

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**HAREKET EDEN İNCE FİLM DENKLEMİNİN FİZİKSEL  
PARAMETRELERE GÖRE AYRIKLAŞTIRILMASI VE  
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:  
**Sibel GEÇEGİL**

İstanbul, 2016

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**HAREKET EDEN İNCE FİLM DENKLEMİNİN FİZİKSEL  
PARAMETRELERE GÖRE AYRIKLAŞTIRILMASI VE  
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

**Sibel GEÇEGİL**

Öğrenci No:

140860003

Danışmanı:

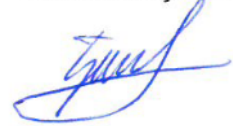
Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İstanbul, 2016

## YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **Hareket Eden İnce Film Denkleminin Fiziksel Parametrelere Göre Ayrıklaştırılması ve Sayısal Çözümü** " başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamı kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullandıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 15.08.2016

Sibel GEÇEGİL



T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 140860003 no'lu Sibel GEÇEGİL'in 15/08/2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavı<sup>1</sup> sonucunda, 45. dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında<sup>2</sup> oybirliği / oyçokluğu ile, ...k.abul... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

---

**Anabilim Dalı** :Matematik Bilgisayar  
**Programı** :Uygulamalı Matematik  
**Tez Başlığı<sup>3</sup>** :Hareket Eden İnce Film Denkleminin Fiziksel Parametrelere Göre Ayırıklaştırılması ve Sayısal Çözümü

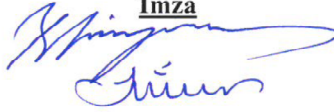


**Tez Sınav Jürisi**

**Öğretim Üyesi**

**Danışman** : Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

**Üye** : Prof. Dr. İhsan ÜNVER

**Üye** : Prof. Dr. Mahir RESULOV

**İmza**  
  
  


---

<sup>1</sup> Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

<sup>2</sup> Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

<sup>3</sup> İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

## ÖNSÖZ

Hem lisans hem de yüksek lisans öğrenimim boyunca bana danışmanlık yapmış olan ve değerli fikirlerinden faydalandığım kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV ile Sayın Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL 'a tüm yardım ve destekleri için teşekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi her türlü desteğini esirgemeyen ve bugünlere ulaşmamda büyük pay sahibi olan sevgili babam Hayri GEÇEGİL'e saygı ve sevgiyle minnettarlığımı bir borç bilirim.

Sibel GEÇEGİL

İstanbul, 2016

Adı ve Soyadı : Sibel GEÇEGİL  
Danışman : Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL  
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans Tezi/ 2016  
Alanı : Uygulamalı Matematik  
Anahtar Kelimeler : Konvektif terimli Denklem, Fiziksel Terimli  
Denklem, Parabolik Denklem

## ÖZ

### **HAREKET EDEN İNCE FİLM DENKLEMİNİN FİZİKSEL PARAMETRELERE GÖRE AYRIKLAŞTIRILMASI VE SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Tezde dejenere olabilen dördüncü mertebeden ince film denklemini ifade eden parabolik tür denklem için yazılmış Cauchy probleminin sayısal çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfında orijinal bir yöntem önerilmiştir.

Önce ince film denklemi fiziksel parametrelere göre ayrıştırılır. Elde edilen denklemlerin sayısal çözümlerini bulmak için esas problemde bulunmayan avantajlara sahip özel yolla yazılmış bir yardımcı problem dahil edilir ve söz konusu yardımcı problem kullanılarak problemin tüm özelliklerini düzgün ifade edebilen algoritmalar üretilmiştir.

Nihayet, önerilen yöntemin etkinliğini göstermek için ikinci bölümde incelenen konvektif ve difüzyon terimli denklemler için bilgisayar testleri gerçekleştirilmiştir.

Name and Surname : Sibel GEÇEGİL  
Supervisor : Assoc. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL  
Degree and Date : Master Thesis/ 2016  
Major : Applied Mathematics  
Key Words : Convective terms, Equation Diffusion terms  
Equation,Parabolic Equation

## ABSTRACT

### **SPLITTING OVER PHYSICAL PARAMETERS OF THE DRIVEN THIN FILM EQUATION AND ITS NUMERICAL SOLUTION**

In this thesis, an original method having some advantages over the main problem has been proposed for the numerical solution of fourth dimensional degenerate parabolic equation with Cauchy condition, describing thin film equation.

At first the thin film equation is split over physical parameters. To find the numerical solution for this equations, a special auxiliary problem with some advantages over the main problem has been introduced and algorithms that describe all of the physical properties of the problem were created by using this auxiliary problem.

Finally, in order to demonstrate the effectiveness of the proposed method, some computer tests are conducted for the equations obtained in the second chapter with convective and diffusion terms.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa No.
<b>ÖZ</b> .....	i
<b>ABSTRACT</b> .....	ii
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> .....	iv
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
1.1 Literatür Taraması ve Fiziksel Problemin Koyuluşu.....	2
1.2 Sıçrayışın Mevcut Olma Koşulu.....	3
1.3 Suni Viskozite (Özlülük) Yöntemi.....	5
<b>2. İNCE FİLM DENKLEMLERİ VE FİZİKSEL PARAMETRELERE GÖRE AYRIKLAŞTIRILMASI</b> .....	12
2.1 Konvektif Terimli Denklem ve Sayısal Çözümü.....	12
2.2 Yardımcı Problem ve Özellikleri.....	14
2.3 Nümerik Algoritma.....	15
2.4 Bilgisayar Testleri.....	17
2.5 Diffüzyon Terimli Denklem ve Sayısal Çözümü.....	20
2.6 Yardımcı Problem.....	26
2.7 Nümerik Algoritma.....	28
<b>3. SONUÇLAR</b> .....	35
<b>4. KAYNAKLAR</b> .....	36



## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No.
Şekil 1. (a) Konkav durum , (b) Konveks durum.....	4
Şekil 2. $x(t) = wt$ sıçrayış eğrisi.....	7
Şekil 3. $Ch$ kirişinin altta kaldığı durum.....	10
Şekil 4. $Ch$ kirişinin üstte kaldığı durum.....	11
Şekil 5. $f(u) = u^2 - u^3$ fonksiyonunun grafiği.....	12
Şekil 6. $u_0(x)$ in grafiği.....	18
Şekil 7. $v_0(x)$ in grafiği.....	18
Şekil 8. $u(x, t)$ in grafiği .....	19
Şekil 9. $u_0(x, t)$ in grafiği .....	20
Şekil 10. $u(x, t)$ in grafiği .....	21

## 1. GİRİŞ

İnce sıvı filmler doğa ve teknolojinin birçok yerlerinde rastlanmaktadır ve bu yüzden birçok uygulamada onların dinamiğini anlamak önemlidir. Tipik ince film akışı, bir sıvı akışkana, genellikle uygulamalarda gaz ve çoğunlukla havaya maruz kalan, yüzey ile bir katı alt tabaka tarafından kısmen sınırlanmış sıvının yayılmasından oluşur. Tipik olarak, bir yöndeki  $H$  kalınlığı, diğer yönlerdeki karakteristik uzunluk ölçeği  $L$  den daha küçüktür ve akış dışarıdan bir zorlama etkisi altında (örneğin, yerçekimi, yüzey gerilim gradyentleri, bir döner alt tabaka) ağırlıklı olarak daha uzun boyutların biri yönünde gerçekleşir. Basit ve bariz bir örnek, yerçekiminin etkisi altında pencere camından aşağıya doğru bir (ince) yağmur damlasının akışıdır. Genellikle, alt katmana (yani, pencere camına) dik doğrultulardaki akış hızı pencere camı boyunca ana akış hızından çok daha küçüktür. Bu tür akışları modelleme için en "doğru" yaklaşım makroskopik momentum denklemi (örneğin, Newton tipi bir sıvı olması durumunda Stokes ya da Navier Stokes denklemleri) ile temin edilmektedir ve bu yaklaşım, her zaman ayrıntılı sayısal hesaplama içerir, [18], [19]. Burada ele alınan yaklaşım,  $\epsilon \equiv H/L$  küçük en-boy oranının varlığı momentum denklemlerini  $\epsilon$  nun kuvvetlerinde bir pertürbasyon serine açmaya faydalı olacaktır. Böyle yaparak, analitik çözümün çoğunlukla mümkün olacağı avantajlı olan ince film ya da uzun dalga yaklaşımı olarak adlandırılan ifadeyi geliştireceğiz ve bunun mümkün olmadığı durumda ise indirgenmiş sayısal problem büyük ölçüde basitleştirilecektir. Bu yaklaşım klasik yağlama teorisi ile çok benzerdir ve bu nedenle yağlama yaklaşımı olarak da anılır, [14]. Bu yaklaşımın başarısı literatürde iyice belgelenmiştir ve bu başarının bir özelliği onun dayanıklılığı ve beklenen geçerlilik aralığının dış sınırları üzerindeki veya ötesindeki parametre rejimlerinde iyi sonuçlar (deneye uygun olarak) çıkarmak için yatkınlığıdır. Matematiksel açıdan ince film akışlarıyla ilgili tipik sorun, sıvının serbest yüzeyinin başlangıçta bilinmemesi ve çözümün bir parçası olarak belirlenmesi gerektiği gerçeğidir.

Pratikte İnce film modellerinin bir çoğunda yüzey gerilimi önemli bir rol oynar. Resmen küçük olduğunda bile, yüzey gerilimi genellikle şokların (film kalınlığında keskin sıçramaların) oluşumunu engelleyen önemli bir yumuşatma etkisine sahiptir. Burada yerçekimi, kompozisyonel (bileşimsel) değişiklikler ve alt katman (tabaka-altlık) enerjileri gibi

diğer etkileri de içeren düz ve eğimli yüzeyler üzerinde akışlar için matematiksel modeller verilecektir. Uygulama alanları boya ve diğer yüzey kaplamalarının akış davranışını, kimyasal ve nükleer reaktör tasarımını, tarımla ilgili kimyasal madde uygulamalarını, hem de kornea üzerindeki ve akciğerlerdeki ince filmleri içeren bir çok biyoakışkan uygulamalarını içerir.

Serbest yüzeye sahip iki boyutlu problemler için yağlama teorisinin asimptotik hesaplamaları yüzey gerilimi olmaksızın Benney tarafından, yüzey gerilimi içerildiği durumda Atherton ve Homsy tarafından verilmiştir. İnce film yaklaşımı newtonyen olmayan akışkanlar için de uygulanabilir ve literatürde bir çok örneği bulunmaktadır, [1], [4], [18].

### 1.1 Literatür Taraması ve Fiziksel Problemin Koyuluşu

$R^1$  ile bir boyutlu 1. Öklid uzayını gösterelim ve  $R^1$  de aşağıdaki gibi yazılmış dördüncü mertebeden parabolik tür

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) = 0 \quad (1.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada akış fonksiyonunu

$$f(u) = u^2 - u^3 \quad (1.2)$$

şeklinde ele alacağız.  $u(x,t) \geq 0$  olmak koşuluyla filmin kalınlığını (thickness) gösterir. Fiziksel olarak, (1.1) denklemindeki akış terimi birbirlerine ters yönde etki yapan kayma yüzeyi ile graviteyi temsil eder. Difüzyon terimi ise yüzeysel gerginliği ifade etmektedir. Kayma yüzeyi sıcaklık veya gradiyent mesafesinden ya da dış kuvvetlerin (örneğin, rüzgar gibi) etkisiyle oluşabilir.

(1.1) denklemini için aşağıdaki başlangıç koşulunu ekleyelim

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (1.3)$$

$u_0(x)$  in herhangi bir  $[-\ell, \ell]$  aralığında sonlu taşıyıcıya sahip bir fonksiyon ve

$$\int_{-\ell}^{\ell} v_0(x) dx = M \quad (1.4)$$

olduğunu varsayalım. Burada  $M > 0$  bilinen sabit bir sayıdır. Örnek olarak,

$$a) u_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < \ell, \\ 0, & |x| \geq \ell, \end{cases}$$

$$b) u_0(x) = \begin{cases} 2/3, & |x| < \ell, \\ 0, & |x| \geq \ell \end{cases}$$

göz önüne alacağız.

(1.1) denklemini çözmeden önce, onu fiziksel parametrelere göre, aşağıdaki

$$A) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

$$B) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

denklemlere parçalayalım.

### 1.2 Sıçrayışın Mevcut Olma Koşulu

Önce (1.5) denklemini için Cauchy problemini inceleyelim. Literatürden bilindiği üzere (1.5) denklemini hidrodinamiğin model denklemini veya genelleştirilmiş Hopf denklemini olmaktadır ve bir çok önemli problemlerin teorik incelenmesinin temelini oluşturur. Bu denklem literatürde  $f''(u) \geq 0$  (veya  $f''(u) \leq 0$ ) olduğu durumda iyice incelenmiştir, [7], [15], [20].

$f''(u) \geq 0$ ,  $f(u) \in C_{loc}^3$ ,  $u_0(x) \in C^2$  olduğunu varsayalım ve “sırf matematiksel” düşüncelere dayanarak, (1.5) denkleminin sürekli çözümün  $t < T$  değerleri özelliklerini araştıralım ve bu çözümün hangi kritik  $t = T$  değerlerinde bozulduğunu bulalım. Tüm bular  $u(t, x)$  çözümün özellikleri karakterize eder.

$z = u_x(t, x)$  olsun ve

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

denklemini  $x$  e göre diferansiyellersek

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f''(u) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + f'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial t} + f''(u) z^2 + f'(u) \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$0 \geq \frac{\partial z}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial z}{\partial x}$$

elde ederiz.  $x = x(t)$  karakteristikleri boyunca  $\dot{x} = f'(u(t, x(t)))$  olduğundan

$$0 \geq \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{dz}{dt} \text{ veya } \frac{dz}{dt} \leq 0$$

dır; yani,  $z(t, x)$  karakteristikler boyunca artmayan fonksiyondur. Böylelikle  $\forall (t, x) \in \Pi_T = \{-\infty < x < \infty, 0 < t \leq T\}$  için

$$z(t, x) = u_x(t, x) \leq \sup_{x \in R} u_0'(x) = K_0 \quad (1.6)$$

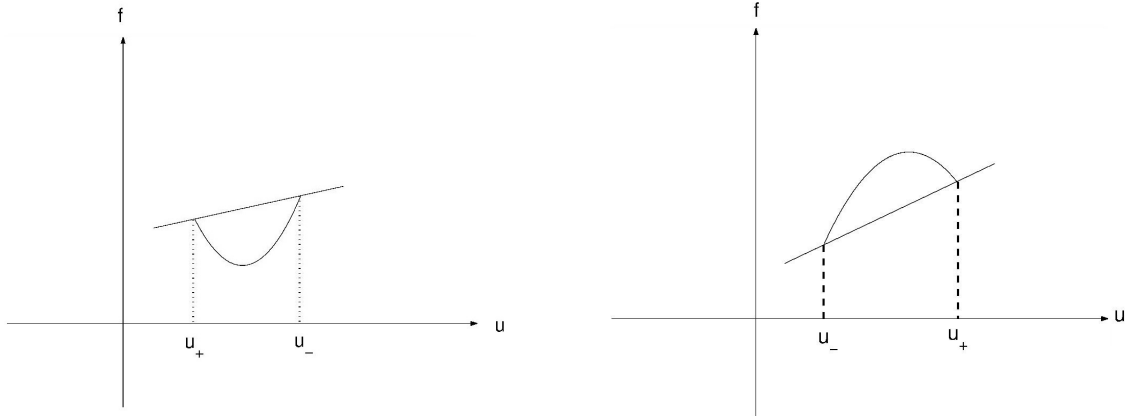
olur.  $u_x(t, x)$  fonksiyonu  $t = T$  değerlerinde tüm  $x$  ler için tanımlı olmadığından, (1.6) ya denk olan formda yazalım.

$$\frac{u(t, x_2) - u(t, x_1)}{x_2 - x_1} \leq K_0, \quad \forall x_1, x_2 \quad (1.7)$$

(1.7) türünden olan eşitsizliğe süreksizliğin mevcut olma koşulu (veya Oleinik koşulu) denir, [20]. (1.7) den  $x_1 < x_2$  olan durumlar için  $u(t, x_2) - u(t, x_1) \leq K_0(x_2 - x_1)$  ve  $x_2 \rightarrow x^* + 0$ ,  $x_1 \rightarrow x^* - 0$  iken  $(x^*, u(T, x))$  fonksiyonu için süreksizlik noktası olmaktadır limite gererse

$$u_+ = u(t, x^* + 0) < u(t, x^* - 0) = u_- \quad (1.8)$$

elde ederiz. (1.8) koşuluna parça-parça sürekli fonksiyonlar sınıfında tanımlanan  $u(t, x)$  fonksiyonu için herhangi bir  $x$  noktasında süreksizliğin mevcut olması koşulu denir.



(a) (b)  
**Şekil 1. (a) Konkav durum , (b) Konveks durum**

$f''(u) \leq 0$  olduğu durumda  $u = -v$  değişken dönüşümü (1.5) denklemini

$$v_t + (\tilde{f}(v))_x = 0$$

denklemine dönüştürür. Burada  $\tilde{f}(v) = -f(-v)$  dir, ayrıca  $f''(v) = -f''(-v) > 0$  olmaktadır. Böylelikle, bu durum için süreksizliğin mevcut olma koşulu  $u_+ > u_-$  olur. Sonuç olarak, kabarık  $f(u)$  fonksiyonu için sıçrayışın mevcut olma koşulu aşağıdaki gibi bulunur:

Eğer  $f(u)$  aşağıya kabarık (konkav) ise (örneğin,  $f(u) = u^2/2, e^u, \dots$  gibi), (1.5) denkleminin çözümünde  $u_-$  den  $u_+$  ya doğru sıçrayış mevcut olur, yani  $u_- > u_+$  dır.

$f(u)$  üste kabarık (konveks) fonksiyon ise (örneğin,  $f(u) = -u^2, \ln u, \dots$  gibi), bu taktirde sıçrayış  $u_-$  den  $u_+$  ya doğru mevcut olur, yani  $u_- < u_+$  dır.

### 1.3 Suni Viskozite (Özlülük) Yöntemi

$f(u)$  nun kabarık fonksiyon olmadığı durumu incelemek için aşağıdaki halleri ele alalım. Eğer  $f(u)$  kabarık fonksiyon olursa, onun grafiği ile kiriş arasındaki ilişkileri inceleyelim.

1.  $u_- > u_+$  olması hali. Bu durumda  $f(u)$  grafiği  $(u_-, f(u_-))$  ve  $(u_+, f(u_+))$  noktalarından geçen kiriş üstünde olamaz, Şekil 1a.

2.  $u_- < u_+$  olması hali. Bu durumda  $f(u)$  grafiği kirişin altında yerleşemez, Şekil 1b.

Bu muhakemeler doğrultusunda, bu bilgileri kabarık olmayan fonksiyonlar için geliştirebiliriz, [7], [15], [20], [21]. Bu durumu detaylı bir şekilde incelemek için “ideal” ve “gerçek” gazların özelliklerine dayanarak fiziksel (daha doğrusu hidrodinamik) kavramlardan istifade edeceğiz.

Eğer  $x = x(t)$  bir boruda hareket eden parçacığın yörüngesi,  $u(t, x)$  fonksiyonu  $t$  zamanında  $x$  noktasındaki parçacığın sabit hızı olursa, bu taktirde

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} = u(t, x(t)) \text{ ve } \ddot{x}(t) = \frac{du}{dt} = 0$$

olur. Buradan da Hopf denklemini ortaya çıkmaktadır.

İdeal gaz, prensipce teorik olarak mevcuttur, yani gerçek gazlarda viskozite dikkate alınmazsa, bu gaza bir ideal gaz gibi bakabiliriz.

$\varepsilon$  ile gerçek gazın viskozite katsayısını gösterelim. Bu durumda, o viskozitenin sürtünme kuvvetini, birim kütlede bulunan  $x(t)$  noktasındaki parçacığı (belirli koşullar

çerçevesinde) etkileyen  $\varepsilon u_{xx}(t, x)$  olarak elde ederiz. Bu taktirde

$$\ddot{x}(t) = \frac{du}{dt} = \varepsilon u_{xx}$$

olur ve biz Hopf denklemi yerine, Burgers denklemi olarak adlandırılan

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \quad (1.9)$$

denklemini buluruz. Doğal olarak bunu öyle kabul edeceğiz ki (bu zaten öyledir), Hopf denkleminin kabul görebilen tüm zayıf çözümleri, (1.9) denkleminin  $u_\varepsilon(t, x)$  çözümünün  $\varepsilon \rightarrow 0$  limit durumu olmaktadır.

Yukarıdaki yöntemin (1.9) denklemine uygulanmasından önce Burgers denkleminin lineerleştirilmesi için bir yöntem inceleyelim. (1.9) denkleminde

$$u_t = \left( \varepsilon u_x - u^2/2 \right)_x$$

olduğundan, gösterilebilir ki,

$$U(t, x) = \int_{(0,0)}^{(t,x)} \left[ u dx + \left( \varepsilon u_x - u^2/2 \right)_x dt \right],$$

$$u = U_x$$

fonksiyonu

$$U_t + \frac{1}{2} U_x^2 = \varepsilon U_{xx} \quad (1.10)$$

denklemini korur. (1.10) denklemine  $U = -2\varepsilon \ln z$  değişken dönüşümü uygularsak, birinci mertebeden türevleri

$$U_t = -2\varepsilon \frac{1}{z} z_t \quad \text{ve} \quad U_x = -2\varepsilon \frac{1}{z} z_x$$

olarak elde ederiz.  $x$  e göre ikinci mertebeden türevini hesaplırsak

$$U_{xx} = -2\varepsilon \left( \frac{z_x}{z} \right)_x = -2\varepsilon \left( \frac{zz_{xx} - z_x^2}{z^2} \right)$$

buluruz. Bulduğumuz türev değerlerini (1.10) da yerine yazarsak,

$$-2\varepsilon \frac{z_t}{z} + \frac{1}{2} \left( -2\varepsilon \frac{z_x}{z} \right)^2 = -2\varepsilon^2 \frac{z_{xx}}{z} + 2\varepsilon^2 \frac{z_x^2}{z^2}$$

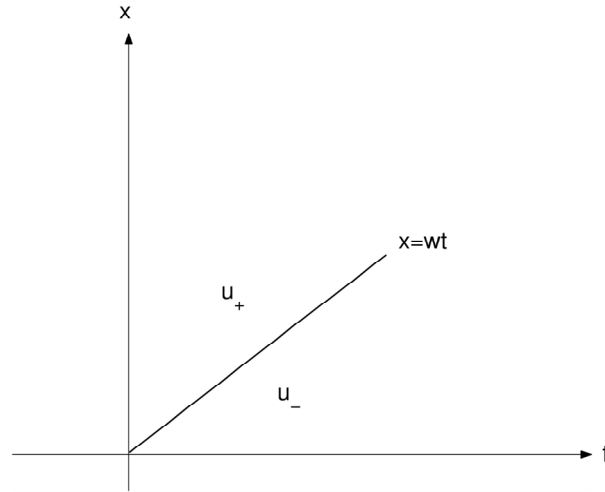
alırız ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$z_t = \varepsilon z_{xx} \quad (1.11)$$

elde ederiz. Bilindiği üzere, (1.11) denklemini  $z(t, x)$  fonksiyonuna göre lineer ısı dağılım denklemdir. (1.10) ve (1.11) den

$$u = U_x = -2\varepsilon \frac{z_x}{z}$$

alırız. Bu dönüşüme Cole-Hopf dönüşümü denir.



Şekil 2.  $x(t) = wt$  sıçrayış eğrisi

Şimdi aşağıdaki biçimde tanımlanan

$$u(t, x) = u_+ - \frac{u_+ - u_-}{2} [1 + \text{sign}(x - wt)] = \begin{cases} u_-, & x < wt, \\ u_+, & x > wt \end{cases} \quad (1.12)$$

fonksiyonunun sade dalga denkleminin zayıf çözümü olduğunu varsayalım. Burada  $w = \text{sabit}$  ve  $t > 0$  dır. Bunun için gerek ve yeter koşul  $x(t) = wt$  sıçrayış eğrisi üzerinde

$$w \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad (1.13)$$

Rankine-Hugoniot koşulunun korunmasıdır. Bahsi geçen suni özlülük yönteminin esas iddiası şudur:  $x \neq wt$  olmak üzere, eğer  $u^\varepsilon(t, x)$  ler

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \quad (1.14)$$

denklemin çözümüne noktasal yakınsak oluyorsa, bu taktirde (1.12) cinsinden darbe şeklinde olan çözümün yararlı çözüm olduğunu varsayacağız.



$u(t, x)$  çözümünün yapısını dikkate alarak, (1.14) denkleminin çözümünü

$$u^\varepsilon(t, x) = v(\xi), \quad \xi = \frac{x - wt}{\varepsilon} \quad (1.15)$$

şeklinde arayacağız. (1.15) ifadesinden

$$(u^\varepsilon)_t = v'(\xi)\xi_t = v'(\xi)\left(-\frac{w}{\varepsilon}\right),$$

$$u_x^\varepsilon = v'(\xi)\frac{1}{\varepsilon}, \quad u_{xx}^\varepsilon = v''(\xi)\frac{1}{\varepsilon^2}$$

alırız ve bunları (1.14) denkleminde yerine koyarsak

$$v'(\xi)\left(-\frac{w}{\varepsilon}\right) + (f(v))' = \varepsilon v''\frac{1}{\varepsilon^2}$$

veya

$$-wv'(\xi) + (f(v))' = v'' \quad (1.16)$$

elde ederiz. Diğer yandan,  $x \neq wt$  olmak üzere

$$u^\varepsilon(t, x) = v\left(\frac{x - wt}{\varepsilon}\right)$$

ifadesinin (1.12) eşitliğiyle tanımlanan çözüme noktasal olarak yakınsayabilmesi ancak ve ancak  $v(\xi)$  fonksiyonun

$$v(-\infty) = u_-, \quad v(+\infty) = u_+ \quad (1.17)$$

koşullarını sağlamasıyla mümkündür.

(1.16) ifadesini integrallersek

$$-wv + \int (f(v))' d\xi = v'$$

veya

$$v' = F(v) + c \quad (1.18)$$

alırız. Burada  $F(v) = -wv + f(v)$  ve  $c = \text{sabit}$  olmaktadır.

(1.18) otonom denkleminin (1.17) koşulunu koruyan çözümünün olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

1.  $u_-$  ve  $u_+$  özel noktalarında (1.18) denkleminin sağ tarafı sıfır olur, yani

$$F(u_-) + c = F(u_+) + c = 0$$

olur. Buradan  $c = -F(u_-) = -F(u_+)$  olduğu görülür.

Önemle belirtelim ki,  $f(u_-) - wu_- = f(u_+) - wu_+$  eşitliği dikkate alınırsa,  $F(u_-) = F(u_+)$  koşulu Rankine-Hugoniot koşulunun aynıdır.

2.  $u_-$  ve  $u_+$  arasında özel nokta yoktur ve (1.18) söz konusu aralıkta,

$$F(v) - F(u_-) = F(v) - F(u_+)$$

a) pozitifdir eğer  $u_- < u_+$  ise, (bu durumda  $v(\xi)$  artar.)

$$F(v) - F(u_-) > 0 \quad \forall v \in (u_-, u_+) \quad \text{eğer } u_- < u_+ \quad (1.19)$$

b) negatiftir eğer  $u_- > u_+$  ise, (bu durumda  $v(\xi)$  azalır.);

$$F(v) - F(u_+) < 0 \quad \forall v \in (u_+, u_-) \quad \text{eğer } u_+ < u_- \quad (1.20)$$

Bu koşullar korunduğu takdirde, bizi ilgilendiren çözüm

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v) - F(u_-)} = \xi - \xi_0, \quad v_0 = \frac{u_+ - u_-}{2}$$

şeklinde yazılır.

(1.19), (1.20) koşulları mevcutluk koşullarının analitik yazılım formudur.

Şimdi bu koşullara geometrik anlam verelim. Bunun için  $F(v) = f(v) - wv$  ifadesini (1.19) ve (1.20) de yerine yazalım.

$$F(v) - F(u_-) = f(v) - wv - (f(u_-) - wu_-) > 0, \quad \forall v \in (u_-, u_+) \quad \text{eğer } u_- < u_+$$

$$f(v) - f(u_-) > w(v - u_-).$$

$$f(v) - f(u_+) < w(v - u_+), \quad \forall v \in (u_+, u_-) \quad \text{eğer } u_+ < u_-$$

ve Rankine-Hugoniot koşulunu dikkate alırsak

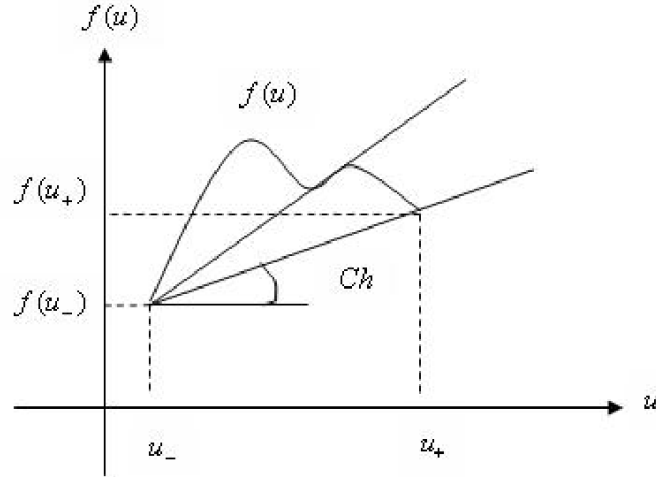
$$\frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} > w = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad \forall u \in (u_-, u_+) \quad \text{eğer } u_- < u_+ \quad (1.21)$$

$$\frac{f(u) - f(u_+)}{u - u_+} < w = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad \forall u \in (u_+, u_-) \quad \text{eğer } u_+ < u_- \quad (1.22)$$

alırız. Şimdi (1.21) ve (1.22) koşullarının geometrik anlamını inceleyelim. Bunun için  $f(u)$  fonksiyonunun grafiğini çizelim.

(1.21) koşulu,  $Ch$  kirişini oluşturan  $(u_-, f(u_-))$  ve  $(u_+, f(u_+))$  noktalarını birleştiren doğrunun  $ou$ -ekseni ile oluşturduğu eğim açısı,  $(u_-, f(u_-))$  ve  $(u, f(u))$  kirişinin eğim

açısından küçük olduğu anlamına gelmektedir. Böylelikle  $(u, f(u))$  noktası ve  $f(u)$  fonksiyonunun  $(u_-, u_+)$  aralığındaki grafiğinin tümü  $Ch$  kirişinin üstünde olmaktadır. Benzer şekilde, (1.22) koşulu da  $f(u)$  nun  $(u_+, u_-)$  aralığındaki grafiğinin  $Ch$  kirişinin altında yerleştiği anlamına gelir.

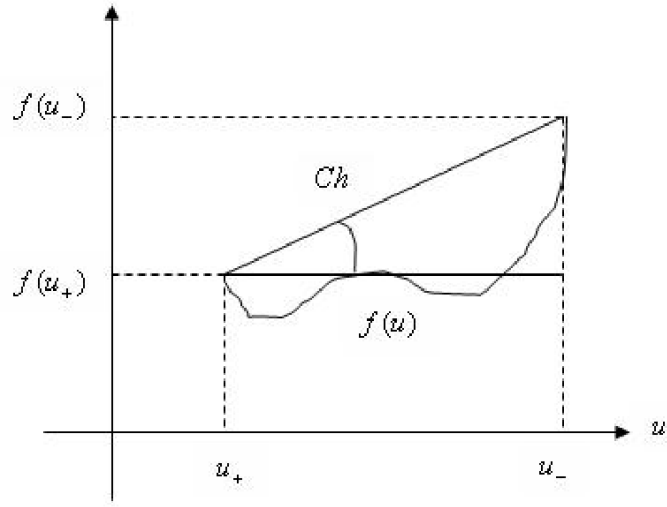


**Şekil 3.**  $Ch$  kirişinin altta kaldığı durum

Son olarak, (1.5) denkleminin  $u(t, x)$  çözümünde  $u_-$  den  $u_+$  ya doğru sıçrayışının olması için ( $x$  in artan istikametinde) aşağıdaki sıçrayışın mevcut olma koşullarını elde ederiz:

i)  $u_- < u_+$  olduğunda  $f(u)$  fonksiyonunun  $[u_-, u_+]$  aralığındaki grafiği  $(u_-, f(u_-))$  ve  $(u_+, f(u_+))$  noktalarını birleştiren kirişin üstünde yerleşmesi gerekmektedir.

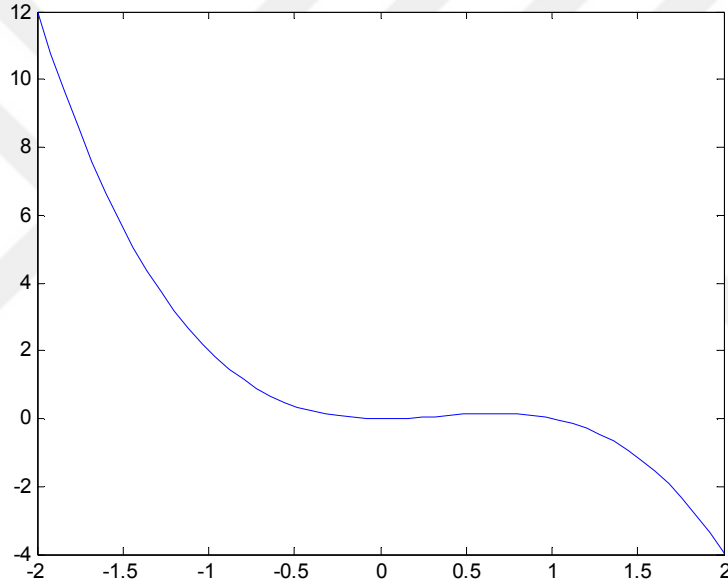
ii)  $u_- > u_+$  olduğunda ise  $f(u)$  fonksiyonunun  $[u_+, u_-]$  aralığındaki grafiğinin  $(u_+, f(u_+))$  ve  $(u_-, f(u_-))$  noktalarını birleştiren kirişin altında yerleşmesi gerekmektedir.



**Şekil 4.**  $Ch$  kirişinin üstte kaldığı durum

## 2. İNCE FİLM DENKLEMLERİ VE FİZİKSEL PARAMETRELERE GÖRE AYRIKLAŞTIRILMASI

Görüldüğü gibi, (1.1) denklemi biri konvektif ve diğeri dördüncü mertebeden difüzyon olmak üzere iki farklı fiziksel özelliğe sahiptir. Konvektif terim kayma yüzeyi ve graviteyi gösterir ki, burada kuvvetler ters yönde etki gösterir. Difüzyon terim ise yüzeyel tensoru ifade etmektedir. (1.1) denklemi ince sıvı tabakalarının sert yüzeyde akış problemlerini ifade eder ve bir çok fiziksel problemin teorik incelenmesi sürecinde kullanılmaktadır, örneğin, yağlama problemi vs gibi, [8], [9], [10], [17].



**Şekil 5.**  $f(u) = u^2 - u^3$  fonksiyonunun grafiği

### 2.1 Konvektif Terimli Denklem ve Sayısal Çözümü

Şimdi (1.5) denklemini  $f(u) = u^2 - u^3$  için ele alalım. Şekil 5 den görüldüğü gibi,  $f(u) = u^2 - u^3$  fonksiyonunun ikinci türevi işaret değiştirmektedir. Bu nedenle hem üstte, hem de altta kabarık kısımları vardır.

(1.5) denkleminin

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & |x| < 2, \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (2.1)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde gerçek çözümünü bulalım. Bunun için [16] ve [21] i takip ederek, aşağıdaki tanımı verelim.

$\aleph$  ile  $[-2,2]$  aralığında tanımlı ve  $\tilde{F}(u) \geq f(u)$  olan fonksiyonlar sınıfını gösterelim.

**Tanım 2.1**  $\tilde{F} = \inf_{F(u) \in \aleph} \tilde{F}(u)$  eşitliği ile tanımlanan  $\tilde{F}$  fonksiyonuna  $f(u)$  fonksiyonunun  $[-2,2]$  aralığındaki alta kabarık katmanı denir.

Tanım2.1 e dayanarak  $f(u)$  fonksiyonunun alta kabarık katmanını  $\tilde{F}(u) = \inf_{F \in \aleph} \tilde{F}(u)$  ile gösterelim.

Şimdi,  $f(u) = u^2 - u^3$  fonksiyonunun  $[-2,2]$  aralığındaki alta kabarık katmanını oluşturalım. Bunun için,  $B(2, f(2)) \equiv B(2, -4)$  noktasından  $f(u)$  nun grafiğine teğet çizelim ve  $AC$  doğrusunun grafikte kesiştiği noktayı  $C(c, f(c))$  ile gösterelim. Bu teğetin eğiminin

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(2)}{c - 2}$$

denklemden bulunabileceği açıktır.  $f'(u) = 2u - 3u^2$  dir ve  $f(2) = -4$ ,  $f(-2) = 12$  olduğundan  $A(-2, f(-2)) = (-2, 12)$  olur. Bu durumda  $C$  noktası

$$2c - 3c^2 = \frac{f(c) + 4}{c - 2} = \frac{c^2 - c^3 + 4}{c - 2}$$

denklemden bulunur. Buradan  $(2c - 3c^2)(c - 2) = c^2 - c^3 + 4$  veya

$$2c^3 - 7c^2 + 4c + 4 = 0 \quad (2.2)$$

elde edilir. Bizi (2.2) denkleminin  $[-2,2]$  aralığında kalan kökleri ilgilendirmektedir. Açıkça görüldüğü üzere  $c = 2$  bu denklemi korumaktadır. Gerçekten de,  $2.8 - 7.4 + 4.2 + 4 = 0$  olmaktadır. Bu durumda diğer çözümler denkleminin kökleri olmaktadır.

$$c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \text{ den } c_1 = 2 \text{ ve } c_2 = -0,5 \text{ olarak bulunur.}$$

Böylelikle  $f(u) = u^2 - u^3$  fonksiyonunun alta kabarık katmanı  $CB$  teğeti ve  $f(u)$  nun grafiğinin  $C$  ve  $A$  noktaları arasında kalan  $CA$  yayından oluşur. Görüldüğü gibi,  $\tilde{F}$  fonksiyonunun ikinci türevi pozitif değildir, yani  $\tilde{F}''(u) < 0$  olur. Bu durumda genel teoriye dayanarak (1.5), (1.23) probleminin çözümü

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < a(t), \\ g\left(\frac{x}{t}\right), & a(t) < x < b(t), \\ 0, & x > b(t) \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Burada seyreltme dalgasının profili  $g(x)$  fonksiyonu

$$g'(g(x)) = x$$

denkleminde bulunur ve  $a(t) = g^{-1}(u_+)t$  ve  $b(t) = g^{-1}(u_-)t$  olmaktadır.

## 2.2 Yardımcı Problem ve Özellikleri

Bu kısımda, (1.5), (2.1) denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için algoritma oluşturacağız. Bunun için önce [21] - [24] takip edilerek aşağıdaki yardımcı problemi dahil edelim.

$M$  ile  $\frac{\partial}{\partial x}$  operatörünü gösterelim. Bu notasyonda (1.5) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Mf(u) = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır.  $M^{-1}$  ile  $M$  in tersini gösterelim ve (2.3) denkleminin her iki tarafına  $M^{-1}$  i

$$M^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} + M^{-1}Mf(u) = M^{-1}(0)$$

şeklinde uygulayalım. Sonucu denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f(u) = h \quad (2.4)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada

$$v = M^{-1}u \text{ ve } h = M^{-1}0$$

dır. Dolayısıyla,  $h \in \ker M$  herhangi bir fonksiyon olmaktadır.  $h = -h_t^{(1)}$  olarak alırsak (2.4) yi

$$\frac{\partial}{\partial t}(M^{-1}u + h_t^{(1)}) + f(u) = 0 \quad (2.5)$$

biçiminde yazabiliriz.

$$M^{-1}u + h_t^{(1)} = v(x,t) \quad (2.6)$$

olsun. (2.6) den

$$u(x,t) = Mv(x,t) \quad (2.8)$$

elde ederiz. (2.6) ve (2.7) i dikkate alarak (2.5) ifadesini

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + f\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) = 0 \quad (2.8)$$

olarak yazabiliriz. (2.8) denklemini için

$$v(x,0) = v_0(x) \quad (2.9)$$

başlangıç koşulunu ekleyelim. Burada  $v_0(x)$  fonksiyonu

$$\frac{dv_0}{dx} = u_0(x) \quad (2.10)$$

denklemini koruyan herhangi bir sürekli fonksiyondur.

(2.9), (2.10) problemine yardımcı problem denir ve bu problemin aşağıdaki avantajları vardır:

1.  $v(x,t)$  fonksiyonu mutlak sürekli bir fonksiyondur,
2.  $v(x,t)$  yi hesaplamak için  $u(x,t)$  fonksiyonundan hiç bir değişkene göre türev almaya gerek yoktur, zaten bu türevler mevcut da değildir.
3. (2.8) denklemini kullanarak  $t$  ye göre yüksek mertebeli sonlu farklar algoritmaları oluşturmak mümkündür.

### 2.3 Nümerik Algoritma

Şimdi, (2.8), (2.9) probleminin sayısal çözümünün bulunması için sonlu farklar yöntemini kullanarak çözüm algoritması oluşturalım. Bunun için (2.8) denklemini (2.7)



ifadesinden faydalanarak

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + f(u(x,t)) = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde yazabiliriz. Sonuncu denklemi için başlangıç koşulu (2.9) olur.

Önce  $[-\ell, \ell]$  parçasını  $-\ell = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = \ell$  olmak üzere  $n$  yere bölelim ve  $[-\ell, \ell] \times [0, T)$  bölgesinde

$$\Omega_{h\tau} = \{(x_i, t_k) \mid x_i = -\ell + ih, i = 0, 1, 2, \dots, n, t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, h > 0, \tau > 0\}$$

düzgün ağını kuralım.

$\Omega_{h\tau}$  ağının  $(x_i, t_k)$  noktasında (2.11) denklemi için

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \tau f(U_{i,k}) \quad (2.12)$$

sonlu fark karşılığını yazalım. (1.32) cebirsel denklemler sistemini

$$V_{i,0} = v_0(x_i) \quad (2.13)$$

başlangıç koşulları çerçevesinde çözeceğiz.

Görüldüğü üzere, (2.12), (2.13) şeması açık şema oluşturmaktadır ve bilgisayar hesaplamaları açısından ekonomik olmaktadır. Ayrıca,  $V_{i,k+1}$  bilinmeyenlerini elde etmek için  $u(x,t)$  fonksiyonunun hiç bir türevi kullanılmamaktadır. Zaten bu türevler mevcut olmayabilirler de.

Aşağıdaki teorem kolayca ispatlanabilir.

**Teorem 2.1** Eğer  $V_{i,k+1}$  (2.12), (2.13) probleminin sayısal çözümü ise,

$$U_{i,k+1} = \hat{V}_{\bar{x}} \equiv \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h} \quad (2.14)$$

eşitliği ile tanımlanan  $U_{i,k+1}$  ağ fonksiyonu esas problemin, yani (2.1), (2.3) probleminin sayısal çözümü olur.

Gerçekten de,

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \tau f(U_{i,k})$$

ve

$$V_{i-1,k+1} = V_{i-1,k} - \tau f(U_{i-1,k})$$

denklemlerini taraf tarafa çıkarıp  $h$  ile bölersek,

$$\frac{1}{\tau} \left[ \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h} - \frac{V_{i,k} - V_{i-1,k}}{h} \right] = \frac{f(U_{i,k}) - f(U_{i-1,k})}{h}$$

alırız. Buradan

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\tau} = \frac{f(U_{i,k}) - f(U_{i-1,k})}{h}$$

elde ederiz.

Diğer taraftan,  $V_{i,k+1} = V_{i,k} - \tau f(U_{i,k})$  eşitliğini kullanarak  $V_{i,k}$  ve  $V_{i,k-1}$  ifadeleri yerine sırasıyla  $V_{i,k} = V_{i,k-1} - \tau f(U_{i,k-1})$  ve  $V_{i,k-2} = V_{i,k-2} - \tau f(U_{i,k-2})$  ifadelerini yazarsak,

$$V_{i,k+1} = V_{i,k-1} - \tau f(U_{i,k-1}) - \tau f(U_{i,k}) = V_{i,k-2} - \tau f(U_{i,k-2}) - \tau f(U_{i,k-1}) - \tau f(U_{i,k})$$

alırız. Bu işlemlere devam edildiğinde ise

$$V_{i,k+1} = V_{i,0} - \tau [f(U_{i,0}) - f(U_{i,1}) + \dots + f(U_{i,k})] = V_{i,0} - \tau \sum_{\mu=0}^k f(U_{i,\mu})$$

buluruz. Buradan da

$$|V_{i,k+1} - V_{i,0}| \leq \tau \left| \sum_{\mu=0}^k f(U_{i,\mu}) \right|$$

olduğu görülür. Bu çıkarımlar doğrultusunda aşağıdaki teoremler geçerlidir.

**Teorem 2.2**  $\tau < \frac{1}{T \max_u f(u)}$  koşulu çerçevesinde (2.12) sonlu farklar denklemi kararlıdır.

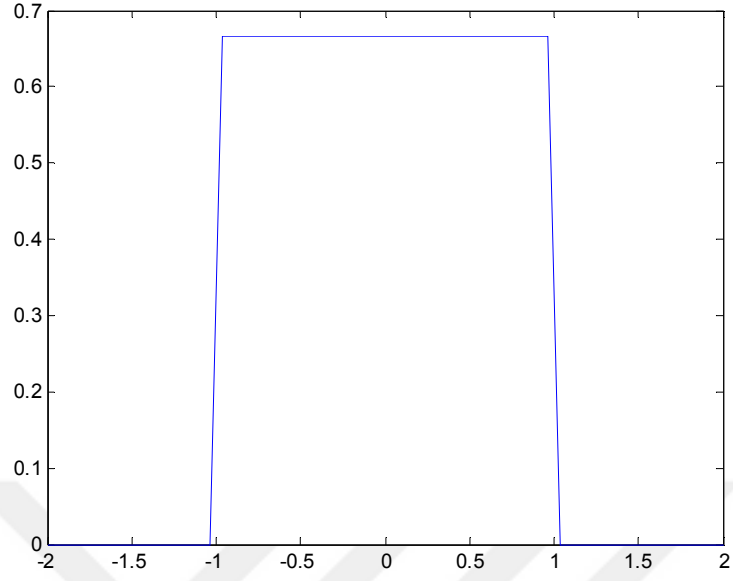
**Teorem 2.3**  $\tau < \frac{1}{T \max_u f(u)}$  koşulu çerçevesinde

$$|v(x_i, t_{k+1}) - V_{i,k+1}| = O(\tau)$$

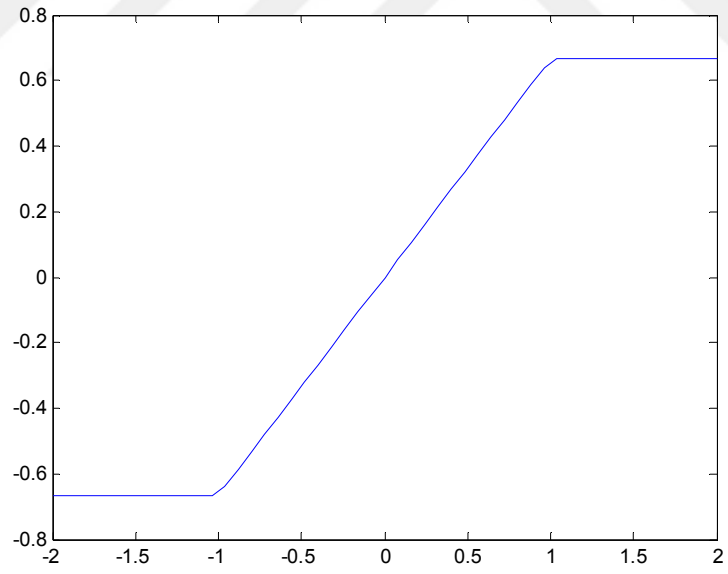
eşitliği geçerlidir.

## 2.4 Bilgisayar Testleri

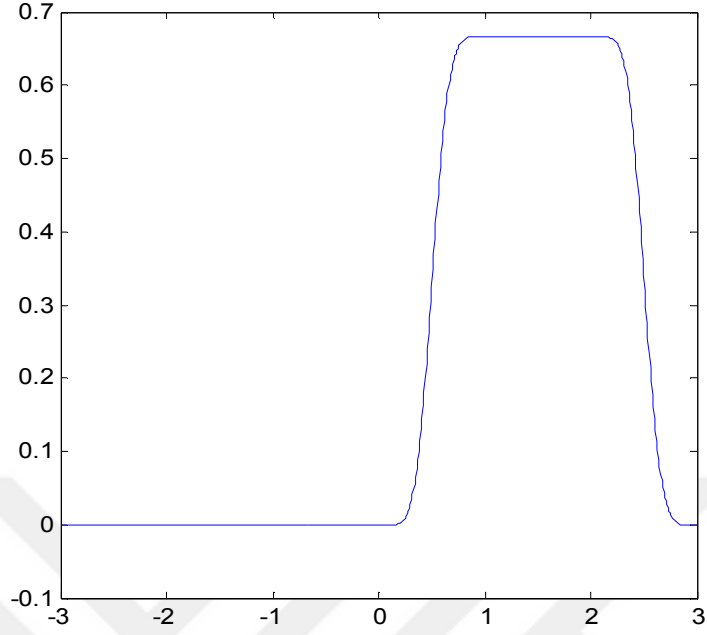
(2.12), (2.13) şemasını kullanarak  $f(u) = u$  olan durumlar için bilgisayar testleri yapılmıştır. Şekil 6 da (2.3) fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir



Şekil 6.  $u_0(x)$  in grafiği



Şekil 7.  $v_0(x)$  in grafiği



Şekil 8.  $u(x, t)$  in grafiği

Önerilen yöntemi test etmek amacıyla ikinci nümerik deney için [6] daki

$$u_0 = \begin{cases} (a - \Delta x - x)^3 (a - \Delta x + x)^3, & |x| \leq a - \Delta x, \\ 0, & |x| > a - \Delta x \end{cases}$$

veriler göz önüne alınmıştır.  $u_0$  in integralini aşağıdaki şekilde hesaplarız, [27]:

$$\int_{-a}^a u_0(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a+\Delta x}^0 u_0(x) dx + \int_0^{a-\Delta x} u_0(x) dx \right\}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{-a+\Delta x}^{a-\Delta x} (a - \Delta x - x)^3 (a - \Delta x + x)^3 dx$$

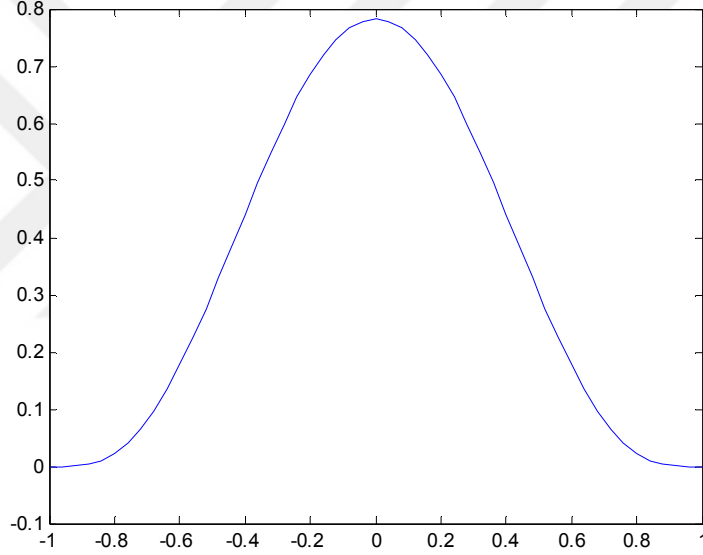
$$(a - \Delta x - x)^3 (a - \Delta x + x)^3 = [(a - \Delta x)^2 - x^2]^3 = (a - \Delta x)^6 - x^6$$

$$= a^6 - 6a^5\Delta x + 15a^4(\Delta x)^2 - 20a^3(\Delta x)^3 + 15a^2(\Delta x)^4 - 6a(\Delta x)^5 + (\Delta x)^6 - x^6$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{a^6 - 6a^5\Delta x + 15a^4(\Delta x)^2 - 20a^3(\Delta x)^3 + 15a^2(\Delta x)^4 - 6a(\Delta x)^5 + (\Delta x)^6\}$$

$$[a - \Delta x - (-a + \Delta x)] - \frac{x^7}{7} \Big|_{-a+\Delta x}^{a-\Delta x} = 2a^7 - \frac{2}{7} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a - \Delta x)^7 = \frac{12a^7}{7}$$

Yapılan bilgisayar deneylerinin [6] da verilen gerçek çözüme yeteri kadar yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.



Şekil 9.  $u_0(x)$  in grafiği

## 2.5 Diffuzyon Terimli Denklem ve Sayısal Çözümü

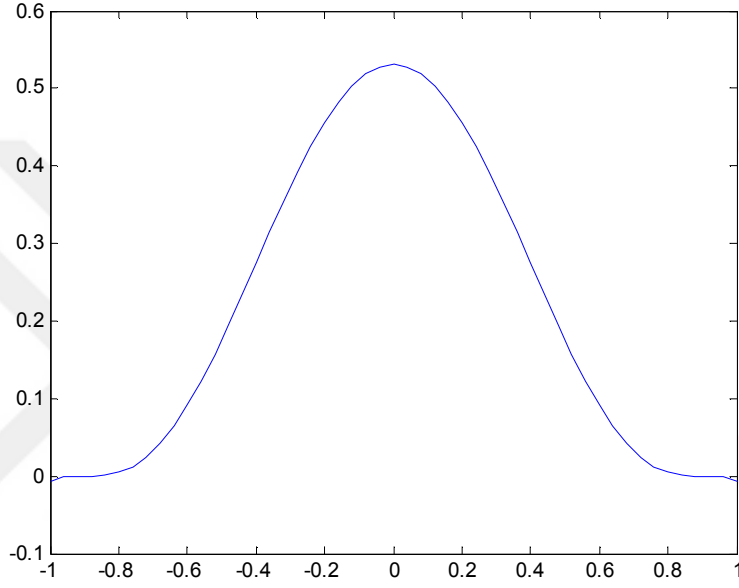
Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right), \quad (2.15)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^k u(\pm l, t)}{\partial x^k} = 0, \quad (k = 0,1) \quad (2.17)$$

alalım. Burada  $u_0(x)$  bilinen bir fonksiyondur.



Şekil 10.  $u(x, t)$  in grafiği

Görüldüğü üzere, (2.15) denkleminin  $u > 0$  ve  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  olduğunda dördüncü mertebeden parabolik tür diferansiyel denklem olmaktadır. Ayrıca, bu denklem  $u = 0$  ve  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  olduğunda birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denkleme indirgenilir.

Açıktır ki, denkleminin çözümünü diferansiyellenebilme özelliği, denklemin çözümden talep ettiği mertebeden düşük olmaktadır. Çözümde oluşan bu özellikler denklemin klasik çözümünün mevcut olmadığını ima eder.

[5] de (2.15) denkleminin asimptotik çözümü elde edilmiştir. Elde edilen çözüm üzerinde yapılacak incelemeler sonucunda aşağıdaki irdelemelere ulaşılır.

$$u = \left( \frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{1/2} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \quad (2.18)$$

olduğunda  $\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x,t) = 0$  olur. Ayrıca birinci ve ikinci mertebeden türevlerini hesaplırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-3 \frac{8J(t)}{3} (1-x)^2}{2 \sqrt{\frac{8J(t)}{3} (1-x)^3}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \\ &= \frac{-4J(t)(1-x)^2}{\sqrt{\frac{8J(t)}{3} (1-x)^3}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} = \frac{-4J(t)(1-x)^2}{\sqrt{\frac{8J(t)}{3} (1-x)^{3/2}}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \\ &= -\sqrt{6}J(t)^{1/2}(1-x)^{1/2} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{6}J(t)^{1/2} (1-x)^{-1/2} + \frac{5+\sqrt{13}}{4} \times \frac{1+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}-1} \\ &= \frac{\sqrt{6J(t)}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{9+3\sqrt{13}}{8} K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

alırsak. Buradan  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\infty$  olduğu görülür. Üçüncü türevinden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \frac{1}{2} \sqrt{6J(t)} (1-x)^{-3/2} - \left( \frac{9+3\sqrt{13}}{8} \right) \times \left( \frac{-3+\sqrt{13}}{4} \right) K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}-1} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{6J(t)}}{\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{3}{8} K(t)(1-x)^{\frac{-7+\sqrt{13}}{4}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

buluruz. Diğer taraftan  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  ve  $u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} &= \left[ \left( \frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{1/2} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \right] \times \\
&\quad \left[ -\sqrt{6}J(t)^{1/2} (1-x)^{1/2} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \right] \\
&= -\frac{\sqrt{8J(t)}}{\sqrt{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{6J(t)} \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{8J(t)}}{\sqrt{3}} (1-x)^{\frac{3}{2}} \frac{5+\sqrt{13}}{4} K(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \\
&\quad - \sqrt{6}J(t)^{1/2} K(t)(1-x)^{1/2} (1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K^2(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} (1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{4}} \\
&= -4J(t)(1-x)^2 + \left[ -\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \left( \frac{5+\sqrt{13}}{4} \right) - \sqrt{6} \right] \times \\
&\quad \sqrt{J(t)} K(t)(1-x)^{\frac{7+\sqrt{13}}{4}} - \frac{5+\sqrt{13}}{4} K^2(t)(1-x)^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left[ \left( \frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{1/2} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \right] \times \\
&\quad \left[ \frac{\sqrt{6J(t)}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{9+3\sqrt{13}}{8} K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}} \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{1/2} \frac{\sqrt{6J(t)}}{2\sqrt{1-x}} + \left( \frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{1/2} \frac{9+3\sqrt{13}}{8} K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}} \\
&+ K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \frac{\sqrt{6J(t)}}{2\sqrt{1-x}} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \frac{9+3\sqrt{13}}{8} K(t)(1-x)^{\frac{-3+\sqrt{13}}{4}} \\
&= 2J(t)(1-x) + \left[ \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \left( \frac{9+\sqrt{13}}{8} \right) + \frac{\sqrt{6}}{2} \right] \sqrt{J(t)} (1-x)^{\frac{3+\sqrt{13}}{4}} + \\
&\frac{9+3\sqrt{13}}{8} K^2(t)(1-x)^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} \tag{2.23}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \left[ \left( \frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{\frac{1}{2}} + K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \right] \times \left[ \frac{1}{4} \frac{\sqrt{6J(t)}}{\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{3}{8} K(t)(1-x)^{\frac{-7+\sqrt{13}}{4}} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ \frac{8J(t)}{3 \cdot 16} (1-x)^3 \frac{6J(t)}{(1-x)^3} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8} \left( \frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{\frac{1}{2}} K(t)(1-x)^{\frac{-7+\sqrt{13}}{4}} \\
&+ \frac{1}{4} \left( \frac{6J(t)}{(1-x)^3} \right)^{\frac{1}{2}} K(t)(1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} - \frac{3}{8} K^2(t)(1-x)^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} - \frac{3}{8} K^2(t)(1-x)^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} \\
&+ \left\{ \left[ -\frac{3}{8} \left( \frac{8J(t)}{3} (1-x)^3 \right)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{-7+\sqrt{13}}{4}} \right] + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{6J(t)}{(1-x)^3} \right)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{5+\sqrt{13}}{4}} \right] \right\} K(t) + J(t) \\
&= J(t) - \frac{3}{8} K^2(t)(1-x)^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} \tag{2.24}
\end{aligned}$$

olarak hesaplarız.

Bu sonuçlara dayanarak (2.15) ve (2.16) problemin klasik çözümünün mevcut olmadığını varsayabiliriz.

(2.15) denklemini  $u(x,t) = 0$  da dejenere olduğundan, [3] ü izleyerek  $Q_T$  de

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( (u^\varepsilon + \varepsilon) \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x^3} \right) \quad (2.25)$$

yaklaşık denklemini göz önüne alacağız. Burada  $\varepsilon$  pozitif bir parametredir. Bu durumda, (2.17) koşulunu sağlayan  $H^1(\Omega)$  da  $u_0(x)$  e  $C^{4+\alpha}$  normuna göre yaklaşık olan  $u_0^\varepsilon(x)$  fonksiyonlarına ihtiyaç vardır. (2.16) koşulu yerine

$$u(x,0) = u_0^\varepsilon(x) \quad (2.26)$$

alalım. Belli bir  $0 < \sigma < T$  için,  $u^\varepsilon(x,t)$  fonksiyonunun  $Q_\sigma$  da (2.25), (2.26) probleminin çözümü olması varsayımı altında, ileride ihtiyaç duyacağımız hesaplamaları yapalım.

$u$  nun yerine  $u^\varepsilon$  ifadesini koyarsak ve sınırdaki  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$  olduğunu dikkate alırsak

$$\begin{aligned} & \int_I \left[ \left( \frac{\partial u(x,t+\tau)}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ & = \int_I \left[ \frac{\partial u(x,t+\tau)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial u(x,t+\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] dx \\ & - \int_I \left[ \frac{\partial^2 u(x,t+\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \left[ \frac{\partial u(x,t+\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] dx \end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuncu ifadeyi  $\tau$  ya böler,  $\tau \rightarrow 0$  iken limitini alırsak, herhangi  $0 < t_1 < t_2 < \sigma$  için

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_I \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx dt = \frac{1}{2} \int_I \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t_1}^{t_2}$$

buluruz.

(2.25) ifadesini  $\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}$  ile çarpar ve  $Q_T$  ( $0 < T < \sigma$ ) üzerinden integrallersek, ayrıca son

özdeşliği de kullanırsak

$$\frac{1}{2} \int_I \left( \frac{\partial u^\varepsilon(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_I (u^\varepsilon + \varepsilon) \left( \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x^3} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_I \left( \frac{\partial u^\varepsilon(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.27)$$

elde ederiz. Böylece

$$\frac{1}{2} \int_I \left( \frac{\partial u^\varepsilon(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_I \left( \frac{\partial u^\varepsilon(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.28)$$

eşitsizliğini alırız.

Şimdi, (2.25) ifadesini  $\Omega_T$  üzerinden integrallersek

$$\int_I \left( \frac{\partial u^\varepsilon(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_I (u^\varepsilon + \varepsilon) \left( \frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x^3} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_I \left( \frac{\partial u^\varepsilon(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.29)$$

eşitliğini de buluruz. Sonuç olarak

$$\int_I \left( \frac{\partial u^\varepsilon(x, T)}{\partial x} \right)^2 dx \leq \int_I \left( \frac{\partial u^\varepsilon(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.30)$$

olduğu görülür. O halde, (2.25) ifadesinin  $\Omega_T$  üzerinden integrallenmesiyle

$$\int_I u^\varepsilon(x, T) dx \leq \int_I u^\varepsilon(x, 0) dx. \quad (2.31)$$

eşitsizliği elde edilir.

## 2.6 Yardımcı Problem

(2.15) denklemini  $-a$  dan  $x$  e kadar  $x$  e göre integrallersekve (2.17) koşulunu kullanırsak

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x u(\xi, t) d\xi = u(x, t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} - u(-a, t) \frac{\partial^3 u(-a, t)}{\partial x^3} \quad (2.32)$$

elde ederiz.

$$u(x, t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( u(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right]$$

eşitliğini göz önüne alırsak ve (2.32) denklemini  $-a$  dan  $x$  e kadar  $x$  e göre bir kez daha integraller ve integral bağıntısını sıfıra eşitlersek,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x \int_{-a}^x u(\xi, t) d\xi d\xi &= u(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(-a,t) \frac{\partial^2 u(-a,t)}{\partial x^2} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(-a,t)}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

elde ederiz. Aşağıdaki bağıntıya uygun olarak

$$u(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2$$

(2.33) ifadesinden

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x \int_{-a}^x \int_{-a}^x u(\xi, t) d\xi d\xi d\xi = u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - u(-a,t) \frac{\partial u(-a,t)}{\partial x} - \frac{3}{2} \int_{-a}^x \left( \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (2.34)$$

bulunur. Son bağıntıyı tekrar integrallenmesiyle

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x \int_{-a}^x \int_{-a}^x \int_{-a}^x u(\xi, t) d\xi d\xi d\xi d\xi = \frac{1}{2} u^2(x,t) - \frac{1}{2} u^2(-a,t) - \frac{3}{2} \int_{-a}^x \int_{-a}^x \left( \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\xi. \quad (2.35)$$

alınız. Cauchy formülü kullanılarak

$$\frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x (x-\eta)^3 u(\eta, t) d\eta = \frac{1}{2} u^2(x,t) - \frac{3}{2} \int_{-a}^x (x-\eta) \left( \frac{\partial u(\eta, t)}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \quad (2.36)$$

elde edilir.

Açıkça görüldüğü üzere, eğer  $u(x,t)$  ve  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  fonksiyonları sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olursa, bu taktirde (2.36) ya da (2.35) denklemleri (2.15) ifadesine denk olur. Sonuncu denklemi  $x$  e göre dört kez diferansiyelleyerek bu iddia

kolaylıkla ispatlanabilir. Gerçekten de, ilk integrasyondan

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x \frac{\partial(x-\eta)^3}{\partial x} u(\eta, t) d\eta &= u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{3}{2} \int_{-a}^x \frac{\partial(x-\eta)}{\partial x} \left( \frac{\partial u(\eta, t)}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x (x-\eta)^2 u(\eta, t) d\eta = u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{3}{2} \int_{-a}^x \left( \frac{\partial u(\eta, t)}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci integrasyon

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x (x-\eta) u(\eta, t) d\eta &= \frac{\partial}{\partial x} \left( u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \\ &= u(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

verir. Üçüncü integrasyondan sonra

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^x u(\eta, t) d\eta &= \frac{\partial}{\partial x} \left( u(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) - u(-a, t) \frac{\partial^2 u(-a, t)}{\partial x^2} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(-a, t)}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad + u(x, t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 = u(x, t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Nihayet, dördüncü integrasyondan sonra iddia ispatlanmış, böylece(2.15) ifadesi elde edilmiş olur.

## 2.7 Nümerik Algoritma

(2.15)-(2.17) problemini çözebilmek için sonlu farklar şeması yazmadan önce  $G$  bölgesini

$$\Omega_{\tau, h} = \{(x_i, t_k), x_i = -a + ih, t_k = k\tau; i = 0, 1, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots, h = \frac{a}{n}, \tau > 0\}$$

ağı ile örtelim. Buradaki  $\tau$  sayısı, oluşturacağımız sonlu farklar şemasının kararlı olması

koşulundan elde edilecektir.

Bu amaçla önceliklet ye göre diferansiyel altına giren (2.36) denklemindeki integralleri dikdörtgenler metodu olarak da bilinen kübatür formülleri kullanarak

$$\int_{-a}^x (x-\eta)^3 u(\eta,t) d\eta = h \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j)^3 U_j \quad (2.37)$$

şeklinde yaklaşık hesaplayacağız. Burada

$$\xi_j = x_j + \frac{h}{m}, j = 0,1,2,\dots, m.$$

olmaktadır.

(2.37) ifadesini ve  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  türevinin sonlu farklar karşılığını dikkate alarak,(2.36) denklemini için aşağıdaki gibi çeşitli sonlu farklar şemaları yazmak mümkündür:

### 1. Açık şemalar:

#### a) ileriye doğru farklardan oluşan açık şema

$$\frac{h}{6\tau} \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j)^3 (\hat{U}_j - U_j) = \frac{1}{2} U_i^2 - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j) \left( \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right)^2, \quad (2.38)$$

#### b) geriyedoğru farklardan oluşan açık şema

$$\frac{h}{6\tau} \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j)^3 (\hat{U}_j - U_j) = \frac{1}{2} U_i^2 - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j) \left( \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \right)^2, \quad (2.39)$$

#### c) merkezi farklardan oluşan açık şema

$$\frac{h}{6\tau} \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j)^3 (\hat{U}_j - U_j) = \frac{1}{2} U_i^2 - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j) \left( \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} \right)^2. \quad (2.40)$$

### 2.Kapalı şemalar

#### a) ileriye doğru farklardan oluşan kapalı şema

$$\frac{h}{6\tau} \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j)^3 (\hat{U}_j - U_j) = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j) \left( \frac{\hat{U}_{j+1} - \hat{U}_j}{h} \right)^2, \quad (2.41)$$

**b) geriyedoğru farklardan oluşan kapalı şema**

$$\frac{h}{6\tau} \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j)^3 (\hat{U}_j - U_j) = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j) \left( \frac{\hat{U}_j - \hat{U}_{j-1}}{h} \right)^2, \quad (2.42)$$

**c)merkezi farklardan oluşan kapalı şema**

$$\frac{h}{6\tau} \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j)^3 (\hat{U}_j - U_j) = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j) \left( \frac{\hat{U}_{j+1} - \hat{U}_{j-1}}{2h} \right)^2. \quad (2.43)$$

Burada  $U_i$ ,  $U_{i\pm 1}$  ve  $\hat{U}_i$  değerleri  $u(x, t)$  fonksiyonunun  $\Omega_{\tau, h}$  ağının sırasıyla  $(x_i, t_k)$ ,  $(x_{i\pm 1}, t_k)$  ve  $(x_i, t_k + \tau)$  keyfi noktalarındaki yaklaşık değerleri olmaktadır.

Bu şemaları incelemeye (2.38) denkleminde başlayacağız. Bu amaçla (2.38) denklemini

$$\begin{aligned} \frac{h}{6\tau} (x_i - \xi_i)^3 (\hat{U}_i - U_i) + \frac{h}{6\tau} \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - \xi_j)^3 (\hat{U}_j - U_j) = \\ \frac{1}{2} U_i^2 - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i (x_i - \xi_j) \left( \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right)^2 \end{aligned}$$

olarak tekrar yazalım.

Basitlik için aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$\frac{1}{6} (x_i - \xi_i)^3 = A_i^{(i)}$$

$$\frac{1}{6} (x_i - \xi_j)^3 = A_j^{(i)}$$

$$\frac{3}{2} (x_i - \xi_j) = B_j^{(i)}.$$

Bu notasyonlar kullanılarak,(2.38) denklemi

$$\frac{h}{\tau} A_i^{(i)} (\hat{U}_i - U_i) + \frac{h}{\tau} \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i)} (\hat{U}_j - U_j) = \frac{1}{2} U_i^2 - h \sum_{j=1}^i B_j^{(i)} \left( \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right)^2$$

olarak yazılabilir. Buradan  $\hat{U}_i$  ifadesi için

$$\frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i = \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} U_i - \frac{h}{\tau} \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i)} (\hat{U}_j - U_j) + \frac{1}{2} U_i^2 - h \sum_{j=1}^i B_j^{(i)} \left( \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right)^2,$$

$$\hat{U}_i = \frac{\tau}{h} \frac{1}{A_i^{(i)}} \left[ \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} U_i - \frac{h}{\tau} \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i)} (\hat{U}_j - U_j) + \frac{1}{2} U_i^2 - h \sum_{j=1}^i B_j^{(i)} \left( \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right)^2 \right]$$

veya

$$\hat{U}_i = U_i - \frac{1}{A_i^{(i)}} \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i)} (\hat{U}_j - U_j) + \frac{\tau}{2h} \frac{1}{A_i^{(i)}} U_i^2 - \frac{\tau}{A_i^{(i)}} \sum_{j=1}^i B_j^{(i)} \left( \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right)^2$$

elde edilir.

Başlangıç ve sınır koşulları ise

$$U_{i0} = u_0(x_i),$$

$$\left. \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \right|_{i=n-1} = 0$$

şeklini alır.

Benzer şekilde, (2.39) ve (2.40) denklemleri için de sırasıyla aşağıdaki gibi

$$\hat{U}_i = U_i - \frac{1}{A_i^{(i)}} \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i)} (\hat{U}_j - U_j) + \frac{\tau}{2h} \frac{1}{A_i^{(i)}} U_i^2 - \frac{\tau}{A_i^{(i)}} \sum_{j=1}^i B_j^{(i)} \left( \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \right)^2$$

ve

$$\hat{U}_i = U_i - \frac{1}{A_i^{(i)}} \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i)} (\hat{U}_j - U_j) + \frac{\tau}{2h} \frac{1}{A_i^{(i)}} U_i^2 - \frac{\tau}{A_i^{(i)}} \sum_{j=1}^i B_j^{(i)} \left( \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{h} \right)^2$$

sonlu farklar şemaları yazılabilir.

Şimdi (2.41) sonlu fark denklemini kullanarak

$$\frac{h}{\tau} \sum_{j=1}^i A_j^{(i)} (\hat{U}_j - U_j) = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - h \sum_{j=1}^i B_j^{(i)} \left( \frac{\hat{U}_{j+1} - \hat{U}_j}{h} \right)^2$$

algoritmasını yazalım. Bu denklem



$$\begin{aligned} & \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} (\hat{U}_i - U_i) + \frac{h}{\tau} \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i-1)} (\hat{U}_j - U_j) \\ &= \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - h B_i^{(i)} \left( \frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} \right)^2 - h \sum_{j=1}^{i-1} B_j^{(i-1)} \left( \frac{\hat{U}_{j+1} - \hat{U}_j}{h} \right)^2 \end{aligned}$$

olarak da yazılabilir. Eğer aşağıdaki

$$P_j^{(i-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} A_j^{(i-1)} (\hat{U}_j - U_j),$$

$$Q_j^{(i-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} B_j^{(i-1)} \left( \frac{\hat{U}_{j+1} - \hat{U}_j}{h} \right)^2$$

gösterimlerini kullanırsak, bu takdirde

$$\frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} U_i = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - h B_i^{(i)} \left( \frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} \right)^2 - \frac{h}{\tau} P_j^{(i-1)} - h Q_j^{(i-1)}$$

elde ederiz. Şimdi de aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$\frac{h}{\tau} P_j^{(i-1)} + h Q_j^{(i-1)} = F_j^{(i-1)}$$

$$\frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 + h B_i^{(i)} \left( \frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} \right)^2 = -\tilde{F}_j^{(i-1)},$$

$$\tilde{F}_j^{(i-1)} = F_j^{(i-1)} - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} U_i$$

$$h B_i^{(i)} \left( \frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} \right)^2 = \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \tilde{F}_j^{(i-1)}$$

olsun. O halde,

$$\frac{\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i}{h} = \sqrt{\frac{1}{h B_i^{(i)}} \left[ \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \tilde{F}_j^{(i-1)} \right]}$$

ifadesinden

$$\hat{U}_{i+1} = \hat{U}_i + h \sqrt{\frac{1}{h B_i^{(i)}} \left[ \frac{1}{2} \hat{U}_i^2 - \frac{h}{\tau} A_i^{(i)} \hat{U}_i - \tilde{F}_j^{(i-1)} \right]}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (2.42) ve (2.43) denklemleri için de sonlu farklar şemaları yazılabilir.

Bu algoritmanın çalışması için önce  $x_0$  noktasında Euler şemasını çalıştırıp  $\hat{U}_0$  elde edilir. Daha sonra ise  $t_k = (k+1)\tau$ , ( $k = 0,1,2,\dots$ ) katındaki değerler elde edilen algoritma ile gerçekleştirilir. Denklemdaki katsayılar ve serbest terimler ise  $t_k$  katında hesaplanır.

Şimdi (2.38) sonlu farklar şemasının (2.36) çözümüne yakınsaklığı ve kararlılığı problemini araştıracağız.

$\varepsilon_{i,k}$  ve  $\eta_{i,k}$  ile (2.36) da içerilen integrallerin dikdörtgenler yöntemiyle yaklaşımındaki hata terimlerini göstereyim.

Diğer taraftan,  $\delta_{i,k}$  ve  $\omega_{i,k}$  sırasıyla  $\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}$  ve  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  türevlerinin sonlu fark karşılıklarının hata terimleri olsun. Burada

$$w(x,t) = \int_{-a}^x (x-\eta)^3 u(\eta,t) d\eta$$

ve

$$\varepsilon_{i,k} = w(x,t) - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j)^3 U_j,$$

$$\eta_{i,k} = \int_{-a}^x (x-\eta) \left( \frac{\partial u(\eta,t)}{\partial \eta} \right)^2 d\eta - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j) \left[ \frac{U_{j+1} - U_j}{h} + \omega_{j,k} \right],$$

$$\delta_{i,k} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \frac{\hat{W}_i - W_i}{\tau},$$

$$\omega_{i,k} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$$

olmaktadır.  $u(x,t)$  ve  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  fonksiyonları sürekli olduklarından  $\omega_{i,k} \rightarrow 0$  olur, yani

$$\omega_{i,k} = \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial x} - \frac{U_{i+1} - U_i}{h} = \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_i^*, t_k)}{\partial x} = \pi \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \rightarrow 0, \quad (2.44)$$

$$x_i^* \in (x_i, x_{i+h})$$

dır. Burada  $\pi(f)$  ile herhangi bir  $[-a, a]$  kapalı aralığında tanımlı  $f(x)$  fonksiyonu için

$$\pi(f) = \sup_{|t-x|<h} |f(t) - f(x)|$$

kastedilmektedir (modulus continuity).

$\varphi(x, t)$  ile  $(x - \eta)^3 u(x, t) = \varphi(x, t)$  fonksiyonunu gösterirsek, buradan  $\varphi(x, t)$  ve  $\varphi'(x, t)$  fonksiyonlarının sürekli olduğu kolayca görülür. Bu takdirde,  $z \in [-a, a]$  olmak üzere  $\varepsilon_{i,k}$  için

$$\varepsilon_{i,k} = ah\varphi'(z, t) \quad (2.45)$$

elde ederiz.

$$\psi(x, t) = (x - \eta) \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2$$

olsun.  $\psi(x, t)$  fonksiyonu sürekli olduğundan  $\eta_{i,k}$  için

$$\begin{aligned} \eta_{i,k} &= \int_{-a}^x \psi(\eta, t) d\eta - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j) \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \\ &\quad - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j) \omega_{j,k} = ah\psi'(z, t) - h \sum_{j=1}^i (x_i - \eta_j) \omega_{j,k} \end{aligned} \quad (2.46)$$

alırız.  $\delta_{i,k}$  için

$$\begin{aligned} \delta_{i,k} &= \frac{1}{3!} \frac{\partial w(x_i, t_k)}{\partial t} - \frac{1}{3!} \frac{\hat{W}_i - W_i}{\tau} \\ &= \frac{1}{2} U^2(x_i, t_k) - \frac{3}{2} \int_{-a}^{x_i} \psi(\eta, t) d\eta - \left[ \frac{1}{2} U_i^2 - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i \psi_j \right] \\ &= \frac{1}{2} (U^2(x_i, t_k) - U_j^2) - \left[ \frac{3}{2} \int_{-a}^{x_i} \psi(\eta, t) d\eta - \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^i \psi_j \right] \\ &= \max_{(x_i, t_k)} u \cdot \pi(u) - \frac{3}{2} \eta_{i,k} \quad (2.47) \end{aligned}$$

elde ederiz.

(2.44)-(2.47) den görüldüğü üzere (2.38) sonlu farklar şeması (2.36) ile tutarlıdır.

### 3. SONUÇLAR

Tezde dejenere olan dördüncü mertebeden nonlinear diferansiyel denklem için yazılmış problemin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümü incelenmiştir. Elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

1. Dördüncü mertebeden ince film denklemi fiziksel parametrelere göre ayrıklaştırılmıştır.

2. Konvektif terimli denklem için Cauchy probleminin gerçek ve sayısal çözümü elde edilmiştir.

3. Dördüncü mertebeden difüzyon denkleminin sayısal çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfında sonlu fark algoritmaları oluşturulmuştur.

#### 4. KAYNAKLAR

- [1] Acheson, D.J., Elementary Fluid Dynamics, Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [2] Ansini, L., Giacomelli, L., Doubly Nonlinear Thin-film Equations in One Space Dimension, Archives for Rational Mechanics and Analysis, 173, pp. 89-131, 2004.
- [3] Bernis, F., Friedman, A., Higher Order Nonlinear Degenerate Parabolic Equations, Journal of Differential Equations, 83, 179-203, 1990.
- [4] Bertozzi, A.L., The mathematics of Moving Contact Lines in Thin Liquid Films, Notes of the American Math. Soc., 45(6), 689-697, 1998.
- [5] Bowen, M., King, J.R., Asymptotic Behavior of the Thin Film Equation in Bounded Domains, European J. Appl. Math., 2(3), 321-356, 2001.
- [6] Gonoskov, I., Cyclic Operator Decomposition for Solving the Differential Equations, Advances in Pure Mathematics, 3, 178-182, 2013.
- [7] Goritskii, A. A., Krujkov, S. N., Chechkin, G. A., A First Order Quasi-Linear Equations with Partial Differential Derivatives, Moscow, Pub. Moscow University, 1997.
- [8] Ha, Y., Kim, Y.-J., The Fundamental Solution of a Conservation Law without Convexity, Quarterly of Applied Mathematics,
- [9] Ha, Y., Kim, Y.-J., Myers, T.G., On the Numerical Solution of a Driven Thin Film Equation, Journal of Computational Physics, 227, 7246-7263, 2008.
- [10] Kim, J., Adaptive Mesh Refinement for Thin-Film Equations, Journal of the Korean Physical Society, Vol.49, No.5, 2006, 1903-1907.
- [11] Kim, Y.-J., Lee, Y.-R., Structure of Fundamental Solutions of a Conservation Law without Convexity, ARMA manuscript,
- [12] King, J.R., Two Generalizations of the Thin Film Equation, Mathematical and Computer Modelling, 34, 737-756, 2001.
- [13] King, J.R., Asymptotic analysis of extinction behavior in fast nonlinear diffusion, J. Eng. Math, 65-86, 2010.
- [14] King, J.R., Bowen, M., Moving Boundary Problems and Non-Uniqueness for the Thin Film Equation, European Journal of Applied Mathematics, 12(3), 321-356, 2001.
- [15] Lax, P.D., Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations, Comm. of Pure and App. Math, Vol. VII, pp. 159-193, 1954.

- [16] LeVeque, R.J., *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002, 558p.
- [17] Li, Y., Jeong, D., Kim, J., *Adaptive Mesh Refinement for Simulation of Thin Film Flows*, *Meccanica*, 2014, 49, 239-252.
- [18] Myers, T.G., *Thin Films with High Surface Tension*, *SIAM Rev.*, Vol. 40, No. 3, 441-462, 1998.
- [19] O'Brein, S.B.G., Schwartz, L.W., *Theory and Modeling of Thin Film Flows*, *Encyclopedia of Surface and Colloid Science*, 5283-5297, 2002.
- [20] Oleinik, O.A., *Discontinuous Solutions of Non-linear Differential Equations*, *Uspekhi Mat. Nauk*, 12, 3, pp. 3-73, 1957.
- [21] Rasulov, M. A., *Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kanunları*, Seçkin Yayınevi, Ankara, 2011.
- [22] Rasulov, M.A., *On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition*, *Soviet Math. Dok.* 43, No.1, 1991.
- [23] Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., *A Numerical Method of the Solution of Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First Order Differential Equations*, *Minsk*, Vol. 28, No.7, 2056-2063, 1992.
- [24] Rasulov, M.A., *On a Method of Calculation of the First Phase Saturation During the Process of Displacement of Oil by Water from Porous Medium*. *App. Mathematics and Computation*, vol. 85, Issue 1, 1-16, 1997.
- [25] Richtmyer, R.D., Morton, K.W. *Difference Methods for Initial Value Problems*, New York, Wiley, Int., 1967.
- [26] Samarskii, A.A. *Theory of Difference Schemes*. Moskow, Nauka, 1977.
- [27] Sinsoysal, B., Rasulov, M., *Numerical Solution of Thin Film Equation in a Class of Discontinuous Functions*, *European Scientific Journal*, Special Edition, 382-389, 2015.
- [28] Smoller, J.A. *Shock Wave and Reaction Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.
- [29] Smyth N.F., Hill J.M. *High-order Nonlinear Diffusion*, *Journal of Applied Mathematics*, 50, 73-86, 1988.

## ÖZGEÇMİŞ

27.10.1986 tarihinde Ankara'da doğdu. 1997 yılında Atatürk İlkokulu'ndan, 2000 yılında T.E.K. Ortaokulu'ndan, 2004'de Dr. Şerafettin Tombulođlu Lisesi'nden, 2013 yılında Beykent Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'nden mezun oldu. Bir yıl sonra başladığı Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans Programı'na devam etmektedir. Özel bir okulda Matematik Öğretmenliği yapmaktadır.

Sibel GEÇEGİL

