T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

BİR BOYUTLU NONLİNEER PARABOLİK DENKLEM İÇİN ÇÖZÜMDEKİ PATLAMA OLAYININ SAYISAL İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan

Fulya TOMAK

İSTANBUL, 2016

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

BİR BOYUTLU NONLİNEER PARABOLİK DENKLEM İÇİN ÇÖZÜMDEKİ PATLAMA OLAYININ SAYISAL İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan

Fulya TOMAK

Öğrenci No:

130860006

Danışman:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**Bir Boyutlu Nonlineer Parabolik Denklem İçin Çözümdeki Patlama Olayının Sayısal İncelenmesi** " baslıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 07/01/2016

Fulya TOMAK

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 130860006 no'lu Fulya TOMAK'ın 07/01/2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavı[1] sonucunda 45 dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında[2] oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile, .kabul.... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik Bilgisayar

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Başlığı[3] : Bir Boyutlu Nonlineer Parabolik Denklem İçin Çözümdeki Patlama Olayının Sayısal İncelenmesi

---

Tez Sınav Jürisi	**Öğretim Üyesi**	**İmza**
Danışman	: Prof. Dr. Mahir RESULOV	
Üye	: Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL	
Üye	: Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR	

---

[1] Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

[2] Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

[3] İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, eğitim öğretim hayatımda ve tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV'a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim. Ayrıca eğitim öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İstanbul, 2015 **Fulya TOMAK**

Adı ve Soyadı : Fulya TOMAK

Danışmanı : Prof. Dr. Mahir RESULOV

Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans, 2016

Alanı : Uygulamalı Matematik

Anahtar Kelimeler : Lineer olmayan ısı denklemleri, yanma, patlama, asimptotik davranış, maksimum prensibi, karşılaştırma

ÖZ

BİR BOYUTLU NONLİNEER PARABOLİK DENKLEM İÇİN ÇÖZÜMDEKİ PATLAMA OLAYININ SAYISAL İNCELENMESİ

Tezde nonlineer kaynak fonksiyonuna sahip, ikinci basamaktan Kuazi lineer parabolik tür denklemler için yazılmış başlangıç sınır değer problemi, genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında incelenmiştir.

Önce göz önüne aldığımız problemin gerçek çözümünün özellikleri incelenmiştir. Gerçek çözümün diferansiyellenme özellikleri dikkate alınarak iki tür yardımcı problem önerilmiştir.

Gerçek çözümün zayıf süreksizlik noktalarına sahip olduğu durumlarda birinci tür yardımcı problem önerilmiştir. Önerilen yardımcı problemin esas problemde bulunmayan avantajları kullanılarak, esas problemin numerik çözümünü elde etmek için etkin algoritmalar önerilmiştir. Gerçek çözüm birinci tür süreksizliğe sahip olduğu takdir de ikinci tür yardımcı problem önerilir.

Önerilen yardımcı problemler, esas problemin genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfından sayısal çözümlerinin bulunmasına ve incelenmesine imkan verir.

Yazılmış algoritmalar üzerinde birçok bilgisayar testleri yapılmıştır.

Name and Surname : Fulya TOMAK
Supervisor : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Degree and Date : Master, 2016
Major : Applied Matematic
Key Words : Nonlinear heat equations, combustion, blow-up, asymptotic behaviour, maximum principle, intersection comparison

ABSTRACT

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE BLOW-UP PROBLEM IN THE SOLUTION OF ONE DIMENSIONAL NONLINEAR PARABOLIC EQUATION

In the thesis, Kuazi linear parabolic equations from second step which has nonlinear function owner and are written researched which generalized beginning value problem.

Before, the real solution of questions features are researched, take into consideration real solution differential features, two types cooperative problems were suggested.

When real solution has weak and discontinuity dots, first type cooperative problem was suggested and efficient algorithms were suggested for basic problems numeric solution. If real solution has first type discontinuity, the second type cooperative problem is suggested. Suggested cooperative problems allow to find and research numeric solution which is generalized function.

These written algorithms are tested by so many computers.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

GİRİŞ

1.İKİNCİ BASAMAKTAN KUAZİ LİNEER PARABOLİK DENKLEMLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde 2.basamaktan kuazi lineer parabolik tür denklemlerin, literatür araştırması yapılmış, bazı özellikleri incelenmiştir çünkü bu özellikler sonraki işlemlerimizde kullanılacaktır.

Nonlineer parabolik tür denklemlerin koşan dalga şeklindeki çözümünün bulunması probleminde ilk adımlar [1]'de atılmış, sonrasında ise bu teori literatür de geniş yer almıştır. Detaylı bilgi [8] de bulunmaktadır.

1.1.Temel Problemlerin Koyuluşu: Kıyaslama Teoremi

Sadelik için öncelikle yer değişkenine göre bir boyutlu problemleri inceleyeceğiz. Her zaman olduğu gibi R^2 ile (x,t) noktalarının Euclid uzayını gösterelim. R^2_+, R^2 uzayının $t \geq 0$ yarım düzlemi olsun ve R^2_+ de aşağıdaki denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\ \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.1}$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\ \frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q(u) \tag{1.2}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $K(u)$ fiziksel olarak ısı dağılım katsayısını göstermektedir ve görüldüğü gibi ısı dağılım katsayısı sıcaklığa bağlı olmaktadır. $K(u)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşullarının korunduğunu varsayalım.

1^0 negatif olmayan u lar için $K(u)$ da negatif değil,

2^0 $K(u) \in C2\,((0,\infty)) \cap C\,([0,\infty))$.

Eğer $K(u)$ yeteri kadar pürüzsüz ve $u > 0$ ise (1.1) denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K(u)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.3}$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan ise (1.1) denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} \tag{1.4}$$

şeklinde de yazabiliriz. Gerçekten de

$$\varphi(u) = \int_0^u K(\gamma)d\gamma \,, \quad u \geq 0$$

dönüşümü yardımıyla (1.4) elde edebilir. (1.2) denkleminde ki $Q(u)$ fonksiyonu ise
$u \geq 0$ için, $Q(u) \geq 0$ olduğu takdirde ısı üretme olayını ifade eder, $Q(u) \leq 0$ olduğunda ise ısıyı yutma olayına karşılık gelir. $Q(u)$ fonksiyonun da aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu

$1^0 . Q(u) \in C\,1 \;([\,0\,,\infty\,))$,

$2^0 . Q(u) = 0$ yani yanma (veya yutma) soğuk ortamda oluşmaz,
kabul edelim.

Sonraki işlemlerimizde, genellikle birinci tür başlangıç sınır değer problemlerini inceleyeceğiz, yani bilindiği üzere, (1.1) veya (1.2) denkleminin

$$u(0\,,x) = u_0(x) \geq 0\,, D'de \tag{1.5}$$

$$u(x,t\,)\,|_{\partial D} = u_1(t), t \in (0,T) \tag{1.6}$$

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine, 1.tür başlangıç-sınır değer problemi denir. Burada $u_0(x)$ ortamın başlangıç sıcaklığını ifade eder ve varsayalım ki, $sup\, u_0 < \infty$
∂D ile $D \Subset R^2$ bölgesinin sınırlarını göstereceğiz.
Eğer $D = [a, b]$ olursa (1.6) koşulu

$$u(a,t) = u_1(t)\ , \quad u(b,t) = u_2(t) \tag{1.6'}$$

şeklinde yazılır, burada

$$u_1(t),\ u_2(t)\ \in\ C([0,T]) \times [a,b]),\ \sup u_j < \infty$$

korunduğu varsayılır. $\sup u_0 < \infty$ koşulu $[a,b]$ aralığının sonsuz olduğu durumda önem taşımaktadır. Bu koşullar çerçevesinde $(1.1)\,,(1.5)\,,(1.6)$ probleminin çözümünü $t\ \in\ [0,T]$ için $x \in [a,b]$ göre düzgün sınırlı olan fonksiyonlar sınıfında aramak gerekmektedir.

$(1.1), (1.5), (1.6)$ probleminin yanı sıra Cauchy problemini (başlangıç değer problemi) de inceleyeceğiz. (1.1) denkleminin (1.5) başlangıç koşulu çerçevesinde çözümünün bulunması problemine Cauchy problemi denir. Yukarıda ifade ettiğimiz problemleri söylerken $u(x,t)$ fonksiyonunun (1.1) (veya (1.2)) denklemini hangi anlamda koruduğundan söz etmedik. Bu sorun, eğer klasik çözüm aranır ise kolayca çözülür.

Klasik çözüm derken, $C_{tx}^{1,2}$ $((0,T)$ $\cap\, C([0,T]) \times [a,b])$ sınıfından olan, yani denklemde bulunan tüm türevleri mevcut olan denklemi adi anlamda (yani noktasal) sağlayan, ayrıca uygun başlangıç (Cauchy problemi incelenirken) veya başlangıç ve sınır (1.tür başlangıç-sınır değer problemi incelenirken) koşullarını da koruyan fonksiyonun bulunması kastedilmektedir.

Ayrıca, $K(u)$ ve $Q(u)$ fonksiyonları sadece negatif olmayan argümanlar için tanımlandığından, çözümün de negatif olmadığını varsayacağız.

1.2.Maksimum Prensibi ve Kıyaslama Teoremleri

Maksimum prensibi parabolik denklemin verilmiş başlangıç ve sınır fonksiyonlarına göre çözümün "monotonluk" özelliğini ifade eder.

MAKSİMUM PRENSİBİ

(1.4) denkleminin çözümünün temel özelliği yer değişkenlerinin sayısına bağlı değildir. Bu nedenle $n = 1$ olan durumu inceleyeceğiz.

G = $\{(x,t)|0 \le t \le T, \varphi_1(t) \le x \le \varphi_2(t)\}$ bölgesini göz önüne alalım. Burada,

$\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ fonksiyonları $\forall t \in [t_0, T]$ için $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$ özelliğine sahip

sürekli fonksiyonlar olsun. G bölgesi $t = t_0, t = T, x = \varphi_1(t)$ ve $x = \varphi_2(t)$ eğrileri ile sınırlanmış bir bölge olmaktadır. Bu bölgenin sınırını Γ ile gösterelim, yani $\partial G = \Gamma$ olsun.

Şimdi, bu G bölgesinde aşağıdaki problemi göz önüne alalım. Ḡ de sürekli ve

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.7}$$

denklemini sağlayan, Γ da

$$u(t,x)\rfloor_{\Gamma} = \mathrm{f(x)},\ \mathrm{x} \in \Gamma \tag{1.8}$$

koşulunu koruyan $u(t,x)$ çözümünü araştıralım.

Eğer G dörtgen şekilli bir bölge, yani $G = \{0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T\}$ olursa, bu durumda (1.5) ve (1.6) koşulları

$$u(t = t_0, x) = \varphi(x) \tag{1.9}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), u(t,L) = \psi_1(t) \tag{1.10}$$

biçiminde yazılabilir. $(1.7), (1.9)$ ve (1.10) problemine 1. sınır değer problemi denir.

Not 1.1 $t = -t$ yazılamaz. Çünkü ısı dağılım olayı, geriye dönüşlü bir olay değildir.

Teorem 1.1 (1.7) denkleminin G de tanımlı ve Ḡ de sürekli her bir çözümü en büyük (en küçük) değerini Γ da almaktadır.

İspat max $|u(t,x)| = M,$ max$|u(t,x)| = m$ olsun. Teoremin şartının tersini kabul edelim, yani (1.7) denkleminin $M > m$ koşulunu sağlayan bir $u(t,x)$ çözümü 1,

$\vartheta(t,x) = u(t,x) + \frac{M-m}{4L^2}(x - x^*)^2$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu göz önüne alalım. Burada,

$L = max\ \varphi_2(t) - min\varphi_1(t)$ dır. Diğer taraftan, G bölgesinin yan taraflarında ve $t = t_0$ doğrusu üzerinde

$$\vartheta(t,x) \leq m + \frac{M-m}{4} = m + \frac{M}{4} - \frac{m}{4} = \frac{M}{4} + \frac{3m}{4} = \theta M, 0 < \theta < 1$$

olmaktadır, ama $\vartheta(t^*, x^*) = M$ dir. Bu onu göstermektedir ki, $\vartheta(t,x)$ fonksiyonu da

$u(t,x)$ fonksiyonu gibi en büyük değerini Γ da almaz. Şimdi, $\vartheta(t,x)$ fonksiyonunun maksimum değerini (t^1, x^1) noktasında aldığını farz edelim. Burada $t_1 > t_0$, $\varphi_1(t_1) < x_1 < \varphi_2(t_1)$ dir. Bu takdirde, bu noktada $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \leq 0 \; ve \; \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \geq 0$, ($t_1 < T$ olduğunda $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$, $t_1 = T$ için $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \geq 0$) olmaktadır. Bundan dolayı (t^1, x^1) noktasında

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \geq 0 \qquad (1.11)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{M-m}{2L^2} = -\frac{M-m}{2L^2} < 0$$

olur, bu ise (1.11) şartına ters düşer. O halde, $u(t,x)$ maksimum değerini yalnız sınırda alabilir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 1.1. Isı iletim denklemi için 1. Sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

İspat $u_1(t,x)$ ve $u_2(t,x)$ fonksiyonlarının $(4.56), (4.57)$ probleminin iki farklı çözümü olduğunu farz edelim. Bu durumda, $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ fonksiyonu

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u \,|\, \Gamma = 0 \end{array}\right\}$$

problemini sağlamaktadır. Teorem 1.1' e göre $u(t,x) = 0$, yani $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ dir.

Sonuç 1.2 $(1.7), (1.9)$ ve (1.10) probleminin çözümü, başlangıç verilerine sürekli bağımlı olmaktadır.

İspat $\varepsilon > 0$ keyfi sayısı için f fonksiyonunun ε kadar değiştiğini farz edelim. Bu değişmeyi f^* ile gösterelim, yani $\left| f(t,x) - f^*(t,x) \right| \leq \varepsilon$ olsun. Maksimum prensibini uygularsak

$$\left| u(t,x) - u(t,x) \right| \leq max \left| f(t,x) - f^*(t,x) \right| \leq \varepsilon$$

olur.

KIYASLAMA PRENSİBİ

Teorem 1.2 $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ fonksiyonları $(0,T) \times (a,b)$ de (1.2) denklemin iki tane birbirinden farkı negatif olmayan klasik çözümleri ve

$$u^{(2)}(x,0) \geq u^{(1)}(x,0)\,, \;\; x \in (a,b) \tag{1.12}$$

$$u^{(2)}(x,t) \geq u^{(1)}(x,t)\,, \;\; t \in (0,T) \tag{1.13}$$

olsun. Bu durumda

$$u^{(e)}(x,t) \geq u^{(1)}(x,t), \;\; [0,T] \times [a,b] \;\; de \tag{1.14}$$

olmaktadır.

Bu teorem fiziksel açıdan kolayca anlaşılır, yani başlangıç sıcaklığı ne kadar çok olursa, ona karşılık gelen sınır sıcaklık rejimi de çok olur.

Not 1.2 $Q(0) = 0$ ve $u(x,t)$ $(1.1), (1.5), (1.6)$ probleminin zayıf çözümü olsun. Bu takdirde $[0,T] \times [a,b]$de $u \geq 0$ olmaktadır.

Kıyaslama teoremi parabolik denklemlerin iki farklı çözümlerinin kıyaslanmasına imkan verir ve dolayısıyla bilinen herhangi bir çözümün özelliklerine göre diğer bir geniş sınıf çözümlerin de özelliklerini tanımaya imkan verir. Genellikle de nonlineer denklemlerin çözümlerinin incelenmesine yardım ediyor.

Teorem 1.3 Varsayalım ki, $u(x,t)$ (1.2),(1.5),(1.6) probleminin çözümüdür ve $[0,T] \times [a,b]$ de

$$\frac{\partial u_+}{\partial t} \geq B(u_+) \;\;, \qquad \frac{\partial u_-}{\partial t} \leq B(u_-) \tag{1.15}$$

Eşitsizliklerini koruyan $u_{\pm}(x,t) \in C^{1,2}_{t,x}\ ((0,T)\times(a,b)) \cap C((0,T)\times[a,b])$ bir fonksiyondur, bunun yanı sıra

$$u_{-}(x,0) \le u_0(x) \le u_{+}(x,0) \qquad (1.16)$$

$$u_{-}(t,x) \le u_1(t,x) \le u_{+}(t,x)\,, \quad t \in [0,T], x \in \partial D \qquad (1.17)$$

Bu takdirde $[0,T]\times[a,b]$de

$$u_{-} \le u \le u_{+} \qquad (1.18)$$

Burada, $B(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - Q(u)$, u_{+} ve u_{-} sırasıyla üst ve alt çözüm olmaktadır. Açıktır ki, kıyaslama (1.2) denkleminin diğer çözümleri ile değil, (1.7) denkleminin uygun çözümleri ile yapılmaktadır.

1.3. Klasik Çözümün Lokal Mevcut Olma Koşulu

Kuazi lineer parabolik tür denklemler için yazılmış problemlerin klasik çözümlerinin varlık teoremleri yeteri kadar iyi öğrenilmiştir. Bilindiği üzere, eğer, başlangıç veriler yeteri kadar pürüzsüz ve uzlaşma koşulunu korursa, sürekli katsayılarına sahip

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, t, x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, t, x\right) \qquad (1.19)$$

cinsinden olan denklem için çözümü varlık teoremi

$$\text{v(p)} \| r \| \le \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(p,q,t,x) r_i r_j \le \mu(p) \| r \|^2 \qquad (1.20)$$

koşulu çerçevesinde kolayca ispatlanabilir. Burada $t \in [0,T]$,

$$x \in [a,b],\ p \geq 0,\ q,\ r \in R^1$$

ve $\gamma(\mathrm{p})$, $\mu(\mathrm{p})$ ciddi olarak pozitif fonksiyonlardır. (1.20) koşulu (1.19) deki denklemin sağ tarafındaki operatörün eliptik olma koşulunu ifade etmektedir ve (1.19) biçiminde olan denklemin parabolik olmasını göstermektedir. Varsayalım ki, $K(u)$, $Q(u)$ fonksiyonları
$u \geq 0$ olduğunda yeteri kadar pürüzsüzdür ve $Q(0) = 0$. Bu takdirde

$$K(u) \geq \varepsilon_0 = const > 0\ , u > 0 \qquad (1.21)$$

koşulu çerçevesinde $(1.1), (1.5), (1.6)$ probleminin $u_0 \neq 0$ sağlandığında lokal klasik çözümü mevcuttur veya $u_1 \neq 0 \in \partial D$ olduğunda tüm $t > 0$ ler için $u(t,x) > 0$.
Parabolik tür denklemin pozitif çözümü tanım bölgesinin tüm noktalarında pozitiftir. Diğer bir deyimle ısı olaylarında heyecanlanma sonsuz hızla dağılmaktadır.
Örneğin eğer, $(1.1), (1.5)$ Cauchy probleminde $u_0 \neq 0$ ve finit fonksiyon olduğu takdirde bile, (hatta diferansiyellenebilen olmadığı) çözüm yine de $t > 0$ için lokal çözüm klasik olur.

1.4 Çözümün Global Sınırlılık Koşulu

Önceden belirtelim ki, $Q(u) = 0$ olduğu durumda $(1.1), (1.5), (1.6)$ probleminin çözümünün Teorem $1'e$ göre sınırlı olup olmadığı sorusu meydana gelmez. Gerçekten de

$$u^{(2)}(x,t) = M = const \geq max\{sup\ u_0, sup u_1\} \qquad (1.22)$$

$u^{(1)}(x,t) = u(t,x)$ olarak alırsak $(1.16), (1.17)$ koşulları korunur ve buradan

$$u(x,t) \leq M$$

olduğunu elde ederiz. $Q(u) \leq 0$ olduğu durumda da bu sonuca ulaşmak zor değildir. Fakat, $Q(u) > 0$ olduğu durum özel inceleme talep eder.

Teorem 1.4 Varsayalım ki,(1.2) denkleminde $u > 0$ için $Q(u) > 0$ olmaktadır. Bu durumda

$$\int_1^{\infty} \frac{d\gamma}{Q(\gamma)} = \infty \qquad (1.23)$$

koşulu çözümün global sınırlı olması için gerek ve yeterli koşul olmaktadır.

İspat. Gerekli koşul olarak Teorem 1'i kullanalım, yani çözüm sınırlıdır. $u^{(2)}(x,t)$ fonksiyonu olarak

$$\frac{du^{(2)}(t)}{dt} = Q(u^{(2)}(t)),\, t > 0 \ , \qquad (1.24)$$

$$u^{(2)}(0) = M > 0$$

probleminin çözümünü ele alalım. Burada M sayısı (1.16) 'de tanımlı olmaktadır.

$$\int_M^{u^{(2)}(t)} \frac{du}{Q(u)} = t$$

fonksiyonu (1.17) $u^{(2)}(t)$ koşulu çerçevesi eşitliğinden buluruz.
$u^{(1)}$ olarak $u^{(1)} = u$ alsak, Teorem 1.2'e göre

$$u(t,x) \leq u^{(2)}(t)\,,\ \ t \in (0,T), x \in (a,b)$$

alırız. Bu ise çözümün global sınırlı olması anlamına gelir.
Yeterlilik. Yeterlilik koşulu aşağıdaki sade bir örnekten görülebilir.
Örnek 1 Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = Q(u), \qquad (1.25)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0$$

$x \in R^1$ için $u_0(x) = n =$ sabit > 0 olsun ve (1.20) koşulunun korunmadığını varsayalım, yani

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{Q(u)} < \infty \tag{1.26}$$

olsun. Bu durumda problemin çözümü uzaysal homojen olur, yani (uzayın herhangi bir noktasında çözümünün davranışı aynı olur).

$$u(t,x) = u(t)$$

olur. Burada $u(t)$ (1.25) denklemini ve $u(0) = m$ koşulunu koruyor, yani

$$\int_m^{u(t)} \frac{d\gamma}{Q(\gamma)} = t.$$

Sonuncu eşitlikten, $u(t)$'nin sonlu $(0,T)$ zaman intervalinde tanımlı olduğu görülmektedir, burada

$$T_0 = \int_m^{\infty} \frac{d\gamma}{Q(\gamma)} < \infty$$

ve

$$u(t) \to \infty\,, \quad t \to T_0^-$$

olmaktadır.

Teorem 1.3 de çözümün sınırsız olması probleminden bahsettik. Özel problemler çözülürken, çözümün üstten sınırlı olması problemi K, Q ve sınır koşullarına dahil olan fonksiyonları ayrıca da (a,b) deki uzaysal çözümlerle olan ilişkisine bağımlı olduğu görülmektedir. Genelde çözümün sınırlı olma problemi zor olmaktadır. Bazı özel durumlarda söz konusu problem sonuna kadar incelenebilir.

Hatırlatalım ki, global sınırsız çözümün varlığı için gerekli ve yeterli olan (1.23) koşulu adi diferansiyel denklemlerin analizi zamanı ortaya çıkmıştır. Örnek 1'de sonlu zaman zarfında $t \to T_0^-$ olduğunda sonsuzluğa yaklaşan çözüm elde edildi. Bölge [a,b] sonlu olduğu durumda, yani 1.başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün davranışı nasıl olacak?

Örnek 2.

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{Q(u)}\,,\ \ \mathrm{t} > 0\,, x \in [\mathrm{a},\mathrm{b}] \tag{1.27}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ \ u_0 \in C([a,b]),$$

$u_0 \neq 0$ ve $t > 0, x \in \partial D$

$$u(a,t) = 0\,,\quad u(b,t) = 0 \tag{1.28}$$

problemini göz önüne alalım.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \lambda\psi = 0,$$

$$\psi(a) = 0,\quad \psi(b) = 0 \tag{1.29}$$

probleminin ilk (en küçük) öz değerini λ_1 ile ona karşılık gelen öz fonksiyonu ise $\psi_1(x)$ ile gösterelim. Bilindiği üzere bu öz fonksiyon sabit işarete sahip olmaktadır, [Sobolev].

$\psi_1(x) > 0$ kabul edelim ve

$$\|\psi_1\|_{L_1([a,b])} = \int_{[a,b]} \psi_1\, dx = 1$$

tüm $u \geq \delta_0 = const > 0$ için $Q(u) - \lambda u > 0$ ve

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\gamma}{Q(\gamma) - \lambda\gamma} < \infty \tag{1.30}$$

olsun. ($Q(u) > u$ ve $u \to \infty$ olduğunda bu koşul (1.26) koşuluna denktir.)

$Q(u) \in C^{(2)}(R_+)$ ve $u > 0$ için $\mathrm{Q}(u)'' > 0$

Bu durumda, herhangi bir $u_0(x) \geq 0$ ve

$$E_0 = \int_{[a,b]} u_0(x)\Psi_1(x) \geq \delta_0$$

için problemin çözümü sınırsızdır ve

$$T_0 \leq T_* = \int_{E_0}^{\infty} \frac{d\gamma}{Q(\gamma) - \lambda_1 \gamma} < \infty$$

süresince mevcuttur.

İspat.

$$E(t) = \int_{[a,b]} u(x,t)\psi_1(x)dx$$

fonksiyonunu dahil edelim. Açıktır ki, $E(0) = E$ ve $E(t)$ aşağıdaki

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{[a,b]} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \psi_1'(x)dx + \int_{[a,b]} Q\big(u(x,t)\big)\psi_1(x)dx = 0 \qquad (1.31)$$

ifadeyi verir. Sonuncu integrale kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\int_{[a,b]} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \psi_1(x)dv = \int_{[a,b]} u(x,t) \frac{\partial^2 \psi_1(x)}{\partial x^2} dx$$

$$= -\lambda_1 \int_{[a,b]} u(x,t)\psi_1(x)dx = -\lambda_1 E(t).$$

sonucunu alırız. Kabarık fonksiyon için olan Jensene eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_{[a,b]} Q(u)\psi_1 dx \geq Q(\int_{[a,b]} u\psi_1 dx) = Q(E)$$

sonucunu alırız. Bu eşitsizliğin korunması için $\psi_1(x)$ sınırlı olması şarttır. (1.31) den

$$\frac{dE}{dt} \geq -\lambda_1 E + Q(E), t > 0, E(0) = E_0 \geq \delta_0$$

eşitsizliğini elde ederiz, buradan yapılan varsayımlar çerçevesinde herhangi bir t için

$E(t) > E_0$ ve

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{d\gamma}{Q(u) - \lambda_1 t} \geq t, \qquad t > 0$$

alırız. Dolayısıyla, (1.30) koşulu çerçevesinde $t \to T_1 \leq T_*$ için $E(t) \to \infty$ ve $E(t) \leq supu(x,t)$ yani $u(x,t)$ fonksiyonu $T_0 \leq T_1$ zaman zarfında sınırsızdır.

Bu örnekten aşağıdaki sonuca varabiliriz. Problemin "küçük" $u_0(x)$ için herhangi bir $t > 0$ için global çözümü mevcuttur. "Büyük" $u_0(x)$ için $t \to T_0^-$, $T_0 < \infty$ için çözüm sonsuz büyümektedir.

Burada böyle bir soru meydana gelebilir.$[a, b]$ bölgesinin neresinde çözüm $t \to T_0^-$ için sınırsız olur, yani sınırsız çözüm nerede lokalleşir. Bu soruya sonraki bölümlerde cevap vereceğiz.

1.5.Klasik Çözümün Teklik Koşulu

(1.2) denklemindeki $Q(u)$ fonksiyonu yeteri kadar pürüzsüz olduğu durumunda bu denklemin lokal klasik çözümü mevcut ve tekdir. Bu hüküm zaten teorem 1'den görülmektedir. Gerçekten de, varsayalım ki,(1.2) denkleminin aynı başlangıç-sınır koşullarını koruyan, birbirinden farklı iki u^* ve u_* çözümleri vardır.

Önce, $u^{(1)} = u^*, u^{(2)} = u_*$ olarak ele alırsak, sonra u^* ve u_* fonksiyonlarının yerlerini değiştirirsek aynı zamanda

$$u^* \leq u_* \; ve \; u^* \geq u_*$$

elde ederiz. Buradan da $u^* = u_*$ alınır. Sadece $Q(u)$ fonksiyonundan ne kadar pürüzsüz olmalıdır sorusuna cevap verelim. $U > 0$ için $Q(u) < 0$ olduğu durumda çözümün tekliği için $Q(u)$ üzerine hiçbir koşul gerekmez. Şimdi varsayalım ki $Q(u)$ sürekli, $Q(0) = 0$,

$u > 0$ için $Q(u) > 0$ ve diferansiyellenebilmeyen fonksiyon olmaktadır. Aşağıdaki örnek bu koşulun niye neden olduğunu gösterecektir.

Örnek 3. Aşağıdaki problemi göz önüne alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^\alpha, t > 0\,, x \in R^1, \tag{1.32}$$

$$u(x,0) = u_0(x) = 0, x \in R' \tag{1.33}$$

olsun.

Burada $\varphi \in (0,1)$ ve $Q(u) = \mathrm{u}^\alpha$, $Q(0) = 0$, $Q'(a^+) = \infty$. Açıktır ki, (1.32), (1.33) probleminin trivial $u(x,t) = 0$ çözümü vardır. Fakat bunun yanı sıra, onun

sonsuz sayıda

$$u'(t) = u^\alpha(t),\ \ t > 0\,, \qquad u(0) = 0 \tag{1.34}$$

denklemi koruyan uzaysal homojen $u(x,t) = u(t)$ çözümleri de vardır. (1.34) probleminin çözümü

$$u(t) = u_\tau(t) = \begin{cases} 0\,, 0 \le t < \tau, \\ (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(t-\tau)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ t \ge \tau \end{cases} \tag{1.35}$$

olmaktadır, burada, $\tau \ge 0$ herhangi bir sabittir. Böylelikle, kaynak fonksiyonunun diferansiyellenebilen olmamasından dolayı, sıfır başlangıç koşulundan aynı artma hızına sahip trivial olmayan çözüm oluşur. Belirtelim ki, $\alpha \in (0,1)$ için tüm $u_\tau(t)$ ler klasik çözümler olur. Kolayca gösterilebilir ki, $u > 0$ için
$Q(u) > 0$ fonksiyonu

$$\int_0^1 \frac{d\gamma}{Q(\gamma)} < \infty \tag{1.36}$$

koşulu korunduğu takdirde de aynı sonuca varılabilir. Buradan,

$$\int_0^1 \frac{d\gamma}{Q(\gamma)} = \infty$$

koşulu (1.2) denklemi için yazılmış Cauchy probleminin çözümünün tekliği için gerekli ve yeterli koşul olmaktadır.

2. DEGENERE OLUNAN PARABOLİK DENKLEMİN ZAYIF ÇÖZÜMLERİ

Yukarıdaki örneklerde kuazi lineer parabolik tür denklemlerin zayıf çözümlerinin bazı özelliklerini gösterdik. Bu örnekler daha geniş sınıf denklemlerini de incelemeye mümkün kılar. Hatırlatalım ki, zayıf çözümün her yerde türevi olmayabilir, fakat degenere olduğu noktalarda sıcaklık selinin sürekli fonksiyon olması gibi belli bir düzene sahip olur.

Sonraki işlemlerimizde kullanacağımız zayıf çözüm tanımını verelim.

Tanım 2.1 Negatif olmayan sınırlı, başlangıç ve sınır koşullarını koruyan, $(0,T) \times D$ de tanımlı $f(x,t)$ test fonksiyonları için aşağıdaki integral eşitliğini koruyan

$$\int_0^T \int_D \left(u\frac{\partial f}{\partial t} - K(u)\nabla u\nabla f + Q(u)f\right)dxdt + \int_D u_0(x)f(x,0)dx = 0 \qquad (2.1)$$

$u(x,t)$ fonksiyonuna $(1.1),(1.2)$ probleminin zayıf çözümü denir.

(2.1) eşitliğindeki $\nabla\alpha(u) = K(u)\nabla u$ türevi genelleştirilmiş türev anlamında olduğu kast edilmektedir.

Açıktır ki, u ve $\nabla\alpha(u)$ fonksiyonları sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olduğu noktalarda çözüm klasik çözüme denk olur. Fakat, denklemin degenere olduğu noktalarda yani $u(x,t) = 0$ olduğu noktalarda (2.1) integral eşitliğini koruyan fonksiyonlardan diferansiyellenebilen olmasını talep etmeyebiliriz, yeter ki, (2.1) ifadesindeki integral mevcut olsun.

2.1. Zayıf Çözümün Tek Olmamasını Gösteren Örnekler

Örnek 1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^{\sigma+1}, \qquad t > 0, \qquad x \in D \qquad (2.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \qquad x \in D, \quad u_0 \in C \qquad (2.3)$$

$$u(x,t) = 0\,, t > 0\,, \quad x \in \partial D$$

probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm $\psi_1(x) > 0$ ile

$$\Delta\psi + \lambda\psi = 0$$

denkleminin D de $\psi = 0$ ve $\|\psi_1\|_{L^1(D)} = 1$ koşulunu koruyan çözümünü gösterelim.

$\lambda_1 - \psi_1(x)$'in karşılık gelen özdeğeri olsun. $\lambda_1 < \sigma + 1$ olduğunda herhangi bir trivial olmayan çözümün sadece sonlu T zarfında mevcut olduğunu ispatlayalım. Bunun için denklemi $L^2(D)$ de (2.2) denklemi ψ_1 skaler olarak çarpalım ve $E(t) = (u(x,t), \psi_1(x))$ olarak gösterelim.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_D \psi_1(x)\nabla(u^\sigma \nabla u)dx + \int_D \psi_1(x)u^{\sigma+1}dx \quad (2.4)$$

(2.4) de kısmi integrasyon yöntemini kullanarak gösterelim ki,

$$\int_D \psi_1 \nabla(u^\sigma \nabla u)dx = \frac{1}{\sigma+1}(u^{\sigma+1}\nabla\psi_1(x))dx \quad (2.5)$$

eğer D de $u_0 > 0$ ise, $u(x,t)$ klasik çözüm olur. $Supp\ u_0 \in D$ olsun ve $\partial\omega(t)$ ile (2.2) denkleminin degenere olduğu yüzeyi gösterelim, yani fonksiyon taşıyıcının sınırı olmaktadır.

$\omega(t) = Supp\ u(x,t)$ bu takdirde $D \backslash \omega(t)$ de $u(x,t) = 0$ ve Green formülüne göre

$$\int_D \psi_1 \nabla(u^\sigma \nabla u)dx = \frac{1}{\sigma+1}\int_{\omega(t)} \psi_1 \Delta u^{\sigma+1} =$$

$$\frac{1}{\sigma+1}\left\{\int_{\omega(t)} \Delta\psi_1 u^{\sigma+1}dx + \int_{\Delta\omega(t)} \psi_1 \frac{\partial u^{\sigma+1}}{\partial u_t}dx - \int_{\partial\omega(t)} \frac{\partial\psi_1}{\partial n_t}u^{\sigma+1}dx\right\}. \quad (2.6)$$

Burada $\frac{\partial}{\partial n_t} - \partial\omega(t)$' nin dış normali olmaktadır. $\partial\omega(t)$ de $u^{\sigma+1} = 0$ ve $\frac{\partial u^{\sigma+1}}{\partial u^t} = \nabla u^{\sigma+1}.n_t = 0$ olduğundan (2.6)'ün son iki terimi sıfıra dönüşür ve böylelikle (2.6) eşitliği ispatlanmış olur. (2.6) eşitliğini kullanarak ve

$\Delta\psi_1 = -\lambda_1\psi_1$ de dikkate alıp

$$\frac{dE(t)}{dt} = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\sigma+1}\right)(u^{\sigma+1}, \psi_1),\ t > 0 \tag{2.7}$$

elde ederiz.

$\lambda_1 < \sigma + 1$ olduğu takdirde, Jensen eşitsizliğini kullanarak,

$$\frac{dE}{dt} \geq \left(1 - \frac{\lambda_1}{\sigma+1}\right)(u, \psi_1)^{\sigma+1} = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\sigma+1}\right)E^{\sigma+1}, t > 0$$

alırız. Buradan $E(t)$'nin

$$T_* = \frac{\sigma+1}{\sigma+1-\lambda_1}\frac{1}{\sigma}\left[\int_D u_0(x)\psi_1(x)dx\right]^{-\sigma} < \infty$$

zamanından büyük olmayan sürede sınırlı olduğu görülür, yani öyle $T_0 \in (0, T_*)$ vardır ki,

$$\limsup u(x,t) = \infty\ ,\ \ t \to T_0^-$$

olur.

Altını çizelim ki, $\lambda_1 \geq \sigma + 1$ olduğunda (2.7) dan $E(t)$'nin sınırlı olduğu görülür.

Örnek 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1}, \qquad \sigma > 0$$

denkleminin otomodel çözümü

$$u(x,t) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\sigma}}\theta_S(x) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{r}}\begin{cases}\dfrac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\ cos^2\dfrac{\pi x}{L_S}, & |x| < \dfrac{L_S}{2}\\ 0\ , \quad |x| \geq \dfrac{L_S}{2}\ , & 0 < t < T_0\end{cases}$$

olmaktadır, burada $L_S = \frac{2\pi(\sigma+1)^{\frac{1}{2}}}{\sigma}$ ve T_0 herhangi bir sabit olmaktadır. Bu çözümün aşağıdaki özelliklerini gösterelim,

1. Bu çözüm x'e göre finit fonksiyondur ve zayıf çözümdür ve $x = \pm \frac{L_S}{2}$ noktasında ısı seli sürekli fonksiyondur.
2. $|x| < \frac{L_S}{2}$ için $t \to T_0^-$ olduğunda $u(x,t) \to \infty$
3. $Supp\, u(x,t) = \left\{|x| < \frac{L_S}{2}\right\}$ zamanın herhangi bir değerinde değişmez, kalır. Yani çözüm lokalleşmiş durumda kalır, sıcaklık $\left\{|x| < \frac{L_S}{2}\right\}$ bölgesinden soğuk uzaya dağılamaz. Lokalleşme bölgesinde sıcaklık sonsuz büyüdüğüne rağmen yarım uzunluğu $X_{ef}(t) > 0$ ısınır intensif artığı bölgesi olur, hangisi ki, burada

$$u\big(X_{ef}(t), t\big) = \frac{u(0,t)}{2}$$

zamanın artması ile değişmez, kalır.

Şimdi aşağıdaki örneği inceleyelim.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u^{1-\sigma}\,,\ \sigma \in (0,1)\,, \tag{2.8}$$

burada, $Q(u) = u^{1-\sigma}$ ve $Q(0) = 0$, $Q'(0^+) = \infty$. (2.8) denklemin çözümünü koşan dalga şeklinde arayalım.

Bunun için çözümü $u(x,t) = f_A(\xi)$, $\xi = x - \lambda t$, $\lambda > 0$ şeklinde arayalım. Bu ifade (2.8)

denkleminde yerine konursa $f_A \geq 0$ için

$$-\lambda f'_A = \left(f_A^{\sigma} f'_A\right)' + f_A^{1-\sigma}$$

alırız. Bu denklemin $\lambda > 2$ için iki farklı

$$f_A^{\pm}(\xi) = C_{\pm}[(-\xi)]^{\frac{1}{\sigma}}, \quad C_{\pm} = \left(\sigma\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} > 0$$

çözüm elde ederiz. Böylelikle, aradığımız koşan dalga şeklindeki çözüm

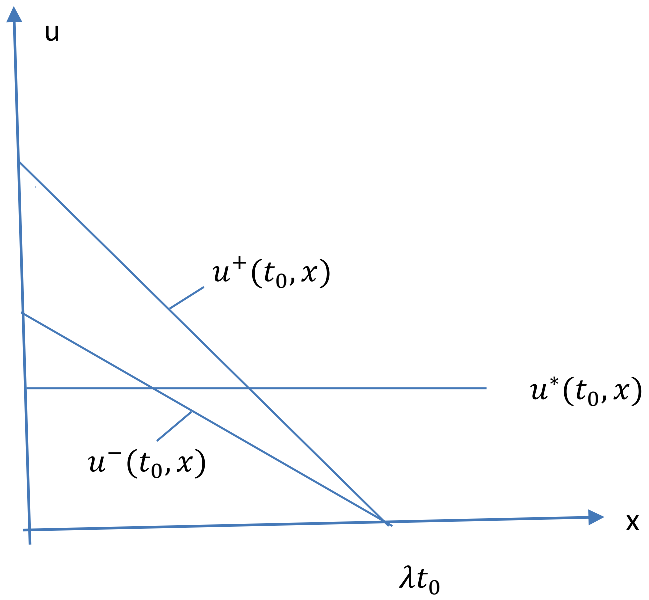
$$u^{\pm}(x,t) = C_{\pm}[(\lambda t - x)]^{\frac{1}{\sigma}}, \qquad t > 0, \quad x > 0$$

olur. Bu çözümleri

$$u^{*}(x,t) = [(\sigma)]^{\frac{1}{\sigma}}, \qquad t > 0, \quad x > 0$$

uzaysal homojen çözümle kıyaslayalım,

Şekil 2.1



Şekil 2.1

Şekilden görüldüğü gibi, birincisi, bu çözümlerin hepsi sınır değer probleminin aynı başlangıç koşulunu

$$u^{\pm}(0, x) = u^{*}(0, x) = 0, \;\; x \geq 0$$

korumaktadır. İkincisi ise, $\lambda > 2$ için sınır değerleri aşağıdaki eşitsizliği korur.

$$u^{*}(t, 0) < u^{-}(t, 0) < u^{+}(t, 0), \;\; t > 0.$$

Buna rağmen çözümlerin uzaysal yerleşmesi şunu gösterir ki, bu çözümler kıyaslama kurallarını korumaz. Dolayısıyla bir problemin, aynı hızla dağılan iki farklı çözümünün olması, olayın fiziğine de zıt düşer.

3. SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Yukarıda gösterildiği gibi (1.1) veya (1.2) cinsinden olan denklemlerin çözümleri bazı özelliklere sahip olur. Söz konusu özellikler çözümün diferansiyellenebilme özellikleri ile bağlı olmaktadır. Yani çözümün diferansiyellenebilme özelliği, denklemin çözünden talep ettiği mertebeden düşük olur. Bu ise çözümün klasik anlamda mevcut olmadığı anlamına gelmektedir. Bunun yanı sıra çözümü her defa koşan dalga şeklinde de elde etmek mümkün olmayabilir. Bu durumda problemin çözümünü sayısal yöntemler kullanmakla elde etmek zorunlu olmaktadır. Bu amaçla, tezin üçüncü bölümünde göz önüne aldığımız problemlerin, zayıf çözümlerini elde etmek için orjinal yöntemler önerilmiştir.

3.1.Birinci Tür Yardımcı Problem

Sadelik için önce aşağıdaki Cauchy problemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^2} + Bu^\beta , \qquad (3.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (3.2)$$

göz önüne alalım. Burada A, B, α ve β bilinen reel sabitlerdir.

$$\mathcal{L}. = \frac{\partial .}{\partial x} \quad \text{olsun.}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ mevcut olduğunu varsayarak (3.1)'in her iki tarafına $\mathcal{L}^{-1}$'i uygularsak

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} = {}_A\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}^2 u^\alpha + {}_B\mathcal{L}^{-1}u^\beta$$

veya

$$\partial\frac{\mathcal{L}^{-1}u}{\partial t} = \mathcal{L}u^\alpha + h, \qquad (3.3)$$

alırız. Burada h fonksiyonu

$$u^{\beta} = \mathcal{L}h \tag{3.4}$$

denkleminin herhangi bir çözümüdür. (3.4) denkleminden

$$\frac{\partial h}{\partial x} = u^{\beta}(x,t) \tag{3.5}$$

elde ederiz. Sonuncu eşitliği

$$h(x,t) = \int_{-l}^{x} u^{\beta}(\xi,t)d\xi + h(-L,t) \tag{3.6}$$

şeklinde yazalım. Kolaylık için $h(-L,t)$ $=h(t)$ olsun. Görüldüğü gibi $h(t) \in \ker\mathcal{L}$ olmaktadır.

$h(t) = -\frac{\partial h_1(t)}{\partial t}$ gibi ifade ederim. Bu durumda (3.5) ifadesini dikkate alarak (3.3)'ü aşağıdaki

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathcal{L}^{-1}u + h_1(t)] = {}_{A}\mathcal{L}u^{\alpha} + B\int_{-l}^{x} u^{\beta}(\xi,t)d\xi \tag{3.7}$$

gibi yazabiliriz. Sonuncu denklemde

$$\mathcal{L}^{-1}u + h_1(t) = v(x,t) \tag{3.8}$$

olsun. Buradan

$$u(x,t) = \mathcal{L}v(x,t) \tag{3.9}$$

olur. (3.8) dikkate alınırsa (3.6) denklemini

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = A\mathcal{L}u^{\alpha} + B\int_{-l}^{x} u^{\beta}(\xi,t)d\xi \tag{3.10}$$

şeklinde yazabiliriz, veya

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^{\alpha}\right] + B\int_{-l}^{x}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial \xi}\right)^{\beta} d\xi \tag{3.11}$$

olur. $t > 0$ $x \in D$ (3.10) denklemi için başlangıç koşulu

$$v(x,0) = v_0(x) \tag{3.12}$$

olur. Burada $v_0(x)$ fonksiyonu

$$\frac{dv_0}{dx} = u_0(x) \tag{3.13}$$

denkleminin herhangi bir sürekli çözümüdür. $(3.10), (3.11)$ problemine birinci yardımcı problem diyeceğiz. (3.9) denkleminden görüldüğü gibi bu durumda $\frac{\partial}{\partial x} u^{\alpha}(x,t)$ fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilen olduğunu varsayacağız.

Teorem 3.1 Eğer $v(x,t)$ fonksiyonu (3.10) denkleminin herhangi bir çözümü ise

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \tag{3.14}$$

eşitliği ile tanımlanan $u(x,t)$ fonksiyonu (3.1) denkleminin çözümüdür.

İspat. Teoremin ispatı (3.10) denkleminin direkt x'e göre diferansiyelleme yolu ile elde edilir. Gerçekten de,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial t}) = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial}{\partial x}\int_{-l}^{x}(u^{\beta}(x,t)d\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

olduğunu kabul edersek (3.9) de dikkate almakla, sonuncu denklemden (3.10)'u alırız.

3.2.İkinci Tür Yardımcı Problem

Bazı durumlarda problemin çözümünde singulerlik derecesi o kadar fazla olabilir ki, hatta alış fonksiyonu $\frac{\partial}{\partial x} u^{\alpha}(x,t)$ bile süreksiz olabilir. Böyle durumlarda daha hassas çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulur. Bu nedenle de tezin üçüncü bölümünde orjinal bir çözüm algoritması önerilir. Aşağıdaki problemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^2} + u^\beta,\ t > 0, x \in R^1 , \tag{3.15}$$

$$u(x,0) = u_0(x) , \quad x \in R^1 \tag{3.16}$$

göz önüne alalım. Bu kez A.=$\frac{\partial^2 .}{\partial x^2}$ olsun. Bu notasyonda (3.15) denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au^\alpha + u^\beta \tag{3.17}$$

şeklinde yazalım. A^{-1}'nin olduğunu varsayalım ve (3.15) denkleminin her iki tarafına A^{-1}'ni uygulayalım. A^{-1} lineer operatör olduğundan

$$A^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} = A^{-1}Au^\alpha + A^{-1}u^\beta$$

elde ederiz. Sonuncu denklemi şeklinde yazalım.

$$\frac{\partial A^{-1}u}{\partial t} = u^\alpha + h(x,t) \tag{3.18}$$

Burada $h(x,t)$ fonksiyonu herhangi bir t için

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} = u^\beta(x,t) \tag{3.19}$$

denklemin herhangi bir çözümüdür. (3.19) denkleminden

$$h(x,t) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\xi} u^\beta(\gamma,t)d\gamma d\xi + h(t) \tag{3.20}$$

alırız. Burada $h_1(t) \in kerA$ herhangi bir fonksiyondur $h_1(t) = -h_t(t)$ olsun. Böyle olduğu takdirde (3.18) denklemini

$$\frac{\partial}{\partial t}[A^{-1}u + h_1(t)] = u + \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\xi} u^\beta(\gamma,t)d\gamma \tag{3.21}$$

biçiminde yazabiliriz.

$$A^{-1}u + h_1(t) = \vartheta(x,t) \tag{3.22}$$

olsun. Buradan

$$u = A\vartheta(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.23}$$

elde ederiz.(3.23), (3.21) ifadeleri (3.19)'de yerine konursa

$$\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\xi} u^{\beta}(\gamma,t)d\gamma \tag{3.24}$$

alırız. (3.22) denklemi için başlangıç koşul

$$\vartheta(x,0) = \vartheta_0(x) \tag{3.25}$$

olur. Burada $\vartheta_0(x)$ fonksiyonu

$$\frac{d^2\vartheta_0(x)}{dx^2} = u_0(x) \tag{3.26}$$

denkleminden bulunan herhangi bir fonksiyondur. Cauchy formülünü dikkate alırsak (3.24) denklemini

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{x} (x-z)u^{\alpha}\,(z,t)dz \tag{3.27}$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 3.2 Eğer $v(x,t)$ fonksiyonu (3.27) denkleminin herhangi bir çözümü ise

$$u(x,t) = \frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.28}$$

eşitliği ile tanımlanan $u(x,t)$ fonksiyonu (3.15) denkleminin çözümüdür.

İspat. Teoremin ispatı (3.27) denkleminin direkt x'e göre diferansiyelleme yolu ile elde edilir. Gerçekten de,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial t}) = A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x})^{\alpha}\right] + B\frac{\partial}{\partial x}\int_{-l}^{x}(u^{\beta}(x,t)d\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

olduğunu kabul edersek (3.28) de dikkate almakla, sonuncu denklemden (3.15)'u alırız.

3.3. Esas Problemin Sayısal Çözümü

Önerilmiş yardımcı problemlerin esas problemde bulunmayan birkaç avantajları vardır. Bu avantajları kullanarak, olayın fiziksel özelliklerinin düzgün aksettiren çözümleri bulmak için nümerik algoritmalar üreteceğiz. Bunun için argümanların sürekli değiştiği bölgeyi

$$\mathrm{Q_L^T} = \{(\mathrm{x,t}) \mid -\mathrm{L} \le \mathrm{x} \le \mathrm{L}, \qquad 0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}\}$$

aşağıdaki ağ

$$\omega_{hT} = \{(x_i, t_k),\ x_i = -L + ih, \qquad t_k = k\tau, i = 0,1,\dots,n;\ \ k = 0,1,\dots.; h > 0, \\ \tau > 0\}$$

ile örtelim.

Önce (3.15), (3.16) problemini göz önüne alalım. Sadelik için aşağıdaki durumları inceleyelim

1. $\alpha = 1;\ \ \beta = 1;$

a) Klasik Aşikar Şema

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\tau} = \frac{U_{i+1,k} - 2U_{\mathrm{i},K} + U_{i-1,k}}{h^2} + U_{i,k} \qquad (3.29)$$

$$(i = 1,2, \dots \dots, n-1, \quad k = 0,1,2 \dots \dots ..)$$

$$U_{i,0} = u_0(x_i) \tag{3.30}$$
$$(i = 0,1,2, \dots \dots, n-1, n\,)$$

(3.29), (3.30) sonlu farklar şeması açık olduğundan dolayı bilinmeyen $U_{i,k+1}$ ları bulmak için hiçbir cebirsel yönteme ihtiyaç kalmaz. (3.29), (3.30) şeması kullanılarak elde edilen çözümün grafiği Şekil 3.x de verilmiştir.

Açıktır ki, (3.29), (3.30) şemasının kararlı olması için CFL koşulunun korunması gerekmektedir.

b) Klasik Aşikar Olmayan Şema

Bu durumda göz önüne aldığımız problem aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\frac{U_{i,k+1}-U_{i,k}}{\tau} = \frac{U_{i+1,k+1}-2U_{i,k+1}+U_{i-1,k+1}}{h^2} + U_{i,k+1} \tag{3.31}$$

$$(i = 1,2, \dots \dots, n-1, \quad k = 0,1,2 \dots \dots ..)$$

$$U_{i,0} = u_0(x_i) \tag{3.32}$$
$$(i = 0,1,2, \dots \dots, n-1, n\,)$$

(3.31), (3.32) cebirsel denklemler sisteminin çözümü $supp\, u_0(x) \subset K \subset Q_T$ bölgede kovma yöntemi ile aşağıdaki denklem

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_i}, \;\; \alpha_1 = 0; \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i + F_i\,\beta_i}{C_i - B_i\alpha_i}, \;\; \beta_1 = u_0(-l)\,, \;\; (i = 1,2, \dots., n-1) \tag{3.33}$$

$$U_{i,k+1} = \alpha_{i+1}U_{i,k+1} + \beta_{i+1}, \;\; (i = n-1, n-2, \dots, 1) \tag{3.34}$$

formüller yardımı ile elde edilebilir. (3.33), (3.34) şeması kullanılarak elde edilen çözümün grafiği Şekil 3 de verilmiştir.

3.3.1 Birinci Yardımcı Problemin Sayısal Çözümü

Şimdi yukarıda incelediğimiz problemi yardımcı problemi kullanarak çözelim. Bu durum başlangıç fonksiyonun parçalı sürekli olduğu veya çözümün birinci basamaktan türevi olmadığı takdir de kullanılır.

c) Yardımcı Problem için Klasik Aşikar Şema

Bu durumda sonlu farklar şeması aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{V_{i,k+1}-V_{i,k}}{\tau}=\frac{V_{i+1,k}-2V_{i,K}+V_{i-1,k}}{h^2}+h\sum_{j=0}^{mi}\frac{V_{j,k+1}+V_{j-1,k+1}}{h} \tag{3.35}$$

$$(i=1,2,\dots\dots,n-1,\quad k=0,1,2\dots\dots..)$$

$$V_{i,0}=v_0(x_i) \tag{3.36}$$

$$(i=0,1,2,\dots\dots,n-1,n)$$

Burada $v_0(x_i)$ (3.13) denklemi koruyan diferansiyellenebilen ağ fonksiyonu olarak seçilir.

d) Yardımcı Problem için Klasik Aşikar Olmayan Şema

Bu durumda göz önüne aldığımız problem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{V_{i,k+1}-V_{i,k}}{\tau}=\frac{V_{i+1,k+1}-2V_{i,k+1}+V_{i-1,k+1}}{h^2}+h\sum_{j=0}^{mi}\frac{V_{j,k+1}+V_{j-1,k+1}}{h} \tag{3.37}$$

$$(i=1,2,\dots\dots,n-1,\quad k=0,1,2\dots\dots..)$$

$$U_{i,0}=u_0(x_i) \tag{3.38}$$

$$(i=0,1,2,\dots\dots,n-1,n)$$

(3.34),(3.35) ve (3.36), (3.37) algoritmalarından bilinmeyenler kolayca elde edilir. Ayrıca her iki problem için aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.3 Eğer $V_{i,k}$ fonksiyonu sırasıyla (3.34), (3.35) ve (3.36), (3.37) problemlerinin çözümü ise

$$U_{i,k+1}=\frac{V_{i,k+1}+V_{i-1,k+1}}{h} \tag{3.39}$$

Eşitliği ile tanımlanan $U_{i,k+1}$ fonksiyonu da sırasıyla

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u \quad , \ t>0, x\in R^1 \, , \tag{3.40}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\, , \qquad x\in R^1 \tag{3.41}$$

probleminin çözümü olmaktadır.

2. $\alpha \neq 1$; $\beta \neq 1$; Durumu da yukarıda yapılanların benzeri şekilde elde edilir.

a) (3.1), (3.2) Problemi İçin Aşikar Şema

$$\frac{V_{i,k+1}-V_{i,k}}{\tau}=A\frac{U_{i,k}^{\alpha}-U_{i-1,k}^{\alpha}}{h}+Bh\sum_{j=0}^{mi}U_{j,k}^{\beta} \tag{3.42}$$

$$(i=1,2,\dots\dots,n-1, \qquad k=0,1,2\dots\dots..)$$

$$V_{i,0}=v_0(x_i)\, ,(i=0,1,2,\dots,n) \tag{3.43}$$

b) (3.1), (3.2) Problemi İçin Aşikar Olmayan Şema

$$\frac{V_{i,k+1}-V_{i,k}}{\tau}=A\frac{U_{i,k+1}^{\alpha}-U_{i-1,k+1}^{\alpha}}{h}+Bh\sum_{j=0}^{mi}U_{j,k+1}^{\beta} \tag{3.44}$$

$$(i=1,2,\dots\dots,n-1, \quad k=0,1,2\dots\dots..)$$

$$V_{i,0}=v_0(x_i)\, , \ (i=0,1,2,\dots,n)$$

3.3.2. İkinci Tür Yardımcı Problemin Sayısal Çözümü

a) Aşikar Şema

Bu bölümde (3.24), (3.25) problemlerinin sonlu fark karşılığını yazacayız. Bu durumda aşağıdaki şemanı göz önüne alacağız.

$$\frac{V_{i,k+1}-V_{i,k}}{\tau}=\frac{V_{i+1,k}-2V_{i,k}+V_{i-1,k}}{h^2}+\int_{-L}^{x_i}(x_i-z)u^{\alpha}\,(z,t)d\gamma \qquad (3.45)$$

(3.45) için başlangıç koşul

$$V_{i,0}=v_0(x_i) \qquad (3.46)$$

olacak. Burada $v_0(x_i)$ fonksiyonu (3.26) denkleminden bulunacaktır. (3.45) denklemindeki integrali sonlu farklara ayrıklaştırmak için herhangi bir i için $(x_{i,}x_{i+1})$,

$(i=0,1,\dots.n-1)$ eşit yere bölelim. Bölünen noktalar z_j olsun.

$$h_z=\frac{x_{i+1}-x_i}{m}=\frac{-L+(i+1)h-(-L+ih)}{m}=\frac{ih+h-ih}{m}=\frac{h}{m}$$

Bu takdirde

$$z_j=-L+jh_z=-L+j\frac{h}{m}$$

$j=0,\dots.nm,\ h_x=\frac{2L}{n},\ z_0=-L\,, \qquad z_1=-L+\frac{h}{m}$

olur ve

$$\int_{-L}^{x_i}(x_i-z)u^{\beta}\,(z,t)d\gamma=h\sum_{v=0}^{mi}(x_i-z_v)u^{\beta}(z_v,t_k)$$
$$(i=1,2,\dots\dots,n).$$

Sonuncu eşitliği dikkate alırsak (3.45) ‘i

$$V_{i,k+1}=V_{i,k}+\frac{\tau}{h^2}\big(V_{i+1,k)}-2V_{i,k}+V_{i-1,k}\big)+\tau h_z\textstyle\sum_{v=0}^{mi}(x_i-z_v)u^{\beta}(z_v,t_k) \qquad (3.47)$$

şeklinde yazarız.

b) Aşikar Olmayan Şema

(3.24), (3.25) problemi için bu kez

$$V_{i,k+1}=V_{i,k}+\frac{\tau}{h^2}\big(V_{i+1,k+1)}-2V_{i,k+1}+V_{i-1,k+1}\big)+\tau h_z\textstyle\sum_{v=0}^{mi}(x_i-z_v)u^{\beta}(z_v,t_{k+1}) \qquad (3.48)$$

şemasını yazacağız.

(3.47) ve (3.48) denklemleri için başlangıç koşul (3.46) olur.

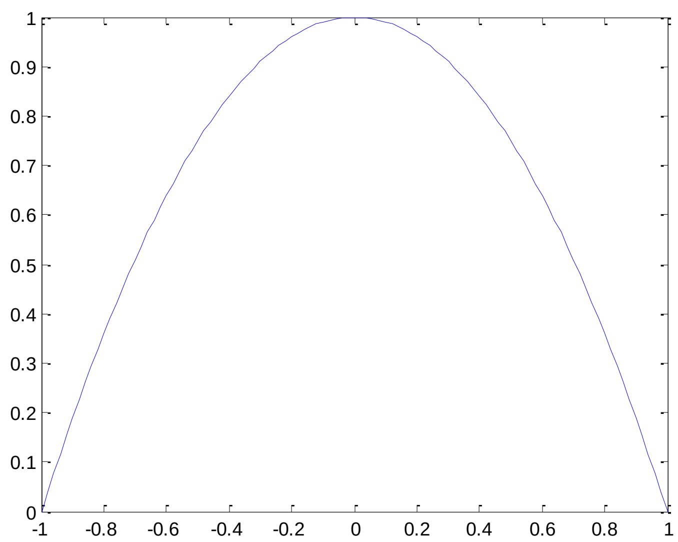
BİLGİSAYAR TESTLERİ

Önerilen algoritmalar üzere bilgisayar testleri aşağıdaki veriler çerçevesinde gerçekleştirilmiş ve sonuçlar sırasıyla Şekil 3. – 3. Da gösterilmiştir.

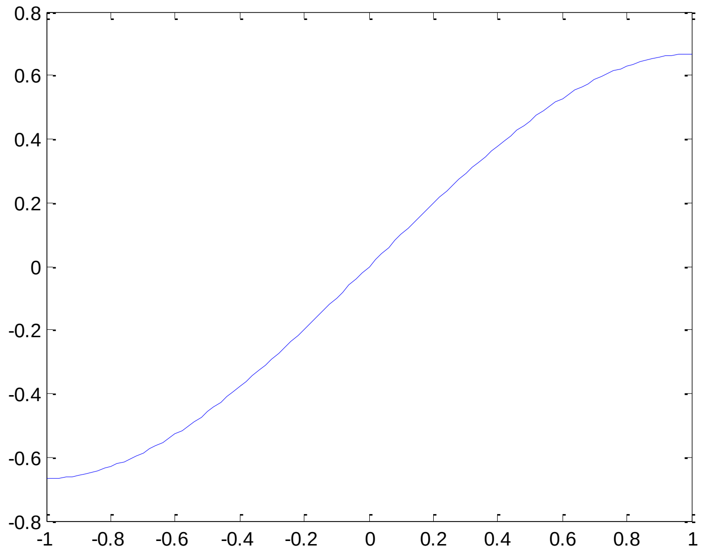
$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2\,, & -1 < x < 1 \\ 0, & diğer\ yerlerde \end{cases}$$

$$v_0(x) = \begin{cases} -0.667000\,, & x < -1 \\ x - \dfrac{x^3}{3}\,, & -1 < x < 1 \\ 0.66700\,, & x > 1 \end{cases}$$

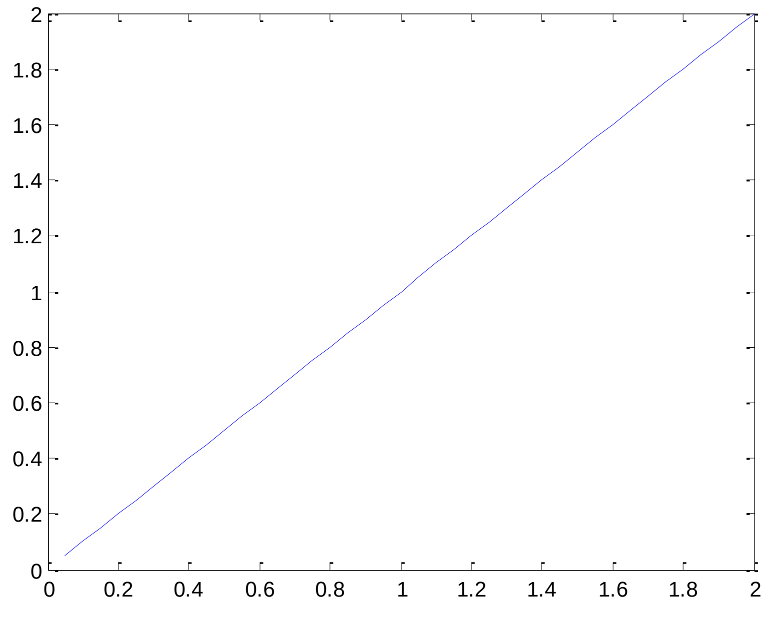
Bu durumda biz başlangıç fonksiyonun sonlu taşıyıcıya sahip olduğunu varsaydık.



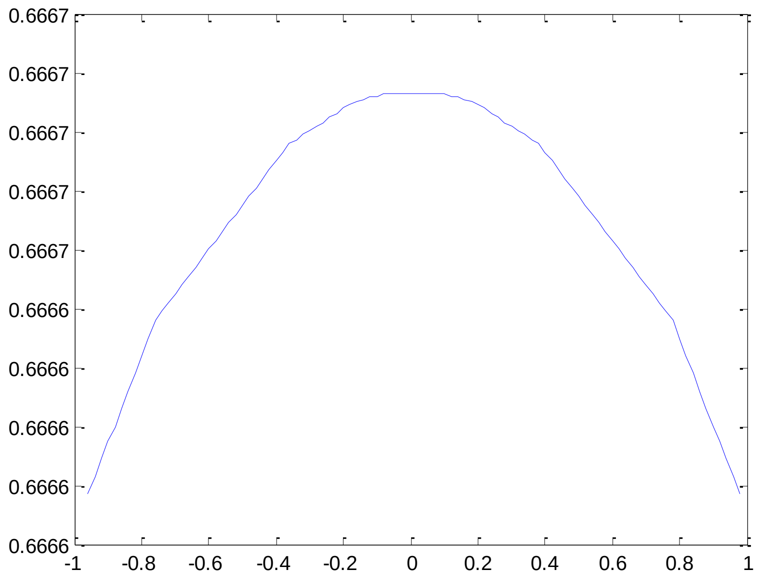
Şekil 3.1 $u_0(x)$ **fonksiyonunun grafiği**



Şekil 3.2 $v_0(x)$ **fonksiyonunun grafiği**



Şekil 3.3 $F(u) = u^{\alpha}$ **fonksiyonunun grafiği,** $\alpha = 1.$



Şekil 3.4 $u(x,t)$ **fonksiyonunun grafiği,** $\alpha = 1$.

SONUÇ

Tezdeki sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Nonlineer kaynak fonksiyonuna sahip dejenere olan parabolik tür denklemde patlama olayının teorik yapısı incelenmiştir.

2. Koşan dalga şeklinde bulunan çözümlerin zayıf çözüm oldukları da ispatlanmıştır.

3. Tezin esas kısmında kaynak fonksiyonuna sahip dejenere olan denklem için yazılmış Cauchy probleminin sayısal çözümünün bulunması için genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında nümerik algoritmalar önerilmiştir.

4. Göz önüne alınan problemlerin singülerlik derecesine bağlı olarak birinci ve ikinci tür yardımcı problemler önerilmiştir.

5. Önerilen yardımcı problemin avantajlarını kullanarak olayın fiziksel özelliklerini düzgün aksettirebilen nümerik algoritmalar yazılmıştır.

KAYNAKÇA

[1] Abasov M.T., Rasulov, M.A., Ibrahimov T.M., Ragimova T.A. On a method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok. 43, No.1, pp.150-153, 1991.

[2] Abramov A.,A., On the Numerical Solution of Same System of Stefan Type Problems. Journal of Computational Math and Math Physics, v.11, No 1, pp.121-127, 1971.

[3] Abrashin, V.N., Finite Differences Scheme for Parabolic Type Equation with Nonlinear Degeneration I, Differential Equations, 1976, v.XII, No 8, pp.1470-1484.

[4] Alexander A.Samarskii, Victor A.Galaktionov, Sergei P.Kurdyumov,Alexander P.Mikhailov (1995), Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations,Walter de Gruyter-Berlin-New York

[5] Baklanovskaya, V.F., Investigation of Grid method for Parabolic Equation with Degeneration. Journal of Computational Math and Math Physics, 1977, v.XII, No 6, pp. 1458-1473.

[6] Baklanovskaya V.,F. Numerical Solution One of Problem of Nonstationary Filtration. Journal of Computational Math and Math Physics, 1961, v.1, No 1, pp. 105-112.

[7] Barenblatt, G. I. On a method of solution of the heat conduction equation. Doklady, USSR Academy of Sciences, 72, No. 4, pp. 667-670, (1950), (in Russian).

[8] Barenblatt, G. I. (1953), On a class of exact solutions of plane one-dimensional problem of unsteady filtration of gas in a porous medium. Prikladnaya Matematika i Mekhanika (Applied Mathematics and Mechanics (PMM)), 17, No. 6, pp. 739-742 (in Russian).

[9] Barenblatt, G. I., and Vishik, M. I. (1956), On the Finite Speed of Propagation in the Problems of Unsteady Filtration of Fluid and Gas in a Porous Medium. Prikladnaya Matematika i Mekhanika (Applied Mathematics and Mechanics (PMM)), 20, No. 3, pp. 411-417 (in Russian).

[10] Barenblatt, G.,I., Entov, V. M., Pijik V. M., Motions of Fluids and Gases in Reservoirs. Moskow, Nedra, 1984, 221 p.

[11] Oleinik, O.A., Kalashnikov, A.S., and Chzhou Yui-Lin, The Cauchy Problem and Boundary-value Problems for Equations of Unsteady Filtration Type, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 22, pp. 667-704, 1958.

[12] Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., About One Method of the Solution of a Problem Cauchy for a Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First- Order with the Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dokl. Vol. 316, No.4, pp. 777-781, 1991.

[13] Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., A Numerical method of the Solution of the Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First Order Differential Equations, Minsk, Vol. 28, No.7, pp. 2056-2063, 1992.

[14] Rasulov, M. A. A Numerical Method of Solving a Parabolic Equation with Degeneration. Dif. Equations, Minsk, Vol. 18, No.8, pp. 1418-1427, 1992.

[15] Rasulov, M. A. A Numerical Method of Solving a Parabolic Equation with Degeneration. Dif. Equations, Minsk, Vol. 18, No.8, pp. 1418-1427, 1992.

[16] Mahir Rasulov, Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin Yayınevi, 344 sayfa, Ankara, 2011.

[17] Mahir Rasulov, Bahaddin Sinsoysal, Diferansiyel Denklemler Teorisine Giriş, Çağlayan Yayınevi, 2015

[18] Samarskii, A.A., Theory of Difference Schemes. Moskow, Nauka, 1977.

[19] Schwartz, L., Mathematical methods for Physical Sciences , 1965.

[20] Tikhonov, A.N., Samrskii A.,A. Equations of Mathematical Physics, M. Nauka, 1967, 724p.

[21] Thomas, J.W., Numerical Partial Differential Equations, Finite Difference methods, Springer-Verlag, 436p, 1995.

[22] Victor A.Galaktionov, Alexander A.Samarskii, Difference Solutions of a class of Quasilinear Parabolic Equations,1,(1983),Elsevier

ÖZGEÇMİŞ

Tezin sahibi Fulya TOMAK, 04.02.1990 tarihinde Bakırköy'de doğmuştur. Liseyi Bahçeşehir Atatürk Anadolu Lisesinde okumuş, 2008 yılında mezun olmuştur. Daha sonra Beykent Üniversitesi Matematik-Bilgisayar bölümünde okumuş ve 2013 yılında mezun olmuştur. Ayrıca yine Beykent Üniversitesinde Bankacılık-Finans bölümünde çift anadal yapıp burdan da mezun olmuştur. Üçüncü olarak da Anadolu Üniversitesi İşletme bölümü mezunudur.

Fulya TOMAK