

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**DENİZ YÜZEYİNİN İNCE TABAKASINDAKİ TERMİK  
YAPININ MATEMATİKSEL İNCELENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan  
**Mehmet Oğuz ÖZKAN**

İSTANBUL, 2016

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**DENİZ YÜZEYİNİN İNCE TABAKASINDAKİ TERMİK  
YAPININ MATEMATİKSEL İNCELENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan

**Mehmet Oğuz ÖZKAN**

Öğrenci No:

130860007

Danışman:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2016

## YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Deniz Yüzeyinin İnce Tabakasındaki Termik Yapının Matematiksel İncelenmesi**” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 07/01/2016

  
Mehmet Oğuz ÖZKAN

T.C.  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 130860007 no'lu Mehmet Oğuz ÖZKAN'ın 07/01/2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavı<sup>1</sup> sonucunda 45 dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında<sup>2</sup> oybirliği / oyçokluğu ile, Kabul... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

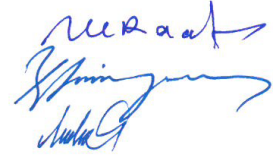
---

**Anabilim Dalı** : Matematik Bilgisayar  
**Programı** : Uygulamalı Matematik  
**Tez Başlığı<sup>3</sup>** : Deniz Yüzeyinin İnce Tabakasındaki Termik Yapının Matematiksel İncelenmesi

---

<u>Tez Sınav Jürisi</u>	<u>Öğretim Üyesi</u>
<b>Danışman</b>	: Prof. Dr. Mahir RESULOV
<b>Üye</b>	: Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
<b>Üye</b>	: Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR

İmza



---

<sup>1</sup> Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

<sup>2</sup> Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

<sup>3</sup> İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

## ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, eğitim öğretim hayatımda ve tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV'a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim. Ayrıca eğitim öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme, Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a, Burcu MALAK'a Ahmet TOMBUL'a ve BTRisk Bilgi Güvenliği ailesine teşekkürü bir borç bilirim.

İstanbul, 2016

Mehmet Oğuz ÖZKAN

Adı ve Soyadı : Mehmet Oğuz ÖZKAN  
Danışmanı : Prof. Dr. Mahir RESULOV  
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans / Tez, 2016  
Alanı : Uygulamalı Matematik  
Anahtar Kelimeler : Doğrusal olmayan, Difüzyon denklemi, Sayısal çözüm

## ÖZ

### DENİZ YÜZEYİNİN İNCE TABAKASINDAKİ TERMİK YAPININ MATEMATİKSEL İNCELENMESİ

Üç bölümden oluşan tezde, deniz sularının yüzeyde ısı dağılım dinamiği incelenmiştir. Bu amaçla tezin birinci bölümünde, sonraki bölümler için gereken tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan Green fonksiyonun kurulması ve çözümün Green fonksiyonu yardımı ile ifade edilmiş gösterimi bulunmuştur. Bu adımdan sonra tezin temelini oluşturan deniz sularının yüzeyde ısı dağılımı olayının ifade eden özel kaynak fonksiyona sahip ısı denklemi için yazılmış başlangıç-sınır değer problemi çözümü incelenmiştir.

Göz önüne alınan problem üç farklı yöntemle çözülmüştür. Kaynak fonksiyonun sahip olduğu özellik literatürde iyi bilinen klasik yöntemlerin uygulanmasına zorluk çıkardığı için tezde sonlu farklar yöntemi önerilmiştir ve problemin yaklaşık çözümü elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümü değerlendirmek amacıyla göz önüne aldığımız problemin gerçek çözümü Fourier serisi yöntemiyle, sonrasında ise Rezidü yöntemi uygulanarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar olayın fiziksel yapısını yansıtmaktadır.

Name and Surname : Mehmet Oğuz ÖZKAN  
Supervizor : Prof. Dr. Mahir RESULOV  
Degree and Date : Master, 2016  
Major : Applied Mathematics  
Key Words : Nonlinear, Diffusion equation, Numerical solution

## **ABSTRACT**

### **MATHEMATICAL INVESTIGATION OF THERMAL STRUCTURE IN THIN LAYER OF SEA SURFACE**

The thesis consists of three parts. In this thesis, heat distribution dynamics on the surface of the sea water is investigated. For this purpose, it is given to definitions and concepts required for the next chapter in this part of this thesis.

In the second section, Green's function which is used for the solution of partial differential equations is founded and presentation of this solution which is expressed with the help of green function has been found. After this step, heat distribution event on the surface of sea water forms the basis of the thesis. Heat equation has a special resource function epressing this event. Initial boundary value problem solving is written for the heat equation and this solution has been investigated.

Considering the problem is solved by three different methods. Characteristic of the source function raises difficulties to the application of conventional methods known in the literature. Therefore, the finite difference method is proposed in this thesis and the solution of the problem is approximately obtained. To evaluate this solution, we take into account the real solution to the problem is obtained by Fourier series method and then is obtained by applying the residual method. The obtained results reflect the physical structure of the event.

## İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

<b>ÖNSÖZ</b>	
<b>ÖZ</b> .....	i
<b>ABSTRACT</b> .....	ii
<b>GİRİŞ</b> .....	1
<b>1. YARDIMCI KAVRAM VE TANIMLAR</b> .....	1
1.1. Kompleks Fonksiyonlar Kavramı .....	1
1.2. Cauchy-Riemann Denklemleri .....	2
1.3. Analitik Fonksiyon .....	2
1.4. Rezidüler Teoremi .....	4
1.5. Fourier Serileri .....	5
<b>2. GREEN FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ</b> .....	7
<b>3. DENİZ SEVİYESİNDE ISI DAĞILIMI</b> .....	9
3.1. $O(h + \tau)$ Hatasına Sahip Şema .....	11
3.2. $O(h^2 + \tau)$ Hatasına Sahip Şema .....	12
3.3. Gerçek Çözümü .....	16
3.4. Fourier Metodu .....	16
3.5. Rezidi Yöntemi .....	21
3.5.1. Sınır Değer Problemi .....	21
3.5.2. Karışık Problemin Çözümü .....	25
<b>ŞEKİLLER</b> .....	29
<b>SONUÇLAR</b> .....	36
<b>KAYNAKÇA</b> .....	37



# GİRİŞ

## 1. YARDIMCI KAVRAM VE TANIMLAR

### 1.1. Kompleks Fonksiyonlar Kavramı

$S$  karmaşık sayılar kümesinin bir alt kümesi olmak üzere her  $z \in S$  ögesine belirli bir  $w \in \mathbb{C}$  ögesi karşılık getiren bir  $f$  kuralı varsa, bu kurala  $S$ 'den  $\mathbb{C}$ 'ye bir karmaşık fonksiyon (dönüşüm) denir ve

$$f: S \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow w = f(z) \quad \text{veya} \quad w = f(z), \quad z \in S$$

şeklinde gösterilir.  $w = f(z)$  gösterimi ile hem  $f$  fonksiyonunu hem de  $f$  fonksiyonunun  $z$  noktasındaki değerini temsil ederiz.  $z \in S$  için  $w = f(z)$  bir karmaşık sayı olduğundan bunun

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$$

$$v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

şeklinde gösterilen gerçel ve sanal kısmı vardır. Bir karmaşık fonksiyonun gerçel ve sanal kısımları genel olarak iki değişkenli gerçel fonksiyonlardır. Bu nedenle bir karmaşık fonksiyon için,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (x, y) \in S$$

gösterimini de sık sık kullanacağız. Örneğin:

$$w = f(z) = z^2, \quad z \in \mathbb{C}$$

fonksiyonu  $z = x + iy$  olmak üzere

$$w = f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

yazılabilir. Burada,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{ve} \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = 2xy$$

dir.

**Örnek 1.1.1:**  $w = f(z) = \frac{1-z}{z}$ ,  $z \neq 0$  fonksiyonunun gerçel ve sanal kısımlarını bulalım.

$z = x + iy$  olmak üzere

$$f(z) = \frac{1-z}{z} = \frac{(1-z)\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z} - |z|^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x - iy - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \frac{x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = \frac{-y^2}{x^2 + y^2}$$

olur.

## 1.2. Cauchy-Riemann Denklemleri

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  fonksiyonunun bir  $z_0 = x_0 + iy_0$  noktasında  $f'(z_0)$  türevi mevcut olsun. Bu durumda  $x$  ve  $y$  ye göre birinci mertebeden kısmi türevleri  $(x_0, y_0)$ 'da vardır ve bu kısmi türevleri  $(x_0, y_0)$ 'da

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarlar.

Karşıt olarak,  $f(x)$  fonksiyonu  $z_0 = (x_0, y_0)$  noktasının bir komşuluğunda tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere, eğer  $(x_0, y_0)$  noktasında tüm  $u_y, u_x$  ve  $v_y$  kısmi türevleri mevcut ve sürekli ve Cauchy-Riemann denklemleri sağlanıyorsa, bu durumda  $f, z_0$  da diferansiyellenebilirdir ve  $f'(z_0)$  türevi

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

yada

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

ile hesaplanabilir.

## 1.3. Analitik Fonksiyon

i. Bir  $w = f(z)$  fonksiyonu, bir  $z_0$  noktasının bir  $\varepsilon$  komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebilirse,  $f$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında analitiktir denir.

ii. Bir  $f$  fonksiyonu, bir  $S$  kümesinin her noktasında analitikse,  $f$  'ye  $S$  'de analitiktir denir. Burada bir noktada analitik olmak tanımını göz önüne alınırsa,  $f$

fonksiyonu bir  $S$  kümesinde analitik demek, gerçekte  $f$  fonksiyonu bu  $S$  kümesini kapsayan bir açık kümede analitiktir demektir. Yani bir fonksiyonun analitik olduğu noktalar kümesi açık kümedir.

iii. Bir  $f$  fonksiyonu  $C$  düzleminin tüm noktalarında analitik ise,  $f$  'ye tam (entire) fonksiyon denir.

Bazen tanım kümesi belirtilmeden " $f$  analitik fonksiyon" ifadesi kullanılır. Bunun anlamı  $f$  fonksiyonunun analitik olduğu bir küme var demektir.

**Örnek 1.3.1:**  $f(z) = c, z \in C$  sabit fonksiyonunun her  $z$  için türevi var ve

$$f'(z) = 0$$

olduğundan  $f$  sabit fonksiyonu  $C$  'de analitiktir.

**Örnek 1.3.2:**  $f(z) = z^2 + 5i, z \in C$  fonksiyonunun herhangi bir  $z$  noktasındaki türevi

$$f'(z) = 2z$$

olduğundan bu fonksiyon  $C$  'de analitiktir.

**Örnek 1.3.3:**  $f(z) = xy + iy$  fonksiyonun analitik olmadığını gösterelim.

$f(z) = xy + iy$  fonksiyonu için  $u(x, y) = xy$  ve  $v(x, y) = y$  dir. Buradan

$$u_x = y, u_y = x, v_x = 0 \text{ ve } v_y = 1$$

bulunur.  $u$  ve  $v$  nin birinci mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut ve süreklidir.

$$u_x = v_y$$

ve

$$u_y = -v_x$$

Cauch-Riemann denklemlerinin sağlanabilmesi için  $y = 1$  ve  $x = 0$  olmalıdır. Burdan  $f$  fonksiyonun sadece  $z_0 = 0 + 1i = i$  noktasında türevinin var olduğu görülür.  $f$  nin  $z_0$  noktası komşuluğunda türevi mevcut olmadığından  $f$  hiçbir yerde analitik değildir.

**Örnek 1.3.4:**  $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$  fonksiyonun tam olduğunu gösterelim.

$$u(x, y) = \sin x \cosh y \text{ ve } v(x, y) = \cos x \sinh y \text{ dir.}$$

Buradan,

$$u_x = \cos x \cosh y, \quad u_y = \sin x \sinh y, \quad v_x = -\sin x \sinh y, \quad v_y = \cos x \cosh y$$

bulunur.

$u$  ve  $v$  nin birinci mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut, sürekli ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığından  $f$  fonksiyonu her  $(x, y)$  noktasında türevlenebilirdir. Dolayısıyla tamdır.

#### 1.4. Rezidüler Teoremi

**Teorem 1.4.1.**  $a \in C$  noktası  $f(z)$  fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası ve  $f \in H(B(a; r) \setminus \{a\})$  ise  $B(a; r) \setminus \{a\}$  de alınan herhangi bir kapalı  $\gamma$  eğrisi için

$$\int_{\gamma} \left[ f(z) - \frac{A}{z-a} \right] dz = 0 \text{ olacak şekilde bir ve bir tek } A \in C \text{ sabiti vardır.}$$

**İspat:**  $0 < r_1, r_2 < r$  için  $n(C(a; r_1); a) = n(C(a; r_2); a) = 1$  ve  $\forall z \in C \ni |z-a| > r$  için  $n(C(a; r_1); z) = n(C(a; r_2); z) = 0$  olduğundan  $C(a; r_1) \approx C(a; r_2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a; r_1)} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a; r_2)} f(z) dz$$

$$0 < p < r$$

için

$$A := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a; p)} f(z) dz,$$

$p$ 'ye bağlı değildir.

$\gamma$ ,  $B(a; r) \setminus \{a\}$  da herhangi bir kapalı eğri olsun  $m := n(\gamma; a)$  alınırsa  $\gamma \approx mC(p, a)$

$$0 < p < r$$

$$\Rightarrow f(z) - \frac{A}{z-a}, B(a; r) \setminus \{a\}$$

da analitik ve  $\gamma \approx mC(p, a)$

$$\int_{\gamma} \left[ f(z) - \frac{A}{z-a} \right] dz = m \int_{C(a; p)} \left[ f(z) - \frac{A}{z-a} \right] dz$$

$$\begin{aligned}
&= m \int_{C(a;p)} f(z) - m.A \int_{C(a;p)} \frac{dz}{z-a} \\
&= m.2\pi i.A - m.2\pi i.A \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Son olarak A'nın tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki,  $A, B \in C$  sabitleri için  $\gamma B(a;r) \setminus \{a\}$  bölgesinde herhangi bir kapalı eğri olmak üzere;

$$\int_{\gamma} \left[ f(z) - \frac{A}{z-a} \right] dz = 0$$

ve

$$\int_{\gamma} \left[ f(z) - \frac{B}{z-a} \right] dz = 0$$

olsun.

$$(A - B) \int_{\gamma} \left[ \frac{dz}{z-a} \right] = 0 \Rightarrow \gamma$$

yerine  $C(a; \frac{r}{2})$  olursa

$$(A - B) \int_{C(a; \frac{r}{2})} \left[ \frac{dz}{z-a} \right] = 0$$

$$(A - B).2\pi i.n(C(a; \frac{r}{2}); a) = 0 \Rightarrow$$

$$2\pi i.(A - B) = 0 \Rightarrow A = B$$

elde edilir.

**Tanım** a noktası  $f(z)$  fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası ve  $f \in H(B(a;r) \setminus \{a\})$  olsun.  $B(a;r) \setminus \{a\}$  da bulunan her  $\gamma$  kapalı eğrisi için

$$\int_{\gamma} \left[ f(z) - \frac{A}{z-a} \right] dz = 0$$

şartının sağlayan A sayısına  $f$ 'nin a noktasındaki rezidüsü denir ve  $\text{Re } z[f; a]$  ile gösterilir.

### 1.5. Fourier Serileri

Bir  $f(x)$  fonksiyonu periyodik ise fonksiyonu  $T$  periyodu aşağıda verilen eşitliği sağlayan en küçük pozitif sayıdır.

$$f(x) = f(x + T) \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (1.1)$$

Periyodik bir  $f(x)$  fonksiyonu periyot içinde sonlu sayıda noktolar dışında tek değerli olarak tanımlı, sonlu sayıda ekstremuma haiz, kendisi ve birinci türevi parça parça sürekli ise,

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega k x) + b_k \sin(\omega k x) \quad (\omega = \frac{2\pi}{T}) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanan seri, düzgün olarak  $f(x)$  fonksiyonuna yakınsar.  $f(x)$  fonksiyonu bu şekilde açılımına Fourier serisi adı verilir. Fourier serisi süreksizlik noktalarında fonksiyonunu sağ ve sol değerlerinin ortalamasına yakınsar. Yukarıda verilen yakınsama şartlarına Dirichlet şartları adı verilir. Bu şartlar yeterlilik şartlarıdır. Yukarıda (1.2) bağıntısında verilen  $a_k$  ve  $b_k$  katsayıları aşağıda verilen şekilde hesaplanır.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\omega k x) dx \quad (1.3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\omega k x) dx$$

## 2. GREEN FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ

$$\ell(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha y(0) + \beta y'(0) &= 0 \\ \varphi y(1) + \delta y'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

aşağıdaki koşulları sağlayan [G] Green fonksiyonu adı verilir.

$$G(x, s), x \in [0, 1], s \in (0, 1)$$

**Koşul 1.**  $x \neq s$  olduğunda  $G(x, s)$  fonksiyonu

$$\ell(y) \equiv a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

**Koşul 2.**  $x = 0$  ve  $x = 1$  olduğunda  $G(x, s)$  fonksiyonu (2.2) sınır koşullarını korur.

**Koşul 3.**  $x = s$  olduğunda  $G(x, s)$  fonksiyonu  $x$  e göre sürekli ve  $x$  e göre türevi birinci tür sıçrayışa sahiptir. Bu sıçrayışın büyüklüğü  $\frac{1}{a(s)}$  dir.

$$\left. \begin{aligned} G(s_{+0}, s) &= G(s_{-0}, s) \\ G_x'(s_{+0}, s) &= G_x'(s_{-0}, s) = \frac{1}{a(s)} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Green fonksiyonunu elde etmek için sırasıyla 1. ve 2. sınır koşullarını koruyan trivial olmayan  $y_1$  ve  $y_2$  çözümlerini bulmak gerekir.

$$G(x, s) = \begin{cases} \ell(s)y_1(x), & 0 \leq x \leq s \\ \Psi(s)y_2(x), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Buradaki  $\ell$  ve  $\Psi$  fonksiyonlarını 3. koşulun korunmasından elde edebiliriz.

$$\Psi(s)y_1(s) = \ell(s)y_1(s)$$

$$\Psi(s)y_2'(s) - \ell(s)y_1'(s) = \frac{1}{a(s)}$$

$$\Psi(s)y_2(s) - \ell(s)y_1(s) = 0$$

$$\Psi(s)y_2'(s) - \ell(s)y_1'(s) = \frac{1}{a(s)}$$

$$\Delta \equiv \Delta(s) = \begin{vmatrix} y_2(s) & -y_1(s) \\ y_2'(s) & -y_1'(s) \end{vmatrix} = -y_1'(s)y_2(s) + y_1(s)y_2'(s)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -y_1(s) \\ \frac{1}{a(s)} & -y_1'(s) \end{vmatrix} = \frac{y_1(s)}{a(s)} \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_2(s) & 0 \\ y_2'(s) & \frac{1}{a(s)} \end{vmatrix} = \frac{y_2(s)}{a(s)}$$

$$\psi = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{y_1(s)}{a(s)\Delta(s)} \quad , \quad \ell = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{y_2(s)}{a(s)\Delta}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{y_2(s)y_1(x)}{a(s)\Delta} & , \quad 0 \leq x \leq s \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{a(s)\Delta} & , \quad s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

**Teorem 2.1.**  $G(x, s)$  fonsiyonu (2.1),(2.2) probleminin Green fonsiyonu ise bu taktirde söz konusu problemin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s)f(s)ds$$



### 3. DENİZ SEVİYESİNDE ISI DAĞILIMI

Günümüzde birçok önemli problemlerin çözümü teorik olarak bazı özelliklere sahip olan kısmi diferansiyel denklemlerin veya denklemler sisteminin uygun başlangıç ve sınır koşulları çerçevesinde çözümüne indirgenir. Örneğin, otobanda arabaların akışı, nehir sularının akışı, tabakalı ortamlarda petrolün sıkıştırılıp çıkartılması gibi önemli problemler artık matematiksel modeller aracılığıyla çözülmektedir.

Bu türden problemlerden birisi son yıllarda dünyanın çeşitli yerlerinde gözlenen deniz ve göl sularının seviyesinin yükselmesidir. Şüphesiz ki bu sorun, örneğin tarım alanlarının ve insanların yaşam yerleşkelerinin su altında kalması gibi çok büyük sorunlara yol açmaktadır. Söz konusu problemlerin mühendislik yöntemleri ile çözülmesi neredeyse imkansızdır ve bu problemlerin çözümünde matematiksel modelin oluşturulmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

Sözünü ettiğimiz problemin çözümü yolunda şimdiye kadar iki tür yaklaşımın olduğu bilinmektedir. Bunlardan birincisi tektonik teorisi, diğeri ise hidrodinamik teorisidir.

Tektonik teoride deniz ve göl altında yer alan tabakaların belli bir kuvvetler hesabına kabardığı öngörülür. Bu da kendi sırasında üzerinde olan su kütlelerinin yükselmesine neden olur.

Hidrodinamik yaklaşımda deniz ve göl sularının içerisinde çözülmüş kimyasal ve petrol atıklarının suyun yüzeyinde oluşturduğu ince tabakanın doğal “sera etkisi” yani, dahil olan su miktarı ile atmosfere buharlaşan su dengesinin bozulmasına neden olmaktadır.

Tez de söz konusu problem hidrodinamik model çerçevesinde incelenmiştir. Bu olayı modellemek koordinat başlangıcını  $x$ -ekseni su yüzeyine doğru,  $z$ -ekseni ise dikey olarak aşağı doğru yöneldiğini varsayalım. Bu doğrultuda,

$$D = \{0 \leq z \leq H, 0 \leq t \leq T\} \subset R^2(x, t)$$

bölgesinde aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\beta J_0 e^{-\beta z \sqrt{z}}}{2c\rho\sqrt{z}}, \quad (3.1)$$

$$T(z, 0) = f(z), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = \frac{Q}{k^2 c\rho}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T(H, t)}{\partial z} = \frac{\beta J_0 e^{-\beta \sqrt{z}}}{2c\rho\sqrt{H}}. \quad (3.4)$$

Burada  $T(z, t)$  fonksiyonu deniz seviyesindeki sıcaklığın herhangi bir  $z$  noktasında ve  $t$  tanındaki değerini göstermektedir.  $k^2$  moleküler ısı geçirgenliği katsayısı,  $C$  iç sıcaklık tutumu,  $\rho$  suyun yoğunluğu,  $J_0$  deniz seviyesinde albedo dikkate alınmakta toplam güneş ışınlanması (radyasyonu),  $\beta$  denizin derinliğine inildikçe güneş ışınlanmasının zayıflama katsayısı,  $Q$  deniz seviyesinden atmosfere akan negatif ısı seli olmaktadır.

$$\psi(z) = \frac{\beta J_0 e^{-\beta \sqrt{z}}}{2c\rho\sqrt{z}} \quad (3.5)$$

(3.5) fonksiyonu kaynak fonksiyonu olmaktadır ve görüldüğü gibi  $z = 0$  noktasında sonsuzluğa dönüşür. Dolayısıyla Riemann anlamında, karesi ile integrallenebilen fonksiyon değildir. Kaynak fonksiyonunda olan bu özellik çözüm üzerinde ek sınırlamaların olmasına neden olur. Öyle ki çözümün kendisi sürekli fakat, diferansiyellenemeyen fonksiyona dönüşür. Bu özellik (3.1) – (3.4) probleminin gerçek çözümünün bulunması için sorun teşkil etmektedir.

Ayrıca (3.1) – (3.4) problemine, yaklaşık yöntemlerden biri olan sonlu farklar yöntemine imkan vermemektedir. Çünkü ağın adımını sıfıra yaklaşması ile kesme hatasının sonsuz büyümesine sebep olur. Bundan dolayı (3.1) – (3.4) problemi için uygulanan herhangi bir sonlu farklar yöntemini detaylı bir şekilde incelenmesi gerekmektedir.

(3.1) – (3.4) problemini sonlu farklar yöntemi ile çözelim. Önce (3.1) – (3.4) probleminin çözümünde mevcut olan özel noktaları dikkate almaksızın, sonlu farklar şeması oluşturalım.

### 3.1. $O(h + \tau)$ Hatasına Sahip Şema

$D$  bölgesinde aşağıdaki gibi düzgün ağ oluşturalım.

$$\omega_{h\tau} = \{Z_i = ih, t_\ell = \ell_\tau, \quad i = \overline{0, n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, h, \tau > 0 \} \quad (3.6)$$

$\omega_{h\tau}$  ağının herhangi bir noktasında (3.1) – (3.4) problemi,

$$\bar{T}_{i,0} = f(z_i), \quad i = \overline{0, n} \quad (3.7)$$

$$\bar{T}_t|_{i=0} = \frac{Q}{k^2 c \rho}, \quad (3.8)$$

$$\bar{T}_t|_{i=n} = \psi(h). \quad (3.9)$$

burada  $\bar{T} \equiv T(z_i, t_k)$  ağ fonksiyonu,  $T(z, t)$  nin  $(z_i, t_k)$  noktasındaki yaklaşık değeri,

$$\begin{aligned} \bar{T}_t &\cong \frac{T(z_i, t_k + \tau) - T(z, \tau)}{\tau}, \\ \bar{T}_t &\cong \frac{\bar{T}(z_{i+h}, t_{k+1}) - 2\bar{T}(z_i, t_{k+1}) + \bar{T}(z_{i-h}, t_{k+1})}{h^2}, \end{aligned}$$

olmaktadır.

$\Psi_{(z_i)}$ , ağ fonksiyonu  $\Psi_{(z)}$ 'nin  $z_i$  noktasındaki yaklaşık değerini göstermektedir.

(3.6) denkleminin (3.7), (3.8), (3.9) koşulları çerçevesinde çözümü için yukarıda gösterdiğimiz kovma yöntemi yardımıyla çözülür. Açıktır ki, bu cebirsel denklemler sisteminin matrisi üç değişkenli matris olmakta ve çözüm aşağıdaki rekürans formülleri yardımıyla elde edilir.

$$\alpha_{i+1} = \frac{\beta_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \alpha_1 = 1, i = \overline{1, n-1}, \quad (3.10)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_1 = -\frac{Q}{k^2 c \rho}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (3.11)$$

$$\widehat{T}_i = \alpha_{i+1} \widehat{T}_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (3.12)$$

$$\widehat{T}_n = \widehat{T}_n + \tau \psi(H), \quad \bar{T}_{i,0} = f(z_i) \quad (3.13)$$

Burada,

$$A_i = B_i = \frac{k^2 \tau}{h^2}, \quad C_i = 1 + 2 \frac{k^2 \tau}{h^2}, \quad F_i = T_i + \tau \psi(z_i)$$

olur. (3.6) şeması kapalı olduğu için herhangi bir  $\tau$  ve  $h$  için karardır. Bu şemanın sınır koşullarını dikkate alarak netlik mertebesine yükseltmek mümkün değildir

çünkü,  $T_{i+1}$  fonksiyonunu  $i = 0$  noktasında Taylor serisine açtığımızda,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{T_1 - T_0}{h} - \frac{h}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0 \quad (h^2)$$

elde ederiz. (3.1) denklemini dikkate alarak,

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \frac{1}{K^2} \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \psi(z) \right) \Big|_{z=0} \rightarrow \psi(0) = \infty$$

(3.6) – (3.9) şeması üzere aşağıdaki veriler çerçevesinde bilgisayarlar testleri yapılmış ve elde edilen sonuç Şekil 1 de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} Q &= 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ kalori/cm}^2 \cdot \text{sn}, & J_0 &= 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ kalori/cm}^2 \cdot \text{sn} \\ \beta &= 9,775 \cdot 10^{-2} \text{ 1/cm}^2 \cdot \text{sn}, & C_g &= 9,67 \cdot 10^{-1} \text{ kalori/gr.cm}^3 \\ k^2 &= 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{sn}, & f(z) &= 0 ; H \ll 1 \text{ metre} \end{aligned}$$

$\beta$ 'nin değeri farklı  $d$ 'ler için (3.14) formülünden elde edilmiştir.

$$\beta = \frac{0,239}{\sqrt{d}} + 0,038 \text{ [cm}^{-\frac{1}{2}}] \quad (3.14)$$

$d$  nin değeri 2, 9 ve 25 olduğu durumda elde edilen sonuçlar Şekil 2 de gösterilmiştir.

### 3.2. $O(h^2 + \tau)$ Hatasına Sahip Şema

Yukarıda gösterildiği gibi  $\frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$  türevlerini  $z = 0$  nokasında sonlu farklarda ayırlaştırıldığında yanlış sonuçlara ulaşırız. Bu onu gösterir ki, problemin  $[0, H]$  kapalı aralığında klasik çözümü mevcut değildir. Bu nedenle (3.1) – (3.4) probleminin genelleştirilmesi (zayıf) çözümünü incelemek gerekmektedir.

$$T_1(z, t) = T(z, t) - \frac{Q}{K^2 c \rho} z - \psi(H) t \quad (3.15)$$

Yukarıda yer alan (3.15) dönüşümü yardımıyla (3.1) – (3.4) problemini aşağıdaki,

$$\frac{\partial T_1(z, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 T_1(z, t)}{\partial z^2} + \psi_1(z), \quad (3.16)$$

$$T_1(z, 0) = T_{10}(z), \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial T_1(0, t)}{\partial z} = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial T_1(H, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.19)$$

problemine indirgeyebiliriz. Burada,

$$\psi_1(z) = \psi(z) - \psi_1(H), T_{10} = f(z) - \frac{Q}{k^2 c \rho} z \quad (3.20)$$

olmaktadır. Sonuncu ifadeyi dikkate alarak aşağıdaki yardımcı problemi içereyim,

$$\frac{\partial \vartheta(z, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 \vartheta(z, t)}{\partial z^2} + \varphi(z), \quad (3.21)$$

$$\vartheta(z, 0) = \varphi_0(z), \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta(0, t)}{\partial z^2} = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta(H, t)}{\partial z \partial t} = 0 \quad (3.24)$$

Burada  $\vartheta_0(z)$  fonsiyonu,

$$\frac{d\vartheta_0(z)}{dz} = T_{10}(z), \quad (3.25)$$

$$\varphi(z) = \frac{J_0}{c\rho} [1 - e^{-\beta\sqrt{z}}] - \psi(H) \quad (3.26)$$

dir.

(3.21) – (3.24) problemine yardımcı problem diyeceğiz. Görüldüğü gibi, (3.21) – (3.24) probleminin çözümünün diferansiyellenme derecesi, (3.1) – (3.4) probleminin çözümünün diferansiyellenebilme derecesinden bir birim fazladır. Bu avantaj (3.21) – (3.24) probleminin sonlu farklarla çözümüne hiç bir engel çıkartmaz. Çünkü  $\varphi(z)$  fonsiyonu  $z = 0$ 'da sıfıra dönüşür ve sürekli fonsiyondur. Aşağıdaki teorem geçerlidir.

**Teorem 3.2.1.** Eğer  $\vartheta(z, t)$  fonsiyonu (3.21) – (3.24) probleminin herhangi bir çözümü ise,

$$T_1(z, t) = \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \quad (3.27)$$

eşitliği ile tanımlanan fonsiyon (3.1) – (3.4) probleminin zayıf çözümü olmaktadır.

(3.21) – (3.27) problemini  $\omega_{hT}$  ağının  $(z_i, t_k)$  noktasında aşağıdaki gibi sonlu farklara,

$$V_t = k^2 \hat{V}_{z\bar{z}} + \hat{\phi}(z), \quad (i = \overline{0, h}), \quad (3.28)$$

$$V_{i,0} = u_0(z_i), \quad (i = \overline{0, h}), \quad (3.29)$$

$$\hat{V}_{z\bar{z}}|_{i=0} = 0, \quad (3.30)$$

$$V_{z\bar{z}}|_{i=n} = 0, \quad (3.31)$$

$$[u_0]_z = T_{10}(z_i) \quad (3.32)$$

ayrıklaştıralım.

**Teorem 3.2.** Herhangi bir  $\tau, h$  için aşağıdaki

$$\hat{T}_1 = \hat{V}_z \quad (3.33)$$

eşitlik doğrudur. (3.28) – (3.32) cebirsel denklemler sistemi de yukarıda olduğu gibi kovma yöntemi yardımıyla çözülür.  $\alpha_1$  ve  $\beta_1$  leri bulmak için aşağıdaki işlemleri yapalım. (3.28) ifadesini dikkate alarak,

$$(V_t - \phi(z_i))|_{z=0} = 0, \text{ yani } \hat{V}_0 = V_0 + \tau\phi(0)$$

yazabiliriz. Burada,

$$\hat{V}_i = \alpha_{i+1} \hat{V}_{i+1} + \beta_{i+1}$$

eşitliğinde  $i = 0$  yazarsak,

$$\alpha_i = 0, \quad \beta_1 = V_0 + \tau\phi(0)$$

olur. Şimdi (3.31) den  $\hat{V}_n$  'i buluruz. Bu amaçla (3.31)'i

$$V_{zt} = \frac{\hat{V}_z - V_z}{\tau}$$

şekilde yazalım  $\frac{\partial v}{\partial x}$  türevine  $O(h^2 + \tau)$  mertebeden yaklaştığımızda,

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=H} = -\frac{V_n - V_{n-1}}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + O(h^2) \quad (3.34)$$

alırız. (3.21) ifadesinde dikkate alınırsa  $z = H$  noktasında,

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right|_{z=H} = \frac{1}{k^2} \left( \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{z=H} - \varphi(H) \right) \quad (3.35)$$

elde ederiz.(3.34) ve (3.35)'den

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=H} &= -\frac{\widehat{V}_n - \widehat{V}_{n-1}}{h} + \frac{h}{2k^2} \left( \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{z=H} - \varphi(H) \right) \\ &= \frac{h}{2k^2} \left( \frac{\widehat{V}_n - V_n}{\tau} - \varphi(H) \right) - \frac{1}{k} (\widehat{V}_n - \widehat{V}_{n-1}) \\ &= \left( \frac{h}{2k^2\tau} - \frac{1}{k} \right) \widehat{V}_n + \frac{1}{k} \widehat{V}_{n-1} - \frac{h}{2k^2\tau} V_n - \varphi(H) \\ &= q_1 \widehat{V}_n + q_2 \widehat{V}_{n-1} + p_n \end{aligned} \quad (3.36)$$

alırız. Burada,

$$q_1 = \frac{h}{2k^2\tau} - \frac{1}{h}, \quad q_2 = \frac{1}{h}, \quad p_n = -\left( \frac{h}{2k^2\tau} V_n + \varphi(H) \right)$$

benzer yolla,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=H} = \frac{h}{2} \left[ \frac{1}{k^2} \frac{V_n - \widehat{V}_n}{\tau} - \varphi(H) \right] - \frac{V_n - V_{n-1}}{h} = R^2 h \quad (3.37)$$

alırız. Buradan,

$$V_{zt} = \frac{q_1 \widehat{V}_n + q_2 \widehat{V}_{n-1} + P_n - R_n}{\tau} = 0$$

veya

$$q_1 \widehat{V}_n + q_2 \widehat{V}_{n-1} + P_n - R_n = 0 \quad (3.38)$$

olur.

$$\widehat{V}_{n-1} = \alpha_n \widehat{V}_n + \beta_n$$

(3.3) ifadelerinden,

$$\widehat{V}_n = \frac{R_n - P_n - q_2 \beta_n}{q_1 + q_2 \alpha_n} = 0 \quad (3.39)$$

alırız.

(3.28) – (3.32) sonlu fark karşılıkları da kapalı şema oldukları için  $\tau$  ve  $h$ 'in herhangi bir değerinde kararlıdır ve  $O(h^2 + \tau)$  mertebededir.

(3.28) – (3.32) algoritmaları kullanılarak bilgisayar testleri yapılmış ve elde edilen çözümlerin grafikleri Şekil 3-5'de gösterilmiştir.

### 3.3. Gerçek Çözümü

Bu bölümde Fourier ve Rezidü yöntemlerini kullanarak (3.17) – (3.20) probleminin gerçek çözümünü bulacağız. Gerçek çözümlerin, birincisi problemin çözümünün ispatlamaya, ikincisi ise olayın fiziksel özelliklerini sona kadar incelemeye imkan sağlar.

### 3.4. Fourier Metodu

Kolaylık için (3.19) ifadesini  $t$ 'ye göre integralleyelim.

$$T(H, t) = \psi(H)t + f(H) \quad (3.40)$$

Aşağıdaki değişken dönüşümünden,

$$u(z, t) = T(z, t) - g(z, t)$$

sonra

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = k^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \psi_1(z), \quad (3.41)$$

$$u(z, 0) = u_0(z) \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial z} = 0, \quad u(H, t) = 0 \quad (3.43)$$

alırız.

$$\psi_1(z) = \psi(z) - \psi(H)$$

Buradan,

$$u_0(z) = f(z) + \frac{Q}{k^2 c \rho} (H - z) \quad (3.44)$$

[3.1], [3.2] takip ederek aşağıdaki yardımcı problemi

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = k^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} + \varphi(z), \quad (3.45)$$

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.47)$$

içerelim. Buradan,

$$\varphi(z) = \frac{y_0}{ep} [1 - e^{-\beta\sqrt{z}}] - \psi(H)z \quad (3.48)$$



$$U_0(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi + \frac{Q}{k^2 c \rho} z \left( H - \frac{z}{2} \right) \quad (3.49)$$

olmaktadır. (3.47)'de yer alan ilk ifadeyi ,

$$\frac{\partial^2 U(0, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial U(0, t)}{\partial t} - \varphi(0) \right) = 0 \quad (3.50)$$

şeklinde yazalım. Buradan,

$$\varphi(0) = 0$$

olduğundan ,

$$\frac{\partial U(0, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.51)$$

olur. (3.51)'i integralleyerek,

$$U(0, t) = U_0 = 0 \quad (3.52)$$

alırız.

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = k^2 \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} + \varphi(z), \quad (3.53)$$

$$v(z, 0) = v_0(z) \quad (3.54)$$

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v(H, t)}{\partial z} = 0 \quad (3.55)$$

Görüldüğü gibi  $\varphi(z) \in C[0, H]$  , fakat  $[0, H]$  parçasında diferansiyellenebilen değildir. Aşağıdaki gibi tanımlanmış  $\varphi_N(z)$  fonksiyonu dahil edelim.

$$\varphi_N(z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in \left[ \frac{1}{N}, H \right] \\ 0, & z \in \left[ 0, \frac{1}{N} \right] \end{cases} \quad (3.56)$$

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım.

$$\frac{\partial U_N(z, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 U_N(z, t)}{\partial z^2} + \varphi_N(z), \quad (3.57)$$

$$v(z, 0) = v_0(z), \quad (3.58)$$

$$v_N(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v_N(H, t)}{\partial z} = 0 \quad (3.59)$$

(3.57) – (3.59) probleminin çözümünü,

$$u_N(z, t) = U_N(z, t) + w(z, t),$$

şeklinde arayalım.

Burada  $u_N(z, t)$  sıfır koşullarını homojen olmayan başlangıç koşullarını

koruyan homojen denklemi  $W(z, t)$  ise homojen olmayan denlemin homojen başlangıç ve sınır koşullarını koruyan fonksiyonlar olmaktadır. Fourier yönteminin yapısına göre  $u_N(z, t)$  çözümünü,

$$u_N(z, t) = \sum X(z) T(t) \quad (3.60)$$

$X(z)$  ve  $T(t)$  fonksiyonlarını bulmak için sırasıyla,

$$X''(z) + \lambda^2 X(z) = 0, \quad (3.61)$$

$$X(0) = 0, \quad X'(H) = 0 \quad (3.62)$$

ve

$$T' + (\lambda K)^2 T = 0, \quad (3.63)$$

problemlerinden bulunur. Kolayca gösterebiliriz ki, (3.61), (3.62) probleminin özdeğer ve özfonksiyonları,

$$\lambda_v = \frac{(2v+1)\pi}{2H} X_v(z) = \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} \quad (3.64)$$

olmaktadır.

$$(v = 0, 1, 2, \dots)$$

$v$ 'nin negatif değerleri yeni özfonksiyonlar üretmez.

$$\lambda = \lambda_v$$

değerinde (3.64) denkleminin çözümleri,

$$T_v(t) = C_v e^{-(\lambda_v K)^2 t} \quad (3.65)$$

olur. (3.60) koşulu çerçevesinde  $u_N(z, t)$  için,

$$u_N(z, t) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v e^{-(\lambda_v K)^2 t} \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} \quad (3.66)$$

alırız.

Açıktır ki, (3.66) çözümü  $\varphi_N(z, t) = 0$  olduğunda (3.57) denklemini korumak zorundadır. Ayrıca (3.59) koşulunun korunduğunu görmek zor değildir. (3.58) başlangıç koşulunun korunması için,

$$u_{0N}(z) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} \quad (3.67)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Varsayalım ki, (3.67) serisi yakınsaktır, bu durumda

$$C_v, v = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

katsayılarını bulabiliriz. Bunun için (3.67)'nin her iki tarafını  $\text{sin} \frac{(2n+1)\pi z}{2H}$  'a çarpıp

$z$ 'e göre inetgrallersek,

$$\begin{aligned} & \int_0^H u_0(z) \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} dz \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} C_v \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} x = x \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} dz = \begin{cases} 0 & , n \neq v \\ \frac{H}{2} & , n = v \end{cases} \end{aligned}$$

alırız. Buradan,

$$C_v = \frac{2}{H} \int_0^H u_0(\xi) \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi \xi}{2H} d\xi \quad (3.68)$$

(3.68) ifadesi (3.66)'da yerine konulursa,

$$u_N(z, t) = \frac{2}{H} \sum_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda_v K)^2 t} \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} \int_0^H u_0(\xi) \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi \xi}{2H} d\xi \quad (3.69)$$

olarak bulunur. Şimdi (3.57) – (3.59) probleminin çözümünü bulalım. Bunun için çözümü,

$$w(z, t) = \sum_{v=0}^{\infty} T_v(t) \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} \quad (3.70)$$

şeklinde arayalım.

$T_v(t)$  fonksiyonlarını öyle seçelim ki, (3.70) serisi (3.57) denklemini ve homojen başlangıç koşulunu korusun. (3.70) ifadesi (3.57) de yerine konulursa,

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left[ T_v'(t) + \left( \frac{(2v+1)\pi z}{2H} \right)^2 T_v(t) \right] \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} = \varphi_N(z) \quad (3.71)$$

alırız.  $\varphi_N(z)$  fonksiyonu  $(0, H)$  aralığında sinüs Fourier serisine açarsak,

$$\varphi_N(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_{Nv}(z) \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} \quad (3.72)$$

olur. Burada,

$$\varphi_{Nv}(z) = \frac{2}{H} \int_0^H \varphi_N(\xi) \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi \xi}{2H} d\xi \quad (3.73)$$

olmaktadır. Bu durumda  $T_v(t)$  fonksiyonları için,

$$T_v'(t) + \left( \frac{(2v+1)\pi K}{2H} \right)^2 T_v(t) = \varphi_{Nv}(z) \quad (3.74)$$

$$(v = 0, 1, \dots) , T_v(0) = 0 \quad (3.75)$$

alırız.

(3.74), (3.75) probleminin çözümü,

$$T_v(t) = \int_0^t \varphi_{Nv}(z) e^{-\left[\frac{(2v+1)\pi k}{2H}\right]^2 (t-\tau)} d\tau \quad (3.76)$$

(3.76) ifadesi (3.70) serisinde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} U(z, t) &= \sum_{v=0}^{\infty} \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} \int_0^t \varphi_{Nv}(z) e^{-\left[\frac{(2v+1)\pi k}{2H}\right]^2 (t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{2}{H} \sum_{v=0}^{\infty} \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi z}{2H} \int_0^t e^{-\left[\frac{(2v+1)\pi k}{2H}\right]^2 (t-\tau)} x \\ &= x \int_0^H \varphi(\xi) \text{Sin} \frac{(2v+1)\pi \xi}{2H} d\xi \end{aligned} \quad (3.77)$$

elde ederiz. Nihayet  $U_N(z, t)$  için,

$$\begin{aligned} u_N(z, t) &= \frac{2}{H} \sum_{v=0}^{\infty} e^{-(\lambda_v k)^2 t} \text{sin} \lambda_v z \int_0^H u_0(\xi) \text{sin} \lambda_v \xi d\xi + \\ &\frac{2}{H} \sum_{v=0}^{\infty} \text{sin} \lambda_v z \int_0^t e^{-(\lambda_v k)^2 (t-\tau)} d\tau \int_{1/N}^H \varphi_N(\xi) \text{Sin} \lambda_v \xi d\xi \end{aligned} \quad (3.78)$$

burada elde ederiz.

$$\lambda_v = \frac{(2v+1)\pi}{2H}$$

Görüldüğü gibi göz önüne aldığımız problemin öz değerleri sadedir ve bunlara karşılık gelen öz fonksiyonlar tam sistem oluşturur. Bu özellik Fourier serisi yöntemini uygulamaya imkan verir.

Fakat pratikte öyle problemler mevcuttur ki, onların öz değerleri ikinci ve daha yüksek dereceden katlı olabilir.

Bu durumda katlı köklere karşılık gelen öz fonksiyonlar tam sistem oluşturamazlar. Bu gibi durumlarda herhangi bir sürekli diferansiyellenebilen başlangıç fonksiyonlar bulunan öz fonksiyonlar üzere ayrılışı problemi açık kalmaktadır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial k^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u(1, t) - u(0, t) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0$$

Örneğin, problemlerinin öz değerlerinin katlılık derecesi iki olur. [3.5]'de bu tür problemler için Rezidü yöntemini (3.57) – (3.59) problemine uygulayacağız.

### 3.5. Rezidü Yöntemi

[3.5]'de önerilen yöntemin yapısına göre (3.57) – (3.59) problemine bir sınır değer problemi ve bir tane adi diferansiyel denklem için Cauchy problemi ile karşı koyacağız.

#### 3.5.1. Sınır Değer Problemi

$$y''(z) + \lambda^2 y(z) = h(z), \quad (3.79)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(H) = 0 \quad (3.80)$$

Eğer  $y$  ve  $uC^2[0, H]$  sınıfına dahil ve (3.80) koşulunu koruyan fonksiyonlar ise, kolayca ispatlanabilir ki,

$$(L_y, u) = (y, L_u)$$

yani (3.79), (3.80) problemi self adjonittir. Aşağıdaki teorem doğrudur.

**Teorem 3.5.1.1**(3.79), (3.80) probleminin özdeğerleri reel olup sayılabilir sayıdadır ve sonlu mesafede limit noktasına sahip değildir. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonal sistem oluşturur.

Şimdi (3.79), (3.80) homojen olmayan problemi göz önüne alalım. Söz konusu problemin çözümü [3.1], [3.2]'de olduğu gibi burada  $h(z)$  herhangi sürekli diferansiyellenebilen fonksiyon olmaktadır.

Sadelik için  $L_y$  ile aşağıdaki operatörü gösterelim

$$Ly = y'' + \lambda^2 y$$

ve

$$Ly = 0$$

problemini göz önüne alalım.

$$y(z, \lambda, h) = \int_0^H G(z, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi \quad (3.81)$$

olmaktadır.

Burada  $G(z, \xi, \lambda)$ 'ya (3.79), (3.80) probleminin Green fonksiyonu denir ve

$$G(z, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(z, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

$$\Delta(z, \xi, \lambda) = \begin{bmatrix} g_0(z, \xi, \lambda) & e^{\lambda z} & e^{-\lambda z} \\ g_0(0, \xi, \lambda) & 1 & 1 \\ \frac{d\partial_0(H, \xi, \lambda)}{\partial x} & \lambda e^{\lambda H} & -\lambda e^{-\lambda H} \end{bmatrix}, \quad (3.82)$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda e^{\lambda H} & -\lambda e^{-\lambda H} \end{vmatrix}, \quad (3.83)$$

$$g_0(z, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} gh\lambda(z - \xi) & \xi \leq z \\ -\frac{1}{2\lambda} gh\lambda(z - \xi) & z \leq \xi \end{cases} \quad (3.84)$$

olmaktadır. (3.81) ifadesi ile tanımlanan söz konusu problemin  $y(z, \lambda, h)$  fonksiyonunun sıfırları hariç her yerde çözümü olmaktadır. Ayrıca  $\Delta(\lambda)$ 'nin sıfırları aynı zamanda  $G(z, \xi, \lambda)$ 'nin kutup noktaları olur.

Gerçekten de, sadelik için (3.80) sınır operatörünü  $U_k, (k = 1, 2)$  ile gösterelim. Bu durumda,  $y_i$ 'ler temel fonksiyon sistemi olmak suretiyle,

$$y(z, \lambda) = \sum_{i=1}^2 C_i y_i$$

fonksiyonu,

$$U_k(y) = 0, \quad (k = 1, 2) \quad (3.85)$$

$$\lambda_v = \frac{(2v + 1)\pi}{2H}, \quad v = 0, 1, \dots \quad (3.86)$$

olur. Son iki denklem  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) bilinmeyenleri için iki denklem sistemi oluşturur. Bu sistemin çözümünün olması için  $U_k(y_i)$  elemanlarından oluşan determinantın sıfıra eşit olması hem gerekli, hem de yeterli koşul olmaktadır.

Açıktır ki  $\Delta(\lambda)$  determinantı  $\lambda$ 'ya göre tam fonksiyondur ve bu fonksiyon yalnız reel sıfırlara sahiptir. (3.79), (3.80) probleminin limit noktası  $\lambda = \infty$  olur.

Böylelikle,  $\Delta(\lambda)$ 'nin sıfırları

$$\lambda_v = \frac{(2v + 1)\pi}{2H}, \quad v = 0, 1, \dots \quad (3.87)$$

olur.

a) Ayrılış formülü

Ayrılış formülü iki farklı açıdan ispatlayım.

(3.80) denklemini  $U_{k(y)} = 0$  koşulu çerçevesinde inceleyelim.  $\mathcal{L}$  operatörü self adjonit olduğunda,

$$\mathcal{L}y = \lambda^2 y$$

Denkleminin tam ortogonal  $\{u_k\}$  öz fonksiyonlar sistemi ve  $\lambda$  lar problemin öz değerleri olmadığı sürece  $G(z, \xi, \lambda)$  Green fonksiyonu vardır. Bu durumda herhangi bir  $h(z) \in \mathcal{L}_2(0, H)$  için aşağıdaki formül geçerlidir.

$$h = \sum_{K=1}^{\infty} (h, y_K) y_K \quad (3.88)$$

Burada

$$(h, y_K) = \int_0^H h(\xi) y_K(\xi) d\xi \quad (3.89)$$

ve (3.84) serisi  $h(z)$ 'e  $h_2$  anlamında yakınsaktır.

$$\mathcal{L}(\lambda)[h(z)] = \int_0^H G(z, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi$$

Bu durumda,

$$\mathcal{L}y_k = \lambda y_k = \bar{\ell} y_k + (\lambda - \bar{\ell}) y_k,$$

$$(y(\ell)[h(z)], y_k) = (h, y(\bar{\ell})[y_k]) * = (\lambda_k - \ell)^{-1} (f, y_k)**$$

---

\*  $\mathcal{L}$  – herhangi bir  $f \in C[0, H]$  fonksiyonu için tanımlanmış lineer integral operatör olsun.

$$\mathcal{L}f = \int_0^H G(z, \xi) f(\xi) d\xi$$

Eğer,  $f, g \in C[0, H]$  ise, self adjonitlik koşulundan,

$$u = \mathcal{L}f, v = \mathcal{L}g$$

için,

$$(f, \mathcal{L}g) = (\mathcal{L}f, g)$$

elde ederiz.

\*\* Gerçekten de,

$$\mathcal{L}y_k = \lambda y_k = (\lambda_k - \ell) y_k + \ell y_k$$

olduğundan,

$$(\mathcal{L} - \lambda_k) y_k = (\lambda_k - \ell) y_k$$

olur. Sonuncu eşitliğinde her iki tarafına  $(\lambda_k - \ell)^{-1} y(\lambda)$  operatörünü uygularsak

$$(\lambda_k - \ell)^{-1} y(\lambda) (\mathcal{L} - \lambda_k) y_k = \alpha y_k (\lambda_k - \ell)^{-1}$$

ve böylelikle  $y(\lambda) h(z)$  fonksiyonu için Fourier serisi,

$$y(\lambda) h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \ell)^{-1} (h, y_k) y_k$$

olur.

Rezidüler için [3.5.1.1] teoremini kullanırsak,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \lambda \propto (\lambda) h(z) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \ell)^{-1} (h, y_k) y_k = - \sum_{K=1}^{\infty} (h, y_k) y_k,$$

alırız, burada  $C_k$   $\lambda$ -düzleminde  $\lambda$ , kutup noktalarını dahiline alan sade kapalı eğriler olmaktadır. Nihayet biz  $h(z)$  fonksiyonu için aşağıdaki ayrılış,

$$h(z) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_K} \lambda \int_0^H G(z, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi d\lambda \quad (3.86)$$

formülünü kullanabiliriz.

(3.86) ayrılışındaki katsayıları bulalım. (3.82), (3.83) dikkate alarak,

$$h(z) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \lambda d\lambda \int_0^H \frac{\Delta(z, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} h(\xi) d\xi \quad (3.87)$$

yazabiliriz.

$$\lambda_v = \frac{(2v + 1)\pi}{2H}$$

olduğundan  $\Delta(\lambda)$ 'nin kutup noktaları (87)'i kolayca hesaplayabiliriz.

$$h(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \int_0^H \frac{\lambda_v \Delta(z, \xi, \lambda_v)}{\Delta(\lambda_v)} h(\xi) d\xi \quad (3.88)$$

Sadece hesaplamalar yolu ile,

$$\Delta'(\lambda_v) = -2\lambda_v H i \cos \pi v \quad , \quad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\frac{\lambda_v \Delta(z, \xi, \lambda_v)}{\Delta'(\lambda_v)} = \frac{1}{H} \sin \lambda_v \xi \sin \lambda_v z$$

olduğunu görebiliriz.

$$h(z) = \frac{2}{H} \sum_{v=1}^{\infty} \sin \lambda_v z \int_0^H \sin \lambda_v \xi h(\xi) d(\xi) \quad (3.89)$$

Olarak alırız. Aşağıdaki notasyonu içerelim.

$$a_v = \frac{2}{H} \int_0^H h(\xi) \sin \lambda_v \xi d\xi$$

Görüldüğü gibi (3.89) serisi  $f(z)$ 'in Fourier serisinin aynısı olmaktadır. (3.89) formülünü [3.5.1]'de olduğu gibide bulabiliriz. Bunun için (3.80) sınır koşullarını,



$$Y_v(y) = \sum_{K=1}^2 [\alpha_{vK} y^{(K-1)}(0) + \beta_{vK} y^{(K-1)}(H)] = 0 \quad (3.90)$$

şeklinde yazalım.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = 0, \\ \alpha_{21} = \alpha_{22} = \beta_{21} = 0, \quad \beta_{22} = 1 \end{aligned}$$

Yukarıda söylediğimiz gibi, homojen denklem,

$$y_1(z, \lambda) = e^{\lambda z}, \quad y_2(z, \lambda) = e^{-\lambda z} \quad (3.91)$$

temel fonksiyonlar sistemine sahiptir. Kolayca görülür ki,

$$\begin{aligned} y_v(y_1) &= A_{v1}(\lambda) + B_{v1}(\lambda)e^{\lambda H}, \\ y_v(y_2) &= A_{v2}(\lambda) + B_{v2}(\lambda)e^{-\lambda H}, \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} A_{11} = 1, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = 0, \\ B_{11} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad B_{21} = \lambda, \quad B_{22} = -\lambda \end{aligned}$$

olmaktadır. Q:Açıktır ki,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

determinantları  $\lambda$  derecesinde artan fonksiyonlardır ve

$$\begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) & B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) & B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

matrisinden oluşturulmuş herhangi bir determinantın artma hızı  $\lambda$  fazla değil, bu koşul çerçevesinde aşağıdaki teoremi ifade edelim.

**Teorem 3.5.1.2.**  $Q$  koşunun korunduğu taktirde (3.79),(3.80) problemi sayılabilir sayıda  $\lambda$ , özdeğerlerine sahiptir ve  $\lambda$  yeteri kadar büyük değerlerinde ve  $[0, H]$  'dan olan herhangi bir sürekli diferansiyellenebilen  $h(z)$  için (3.79),(3.80) probleminin Green fonksiyonu asimptitik değerlendirmeye sahiptir. Ayrıca  $h(z)$  foksiyonu için (3.87) ayrılış formülü geçerlidir.

### 3.5.2. Karışık Problemin Çözümü

Göz önüne aldığımız (3.57)-(3.59) problemi için Rezidü yönteminin genel yapısına göre incelediğimiz probleme karşı bir tane de Cauchy problemi de karşı koyulur. (3.79)-(3.80) sınır problemi ile karşı koymuştuk.

$$\frac{\partial Z(z, \lambda, t)}{\partial t} - \lambda^2 Z(z, \lambda, t) = \varphi(z), \quad (3.92)$$

$$Z(z, \lambda, 0) = u_0(z). \quad (3.93)$$

Adi diferansiyel denklemler teorisinde kullanarak (3.92),(3.93) probleminin çözümünü,

$$Z(z, \lambda, t) = u_0(z)e^{\lambda^2 t} + \int_0^t e^{2(t-\tau)} \varphi_N(z) d\tau \quad (3.94)$$

şeklinde elde ederiz.

$\mathcal{K}[0, H]$ 'da tanımlı, herhangi bir sürekli diferansiyellenen  $h(z)$  için (3.70)'i takip ederek,

$$A_{v_j} h = h_{v_j}^j(z) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y(z, \lambda, h) d\lambda \quad (3.95)$$

operatörünü dahil edelim. Bu notasyonda,

$$\sum_v h_{v_0}(z) = h(z), \quad (3.96)$$

olur. (3.95) operatörünü (3.57)-(3.59) problemin uygularsak,

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y\left(z, \lambda, \frac{\partial u_N(z, t)}{\partial t}\right) d\lambda \\ &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y\left(z, \lambda, \frac{\partial u_N(z, t)}{\partial t}\right) d\lambda + \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} \varphi(z) d\lambda \end{aligned} \quad (3.97)$$

alırız.

(3.81)'de görüldüğü gibi  $y(z, \lambda, h)$  üçüncü argümana göre lineer operatördür. Bu durumda (3.97)'den

$$\frac{\partial u_{N_j^j}(z, t)}{\partial t} = u_{N_v^{j+1}}(z, t) + \varphi_{N_v^j}(z) \quad (3.98)$$

alırız. (3.97) operatörünü (3.58)'de uygularsak

$$u_{N_v^j}^j(z, 0) = u_{0_v^j}^j(z) \quad (3.99)$$

olur. Hesaplama yolu ile gösterebiliriz ki, (3.98),(3.99) problemini çözümü,

$$\begin{aligned} u_{N_v^j}^j(z, t) &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y(z, \lambda, Z(z, \lambda, t)) d\lambda \\ &(j = \overline{0, \lambda_v - 1}), \end{aligned} \quad (3.100)$$

olmaktadır. Burada  $Z(z, \lambda, t)$  fonksiyonu (3.92),(3.93) Cauchy probleminin çözümü  $u_v, y(z, \lambda, h)$  fonksiyonun  $\lambda$  kutubunun katılılık derecesi olmaktadır. Gerçektende,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{Nv}^j(z, t)}{\partial t} &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y\left(z, \lambda, \frac{\partial Z(z, \lambda, t)}{\partial t}\right) d\lambda \\ &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y(z, \lambda, \lambda^2 Z(z, \lambda, t)) d\lambda + \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y(z, \lambda, \varphi_N(z)) d\lambda \\ &= U_{Nv}^{j+1}(z, t) + \varphi_{Nv}^j(z) \end{aligned}$$

olur.

(3.100) ifadesi (3.99)'un sol tarafından yerine konursa,

$$\begin{aligned} U_{Nv}^j(z, 0) &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda^{2j+1} y(z, \lambda, u_0(z)) d\lambda = u_{ov}^j(z) \\ U_N(z, t) &= \sum_v U_{Nv}^0(z, t) = \sum_v \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda y(z, \lambda, Z(z, \lambda, t)) d\lambda \\ &= \sum_v \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda d\lambda \int_0^H G(z, \xi, \lambda) [u_0(\xi) e^{\lambda^2 t} + \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \varphi_N(z) d\tau] d\xi \\ &= \sum_v \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_v} \lambda d\lambda \int_0^H \frac{\Delta(z, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} u_0(\xi) d\xi \varphi_N(\xi) d\tau d\xi \end{aligned} \quad (3.101)$$

(3.89)'da olduğu gibi Rezüdileri hesaplırsak

$$\begin{aligned} U_N(z, t) &= \frac{2}{H} \sum_{v=1}^{\infty} \text{Sin} \lambda_v z \int_0^H \text{Sin} \lambda_v \xi u_0(\xi) d\xi \\ &+ \frac{2}{H} \sum_{v=1}^{\infty} \text{Sin} \lambda_v z \int_0^t e^{-\lambda_v^2(t-\tau)} d\tau \int_0^H \text{Sin} \lambda_v \xi \varphi_N(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.102)$$

alırız. Burada,

$$\lambda_v = \frac{(2v+1)\pi}{2H}$$

olur. (3.102) formülüne dahil olan,

$$\int_0^H \text{Sin} \lambda_v \xi \varphi_N(\xi) d\xi$$

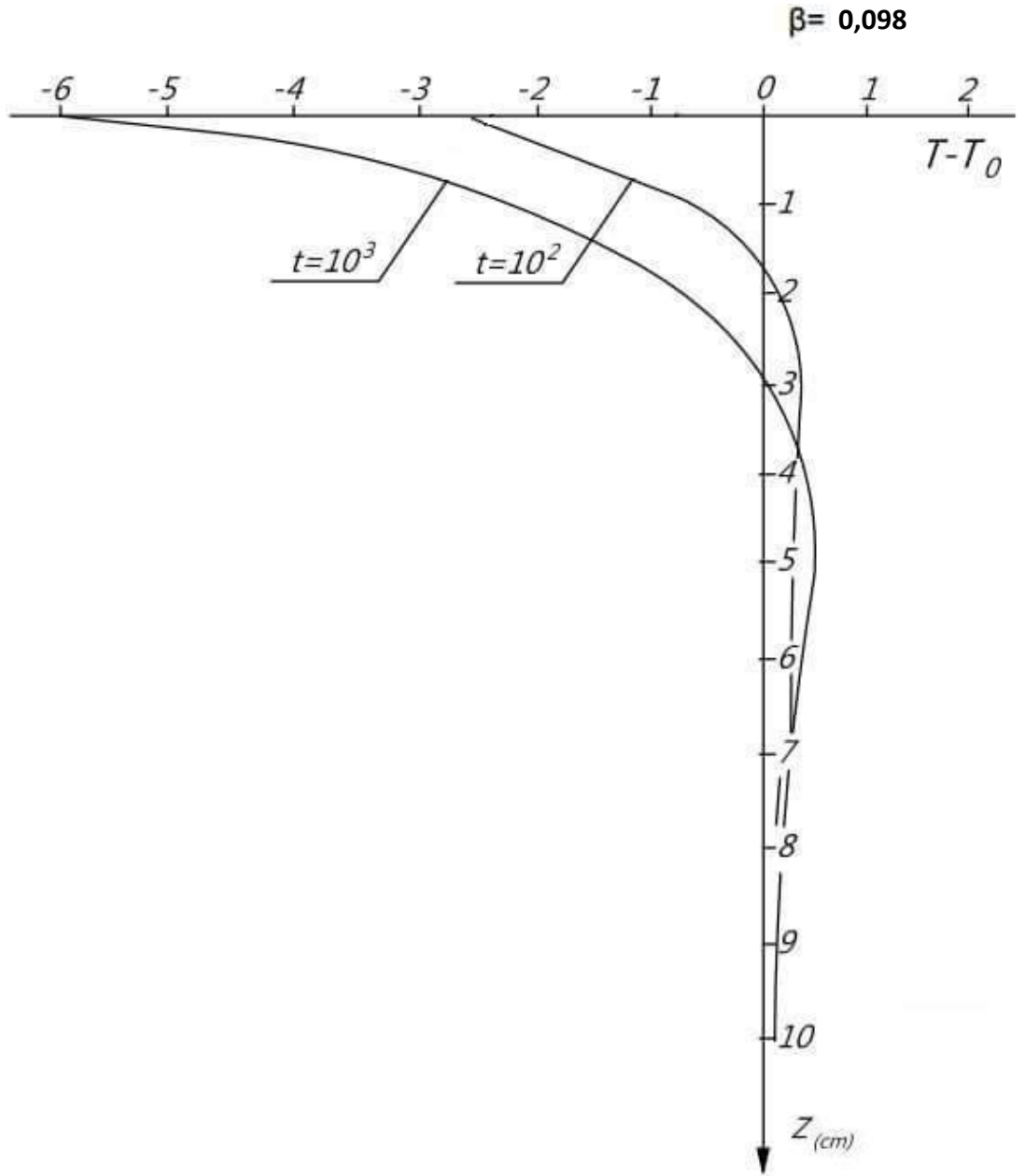
$N \rightarrow \infty$  mevcut olduğunda,

$$u(z, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(z, t) \quad (3.103)$$

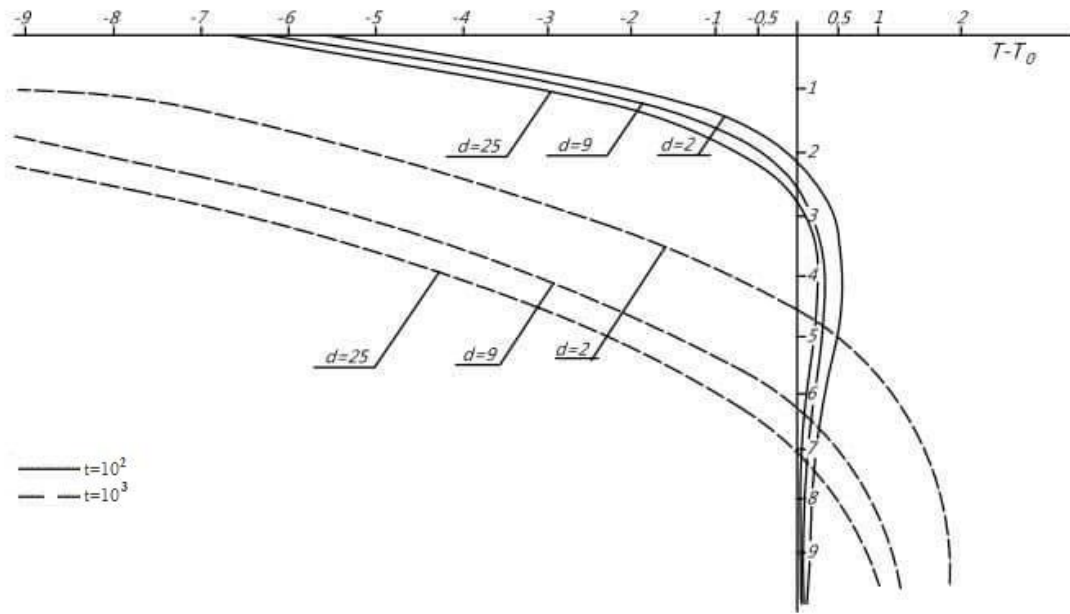
alırız.

(3.102) formülünü kullanarak bilgisayar testleri yapılmış ve elde edilen grafikler Şekil 6-7'de gösterilmiştir.

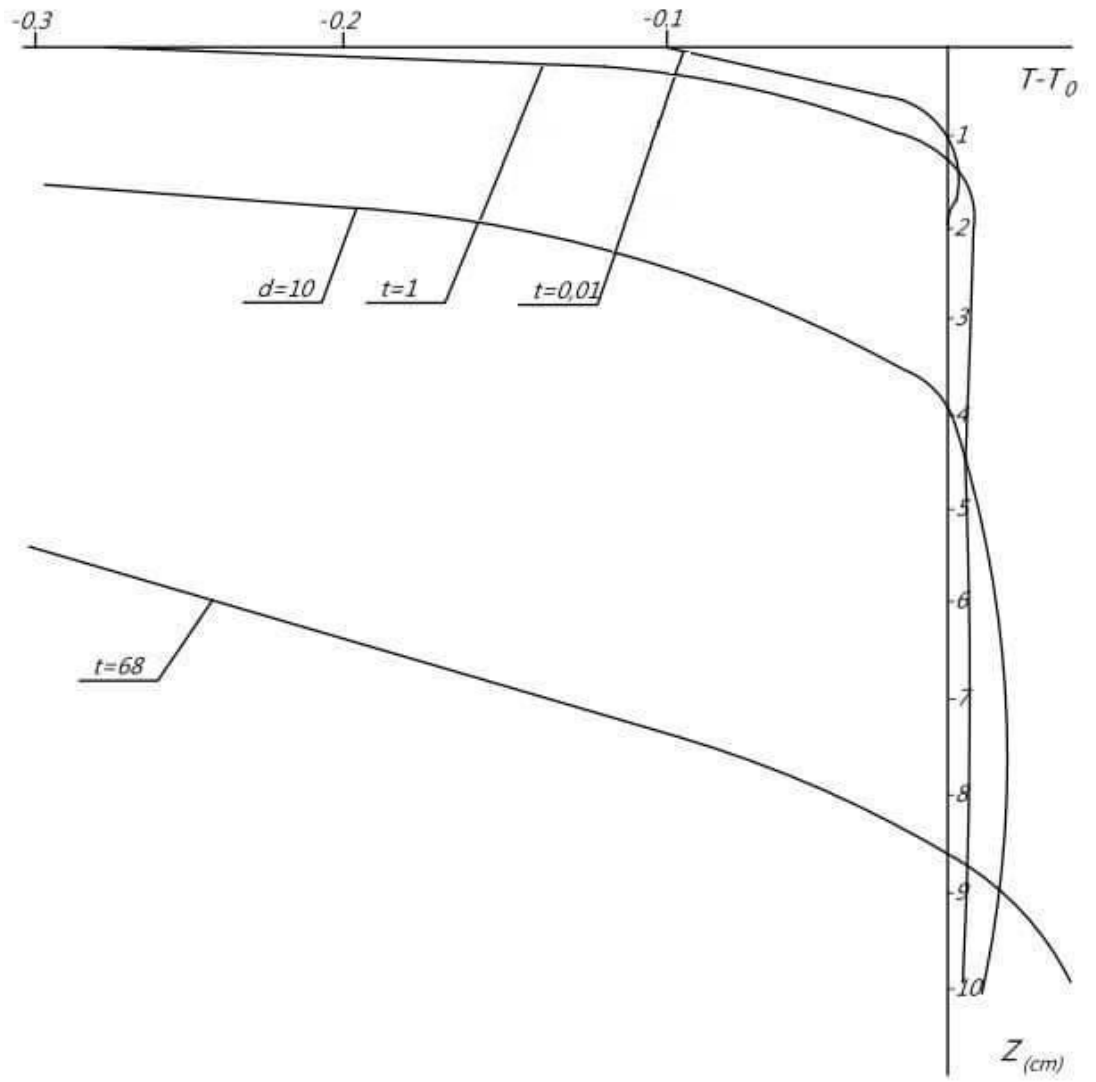
## ŞEKİLLER



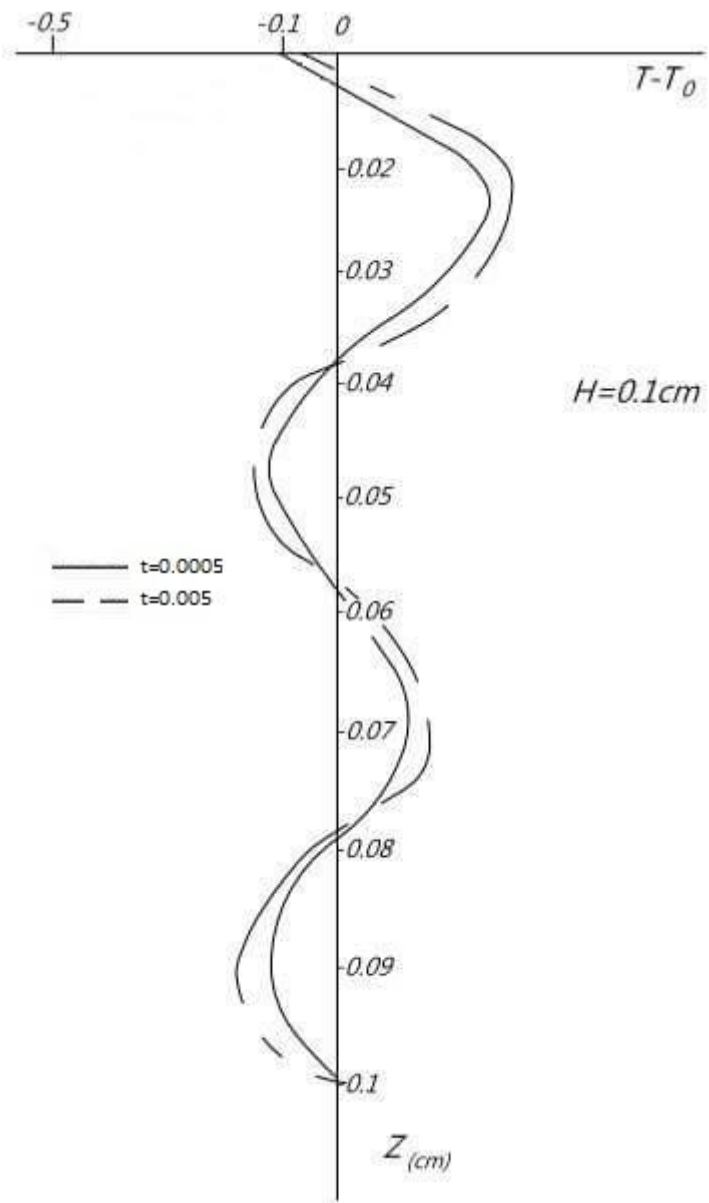
ŞEKİL 1



ŞEKİL 2

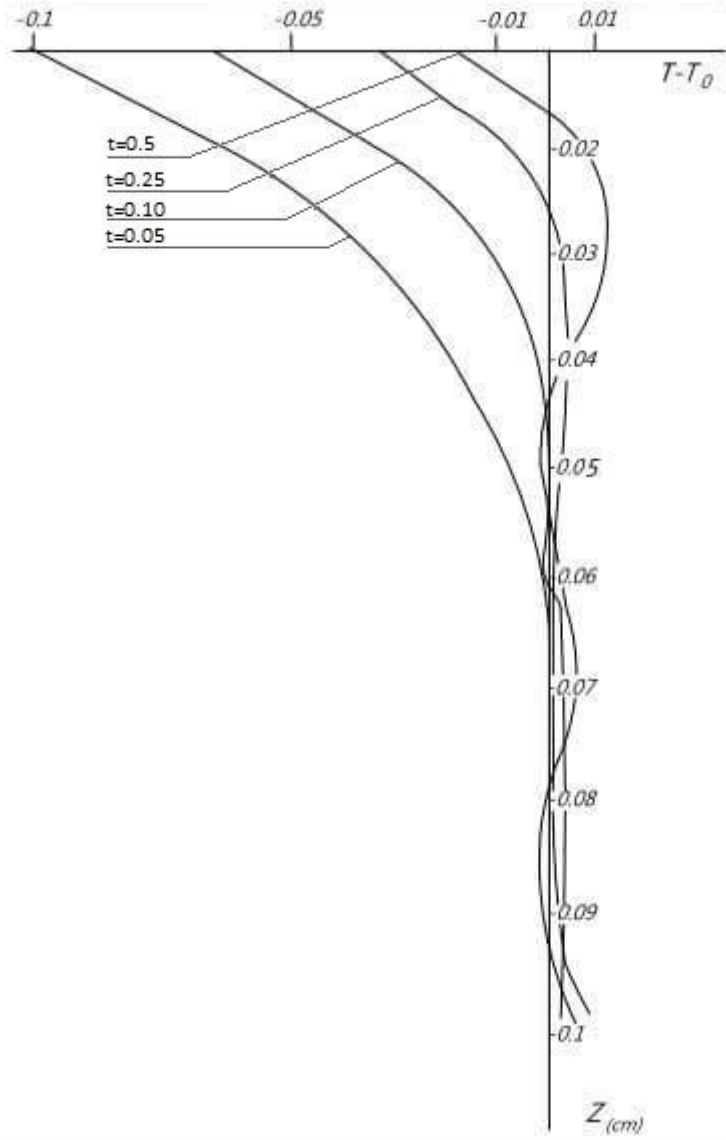


ŞEKİL 3

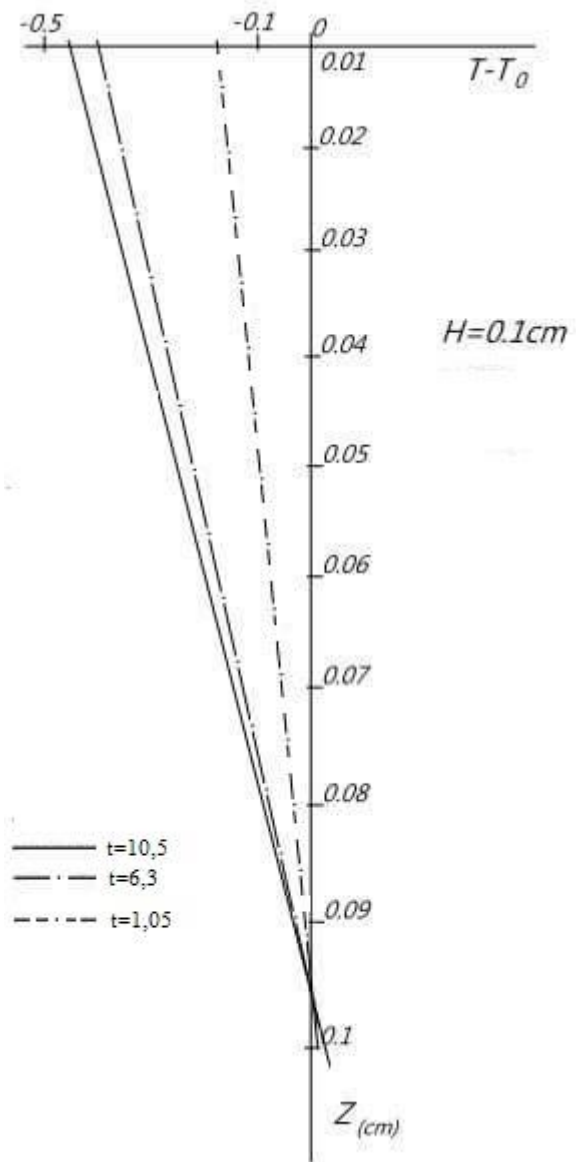


ŞEKİL  $4t = 10^2$

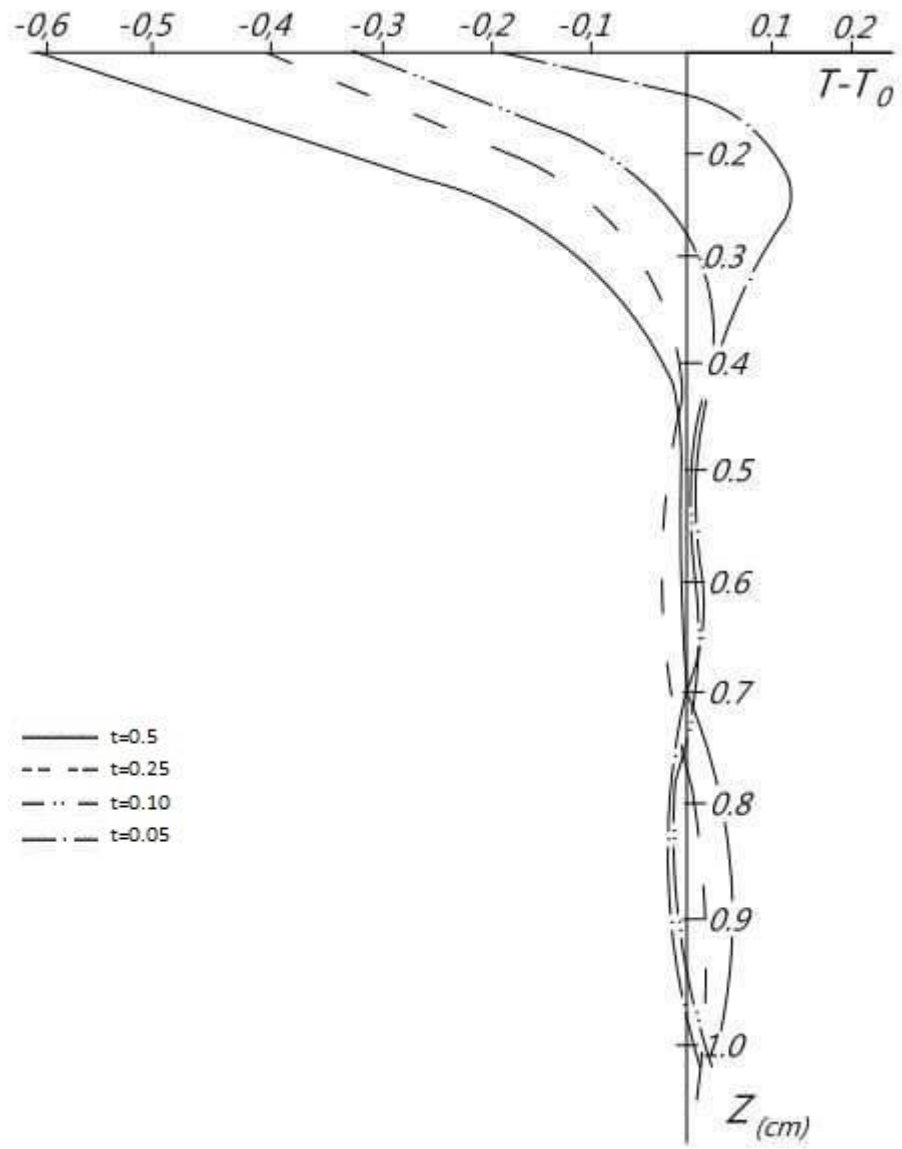




ŞEKİL 5



ŞEKİL 6



ŞEKİL 7

## SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- Deniz yüzeyinde ( $z = 0$ ) özelliğine sahip olan kaynak fonksiyon ve Self-adjoint olmayan ısı denklemi için sonlu farklar şeması kurulmuş ve uygun çözüm algoritması üretilmiştir.
- Göz önüne aldığımız problemin çözümü için Fourier serisi yöntemi ilk kez uygulanarak gerçek çözüm elde edilmiştir.
- Ayrıca incelediğimiz problemin çözümünün elde edilmesi için Rezidü yöntemi de uygulanmıştır. Rezidü yöntemi ile çözüm elde edilmiştir. Elde edilen çözümler kullanılarak bilgisayar destekli testleri yapılmıştır.

## KAYNAKÇA

- [1] Coddington, E.A., Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
- [2] Rasulov, M.L., Methods of contour Integration, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967
- [3] Rasulov, M., Sinsoysal, B., Residue Method of the Solution of Heat Equation with Nonlocal Boundary Condition, Beykent University Journal of Science and Technology, 2(1), pp. 146-158, 2008
- [4] Rasulov, M. A., A Numerical Method of Solving a Parabolic Equation with Degeneration Dif. Equations, Minsk, Vol. 18, No.8, pp. 1418-1427, 1992.
- [5] Mahir Rasulov, Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin Yayınevi, 344 sayfa, Ankara 2011.
- [6] Mahir Rasulov, Bahaddin Sinsoysal, Diferansiyel Denklemler Teorisine Giriş, Çağlayan Yayınevi, 2015
- [7] Samarskii, A.A., Theory of Difference Schemes. Moskow, Nauka, 1977.
- [8] Schwartz, L., Mathematical methods for Physical Sciences , 1965.
- [9] Tikhonov, A.N., Samrskii A., A. Equations of Mathematical Physics, M. Nauka, 1967, 724p.
- [10] Thomas, J.W., Numerical Partial Differential Equations, Finite Difference methods, Springer-Verlag, 436p, 1995.
- [11] Sinsoysal, B., Residue Method for Solution of Wave Equation with Nonlocal Boundary Condition, Beykent University Journal of Science and Technology, 3(1), pp. 74-81, 2009
- [12] Sinsoysal, B., Rasulov, M., Residue Method for the Solution of a 2D Linear Heat Equation with Nonlocal Boundary Conditions, Int. J. Contemp. Sciences, Vol. 3, No.34, (2008) 1693-1700

## ÖZGEÇMİŞ

25.09.1990 tarihinde Malatya’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Malatya’da aldıktan sonra Beykent Üniversitesi Matematik-Bilgisayar ve Yönetim Bilişim Sistemleri lisans bölümlerinden 2013 yılında mezun oldu. Sakarya’da yer alan ülkemizin önde gelen bir savunma sanayi firmasında Ağ ve Güvenlik Sorumlusu olarak çalışma hayatına devam etmektedir.

Mehmet Oğuz ÖZKAN