkü sistemin her bir denklemini farklı bilinmeyen fonksiyonların çeşitli yönlerde türevlerini içermektedir. Karakteristikler yöntemini diferansiyel denklemler sistemine uygulayabilmemiz için özel şekilde karakteristik eğriler bulunur ki, bu karakteristikler üzerinde invaryant kalan ifadeler elde etmek mümkün olsun. Bunlara Riemann invaryantları denir. Riemann invaryantları dikkate alınarak göz önüne aldığımız sistemin her bir denklemini uygun karakteristikler üzerinde tam diferansiyel şeklinde ifade etmek mümkündür. Dolayısıyla, yine de 1.basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi adi diferansiyel denklemler sistemine indirgenebilir. Söz konusu adi diferansiyel denklemler sistemini çözerek verilmiş problemin gerçek çözümlerini elde ederiz.

Günümüzde birçok fiziksel problemler skaler diferansiyel denklemden ziyade birinci basamaktan kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi şeklinde ifade edilmektedir. Böyle denklemler bilinmeyen fonksiyonların türevlerine göre lineer olup, katsayıları ise bilinmeyen fonksiyonlara ve serbest değişkenlere bağlı olabilir. Eğer böyle denklemler dalgaların dağılım durumlarını ifade ederse, birçok problemin çözümüne dalga denklemlerini çözerek ulaşabiliriz.

Bu bölümde de yukarıda olduğu gibi iki boyutlu problemleri göz önüne alacağız. Değişkenlerden birisi x yer eksenini, diğeri t ise zaman değişkenini göstermektedir. Eğer bilinmeyen fonksiyonlar $u_i(x, t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) olursa birinci mertebeden kuazi lineer diferansiyel denklemler sisteminin genel yazılım formu

$$\sum_{j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right) + c_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.16)$$

biçiminde olmaktadır. Burada, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) katsayıları x, t ve u ya bağlı bilinen fonksiyonlardır.

Öncelikle (2.16) sisteminin hiperbolik sistem olması için bir koşul bulalım. Birinci mertebeden skaler kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü ararken öncelikle bu denklemin karakteristiklerini bulup söz konusu denklemini adi diferansiyel

denklemler sistemine dönüştürüyorduk. Bazı durumlarda elde ettiğimiz adi diferansiyel denklemlerin çözümünü bulabiliyorduk. En azından ele aldığımız diferansiyel denklemler sistemini sayısal olarak çözmek mümkündür. Her iki durumda da göz önünde bulunan kısmi türevli diferansiyel denklem "yerel" olarak çözülür. Bu ise genelde dalgaların dağılım durumlarına denk gelmektedir. Gerçekten de küçük bir zaman diliminde herhangi bir noktanın hareketine o noktaya yakın olan noktanın etkisi olabilir. Doğal olarak karşımıza şöyle bir soru çıkar. (2.16) denklemler sistemi için de böyle bir yerel hesaplama işlemleri yapılabilir mi? Eğer bu işlemleri yapmak mümkün ise o zaman sistem hiperbolik türe ait olur.

Hiperbolik sistemin tanımını vermeden önce bazı bilgilere göz atalım, [3] . Genelde (2.16) sisteminde her bir denklem keyfi u_j fonksiyonlarının yanı sıra $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ ve $\frac{\partial u_j}{\partial x}$ türevlerinin keyfi kombinasyonlarını da içermektedir. Bu şu anlama gelir, denklemler herhangi bir u_j fonksiyonlarının çeşitli yönlerdeki değişim hızı hakkında bilgi verir, fakat bu denklemlerden herhangi bir u_j fonksiyonunun söz konusu değişim hızlarının bilinen bir yönde değişmesi hakkında herhangi bir bilgi almak mümkün değildir. (2.16) denklemler sistemi üzerinde çeşitli dönüşümler yaparsak acaba yukarıda bahsettiğimiz bilgileri elde edebilir miyiz? Bunu araştıralım.

(2.16) denklem sistemini

$$\vec{l} = \ell_1(x, t, u), \ell_2(x, t, u), \dots, \ell_n(x, t, u), \quad (2.17)$$

vektörü ile çarpıp toplayalım

$$\sum_{i=1}^n \ell_i \left(\sum_{j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x} \right) + c_i \right) = 0$$

Acaba (2.16) sistemini

$$\sum_{j=1}^n m_j \left(\beta \frac{\partial u_j}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + \ell_j c_i = 0, \quad (2.18)$$

şekline dönüştürebilen ve \vec{l} vektörünü bulmak mümkün müdür? Bu tür dönüşümün

mümkün olduğu takdirde (2.18) denklemi u_j nin tüm türevlerini tek bir (α, β) yönündeki ilişkileri gösterebilir. Bu durumda (x, t) düzleminde (α, β) vektör alanı ile tanımlanan eğrinin bulunması gerekir. Varsayalım ki, bu tür eğrilerden birinin parametrik denklemleri $x = x(\eta)$, $t = t(\eta)$ olmaktadır. Bu takdirde

$$\frac{\partial u_j}{\partial \eta} = t' \frac{\partial u_j}{\partial t} + x' \frac{\partial u_j}{\partial x}$$

olur. Genelliği bozmadan $\alpha = x'(\eta)$, $\beta = t'(\eta)$ alabiliriz ve (2.18) denklemini

$$\sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial u_j}{\partial \eta} + l_j c_i = 0, \quad (2.19)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.18) denkleminin (2.19) şeklinde yazılabilmesi koşulu

$$\sum_{i=1}^n \ell_i a_{ij} = m_j T', \quad \sum_{i=1}^n \ell_i b_{ij} = m_j X'$$

olmaktadır. Sonuncu ifadelerden m_i leri yok edersek

$$\sum_{i=1}^n \ell_i (a_{ij} X' - b_{ij} T') = 0$$

elde ederiz. Böylelikle ℓ_i çarpımları ve (X', T') yönü için n tane denklem alırız. Söz konusu denklemler ℓ_i lere göre homojen lineer cebirsel denklemler sistemi olduğundan trivial olmayan çözümün varlığı için gerekli ve yeterli koşul

$$|AX' - BT'| = 0 \quad (2.20)$$

olmasıdır.

(2.20) koşulu yukarıda sözünü ettiğimiz eğrinin yönünü belirler ve bu tür eğrilere karakteristik eğriler denir. (2.19) denklemine ise karakteristik şeklinde yazılmış denklem karakteristik denklem denir. Karakteristik formda yazılmış denklemin her

biri u_j , ($j = 1, 2, \dots, n$) fonksiyonlarının iki türevleri arasındaki yalnız bir bağlantıyı göstermektedir. İleride göreceğiz ki, problemin lokal çözümünün bulunması için karakteristik formda yazılmış iki denklem gerekmektedir. Bu koşul sistemin hiperbolik olması koşuludur.

(2.20) ifadesindeki A ve B matrislerinden birisi veya her ikisi dejenere olabilirler. $|A| = 0$ olduğu taktirde $T' = 0$ (2.20) nin çözümü, x yönü ise karakteristik olur. Eğer $|B| = 0$ ise $X'=0$ (2.20) nin çözümü, t yönü ise karakteristik olur. Özel durumlarda her iki koordinat eksenini de karakteristik yön olabilir. Lakin bu durumu özel olarak incelemek gerekir.

Her iki matrisin dejenere olduğu durumlarda sistem öyle kuvvetli dejenere olur ki bu durumu incelemeye ihtiyaç kalır. Bu iki durumu koordinat eksenlerini dönderdikten sonra söylediklerimiz özelliklerin aradan kalkıp kalkmamasını kontrol ederek çeşitlendirebiliriz. Eğer başlangıçta eksenler karakteristik yön ise koordinat eksenlerini dönüşümü dejenere olmayan matrislere sahip yeni sisteme dönüşür. Eksenlerin dönüşümü (2.16) deki matrisi onun lineer kombinasyonları şekline dönüştürür.

Böylelikle aradığımız koşul ikisi de aynı zamanda sıfıra eşit olmayan herhangi bir λ ve μ için

$$|\lambda A + \mu B| \neq 0 \quad (2.21)$$

olmasıdır.

Bu sınırlamayı da dikkate alarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 2. (2.21) koşulunu koruyan, $\alpha^{(k)^2} + \beta^{(k)^2} \neq 0$ olmak suretiyle, herhangi bir k için

$$\sum_{i,j} \ell_i \{A_{ij}\alpha^{(k)} - B_{ij}\beta^{(k)}\} = 0$$

sistemini koruyan ve $\{\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}\}$ karakteristiklerin reel olan, lineer bağımsız $I^{(k)}$,

($k = 1, 2, \dots, n$) vektörler sisteminin mevcut olduğu takdirde (2.16) sistemine hiperbolik sistem denir.

Bu tanımda önemli olarak altı çizilen lineer bağımsız $I^{(k)}$ vektörler sisteminin var olmasıdır, uygun $\{\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}\}$ yönlerin ise farklı ve reel olmaları talep edilmemektedir. Bu yönlerin birinin diğerinden farklı olduğu durumlarda n farklı karakteristikler mevcut olur ve bu durumda (2.16) sistemine ciddi hiperbolik sistem denir.

Özel, $A_{ij} = \delta_{ij}$ durumunu inceleyelim, burada δ_{ij} Kronecker sembolüdür. Bu takdirde (2.16) sistemi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.22)$$

şekline düşer, yani A birim matris olur. (2.21) dan görüldüğü gibi bu durumda $T' \neq 0$ olur, yani karakteristikler hiç bir zaman ox eksenini yönünde olamaz. Buna göre onları t ye bağımlı $x = X(t)$ denklemleri ile ifade edebiliriz.

$$\sum_{i=1}^n \left(\ell_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \ell_i a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \ell_i c_i \right) = 0,$$

lineer kombinasyonu

$$\sum_{i=1}^n \ell_i a_{ij} = \ell_i c$$

olduğu takdirde $\frac{\partial X}{\partial t} = c$ eğrileri üzerinde

$$\sum_{i=1}^n \ell_i \frac{du_i}{dt} + \ell_i b_i = 0 \quad (2.23)$$

şeklinde karakteristik formda yazılabilir. Böylelikle karakteristik c hızı

$$|A - cE| = 0$$

denkleminde elde edilebilir, yani (2.24) denkleminin c kökü A matrisinin öz değerleri, I vektörleri ise bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler olmaktadır. Burada

E birim matrisi göstermektedir. (2.24) denkleminin n tane reel bir birinden farklı köklerinin olduğu takdirde (2.22) sistemi hiperbolik tür sistem olur.

Karakteristik formda yazılmış her bir denklem kendi türevlerinin lineer kombinasyonlarını içerir. Örneğin (2.23) denkleminde söz konusu lineer kombinasyon $\sum_i \ell_i \frac{\partial u_i}{\partial t}$ şeklindedir. Lineer teoride I vektörü u dan bağımlı olmadığından $r = \sum_i \ell_i u_i$ değişken dönüşümü denklemi sade

$$\frac{dr}{dt} + f(x, t, u) = 0$$

şekline dönüştürür. Nonlineer teoride ise I vektörü u dan bağımlı olduğundan denklemi yukarıda olduğu gibi sade şekle dönüştürmek zorlaşır. Bu durumda

$$\sum_i \ell_i du_i = \lambda dr$$

eşitliğini koruyan λ ve r nin dahil edilmesi gerekir.

Hiperbolik sistemler için n sayıda karakteristik formda yazılmış denklem çok basit şekil aldığından her bir $\sum_i \ell_i^{(k)} du_i$ diferansiyel formu için r_k değişkenlerini dâhil etmek mümkün olur. Bu takdirde r_k değişkenleri u_i lerin yerine yeni değişken olarak kabul edilebilir ve karakteristik denklemleri

$$\frac{dx}{dt} = c_k(x, t, r)$$

üzerinde

$$\frac{dr_k}{dt} = f_k(x, t, r)$$

şeklinde yazabiliriz. r_k değişkenlerine Riemann invaryantları denir.

2.3 Karakteristikler ve Riemann İnvaryantları

Yukarıda söylediklerimi $n = 2$ olan durum için uygulayalım. Genelliğini bozmadan aşağıdaki sistemi

$$\begin{cases} A_{11}(x, t) \frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11}(x, t) \frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1(x, t), \\ A_{21}(x, t) \frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21}(x, t) \frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x} = f_2(x, t) \end{cases} \quad (2.25)$$

göz önüne alalım. (2.25) sistemini

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \quad (2.26)$$

matris şeklinde yazalım. Burada A, B, u ve f

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

olmaktadır.

(2.25) sisteminin herhangi bir D_T bölgesinde herhangi bir (x, t) noktasında pürüzsüz (türevlenebilir) çözümünün olduğunu varsayalım. D_T bölgesinde bulunan bir (x_0, t_0) noktasını ve bu noktadan geçen bir γ eğrisini göz önüne alalım. Bu eğri üzerinde olan (x_0, t_0) noktasındaki küçük kaydırma vektörünü (dx, dt) ile gösterelim. Varsayalım ki, (2.25) sisteminin çözümleri γ eğrisi üzerinde verilmiştir. Amacımız γ eğrisi üzerinde verilen u_1 ve u_2 nin değerlerine ve sağladıkları (2.25) sistemine göre çözümü γ eğrisinin civarında bulmaktır.

Verilmiş değerlere göre γ eğrisinin etrafında (2.25) sisteminin çözümünün bulunmasına Cauchy problemi (veya başlangıç değer problemi) denilir.

u_1 ve u_2 fonksiyonları γ eğrisi üzerinde bilindikleri için bu eğri üzerinde onların türevleri de bilinmektedir. Dolayısıyla

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

normal türevlerinin varlığı eğrinin tüm noktalarında herhangi bir yön boyunca türevini bulmaya imkan sağlamaktadır. Tersine, bu dört türev biliniyorsa, keyfi yön ve normal boyunca türevleri de bulabiliriz. Bu takdirde problemi şöyle ifade edelim: u

fonksiyonunun eğrisi üzerinde bulunduğunu varsayarak bu eğrinin tüm noktalarında $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevlerini bulunuz.

Söz konusu türevleri u fonksiyonunun (x_0, t_0) noktasında ve onların (dx, dt) vektörü boyunca tam diferansiyellerinin de bulunduğunu varsayarak hesaplamaya çalışacağız. du diferansiyellerini türevler yardımıyla

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} dt + \frac{\partial u_1}{\partial x} dx = du_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} dt + \frac{\partial u_2}{\partial x} dx = du_2 \quad (2.28)$$

olarak yazalım. (2.28) ifadelerini (2.25) denklemler sistemine eklersek $\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial x}$ bilinmeyen fonksiyonlar için

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1, \\ A_{21} \frac{\partial u_1}{\partial t} + A_{22} \frac{\partial u_2}{\partial t} + B_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x} = f_2, \\ dt \frac{\partial u_1}{\partial t} + dx \frac{\partial u_1}{\partial x} = du_1, \\ dt \frac{\partial u_2}{\partial t} + dx \frac{\partial u_2}{\partial x} = du_2 \end{array} \right. \quad (2.29)$$

denklemler sistemini elde ederiz. Bu sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = f, \\ dtE \frac{\partial u}{\partial t} + dxE \frac{\partial u}{\partial x} = du \end{array} \right. \quad (2.30)$$

matris şeklinde yazalım. Burada E birim matris olmaktadır. (2.30) sisteminin bilinmeyenlerini bulmak için gerekli ve yeterli koşul

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.31)$$

olmasıdır. Burada

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

olmaktadır.

Aşağıdaki eşitliği

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} = 0 \quad (2.33)$$

sağlayan eğrilere (2.25) sisteminin karakteristikleri denir.

Varsayalım ki, γ eğrisinin kendisi karakteristik eğridir. (2.30) sisteminin determinantının sıfıra eşit olmasına rağmen bu sistemin çözümü vardır. Varsayımımıza göre (2.30) sisteminin γ eğrisi üzerinde tanımlanan bir çözümü vardır. Bu ise

$$\begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{pmatrix}$$

genişletilmiş matrisin rankının

$$\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix}$$

dejenere olan matrisin rankına eşit olması anlamına gelir. Böylelikle du vektörü karakteristikler boyunca keyfi olamaz ve aşağıdaki koşulu

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix}$$

sağlamak zorundadır. (2.33) ifadesine karakteristiklerin koşulu denir. Karakteristikleri daha iyi anlayabilmek için bir örneği inceleyelim.

Gaz dinamiğinde ortaya çıkan nonlinear kısmi türevli denklem sistemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.35)$$

göz önüne alalım.

Önce bu denklem sisteminin Rimann invariantlarını bulalım. Bundan dolayı (2.30),(2.35) denklemler sistemini matris cinsinden yazalım. Bilinmeyenler (u, ρ)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + 0 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + 1 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} dt + 0 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} dx + 0 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = du \\ \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = d\rho \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & \rho & u \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & \rho & u \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \rho & u \\ 0 & dx & 0 \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 0 & u & 0 \\ 1 & \rho & u \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix}$$

$$= dx^2 - u dx dt + dt[u^2 dt - u dx] = dx^2 - u dx dt + u^2 dt^2 - u dx dt;$$

$\det A = 0$ denkleminde

$$\frac{dx^2}{dt} - 2u \frac{dx}{dt} + u^2 = 0 \quad \frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{u^2 - u^2} = u$$

(2.30),(2.35) sisteminin iki tane karakteristikler vardır ve bunlar birbirine eşit

olmaktadırlar.

Şimdi (2.30),(2.35) Rimann invariantlarını bulalım. Bundan dolayı genişletilmiş matrisi,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho & u & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & d\rho \end{pmatrix}$$

yazalım.

Genişletilmiş matrisin rankı A matrisinin rankına eşit olmalıdır.

Örneğin;

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & \rho & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır.

Buradan yukarıda olduğu gibi Riemann invariantları kolayca elde edilir.

3. ANİSOTROPİK MODELİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

3.1. Yüksek Mertebeli Terimlerin Etkisi Difüzyon Ve Refleks (Yanıt) Süresi

Trafik akış teorisine, pratikte apaçık görülen daha iki etkiyi de dâhil etmek gerekmektedir. Bunlardan birincisi yukarıda da bahsedildiği üzere q nun ρ nun dışında, ρ_x 'den de bağımlı olmasıdır. Bu yaklaşım kabaca sürücülerin öndeki koşullardan bilgili olmasını ifade eder ve buda dalgaların difüzyonunu sağlar. Bu iki basit koşulu dikkate alarak q nün kalitatif davranışını

$$q = Q(\rho) - \mu\rho_x, \quad (3.1)$$

$$v = V(\rho) - \frac{\mu}{\rho}\rho_x \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

İkinci etki, sürücülerin refleksindeki zamanı ve arabaların akış koşullarına göre herhangi bir değişmeden oluşmaktadır. Bu etkiyi dikkate alma yolundan birisi (3.2) ifadesindeki arzu edilen v hızını uygun ivme denkleminde

$$v_t + vv_x = -\frac{1}{\tau}\{v - V(\rho) + \frac{\mu}{\rho}\rho_x\} \quad (3.3)$$

denkleminde bulunmasıdır.

Burada τ katsayısı refleks zamanı ve onunla yakın olan ve yukarıda bahsettiğimiz δ ile ölçülebilen büyüklüktür. Buna göre de (5) denklemi

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (3.4)$$

denklemi ile birlikte çözülecektir.

3.2. Riemann İnvaryantları

Bu bölümde biz (3.3), (3.4) sistemi için Riemann invaryantlarını çıkaralım. Bunun için

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} \left\{ v - V(\rho) + \frac{\mu}{\rho} \rho_x \right\} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

sistemini

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\mu}{\tau \rho} \rho_x + \frac{V(\rho) - v}{\tau} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde yazalım.

(v, ρ) bilinmeyen fonksiyonlar ise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v & \frac{\mu}{\tau \rho} \\ \rho & v \end{pmatrix}$$

olur.

Bu durumda (3.6) denklemler sistemi

$$\begin{cases} A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = F, \\ dt E \frac{\partial u}{\partial t} + dx E \frac{\partial u}{\partial x} = du \end{cases}$$

şeklinde düşer. Burada

$$u = \begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad [F = -\frac{v - V(\rho)}{\tau}]$$

olmaktadır.

Sistemin karakteristikleri (2.33)

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & v & \frac{\mu}{\tau \rho} \\ 0 & 1 & \rho & v \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = 0$$

denkleminde bulunur. Burada

$$0 = dx \begin{vmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & \rho \\ dt & 0 & dx \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 0 & v & \frac{\mu}{\tau \rho} \\ 1 & \rho & v \\ dt & dx & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= dx \left[\begin{vmatrix} 1 & \rho \\ 0 & dx \end{vmatrix} + v \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ dt & 0 \end{vmatrix} \right] + dt \left[\begin{vmatrix} \rho & v \\ dx & 0 \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} v & \frac{\mu}{\tau\rho} \\ \rho & v \end{vmatrix} \right] \\
&= dx[dx - vdt] + dt[-vdx + dt(v^2 - \frac{\mu}{\tau})] \\
&= (dx)^2 - vdxdt - vdxdt + (dt)^2(v^2 - \frac{\mu}{\tau}) \\
&= (dx)^2 - 2vdxdt + (dt)^2(v^2 - \frac{\mu}{\tau}) = 0
\end{aligned}$$

alırız. Her tarafı $(dt)^2$ 'e bölersek,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2vdxdt + \left(v^2 - \frac{\mu}{\tau}\right) = 0$$

olur. Buradan karakteristikleri

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{v^2 - \left(v^2 - \frac{\mu}{\tau}\right)} = v \pm \sqrt{\frac{\mu}{\tau}}$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi sistemin Riemann integrallerini bulalım. Bunun için genelleştirilmiş matrisi yazalım.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & v & \frac{\mu}{\tau\rho} & -\frac{v - V(\rho)}{\tau} \\ 0 & 1 & \rho & v & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & dv \\ 0 & dt & 0 & dx & d\rho \end{vmatrix}$$

Yukarıda yazdığımız teoriye göre D matrisinin rankı C matrisinin rankına eşit olmalıdır.

Karakteristikler üzerinde korunan koşulları bulalım. Bunun için

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & v & \frac{\mu}{\tau\rho} & -\frac{v - V(\rho)}{\tau} \\ 0 & 1 & \rho & v & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & dv \\ 0 & dt & 0 & dx & d\rho \end{vmatrix} = 0$$

determinantını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & v & \frac{\mu}{\tau\rho} & -\frac{v-V(\rho)}{\tau} \\ 0 & 1 & \rho & v & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & dv \\ 0 & dt & 0 & dx & d\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \rho & 0 \\ 0 & dx & dv \\ dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} 0 & v & -\frac{v-V(\rho)}{\tau} \\ 1 & \rho & 0 \\ dt & 0 & d\rho \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} dx & dv \\ 0 & d\rho \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} \rho & 0 \\ dx & dv \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} \rho & v \\ 0 & d\rho \end{vmatrix} + dt \begin{vmatrix} v & -\frac{v-V(\rho)}{\tau} \\ \rho & 0 \end{vmatrix} \\
&= dx d\rho + dt \rho dv + dt \left(\frac{\rho}{\tau} \left(-\frac{v-V(\rho)}{\tau} \right) \right).
\end{aligned}$$

Şimdi

a) $\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{\frac{\mu}{\tau}}$ olsun. Buradan

$$dx = \left(v - \sqrt{\frac{\mu}{\tau}} \right) dt$$

olur ve,

$$0 = \left(v - \sqrt{\frac{\mu}{\tau}} \right) dt d\rho + dt \rho dv + \rho dt d\rho + dt \left(\frac{\rho}{\tau} \left(-\frac{v-V(\rho)}{\tau} \right) \right);$$

Her tarafı dt 'ye bölersek,

$$\left(v - \sqrt{\frac{\mu}{\tau}} \right) d\rho + \rho dv + \rho d\rho + \frac{\rho}{\tau} \left(-\frac{v-V(\rho)}{\tau} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Şimdi $\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{\frac{\mu}{\tau}}$ durumunu inceleyelim.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
&dt d\rho + dt \rho dv + \rho dt d\rho + dt \left(\frac{\rho}{\tau} \left(-\frac{v-V(\rho)}{\tau} \right) \right) = 0 \\
&\left(v - \sqrt{\frac{\mu}{\tau}} \right) dt d\rho + dt \rho dv + \rho dt d\rho + dt \left(\frac{\rho}{\tau} \left(-\frac{v-V(\rho)}{\tau} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Her tarafı dt 'ye bölersek,

$$\left(v - \sqrt{\frac{\mu}{\tau}} \right) d\rho + \rho dv + \rho d\rho + \frac{\rho}{\tau} \left(-\frac{v-V(\rho)}{\tau} \right) = 0 \quad (3.8)$$

alırız.

(3.7), (3.8) deklemleri, yani

$$\begin{cases} \left(v + \sqrt{\frac{\mu}{\tau}} \right) d\rho + \rho dv + \rho d\rho + \frac{\rho}{\tau} (v - V(\rho)) = 0 \\ \left(v - \sqrt{\frac{\mu}{\tau}} \right) d\rho + \rho dv + \rho d\rho + \frac{\rho}{\tau} (v - V(\rho)) = 0 \end{cases}$$

veya

$$\left(v + \sqrt{\frac{\mu}{\tau}} + \rho \right) d\rho + \rho dv = -\frac{\rho}{\tau} (v - V(\rho)) \quad ,$$

$$\left(v - \sqrt{\frac{\mu}{\tau}} + \rho \right) d\rho + \rho dv = -\frac{\rho}{\tau} (v - V(\rho))$$

Riemann invaryantlarını elde ederiz.

Eğer μ ve τ her ikisi birimsizleştirilmiş ortamda küçük sayılarsa (3.3) denklemi $v = V(\rho)$ ifadesine dönüşür ve biz basit bir teori elde ederiz. Fakat büyük tertipli sayılar için (3.3) denkleminde sıçrayış beklenir ve hemen. Bu olay prensipçe doğrudur, fakat bir az zor olmaktadır.

Bu bölümde biz (3.3), (3.4) denklemler sistemini süreksiz başlangıç

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_\ell, & x < 0 \\ \rho_r, & x > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$v(x, t) = \begin{cases} v_\ell, & x < 0 \\ v_r, & x > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

koşulları çerçevesinde sayısal çözümü elde etmek için bir yeni yöntem önereceğiz. Bunun için önce μ ve τ yeteri kadar küçük olan durumu inceleyelim. Burada amaç elde edilen sayısal çözümleri yukarıda elde ettiğimiz gerçek çözümlerle kıyaslamaktır.

3.3. Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar

Yukarıdaki bölümlerde gösterildiği gibi hiperbolik tür denklemler sisteminin çözümünde yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarının olduğunu göstermiştik. Süreksiz fonksiyonlarla çalışmak zorunluğu göz önüne alınan sistemin çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfında çözüm yöntemleri üretmeyi zorunlu kılar.

3.3.1. μ ve τ 'un Küçük Olduğu Durum, Yardımcı Problem

Bu kısımda biz (1.14),(1.15) problemi için bir nümerik yöntem geliştireceğiz ve nümerik çözümün özelliklerini inceleyeceğiz. Yukarıdaki bölümde gösterdiğimiz gibi söz konusu problemin çözümünün yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktaları vardır. Gerçek çözümde bulunan bu özellik (1.14),(1.15) problemine iyi bilinen klasik yöntemlerin uygulanmasına engel çıkarır. Bu nedenle de yukarıda önerdiğimiz yardımcı problemin avantajlarını kullanarak bir yöntem önereceğiz.

Bu nedenle çözümün tanım bölgesinin aşağıdaki gibi

$$\omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_k) \mid x_i = ih, t_k = k\tau, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots; h > 0, \tau > 0\}$$

düzgün ağ ile örtelim. Burada h ve τ sırasıyla x ve t değişkenlerine göre oluşturulmuş ağın adımlarını göstermektedir. Önce (1.19),(1.20) problemini $\omega_{h,\tau}$ ağının herhangi bir (i, k) noktasında aşağıdaki gibi

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \tau F \left(\frac{V_{i,k} - V_{i-1,k}}{h} \right), \quad (3.11)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i) \quad (3.12)$$

sonlu farklara ayırklaştıralım. Burada $v_0(x_i)$ fonksiyonu

$$(V_0)_{\bar{x}} = u_0(x_i) \quad (3.13)$$

sonlu farklar denkleminin herhangi bir çözümüdür. Kolayca ispatlaya biliriz ki

$$U_{i,k+1} = \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h} \quad (3.14)$$

Burada $U_{i,k}$ ve $V_{i,k}$ sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının (i, k) noktasındaki yaklaşık değerini göstermektedir. (3.14) ispatlamak için (3.11) denklemini $(i - 1, k)$ noktasında yazıp elde edilen denklemi (3.11) denkleminde çıkarıp 2 'ye bölmek yeterlidir.

(3.14) dikkate alırsak $U_{i,k}$ ağ fonksiyonu

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} - \frac{\tau}{h} (F(U_{i,k}) - F(U_{i-1,k})) \quad (3.15)$$

denklemini korumaktadır.

Teorem 1.

$$E_1(t_k) = h \sum_i U_{i,k} , \quad (3.16)$$

ifadesi zamana bağlı değildir.

İspat. $E_1(t_{k+1})$ ifadesini göz önüne alalım. Yani

$$\begin{aligned} E_1(t_{k+1}) &= h \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_{i,k} = h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h} \\ &= h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{V_{i,k} - V_{i-1,k}}{h} - \frac{\tau}{h} [Q(U_{i,k}) - Q(U_{i-1,k})] \right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_{i,k} \end{aligned}$$

olur. Elde ettiğimiz eşitlik gösterir ki, teoremin iddiası doğrudur.

Tanım 3. Aşağıdaki ifadeyle tanımlanan

$$\bar{E}_1(0) = h \sum_i U_{i,0} \quad (3.17)$$

$E_1(0)$ sayısına $V_{i,k}$ fonksiyonunun kritik değeri denir.

Tanım 4. Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$V_{i,k}^{ext} = \begin{cases} V_{i,k} , V_{i,k} < E_1(0) \\ E_1(0) , V_{i,k} \geq E_1(0) \end{cases} \quad (3.18)$$

$V_{i,k}^{ext}$ fonksiyonuna (1.19),(1.20) probleminin genişletilmiş çözümü denir.

1. teoremden

$$U_{i,k}^{ext} = (V_{i,k}^{ext})_{\bar{x}} \quad (3.19)$$

elde ederiz. Ve bu ifade esas problemin zayıf çözümü oluyor. Böylelikle esas problemin (3.10) enerji integralini koruyan çözümünü elde etmiş olduk. Görüldüğü gibi (3.11)-(3.13) algoritması etkin ve bilgisayar açısından ise ekonomik bir algoritma olmaktadır. $u = \frac{\partial v}{\partial x}$ ifadesini dikkate alarak

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + Q(u(x,t)) = 0 \quad (3.20)$$

(2.6) bu şekilde yazabiliriz. Sonuncu denkleme örneğin Runge-Kutta metotlarını uygulayarak zamana göre daha yüksek mertebeden sonlu fark şemaları yazmak mümkündür.

3.3.2. μ ve τ 'un Büyük Olduğu Durum

Şimdi μ ve τ 'nün ölçüsü ortamda yeteri kadar büyük olan durumunu inceleyelim.

Bunun için (1.12) denklemini

$$v_t + \frac{1}{2}(v^2)_x - \frac{\mu}{\rho} \frac{\rho_x}{\rho} = -\frac{1}{\tau} \{v - V(\rho)\}$$

veya

$$v_t + \frac{1}{2}(v^2)_x + \frac{\mu}{\rho} (\ln \rho)_x = -\frac{1}{\tau} \{v - V(\rho)\}$$

şeklinde yazalım.

[10],[12] dikkate alarak (1.12) ve (1.13) denklemler sistemini aşağıdaki biçimde yazalım.

$$A(\cdot) = \frac{\partial \cdot}{\partial x} \quad \text{operatörünü dahil edelim.}$$

Bu rotasyonda (1.12) ve (1.13) denklemler sistemi

$$v_t + A\left(\frac{v^2}{2} + \mu \ln \rho_x\right) = -\frac{1}{\tau} \{v - V(\rho)\}, \quad (3.21)$$

$$\rho_t + A(\rho v) = 0 \quad (3.22)$$

olur. Denklemler sisteminin her iki tarafını A^{-1} ile etkilersek

$$\begin{cases} A^{-1} v_t + A^{-1} A \left(\frac{v^2}{2} + \frac{\mu}{\rho} \ln \rho_x \right) = H, \\ A^{-1} \rho_t + A^{-1} A(\rho v) = h \end{cases} \quad (3.23)$$

veya

$$\begin{cases} (A^{-1} v)_t + \frac{v^2}{2} + \frac{\mu}{\rho} \ln \rho_x = H, \\ (A^{-1} \rho)_t + \rho v = h \end{cases} \quad (3.24)$$

alırız. Burada h ve H fonksiyonları sırasıyla

$$Ah = 0, \quad (3.25)$$

$$AH = -\frac{1}{\tau} \{v - V(\rho)\}, \quad (3.26)$$

denklemlerinin çözümleri olmaktadır.

(3.25) denkleminde

$$h = h(t) \quad (3.27)$$

$$H(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^x (v - V(\rho)) d\xi + h_1(t) \quad (3.28)$$

elde ederiz. Burada $h(t)$, $h_1(t) \in \ker A$ olan herhangi bir fonksiyonlardır. (3.26)

ifadeleri (3.17) de yerine konursa

$$\begin{cases} [A^{-1} v + \tilde{h}(t)]_t + \frac{v^2}{2} + \frac{\mu}{\rho} \ln \rho_x = -\frac{1}{\tau} \int_0^x (v - V(\rho)) d\xi, \\ [A^{-1} \rho + \tilde{h}_1(t)]_t + \rho v = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

alırız.

Aşağıdaki rotasyonları içereyim

$$A^{-1} v + \tilde{h}(t) = z(x, t), \quad (3.30)$$

$$A^{-1} \rho + \tilde{h}_1(t) = w(x, t) \quad (3.31)$$

(3.30) ve (3.31) ifadelerinden

$$v(x, t) = Az(x, t) = \frac{\partial z(x, t)}{\partial x}, \quad (3.32)$$

$$\rho(x, t) = Aw(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (3.33)$$

olarak buluruz. Bu durumda (3.29) sistemi

$$\begin{cases} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{\mu}{\rho} \ln \rho_x = -\frac{1}{\tau} \int_0^x (v - V(\rho)) d\xi, \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \rho v = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

integro-diferansiyel denklemler sistemi şeklinde yazılabilir. (3.34) denklemler sistemi için başlangıç koşullar

$$z(x, 0) = \begin{cases} v_L x, & x < 0 \\ v_R x, & x > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

$$w(x, 0) = \begin{cases} \rho_L x, & x < 0 \\ \rho_R x, & x > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

gibi olur. (3.34)-(3.36) problemine yardımcı problem diyeceğiz.

Görüldüğü gibi yardımcı problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliği esas problemin diferansiyelle ne bilme özelliğinden bir birim fazladır. Ayrıca $v(x, t)$ fonksiyonu mutlak sürekli bir fonksiyondur. Bu özellikler (3.34)-(3.36) probleminin nümerik çözümü bulmak için daha etkin ve olayın tüm fiziksel özelliklerini düzgün aks ettirebilen sonlu farklar şeması yazmağa imkan sağlamaktadır.

Yardımcı problemin diğer bir avantajı da odur ki, bilinmeyen $u(x, t)$ fonksiyonunu bulmak için $u(x, t)$ ve $\rho(x, t)$ ' nun hiçbir değişkene göre türevlerinin kullanılmamasıdır.

Çünkü, genel teoriye göre söz konusu fonksiyonlar, yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarında mevcut olmamaktadır.

3.4. Sayısal Çözüm

(3.34)-(3.36) problemine $\omega_{h\tau}$ ağının herhangi bir (x_i, t_k) noktalarında sonlu farklara ayrıklaştırılmak için, önce $\omega_{h\tau}$ ağının içinde adım $h_\xi = \frac{h}{m}$ olan diğer bir düzgün ağ kuralım. Bu ağın düğüm noktaları $\xi_\mu, (\mu = 0, m, n)$ olsun, ve onu $\omega_{h_\xi\tau}$ olarak gösterelim. Açıktır ki, $\omega_{h_\xi\tau} \in \omega_{h\tau}$.

Şimdi, önce (3.34)'ün 1. denklemler sistemini sonlu farklara ayrıklaştıralım.

$$\frac{Z_{i,k+1} - Z_{i,k}}{h_t} + \frac{1}{2} V_{i,k}^2 + \frac{\mu}{\rho} \ln \rho_x = \frac{1}{\tau} \int_0^{x_i} (V_{i,k} - V(P_{i,k})) d\xi, \quad (3.37)$$

$$\frac{W_{i,k+1} - W_{i,k}}{h_t} + P_{i,k} V_{i,k} = 0 \quad (3.38)$$

ayrıklaştıralım. (21) denkleminin içeriği

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{x_i} (V_{i,k} - V(P_{i,k})) d\xi$$

integraline, dikdörtgenler yöntemiyle yaklaşalım, yani

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{x_i} (V_{i,k} - V(P_{i,k})) d\xi = h_\xi \sum_{j=1}^{m,i} (V_{j,k} - V(P_{j,k})) + \varepsilon_1^{(i,k)} \quad (3.39)$$

olarak yazalım.

Bilindiği üzere ağın adımları sıfıra yaklaştıkça $\varepsilon_1^{(i,k)} \rightarrow 0$.

(3.39)'ü dikkate alırsak

$$\frac{Z_{i,k+1} - Z_{i,k}}{h_t} + \frac{1}{2} V_{i,k}^2 + \frac{\mu}{\rho} \ln P_{i,k} = h_\xi \sum_{j=1}^{m,i} (V_{j,k} - V(P_{j,k})),$$

$$\frac{W_{i,k+1} - W_{i,k}}{h_t} + P_{i,k} V_{i,k} = 0$$

elde ederiz. Sonuncu cebirsel denklemler sistemi

$$Z_{i,k+1} = Z_{i,k} - \frac{h_t}{2} V_{i,k}^2 + \frac{\mu h_t}{\rho} \ln P_{i,k} + h_t h_\xi \sum_{j=1}^{m,i} (V_{j,k} - V(P_{j,k})), \quad (3.40)$$

$$W_{i,k+1} = W_{i,k} - h_t P_{i,k} V_{i,k}, \quad (3.41)$$

$(i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots)$, şeklinde yazabiliriz. (3.41)-(3.42) denklem sistemini

$$Z_{i,0} = \begin{cases} v_L x_i, & x_i < 0 \\ v_R x_i, & x_i > 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

$$W_{x,0} = \begin{cases} \rho_L x_i, & x_i < 0 \\ \rho_R x_i, & x_i > 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

başlangıç koşulları çerçevesinde bulacağız (3.41)-(3.42) denklem sistemi açık sistem oluşturur.

Kolayca gösterebiliriz ki,

$$\begin{cases} \frac{Z_{i,k+1} - Z_{i-1,k}}{h} = V_{i,k+1} \\ \frac{W_{i,k+1} - W_{i-1,k}}{h} = P_{i,k+1} \end{cases} \quad (3.44)$$

(3.44) eşitliklerini (3.31) – (4.32) denklemlerini $(i - 1, k)$ noktasında yazıp, elde edilen denklemler sistemini (4.31) ve (4.32) çıkarıp h' a bölmekle elde ederiz.

SONUÇLAR

Tezden elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Makroskopik model çerçevesinde otoyolda arabaların hareket dinamiğini ifade eden nonlineer kısmı türevli denklemin hareket dinamiği incelenmiştir. Süreksiz fonksiyonlar sınıfında gerçek ve nümerik çözümün bulunması için yeni algoritmalar önerilmiştir.
2. Otoyolda sürücülerin reflekslerini dikkate alabilen Payne Whitham modeli incelenmiştir.
3. Mikroskopik model çerçevesinde trafik akışını ifade eden nonlineer kısmi diferansiyel denklemler sisteminin
 - a) Riemann invaryantları bulunmuştur,
 - b) Söz konusu sistemin nümerik çözümlerini elde etmek için, süreksiz fonksiyonlar sınıfında yeni algoritma üretilmiştir.

KAYNAKÇA

- [1] Ames, W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York, London, 1965.
- [2] Barbu, L., Gheorghe, M., Singularly Perturbed Boundary-Value Problems, Birkhauser, Basel, Boston, Berlin, 2007.
- [3] Godunov, S.,K., Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moskow, 1979.
- [4] Florian Siebel and Wolfram Mauser, on the Fundamental Diagram of Traffic Flow, SIAM J. Applied Math. Vol. 66, No 4, pp. 1150-1162.
- [5] Lighthill.M.J. and Whitham G.B. On Kinematic Waves:I. Flood Movement in Long Rivers ; II. Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads.Proc.Ray.Soc.A229,281-345,1995
- [6] Mahir Rasulov, Emine Boran, On a Method for Finding the Numerical Solution of Cauchy Problem for 2d Burgers Equation, European Scientific Journal August 2015, Special Edition (2015), pp. 555-562.
- [7] Mahir Rasulov, Hakan Bal, Emine Boran, On a Numerical Method of Riemann Type Problem for 2D Conservation Laws in a Class of Discontinuous Functions, J. Korean Math. Soc. 2015 (in print) .
- [8] Michael Herty, Lorenzo Pareschi and Mohammed Seaid, Discrete-Velocity Models and Relaxation Schemes for Traffic Flows, SIAM J. Sci. Comput.. Vol. 28, No 4, pp. 1582-1596.
- [9] Peng Zhang, Ru – Xun and Wong S.C., High Resolution Numerical Approximation of Traffic Flow Problems with Variable Lanes and Free-Flow Velocities, Physical Review, E 71, 056704, 2005.
- [10] Rasulov, M. A., On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok., 43, No.1, 1991.
- [11] Rasulov, M.A., Sinsoyal, B., Numerical Simulation of Initial and Initial-Boundary Value Problems for Traffic Flow in a Class of Discontinuous Functions.WSEAS Transactions on Electronics. Issue 6, Volume 3, pp.336-339, June 2006.

- [12] Rasulov, Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin Yayınları,2011,343 sayfa
- [13] Shimao Fan and Benjamin Seibold, A Comparison Of Data-Fitted First Order Traffic Models And Their Second Order Generalizations Via Trajectory And Sensor Data, ArXiv: 1208.0382v2 [physics.soc-ph] 11 Jun, 2013.
- [14] Toro, Eleuterio, F., Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- [15] Zhong-Hui Ou, Shi-Qiang Dai , Peng Zhang and Li-Yun Dong, Nonlinear Analysis in the Aw-Rascle Anticipation Model of Traffic Flow, SIAM J.Applied Math. Vol. 67, No 3, pp. 605-618.
- [16] Whitham, G., B., Linear and Nonlinear Waves, A Wiley-Interscience Publication, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

1983 tarihinde Adana'nın Ceyhan Soysalı Köyü'nde doğmuştur. Eğitim hayatının ilk, orta ve lise kısmını başarıyla İskenderun Denizciler Kasabası'nda bitirdi. Lisans eğitimini Kocaeli Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliğinde tamamladı. 12 yıl süren öğretmenlik deneyiminden sonra, 2015 yılında Nüans isimli kitabı yazdı. 2013-2015, yüksek lisans eğitimi aldı.

Emine BORAN