T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

ÜÇÜNCÜ MERTEBEYE GÖRE HOMOJEN DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Duygu GÜNERHAN

İstanbul, 2017

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

ÜÇÜNCÜ MERTEBEYE GÖRE HOMOJEN DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Duygu GÜNERHAN

Öğrenci No:
150860001

Danışman:
Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İstanbul, 2017

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "**Üçüncü Mertebeye Göre Homojen Denklem İçin Cauchy Probleminin Çözümü** " başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 02./05/2017

Duygu GÜNERHAN

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 150860001 no'lu Duygu GÜNERHAN'ın 14/04/2017 tarihinde yapılan tez savunma sınavı[1] sonucunda..45.. dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında[2] oybirliği / oyçokluğu ile, ..kabul.... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Başlığı[3] : Üçüncü Mertebeye Göre Homojen Denklem İçin Cauchy Probleminin Çözümü

Tez Sınav Jürisi	**Öğretim Üyesi**	**İmza**
Danışman	: Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL	
Üye	: Prof.Dr. Mahir RESULOV	
Üye	: Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR (Sakarya Üniversitesi)	

[1] Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

[2] Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

[3] İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşmasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV ile Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL'a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim.

Ayrıca tez aşamasında her zaman desteklerini benden esirgemeyen değerli aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Duygu GÜNERHAN

Adı ve Soyadı : Duygu GÜNERHAN
Danışmanı : Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans, 2017
Alanı : Matematik Bilgisayar
Anahtar Kelimeler : Cauhy Probleminin Çözümü, Üçüncü Mertebeye Göre Homojen Denklem

ÖZ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEYE GÖRE HOMOJEN DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

İkinci mertebeden dalga denkleminin çözümü için ünlü D’Alembert formülünün dalgaların dinamiğini incelemek için çok önemli bir enstruman olduğu herkes tarafından bilinmektedir. Yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler için D’Alambert türlü çözümlerin elde edilmesi büyük önem taşıdığı açıkça görülmektedir. Bu nedenle, tezde üçüncü mertebeye göre homojen sabit katsayılı lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için D’Alembert türlü çözümler elde edilmiştir.

Tezin ilk bölümünde sabit katsayılı lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar kullanılarak göz önüne aldığımız problemin genel çözümlerinin bulunması için ifadeler elde edilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde üçüncü mertebeye göre homojen sabit katsayılı lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminin çözümü elde edilmiştir. Kısmi türevli diferansiyel denkleme karşılık gelen karakteristik denklemin köklerinin sade ve katlı olan durumları irdelenmiş ve her bir durum için ayrı ayrı çözüm ifadeleri elde edilmiştir.

Nihayet tezin üçüncü bölümünde elde edilen çözümler kullanılarak, bazı bilgisayar testleri yapılmıştır. Bulunan sonuçlar bazı başlangıç profile sahip dalgaların dağılım dinamiğini açıkça ifade etmiştir.

Name and Surname : Duygu GÜNERHAN
Supervisor : Assoc. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
Degree and Date : Master, 2017
Major : Mathematics Computer
Key Words : Cauhy problem solution, third order homogeneous equation

ABSTRACT

SPLITTING OVER PHYSICAL PARAMETERS OF THE DRIVEN THIN FILM EQUATION AND ITS NUMERICAL SOLUTION

In this thesis, an original method having some advantages over the main problem has been proposed for the numerical solution of fourth dimensional degenerate parabolic equation with Cauchy condition, describing thin film equation.

At first the thin film equation is split over physical parameters. To find the numerical solution for the equations, a special auxiliary problem with some advantages over the main problem has been introduced and algorithms that describe all of the physical properties of the problem were created by using this auxiliary problem.

Finally, in order to demonstrate the effectiveness of the proposed method, some computer tests are conducted for the equations obtained in the second chapter with convective and diffusion terms.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No.

1. GİRİŞ

Mühendislik problemlerinin teorik incelenmesinde kısmi türevli diferansiyel denklemler için Cauchy problemine çok sıkça rastlanmaktadır. Bu nedenle kısmi türevli diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünün elde edilmesi hem teorik, hem de pratik açıdan önemli olmaktadır.

Söz konusu problemlerin çözümü literatürde iyice araştırılmış ve öğrenilmiştir. Bu kaynaklarda genelde fonksiyonel analiz yöntemleriyle çözümün varlık ve teklik problemleri incelenir [4],[5],[8],[12]. Courant, Petrovski, Tikhonov, Samarski gibi yazarların eserlerinde yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümü Fuorier dönüşümü yardımıyla elde edilmiştir [1],[9],[13]. Fakat bu ifadelerdeki özel integrallerin hesaplanması zorluk çıkartmaktadır. Bu nedenle yüksek mertebeden olan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için pratik açıdan kolayca kullanılabilen çözümlerin elde edilmesine ihtiyaç vardır. Literatürde sabit katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklemler için ciddi teorinin olduğu da bilinmektedir [2],[3],[6],[9],[11].

Bu tezde üçüncü mertebeden sabit katsayılı lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için Cauchy probleminin çözümü için D'Alambert türlü çözüm elde edilmiştir. Bulunana çözümler pratik açıdan kolay kullanımlı ifadeler olmanın yanı sıra problemin çözümünün varlık-tekliğini ve çözümün başlangıç verilerinden bağımsızlığını ispat etmeye imkan sağlamaktadır.

1.1 Sabit Katsayılı Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde bazı sınıf lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerini inceleyeceğiz.

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u = f(x,y) \tag{1.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $\mathcal{L}$ notasyonu

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \sum_i \sum_j c_{ij}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{\partial^j}{\partial y^j}\right)u \tag{1.2}$$

şeklinde yazılmış lineer operatör, c_{ij} ler ise bilinen sabitler olmaktadır. (1.1) e karşılık gelen homojen denklemin, yani

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0 \tag{1.3}$$

denkleminin herhangi keyfi elemanlar içeren çözümüne, adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi genel çözüm veya tamamlayıcı fonksiyon diyeceğiz. Benzer olarak, (1.1) denkleminin herhangi bir çözümüne de özel integrali adını vereceğiz.

Teorem 1.1$u(x,y)$ ve $z_1(x,y)$ sırasıyla tamamlayıcı fonksiyon ve özel integral olsun. Bu durumda $u+z_1$ denklemin genel çözümü olmaktadır.

İspat. (1.1) ve (1.3) denklemleri aynı cinsten olduğundan $u+z_1$ genel çözüm olur. Ayrıca,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0 \text{ ve } \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)z_1=f(x,y)$$

ifadelerinden

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+z_1)=f(x,y)$$

olur, yani $u+z_1$ (1.1) denkleminin çözümüdür.

Teorem 1.2 Eğer $u_1,u_2,\dots,u_n$ homojen denklemin çözümleri ise

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

de homojen denklemin çözümü olur.

İspat. Teoremin ispatı aşağıdaki

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)(c_i u_i)=c_i\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u_i=c_i\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\sum_{i=1}^{n}u_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}c_i\,\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u_i=0$$

eşitliğinden elde edilir.

Sonraki işlerimizde kolaylık sağlamak için

$$\frac{\partial}{\partial x}=D,\quad \frac{\partial}{\partial y}=D'$$

ile gösterelim.$\mathcal{L}(D,D')$ lineer operatörlerini aşağıdaki gibi sınıflandıralım:

a) Eğer a ve b sabitler olmak koşuluyla $\mathcal{L}(D,D')$ operatörü $D+aD'+b$ gibi lineer operatörlerin çarpımı şeklinde gösterilebilirse, bu taktirde $\mathcal{L}$ ye indirgenebilir operatör denir.

b) $\mathcal{L}(D,D')$ operatörü $D+aD'+b$ gibi operatörlerin çarpımı (faktörizasyonu) şeklinde ifade edilemezse, böyle operatörlere indirgenemeyen operatör denir.

Örnek 1.1$D^2-D'^2$ indirgenebilirdir. Çünkü,

$$D^2 - {D'}^2 = (D + D')(D - D')$$

şeklinde yazılabilir. Fakat, $D^2 - D'$ operatörü indirgenemeyendir.

1.2 İndirgenebilir Denklemler

Teorem 1.3 Eğer $\mathcal{L}(D, D')$ indirgenebilirse, bu taktirde lineer çarpımların sıralaması önemli değildir.

İspat. Eğer

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)(\alpha_s D + \beta_s D' + \gamma_s)$$
$$= (\alpha_s D + \beta_s D' + \gamma_s)(\alpha_k D + \beta_k D' + \gamma_k) \qquad (1.4)$$

olduğunu gösterebilirsek, bu durumda herhangi bir indirgenebilir operatör

$$\mathcal{L}(D, D') = \prod_{r=1}^{n} (\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) \qquad (1.5)$$

şeklinde gösterilebilir. (1.4) ün ispatı ise (1.4) eşitliğinin her iki tarafının da

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)(\alpha_s D + \beta_s D' + \gamma_s) = \alpha_r \alpha_s D^2 + (\alpha_r \beta_s + \beta_r \alpha_s) D D'$$
$$+ \beta_r \beta_s {D'}^2 + (\alpha_r \gamma_s + \gamma_r \alpha_s) D + (\beta_r \gamma_s + \gamma_r \beta_s) D' + \gamma_r \gamma_s$$

ifadesine eşit olduğunu göstermek yeterlidir.

Teorem 1.4 Eğer $\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r$ ifadesi $\mathcal{L}(D, D')$ operatörünün faktörlerinden birisi ve herhangi bir $\phi_r(\xi)$ fonksiyonu ve $\alpha_r \neq 0$ için

$$u_r = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r} x} \phi_r(\beta_r x - \alpha_r y)$$

ifadesi $\mathcal{L}(D, D')u = 0$ denkleminin çözümüdür.

İspat. $n = 1$ durumu için

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)u = 0$$

denklemini açık şekilde yazarsak

$$\alpha_r \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_r \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_r u = 0$$

olur. Karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{dy}{\beta_r} = \frac{du}{-\gamma_r}$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$C_1 = \beta_r x - \alpha_r y$$

$$C_2 = u - e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r} x}$$

aralık integrallerini buluruz. Genel çözüm

$$F(C_1, C_2) = 0$$

veya

$$u = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi(\beta_r x - \alpha_r y)$$

olur.

İspatı gerçekleştirmek için u_r için yazılmış olan ifadeye sırasıyla D ve D' türev işleçlerini uygularsak

$$Du_r \equiv \frac{\partial}{\partial x}u_r = -\frac{\gamma_r}{\alpha_r}e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi_r(\beta_r x - \alpha_r y) + e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi_r{}'(\beta_r x - \alpha_r y)\beta_r$$

$$= -\frac{\gamma_r}{\alpha_r}u_r + \beta_r e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi_r{}'(\beta_r x - \alpha_r y)$$

ve

$$D'u_r \equiv \frac{\partial}{\partial y}u_r = -\alpha_r e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi_r{}'(\beta_r x - \alpha_r y)$$

elde ederiz. Bulunan bu değerler $(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)u$ ifadesinde yerine konulursa

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)u = 0 \qquad (1.6)$$

bulunur. Teorem 1.3 ü kullanarak

$$\mathcal{L}(D, D') = \{\prod_{s=1}^{n}(\alpha_s D + \beta_s D' + \gamma_s)\}(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)u_r \qquad (1.7)$$

elde ederiz. (1.6) ve (1.7) den

$$\mathcal{L}(D, D')u_r \equiv 0$$

olduğunu görürüz.

Benzer yolla aşağıdaki teoremi de ispatlayabiliriz

Teorem 1.5 Eğer $\beta_r D' + \gamma_r$ ifadesi $\mathcal{L}(D, D')$ operatörünün herhangi bir faktörü ve $\phi_r(\xi)$ herhangi bir fonksiyon, $\beta_r \neq 0$ için

$$u_r = e^{-\frac{\gamma_r}{\beta_r}y}\phi_r(\beta_r x)$$

ifadesi $\mathcal{L}(D, D')u = 0$ denkleminin çözümüdür.

Not 1.1 Aşağıdaki denklemi

$$(\beta_r D' + \gamma_r)u = 0$$

göz önüne alalım.

$$\beta_r \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_r u = 0$$

denklemini değişkenlerine ayırırsak,

$$\frac{\partial u}{u} = -\frac{\gamma_r}{\beta_r} dy$$

olur. Buradan

$$u = e^{-\frac{\gamma_r}{\beta_r} y} \phi_r(\beta_r x)$$

bulunur.

Bazı durumlarda $\mathcal{L}(D, D')$ operatörünün katlı faktörleri de olabilir, yani faktörler

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^k$$

şeklinde olabilir. Bu şekilde faktörleri olan denklemlerin çözümleri Teorem 1.4 ve Teorem 1.5 in uygulanması ile bulunur.

Özel durumu inceleyelim. $k = 2$ olsun. Bu durumda denklemi

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^2 u = 0 \tag{1.8}$$

şeklinde yazarız.

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) u = U(x, y)$$

ile gösterirsek (1.8) ifadesi

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) U = 0$$

olur. Teorem 1.4 e göre

$$U(x, y) = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r} x} \phi_r(\beta_r x - \alpha_r y), \ \alpha_r \neq 0$$

şeklinde yazılır. Aradığımız $u(x, y)$ fonksiyonunu bulmak için

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) u = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r} x} \phi_r(\beta_r x - \alpha_r y) \tag{1.9}$$

kısmi türevli denklemi çözmemiz gerekmektedir. (1.9) denklemini açık bir şekilde yazarsak

$$\alpha_r \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_r \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_r u = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \phi_r(\beta_r x - \alpha_r y)$$

olur. Karakteristik denklemi ise

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{dy}{\beta_r} = \frac{du}{-\gamma_r u + e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \phi_r(\beta_r x - \alpha_r y)}$$

olmaktadır. İlk birinci aralık integrali

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{dy}{\beta_r}$$

denkleminden $c_1 = \beta_r x - \alpha_r y$ olur. Şimdi

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{du}{-\gamma_r u + e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \phi_r(c_1)}$$

denklemini çözelim.

Sonuncu denklemi u ya göre düzenlersek,

$$\frac{du}{dx} + \frac{\gamma_r}{\alpha_r} u = \frac{1}{\alpha_r} e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \phi_r(c_1) \tag{1.10}$$

şeklinde adi lineer diferansiyel denklem olduğu görülür. Bu denklemi çözmek için önce

$$\frac{du}{dx} + \frac{\gamma_r}{\alpha_r} u = 0$$

homojen kısmını göz önüne alalım. Bu homojen denklemi

$$\frac{du}{u} = -\frac{\gamma_r}{\alpha_r} dx$$

şeklinde yazıp, değişkenlerine ayrıştırma yöntemini uygularsak, çözümü

$$u = ce^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}$$

şeklinde buluruz. Buradaki integrasyon sabitini gösteren$c$ yi x in bilinmeyen fonksiyonu olarak düşünüp, homojen olmayan denklemin genel çözümünü

$$u = c(x)e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} (1.11)$$

şeklinde arayalım. (1.11) den türev alırsak,

$$\frac{du}{dx} = c'(x)e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} - \frac{\gamma_r}{\alpha_r}c(x)e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \tag{1.12}$$

elde ederiz. (1.11) ve (1.12) ifadeleri (1.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$c'(x) = \frac{1}{\alpha_r}\phi_r(c_1)$$

bulunur ve buradan $c(x)$bilinmeyen fonksiyonu

$$c(x) = \frac{1}{\alpha_r\beta_r}\int_0^x \phi_r(\xi)d\xi + c_2$$

olarak belirlenir. Burada c_2 integrasyon sabiti olmaktadır. $c(x)$ fonksiyonu (1.11) de yerine konursa, homojen olmayan (1.10) denkleminin genel çözümü

$$u = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\left\{\frac{1}{\alpha_r\beta_r}\int_0^x \phi_r(\xi)d\xi + c_2\right\}$$

olur.

Teorem 1.6$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^n$ çarpımı $\mathcal{L}(D, D')$ operatötünün faktörü ve $\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \dots, \varphi_{r_n}$ herhangi bir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\exp\left(-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x\right)\sum_{s=1}^{n} x^{s-1}\,\varphi_{r_s}(\beta_r x - \alpha_r y)$$

ifadesi $\mathcal{L}(D, D') = 0$ denkleminin çözümü olmaktadır.

Bu teorem 1.5 teoremin genelleştilmişi olduğundan onu ispatlamağa gerek kalmıyor.

Teorem 1.7 $(\beta_r D' + \gamma_r)^m$ çarpımı $\mathcal{L}(D, D')$ operatötünün faktörü ve $\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \dots, \varphi_{r_m}$ herhangi bir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\exp\left(-\frac{\gamma_r}{\beta_r}y\right)\sum_{s=1}^{m} x^{s-1}\,\varphi_{r_s}(\beta_r x)$$

ifadesi $\mathcal{L}(D, D') = 0$ denkleminin çözümü olmaktadır.

Bu söylediklerimizi genelleştirmiş olursak aşağıdaki genel teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 1.8. Eğer α_r lerin hiç biri sıfır değilse ve

$$\mathcal{L}(D,D') = \prod_{r=1}^{n} (\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^m$$

operatörü dönüştürüle bilense,

$$u(x,y) = \sum_{\mathrm{r=1}}^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x\right) \sum_{s=1}^{m_r} x^{s-1}\, \varphi_{r_s}(\beta_r x - \alpha_r y) \qquad (1.13)$$

$\mathcal{L}(D,D') = 0$ denkleminin çözümü olmaktadır.

Örnek 1.1 Aşağıdaki denklemin

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

çözümünü bulalım.

Bunun için denklemi

$$(D + D')^2 (D - D')^2 = 0$$

gibi yazalım. (1.13) formülüne göre çözümü

$$u(x,y) = x\varphi_1(x-y) + \varphi_2(x-y) + x\psi_1(x+y) + \psi_2(x+y)$$

kolayca buluruz. Burada $\varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi_2$ herhangi bir fonksiyonlardır.

(1) denklemin tamamlayıcı fonksiyonunu bulduktan sonra, çözümü tamamlamak için yalnızca özel bir integral bulmamız gerekir. Bu 6. teoremin kanıtında kullanılan benzer bir şekilde bulunabilir.

Gerçekten de, eğer

$$u_1 = \prod_{r=2}^{n} (\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) u$$

olarak göstersek u_1 fonksiyonunu aşağıdaki denklemden

$$\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \gamma_1 u_1 = f(x,y) \qquad (1.14)$$

bulmamız gerekecektir.

Örnek 1.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x - y$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Denklemi $(D - D')(D + D')u = x - y$ seklinde yazalım. $(D + D')u = u_1$ olsun. Bu durumda $(D - D')u_1 = x - y$ olur. Sonuncu denklemi

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = x - y$$

gibi yazıp özel çözümü bulalım. Karakteristik denklem

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du_1}{x - y}$$

olur. Buradan $c_1 = x - y,$ ve $c_2 = u_1 - \frac{1}{2}(x - y)^2$ elde ederiz. Denklemin genel çözümü

$$u_1 = \frac{1}{2}(x - y)^2 + f(x - y)$$

olmaktadır. $f = 0$ alırsak özel çözümü bulmuş oluruz. Homojen denklemin de genel çözümünü

$$u = \frac{1}{2}(x - y)^2 + f(x - y) + g(x + y) \tag{1.15}$$

şeklinde buluruz.

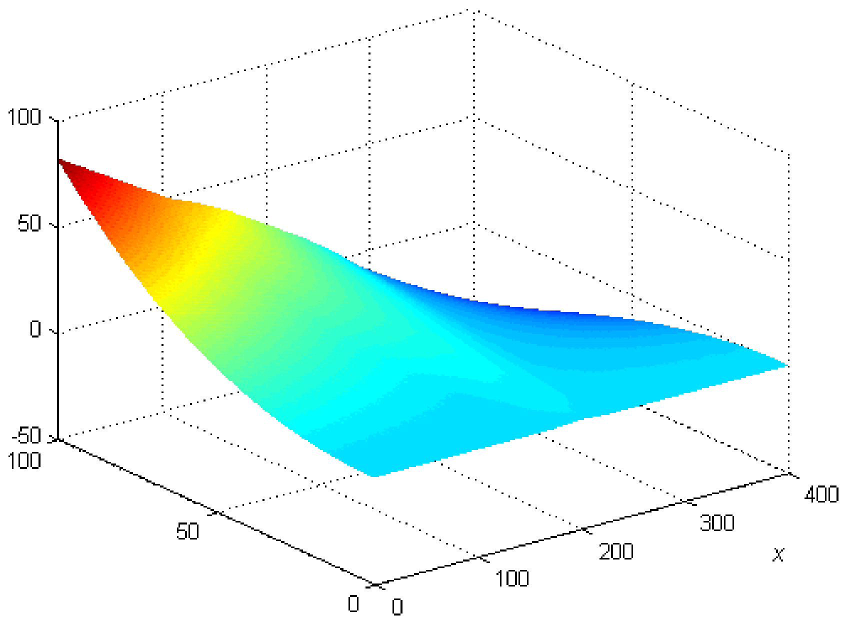
Başlangıç profilini ve hızını

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \phi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 2, & -2 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

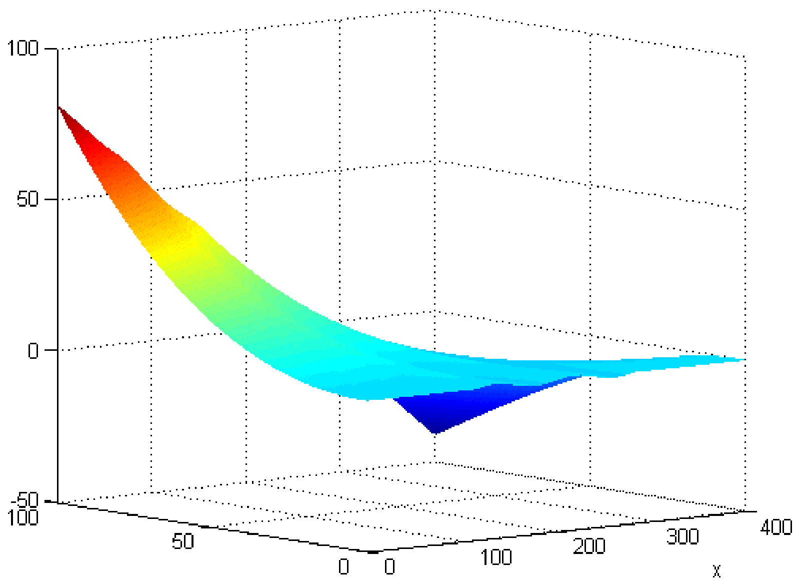
olarak alırsak (1.15) çözümünün grafiği için Şekil 1.1 i,

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -2\pi, \\ \sin x, & -2\pi \le x \le 2\pi, \\ 0, & x > 2\pi \end{cases} \phi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -2\pi, \\ \cos x, & -2\pi \le x \le 2\pi, \\ 0, & x > 2\pi \end{cases}$$

şeklinde alırsak Şekil 1.2 yi elde ederiz.



Şekil 1.1 (1.15) çözümünün grafiği



Şekil 1.2 (1.15) çözümünün grafiği

2. ÜÇÜNCÜ MERTEBEYE GÖRE HOMOJEN HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN D'ALEMBERT TÜRLÜ ÇÖZÜMÜ

Üçüncü mertebeye göre homojen olan aşağıdaki

$$a_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + a_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + a_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (2.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Buradaa_i, $(i = 0{,}1{,}2)$ler bilinen reel sabitleri göstermektedir. (2.1) denklemini

$$\left.\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \phi_k(x), (k = 0{,}1{,}2) \qquad (2.2)$$

başlangıç koşulları çerçevesinde inceleyelim. (2.1),(2.2) probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \varphi(x + \lambda t) \qquad (2.3)$$

cinsinden arayalım. Burada,φ fonksiyonu üç kez sürekli diferansiyellenebilen fonksiyondur.λ ise bilinmeyen ve bulunması gereken sabiti göstermektedir.

(2.3) ifadesini (2.1) de yerine yazmak için denklemin talep ettiği türevleri

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\varphi', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2\varphi'', \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \lambda^3\varphi''',$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi', \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'', \; \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \varphi''',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \lambda\varphi'', \; \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} = \lambda^2\varphi''', \; \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \lambda\varphi'''$$

olarak elde eder, (2.1) de yerine yazarsak

$$a_0\lambda^3\varphi''' + a_1\lambda^2\varphi''' + a_2\lambda\varphi''' + a_3\varphi''' = 0$$

veya

$$\varphi'''[a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3] = 0(2.4)$$

buluruz.Buradan

$$\varphi'''(x + \lambda t) = 0 \qquad (2.5)$$

ve

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \qquad (2.6)$$

denklemlerini elde ederiz.

(2.5) denkleminde$x + \lambda t = \xi$ dersek,$\varphi'''(\xi) = 0$ olarak yazabiliriz. Buradan üç ke ξ ye göre integralleme yoluyla,

$$\varphi'' = c_{1,}$$

$$\varphi' = c_1\xi + c_{2,}$$

$$\varphi(\xi) = c_1\xi^2 + c_2\xi + c_3$$

$$\varphi(x + \lambda t) = c_1(x + \lambda t)^2 + c_2(x + \lambda t) + c_3$$

özel çözümlerini elde ederiz.

(2.6) denklemi üçüncü dereceden cebirsel denklemdir. Bu denklemi karakteristik denklem olarak adlandıracağız.Cebirin esas teoremine göre üçüncü dereceden denklemin köklerinin sayısı üçten fazla olamaz.

Aşağıdaki durumlar olabilir:

1^0. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, yani kökler reel ve birbirinden farklı olabilir.

2^0. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, yani $\lambda = \lambda_1$üçkatlı kök olabilir.

$3^{0.}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, yani $\lambda = \lambda_1$sade kök,λ_3 ise iki katlı kök olabilir.

Bu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

2.1 Köklerin Reel Ve Birbirinden Farklı Olması Hali

(2.6) denkleminin λ_1, λ_2 ve λ_3 ile gösterilen birbirinden farklı üç tane sade reel kökü olduğunu varsayalım. Bu taktirde,

$$\varphi_1(x + \lambda_1 t), \varphi_2(x + \lambda_2 t), \varphi_3(x + \lambda_3 t)$$

fonksiyonlarının (2.1) denklemini koruduğu kolayca gösterilebilir.Gerçektende,$u_i = \varphi_i(x + \lambda_i t), (i = 1,2,3)$fonksiyonları için

$$a_0\lambda_i^3\varphi''' \,(x+\lambda_i t) + a_1\lambda_i^2\varphi''' \,(x+\lambda_i t) + a_2\lambda_i\varphi''' \,(x+\lambda_i t) + a_3\varphi''' \,(x+\lambda_i t) =$$

$$= \varphi'''(x+\lambda_i t)[a_0\lambda_i^3 + a_1\lambda_i^2 + \ a_2\lambda_i + \ a_3] = 0$$

olduğunu yani $\varphi_i, (i = 1,2,3)$ fonksiyonlarının (2.1) denklemini koruduğunu görebiliriz.

Denklem lineer olduğu için,

$$u(x,t) = \varphi_1(x+\lambda_1 t) + \varphi_2(x+\lambda_2 t) + \varphi_3(x+\lambda_3 t) \quad (2.7)$$

fonksiyonunun da (2.1) denklemini koruduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi φ_1, φ_2ve $\varphi_3$fonksiyonlarını (2.7) ifadesinin (2.2)başlangıç koşullarını koruyacak şekilde seçelim. Bunun için (2.7) ifadesini (2.2) de yerine yazalım. Önce (2.2) başlangıç koşullarını açık şekilde yazalım:

$$k = \ 0, u(x,0) = \phi_0(x),$$

$$k = 1, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \phi_1(x),$$

$$k = 2, \frac{\partial^2 u\,(x,0)}{\partial t^2} = \phi_2(x).$$

Bu ifadeler (2.7) ifadesinde dikkate alınırsa

$$\begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \phi_0(x), \\ \lambda_1\varphi_1'(x) + \lambda_2\varphi_2'(x) + \lambda_3\varphi_3'(x) = \phi_1(x), \\ {\lambda_1}^2\varphi_1''(x) + {\lambda_2}^2\varphi_2''(x) + {\lambda_3}^2\varphi_3^{2\prime}(x) = \phi_2(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

cebirsel denklemler sistemini elde ederiz. (2.8) denklemler sisteminin ikinci denklemini bir defa, üçüncü denklemini iki defa xe göre integrallersek

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \phi_0(x),$$

$$\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) = \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi + C_{20},$$

$$\lambda_1^2\varphi_1(x) + \lambda_2^2\varphi_2(x) + \lambda_3^2\varphi_3(x) = \int_0^x d\xi \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi + C_{30}\,x + C_{31}$$

alırız. Burada C_{20}, C_{30} ve C_{31} herhangi bir sabitlerdir.Cauchy formülünü

$$\int_0^x d\xi \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi = \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi$$

Cauchy formülünü de dikkate alırsak φ_1, φ_2 ve φ_3 bilinmeyen fonksiyonları için aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini

$$\begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \phi_0(x), \\ \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) = \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi + C_{20}, \\ \lambda_1^2\varphi_1(x) + \lambda_2^2\varphi_2(x) + \lambda_3^2\varphi_3(x) = \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi + C_{30}x + C_{31} \end{cases}$$

elde ederiz. Bu denklemler sisteminin tek bir çözümünün varlığı için bilinmeyen fonksiyonların katsayılarından oluşan aşağıdaki determinantın

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.9)$$

olması gerekli ve yeterli koşuldur.Bu determinant Vandermond determinantı olarak adlandırılmaktadır ve

$$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)$$

dir. $\lambda_i, (i = 1,2,3)$ ler birbirinden farklı olduğu için Δ sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, sisteminin tek bir çözümü vardır. Söz konusu çözümleri Cramer yöntemiyle bulalım.

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0(x) & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi + C_{20} & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \int_0^x (x-\xi)\,\phi_2(\xi)d\xi + C_{30}x + C_{31} & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0(x) & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \int_0^x (x-\xi)\,\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ C_{20} & \lambda_2 & \lambda_3 \\ C_{30}x + C_{31} & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \qquad (2.10)$$

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & \phi_0(x) & 1\\ \lambda_1 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi + C_{20} & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi + C_{30}x + C_{31} & \lambda_3^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & \phi_0(x) & 1\\ \lambda_1 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_3^2\end{vmatrix}+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ \lambda_1 & C_{20} & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & C_{30}x + C_{31} & \lambda_3^2\end{vmatrix} \qquad (2.11)$$

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & 1 & \phi_0(x)\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi + C_{20}\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi + C_{30}x + C_{31}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & 1 & \phi_0(x)\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi\end{vmatrix}+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & C_{20}\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & C_{30}x + C_{31}\end{vmatrix} \qquad (2.12)$$

Şimdi, (2.10)-(2.12) formüllerindeki ikinci determinantlar için

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ C_{20} & \lambda_2 & \lambda_3\\ C_{30}x + C_{31} & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ \lambda_1 & C_{20} & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & C_{30}x + C_{31} & \lambda_3^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & C_{20}\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & C_{30}x + C_{31}\end{vmatrix}=0$$

olmaktadır. Bu durum aşağıdaki lemmadan da görülebilir.

Lemma 2.1. $f_{ij}(y)=f_{ij}(y_1,y_2)$, $(i,j=1,2)$ fonksiyonları tanım bölgesi D olan tek değerli fonksiyonlar olsun. λ_1 ve λ_2 parametreler olmak üzere, herhangi bir $y \in D$ için

$$A_2=\begin{vmatrix}0 & 1\\ f_{20}(y) & \lambda_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ \lambda_1 & f_{20}(y)\end{vmatrix}=0 \qquad (2.13)$$

dır.

$n=3$ olduğunda Lemma 1 aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ f_{20}(y) & \lambda_2 & \lambda_3 \\ f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & f_{20}(y) & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) & \lambda_3^2 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & f_{20}(y) \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) \end{vmatrix} \tag{2.14}$$

$$= 0\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} - f_{20}(y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + [f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y)]\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$-0\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + f_{20}(y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} - [f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y)]\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$+0\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} - f_{20}(y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + [f_{30}(y) + f_{31}(y)]\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$= f_{20}(y)\left[-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix}\right]$$

$$+[f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y)]\left\{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= f_{20}(y)[-\lambda_3^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2] + [f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y)]$$

$$[\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1] = 0.$$

Bu durumda (2.1), (2.2) probleminin çözümü için (2.7) ifadesinden

$$u(x,t) = \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{vmatrix} \phi_0(x+\lambda_1 t) & 1 & 1 \\ \int_0^{x+\lambda_1 t} \phi_1(\xi)d\xi & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \int_0^{x+\lambda_1 t} (x+\lambda_1 t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}\right.$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & \phi_0(x+\lambda_2 t) & 1 \\ \lambda_1 & \int_0^{x+\lambda_2 t} \phi_1(\xi)d\xi & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \int_0^{x+\lambda_2 t}(x+\lambda_2 t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \tag{2.15}$$

$$+\left|\begin{matrix} 1 & 1 & \phi_0(x+\lambda_3 t) \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \int_0^{x+\lambda_3 t} \phi_1(\xi)d\xi \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \int_0^{x+\lambda_3 t}(x+\lambda_3 t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi \end{matrix}\right|\Bigg\}$$

elde ederiz. (2.15) ifadesi (2.1),(2.2) probleminin D'Alembert formülünün genişletilmesi olmaktadır.

Denkleme karşılık gelen karakteristik denklemin köklerinin reel ve birbirinden farklı olduğu durum için aşağıdaki örnekleri göz önüne alalım.

Örnek 2.1. Aşağıdaki mertebeye göre homojen olan

$$\frac{\partial^3 z}{\partial t^3} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial t^2 \partial x} - \frac{\partial^3 z}{\partial t \partial x^2} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0,$$

hiperbolik denklemi

$$z(x,0) = \phi_0(x),$$

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial t} = \phi_1(x),$$

$$\frac{\partial^2 z(x,0)}{\partial t^2} = \phi_2(x),$$

başlangıç koşullarıyla verilsin. Yukarıda bahsedildiği gibi, λ bir sabit ve φise üçüncü mertebeden sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere, bu problemin çözümünü$z = \varphi(x+\lambda t)$biçimindeolsun. z fonksiyonun türevleri denklemde yerine konulursa

$$\lambda^3\varphi''' - 2\lambda^2\varphi''' - \lambda\varphi''' + 2\varphi''' = 0$$

veya

$$\varphi'''[\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2] = 0$$

alınır. Buradan da görüldüğü üzere, denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

dır. Karakteristik denklemin kökleri reel ve birbirinden farklı olup, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = -1$ dir. O halde, $\varphi_1(x+t), \varphi_2(x+2t), \varphi_3(x-t)$ fonksiyonları homojen denklemin fundamental çözümler sistemini oluşturur. Kolayca görüldüğü üzere,

$$z(x,t) = \varphi_1(x+t) + \varphi_2(x+2t) + \varphi_3(x-t)$$

fonksiyonu da homojen denklemin çözümü olur.

φ_1, $\varphi_2$ve $\varphi_3$fonksiyonlarının$t = 0$ değerinde başlangıç koşullarını sağlaması için

$$\begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \phi_0(x), \\ \varphi_1'(x) + 2\varphi_2'(x) - 1\varphi_3'(x) = \phi_1(x), \\ \varphi_1''(x) + 4\varphi_2''(x) + \varphi_3''(x) = \phi_2(x) \end{cases}$$

olmalıdır. Bu sistemin ikinci denklemini bir defa, üçüncü denklemini ise iki defa integrallersek,

$$\begin{cases} \varphi_1(x) + \ \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \phi_0(x), \\ \lambda_1\varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) - \varphi_3(x) = \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi + C_{20}, \\ \varphi_1(x) + 4\varphi_2(x) + \varphi_3(x) = \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi + C_{30}x + C_{31} \end{cases}$$

sistemini elde ederiz. Burada C_{20}, C_{30} ve C_{31}ler keyfiintegrasyon sabitleri olmaktadır. Bu sistemin katsayılar determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

dır. Cramer kuralına göre

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \phi_0(x) & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi + C_{20} & 2 & -1 \\ \int_0^x (x-\xi)\,\phi_2(\xi)d\xi + C_{30}\xi + C_{31} & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \phi_0(x) & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi & 2 & -1 \\ \int_0^x (x-\xi)\,\phi_2(\xi)d\xi & 4 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ C_{20} & 2 & -1 \\ C_{30}\xi + C_{31} & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & \phi_0(x) & 1 \\ 1 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi + C_{20} & -1 \\ 1 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi + C_{30}\xi + C_{31} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & \phi_0(x) & 1\\ 1 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi & -1\\ 1 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & C_{20} & -1\\ 1 & C_{30}\xi+C_{31} & 1\end{vmatrix},$$

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & 1 & \phi_0(x)\\ 1 & 2 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi+C_{20}\\ 1 & 4 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi+C_{30}\xi+C_{31}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & \phi_0(x)\\ 1 & 2 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi+C_{20}\\ 1 & 4 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi\end{vmatrix}+\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & C_{20}\\ 1 & 4 & C_{30}\xi+C_{31}\end{vmatrix}$$

olur. $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ve $\varphi_3(x)$ in açılımlarındaki ikinci determinantları hesaplarsak,

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ C_{20} & 2 & -1\\ C_{30}\xi+C_{31} & 4 & 1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}C_{20} & -1\\ C_{30}\xi+C_{31} & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}C_{20} & 2\\ C_{30}\xi+C_{31} & 4\end{vmatrix}$$

$$= 3C_{20} - 3C_{30}\xi - 3C_{31},$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & C_{20} & -1\\ 1 & C_{30}\xi+C_{31} & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}C_{20} & -1\\ C_{30}\xi+C_{31} & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & C_{20}\\ 1 & C_{30}\xi+C_{31}\end{vmatrix}$$

$$= 2C_{30}\xi+2C_{31},$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & C_{20}\\ 1 & 4 & C_{30}\xi+C_{31}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & C_{20}\\ 4 & C_{30}\xi+C_{31}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & C_{20}\\ 1 & C_{30}\xi+C_{31}\end{vmatrix}$$

$$= C_{30}\xi+C_{31}-3C_{20}$$

bu ifadelerin toplamlarının sıfır olduğunu görürüz. O halde homojen denklemin genel çözümü $z(x,t)=\varphi_1(x+t)+\varphi_2(x+2t)+\varphi_3(x-t)$ ifadesinden

$$z(x,t)=\frac{1}{6}\left\{\begin{vmatrix}\phi_0(x+t) & 1 & 1\\ \int_0^{x+t}\phi_1(\xi)d\xi & 2 & -1\\ \int_0^{x+t}(x+t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & 4 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & \phi_0(x+2t) & 1\\ 1 & \int_0^{x+2t}\phi_1(\xi)d\xi & -1\\ 1 & \int_0^{x+2t}(x+2t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & 1\end{vmatrix}\right.$$

$$+\left|\begin{matrix}1 & 1 & \phi_0(x-t)\\ 1 & 2 & \int_0^{x-t}\phi_1(\xi)d\xi\\ 1 & 4 & \int_0^{x-t}(x-t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi\end{matrix}\right|\Bigg\}$$

olarak elde edilir. Bu çözümdeki determinantları hesaplarsak, açık biçimde

$$z(x,t)=\tfrac{1}{6}\{6\phi_0(x+t)-2\phi_0(x+2t)+2\phi_0(x-t)\}+\tfrac{1}{6}\Big\{3\int_0^{x+t}\phi_1(\xi)d\xi,$$

$$-3\int_0^{x-t}\phi_1(\xi)d\xi\Big\}+\frac{1}{6}\Big\{-3\int_0^{x+t}(x+t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi$$

$$+2\int_0^{x+2t}(x+2t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi+\int_0^{x-t}(x-t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi\Big\}(2.16)$$

olarak buluruz.

2.2Köklerin Üç Defa Katlı Olduğu Durum

Bu bölümde (2.1) denklemine karşılık gelen karakteristik denklemin köklerinin katlı olduğunu varsayalım. Yani, λ_1 in (2.6) karakteristik denkleminin üç deta katlı kökü olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\varphi_1(x+\lambda_1 t), t\varphi_2(x+\lambda_1 t), t^2\varphi_3(x+\lambda_1 t)$ fonksiyonlarının (2.1) denklemini sağladıkları kolayca gösterilebilir. Bunları ispatlamadan önce,üçüncü dereceden polinom olan (2.6) karakteristik denklemini tekrar göz önüne alalım. Açıkça görüleceği üzere, λ_1

$$P_3(\lambda)=a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$$

denkleminin üç katlı kökü ise $P_3(\lambda_1)=0$, $P_3'(\lambda_1)=0$ ve $P_3''(\lambda_1)=0$ olacaktır. Böylece

$$P_3=a_0\lambda_1^3+a_1\lambda_1^2+a_2\lambda_1+a_3=0, \qquad (2.17)$$

$$P_3'=3a_0\lambda_1^2+2a_1\lambda_1+a_2=0(2.18)$$

olur. Ayrıca buradan

$$P_3''=6a_0\lambda_1+2a_1=0$$

olduğu da görülür.

Öncelikle, $u_1=\varphi_1(x+\lambda_1 t)$ fonksiyonun (2.1) denklemini koruduğunu ispatlayalım. u_1 fonksiyonundan hesaplanan

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\lambda_1\varphi_1',\quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=\lambda_1^2\varphi_1'',\quad \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3}=\lambda_1^3\varphi_1'''$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \varphi_1', \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_1'', \quad \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = \varphi_1'''$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} = \lambda_1 \varphi_1'', \quad \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^2 \partial x} = \lambda_1^2 \varphi_1''', \quad \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x^2} = \lambda_1 \varphi_1'''$$

türevleri (2.1) denkleminde yerine konursa,

$$a_0 \lambda_1^3 \varphi_1''' + a_1 \lambda_1^2 \varphi_1''' + a_2 \lambda_1 \varphi_1''' + a_3 \varphi_1''' = 0$$

veya

$$\varphi_1'''[a_0 \lambda_1^3 + a_1 \lambda_1^2 + a_2 \lambda_1 + a_3] = 0$$

olduğu görülür. (2.17) ifadesinin yardımıyla u_1 fonksiyonunun (2.1) denklemini koruduğu kanıtlanmış olur.Benzer yolla,

$$u_2 = t\varphi_2(x + \lambda_1 t)$$

fonksiyonunun da (2.1) denklemini koruduğunu gösterebiliriz. Bunun için gereken türevleri hesaplarsak,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = t\varphi_2', \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = t\varphi_2'', \qquad \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} = t\varphi_2''',$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \varphi_2 + \lambda_1 t\varphi_2', \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 2\lambda_1 \varphi_2' + \lambda_1^2 t\varphi_2'', \qquad \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3} = 3\lambda_1^2 \varphi_2'' + \lambda_1^3 t\varphi_2''',$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} = \varphi_2' + \lambda_1 t\varphi_2'', \quad \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial x} = 2\lambda_1 \varphi_2'' + \lambda_1^2 t\varphi_2''', \quad \frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial x^2} = \varphi_2'' + \lambda_1 t\varphi_2'''$$

ifadelerini buluruz. u_1 fonksiyonunun bu türevleri (2.1) denkleminde yerine konursa

$$a_0[3\lambda_1^2 \varphi_2'' + \lambda_1^3 t\varphi_2'''] + a_1[2\lambda_1 \varphi_2'' + \lambda_1^2 t\varphi_2'''] + a_2[\varphi_2'' + \lambda_1 t\varphi_2'''] + a_3[t\varphi_2'''] = 0$$

veya

$$\varphi_2''[3\lambda_1^2 a_0 + 2\lambda_1 a_1 + a_2] + t\varphi_2'''[a_0 \lambda_1^3 + a_1 \lambda_1^2 + a_2 \lambda_1 + a_3] = 0$$

olduğu (2.17), (2.18) ifadeleri yardımıyla görülür. Bu durumda, $u_2 = t\varphi_2(x + \lambda_1 t)$ fonksiyonu da (2.1) denklemini sağlar.

Son olarak,

$$u_3 = t^2 \varphi_2(x + \lambda_1 t)$$

fonksiyonun (2.1) denklemini koruduğunu gösterelim. u_3 fonksiyonundan gereken türevleri hesaplarsak,

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}=t^2\varphi_3',\ \ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}=t^2\varphi_3'',\ \ \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}=t^2\varphi_3''',\ \ \frac{\partial u_3}{\partial t}=2t\varphi_3+\lambda_1 t^2\varphi_3',$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=2\varphi_3+4\lambda_1 t\varphi_3'+\lambda_1^2t^2\varphi_3'',\ \ \frac{\partial^3 u_3}{\partial t^3}=6\lambda_1\varphi_3'+6\lambda_1^2 t\varphi_3''+\lambda_1^3t^2\varphi_3''',$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial x}=2t\varphi_3'+\lambda_1 t^2\varphi_3'',\ \ \frac{\partial^3 u_3}{\partial t^2\partial x}=2\varphi_3'+4\lambda_1 t\varphi_3''+\lambda_1^2t^2\varphi_3''',$$

$$\frac{\partial^3 u_3}{\partial t\partial x^2}=2t\varphi_3''+\lambda_1 t^2\varphi_3'''$$

alırız. u_3 fonksiyonunun bu türevleri (2.1) denkleminde yerine konursa

$$a_0[6\lambda_1\varphi_3'+6\lambda_1^2t\varphi_3''+\lambda_1^3t^2\varphi_3''']+a_1[2\varphi_3'+4\lambda_1 t\varphi_3''+\lambda_1^2t\varphi_3''']$$
$$+a_2[2t\varphi_3''+\lambda_1t^2\varphi_3''']+a_3t^2\varphi_3'''=0$$

veya

$$\varphi_2''[3\lambda_1^2a_0+2\lambda_1a_1+a_2]+t\varphi_2'''[a_0\lambda_1^3+a_1\lambda_1^2+a_2\lambda_1+a_3]=0$$

olduğu (2.15), (2.17) ifadeleri yardımıyla görülür. Bu durumda, $u_3=t^2\varphi_2(x+\lambda_1 t)$ fonksiyonu da (2.1) denklemini sağlar.

Böylece (2.1), (2.2) probleminin çözümü

$$u(x,t)=\varphi_1(x+\lambda_1t)+t\varphi_2(x+\lambda_1t)+t^2\varphi_3(x+\lambda_1t) \tag{2.19}$$

olacaktır. (2.19) ifadesindeki φ_1,φ_2 ve φ_3 fonksiyonlarını (2.2) başlangıç koşullarını koruyacak şekilde arayalım. $t=0$ için

$$u(x,0)=\phi_0(x)=\varphi_1(x) \tag{2.20}$$

olur. (2.19) ifadesinin *t* ye göre birinci mertebeden kısmi türevi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\lambda_1\varphi_1'+\varphi_2+t\lambda_1\varphi_2'+2t\varphi_3+t^2\lambda_1\varphi_3' \tag{2.21}$$

dır. Bu türevin$t=0$ için değeri

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\phi_1(x)=\lambda_1\varphi_1'(x)+\varphi_2(x) \tag{2.22}$$

bulunur. (2.21) ifadesinden *t* ye göre bir kez daha türev alırsak

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\lambda_1^2\varphi_1''+2\lambda_1\varphi_2'+t\lambda_1^2\varphi_2''+2\varphi_3+2t\lambda_1\varphi_3'+2t\lambda_1\varphi_3'+t^2\lambda_1^2\varphi_3''$$

elde ederiz. Yine $t=0$ değerini kullanırsak

$$\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2}=\phi_2(x)=\lambda_1^2\varphi_1''(x)+2\lambda_1\varphi_2'(x)+2\varphi_3(x) \tag{2.23}$$

alırız. φ_1, φ_2 ve φ_3 fonksiyonlarını bulabilmek için (2.20), (2.22) ve (2.23) ifadelerini kullanırsak

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \phi_0(x), \\ \lambda_1\varphi_1'(x) + \varphi_2(x) = \phi_1(x), \\ \lambda_1^2\varphi_1''(x) + 2\lambda_1\varphi_2'(x) + 2\varphi_3(x) = \phi_2(x) \end{cases} \tag{2.24}$$

cebirsel denklemler sistemini elde ederiz. Bu sistemden

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \phi_0(x), \\ \varphi_2(x) = \phi_1(x) - \lambda_1\phi_0'(x), \\ \varphi_3(x) = \frac{1}{2}[\phi_2(x) - 2\lambda_1\phi_1'(x) + \lambda_1^2\phi_0''(x)] \end{cases} \tag{2.25}$$

alınır.φ_1, φ_2 ve φ_3 fonksiyonları için bulunan (2.25) ifadesindeki değerler, (2.19) da yerine konulursa çözüm

$$u(x,t) = \phi_0(x+\lambda_1 t) + t[\phi_1(x+\lambda_1 t) - \lambda_1\phi_0'(x+\lambda_1 t)]$$
$$+\frac{t^2}{2}[\phi_2(x+\lambda_1 t) - 2\lambda_1\phi_1'(x+\lambda_1 t) + \lambda_1^2\phi_0''(x+\lambda_1 t)]$$

veya

$$u(x,t) = \phi_0(x+\lambda_1 t) - t\lambda_1\phi_0'(x+\lambda_1 t) + \frac{t^2\lambda_1^2}{2}\phi_0''(x+\lambda_1 t)$$
$$+t\phi_1(x+\lambda_1 t) - t^2\lambda_1\phi_1'(x+\lambda_1 t) + \frac{t^2}{2}\phi_2(x+\lambda_1 t) \tag{2.26}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.2. Aşağıdaki mertebeye göre homojen olan

$$\frac{\partial^3 z}{\partial t^3} - 3\frac{\partial^3 z}{\partial t^2 \partial x} + 3\frac{\partial^3 z}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0 \tag{2.27}$$

denklemini Örnek 2.1 deki başlangıç koşullarıyla göz önüne alalım.

Yineλyı bir sabit ve φyi ise üçüncü mertebeden sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olarak varsayıp, bu problemin çözümünü$z = \varphi(x+\lambda t)$biçimindeararsak, denkleme karşılık gelen karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

olarak elde ederiz. Görüldüğü üzere, $\lambda_1 = 1$karakteristik denklemin üç katlı kökü olup,homojen denklemin fundamental çözümler sistemi $\varphi_1(x+t), t\varphi_2(x+t), t^2\varphi_3(x-t)$ fonksiyonlarından oluşur.Bu durumda denklemin genel çözümü

$$z(x,t) = \varphi_1(x+t) + t\varphi_2(x+t) + t^2\varphi_3(x+t)$$

olur.

Şimdi, bu çözümü teşkil eden φ_1, φ_2 ve φ_3 fonksiyonlarını Örnek 2.1 deki başlangıç koşullarını koruyacak şekilde arayalım. Bunun için (2.20), (2.21) ve (2.22) ifadelerine benzer şekilde işlemler yaparak

$$\begin{cases} u(x,0) = \phi_0(x) = \varphi_1(x), \\ \dfrac{\partial z(x,0)}{\partial t} = \phi_1(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2(x), \\ \dfrac{\partial^2 z(x,0)}{\partial t^2} = \phi_2(x) = \varphi_1''(x) + 2\varphi_2'(x) + 2\varphi_3(x) \end{cases}$$

alırız. Diğer bir deyişle, bilinmeyen φ_1, φ_2 ve φ_3 fonksiyonları

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \phi_0(x), \\ \varphi_2(x) = \phi_1(x) - \phi_0'(x), \\ \varphi_3(x) = \dfrac{1}{2}[\phi_2(x) - 2\phi_1'(x) + \phi_0''(x)] \end{cases}$$

olarak bulunur. Bulunan bu ifadeler genel çözümde yerine yazılırsa

$$z(x,t) = \phi_0(x+t) - t\phi_0'(x+t) + \frac{t^2}{2}\phi_0''(x+t)$$
$$+t\phi_1(x+t) - t^2\phi_1'(x+t) + \frac{t^2}{2}\phi_2(x+t) \qquad (2.28)$$

elde edilir.

2.3 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ Olması Hali

Bu bölümde (2.1) denklemine karşılık gelen karakteristik denklemin köklerinin ikisinin katlı olduğunu varsayalım. Yani, $\lambda_2$nin (2.6) karakteristik denkleminin iki deta katlı kökü olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u_1 = \varphi_{11}(x+\lambda_1 t), u_2 = \varphi_{21}(x+\lambda_2 t)$ve $u_3 = t\varphi_{22}(x+\lambda_2 t)$ fonksiyonlarının (2.1) denkleminin çözümleri olur. Gerçekten de, $u_1 = \varphi_{11}(x+\lambda_1 t)$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \lambda_1\varphi_{11}', \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \lambda_1^2\varphi_{11}'', \quad \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} = \lambda_1^3\varphi_{11}'''$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \varphi_{11}', \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \varphi_{11}'', \quad \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = \varphi_{11}'''$$
$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^2 \partial x} = \lambda_1^2\varphi_{11}''', \quad \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x^2} = \lambda_1\varphi_{11}'''$$

türevleri (2.1) denkleminde yerine konursa, λ_1 karakteristik denklemin sade kökü olduğundan (2.17) den

$$a_0\lambda_1^3\varphi_{11}''' + a_1\lambda_1^2\varphi_{11}''' + a_2\lambda_1\varphi_{11}''' + a_3\varphi_{11}''' = 0$$

veya

$$\varphi_{11}'''[a_0\lambda_1^3 + a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_1 + a_3] = 0$$

alınır. Benzer yolla,

$$u_2 = \varphi_{21}(x + \lambda_2 t)$$

fonksiyonunun da (2.1) denklemini koruduğunu gösterebiliriz. Bunun için gereken türevleri hesaplarsak,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \varphi_{21}', \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \varphi_{21}'', \quad \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} = \varphi_{21}''',$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \lambda_2\varphi_{21}', \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \lambda_2^2\varphi_{21}'', \quad \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3} = \lambda_2^3\varphi_{21}''',$$

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial x} = \lambda_2^2\varphi_{21}''', \quad \frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial x^2} = \lambda_2\varphi_{21}'''$$

ifadelerini buluruz. u_2 fonksiyonunun bu türevleri (2.1) denkleminde yerine konursa

$$a_0\lambda_2^3\varphi_{21}'''+a_1\lambda_2^2\varphi_{21}'''+a_2\lambda_2\varphi_{21}''' + a_3\varphi_{21}''' = 0$$

veya

$$\varphi_{21}''[a_0\lambda_2^3 + a_1\lambda_2^2+a_2\lambda_2 + a_3] = 0$$

olduğu (2.17) ifadesi yardımıyla görülür. Bu durumda, $u_2 = \varphi_{21}(x + \lambda_2 t)$ fonksiyonu da (2.1) denklemini sağlar.

Şimdi, $u_3 = t\varphi_{22}(x + \lambda_2 t)$ fonksiyonunun (2.1) denklemini koruduğunu gösterelim.Bunun için gereken türevleri aşağıdaki gibi hesaplar

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = t\varphi_{22}', \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = t\varphi_{22}'', \quad \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3} = t\varphi_{22}''',$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \varphi_{22} + t\lambda_2\varphi_{22}' , \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 2\lambda_2\varphi_{22}' + t\lambda_2^2\varphi_{22}'', \quad \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3} = 3\lambda_2^2\varphi_{22}'' + t\lambda_2^3\varphi_{22}''',$$

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial x} = 2\lambda_2\varphi_{22}'' + t\lambda_2^2\varphi_{22}''', \quad \frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial x^2} = \varphi_{22}'' + t\lambda_2\varphi_{22}'''$$

ve bu türevleri (2.1) denkleminde yerine koyarsak

$$a_0[3\lambda_2^2\varphi_{22}'' + t\lambda_2^3\varphi_{22}''']+a_1[2\lambda_2\varphi_{22}'' + t\lambda_2^2\varphi_{22}''']+a_2[\varphi_{22}'' + t\lambda_2\varphi_{22}'''] + a_3[t\varphi_{22}'''] = 0$$

veya

$$\varphi_{22}''[3a_0\lambda_2^2 + 2a_1\lambda_2+a_2] + t\varphi_{22}'''[a_0\lambda_2^3 + a_1\lambda_2^2+a_2\lambda_2 + a_3] = 0$$

olduğu (2.17) ve(2.18) ifadeleri yardımıyla görülür.

Bu durumda (2.1) denkleminin genel çözümü

$$u(x,t) = \varphi_{11}(x+\lambda_1 t) + \varphi_{21}(x+\lambda_2 t) + t\varphi_{22}(x+\lambda_2 t) \quad (2.29)$$

şeklinde olacaktır. (2.29) ifadesindeki $\varphi_{11}, \varphi_{21}$ ve φ_{22} fonksiyonlarını (2.2) başlangıç koşullarını koruyacak şekilde arayalım. $t = 0$ için

$$u(x,0) = \phi_0(x) = \varphi_{11}(x) + \varphi_{21}(x) \quad (2.30)$$

olur. (2.29) ifadesinin *t* ye göre birinci mertebeden kısmi türevi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda_1\varphi'_{11} + \lambda_2\varphi'_{21} + \varphi_{22} + t\lambda_2\varphi'_{22} \quad (2.31)$$

dır. Birinci mertebeden türevin $t = 0$ için değeri

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \phi_1(x) = \lambda_1\varphi'_{11}(x) + \lambda_2\varphi'_{21}(x) + \varphi_{22}(x) \quad (2.32)$$

olarak bulunur. İkinci mertebeden olan

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \lambda_1^2\varphi''_{11} + \lambda_2^2\varphi''_{21} + 2\lambda_2\varphi'_{22} + t\lambda_2^2\varphi''_{22}$$

türevinde $t = 0$ koyarsak,

$$\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} = \phi_2(x) = \lambda_1^2\varphi''_{11}(x) + +\lambda_2^2\varphi''_{21}(x) + 2\lambda_2\varphi'_{22}(x) \quad (2.33)$$

alırız. (2.30), (2.32) ve (2.33) ifadelerini dikkate alırsak,

$$\begin{cases} \varphi_{11}(x) + \varphi_{21}(x) = \phi_0(x), \\ \lambda_1\varphi'_{11}(x) + \lambda_2\varphi'_{21}(x) + \varphi_{22}(x) = \phi_1(x), \quad (2.34) \\ \lambda_1^2\varphi''_{11}(x) + \lambda_2^2\varphi''_{21}(x) + 2\lambda_2\varphi'_{22}(x) = \phi_2(x) \end{cases}$$

cebirsel denklemler sistemini elde ederiz. (2.34) sistemindeki birinci denklemin türevini, üçüncü denklemini ise integralini alırsak

$$\begin{cases} \varphi'_{11}(x) + \varphi'_{21}(x) = \phi'_0(x), \\ \lambda_1\varphi'_{11}(x) + \lambda_2\varphi'_{21}(x) + \varphi_{22}(x) = \phi_1(x), \qquad (2.35) \\ \lambda_1^2\varphi'_{11}(x) + \lambda_2^2\varphi'_{21}(x) + 2\lambda_2\varphi_{22}(x) = \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi + C_{30} \end{cases}$$

sistemini elde ederiz. BuradakiC_{30}keyfiintegrasyon sabitidir. Bu sistemin katsayılar determinantını hesaplarsak

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \quad (2.36)$$

buluruz. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan $\Delta \neq 0$ dır. Yine Cramer kuralını kullanırsak, $\varphi_{11}'(x)$, $\varphi_{21}'(x)$ ve $\varphi_{22}(x)$ fonksiyonları için

$$\varphi_{11}'(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0'(x) & 1 & 0 \\ \phi_1(x) & \lambda_2 & 1 \\ \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi + C_{30} & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0'(x) & 1 & 0 \\ \phi_1(x) & \lambda_2 & 1 \\ \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ C_{30} & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[\phi_0'(x)\begin{vmatrix} \lambda_2 & 1 \\ \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} - \phi_1(x)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} + \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_2 & 1 \end{vmatrix} + C_{30}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_2 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \tfrac{1}{\Delta}\left[\lambda_2^2\phi_0'(x) - 2\lambda_2\phi_1(x) + \textstyle\int_0^x \phi_2(\xi)d\xi + C_{30}\right], \qquad (2.37)$$

$$\varphi_{21}'(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_0'(x) & 0 \\ \lambda_1 & \phi_1(x) & 1 \\ \lambda_1^2 & \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi + C_{30} & 2\lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_0'(x) & 0 \\ \lambda_1 & \phi_1(x) & 1 \\ \lambda_1^2 & \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi & 2\lambda_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 1 \\ \lambda_1^2 & C_{30} & 2\lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[-\phi_0'(x)\begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} + \phi_1(x)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} - \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix} - C_{30}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \tfrac{1}{\Delta}\left[(2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2)\phi_0'(x) + 2\lambda_2\phi_1(x) - \textstyle\int_0^x \phi_2(\xi)d\xi - C_{30}\right], \quad (2.38)$$

$$\varphi_{22}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \phi_0'(x) \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \phi_1(x) \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi + C_{30} \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \phi_0'(x) \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \phi_1(x) \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi \end{vmatrix} + \tfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & C_{30} \end{vmatrix} (2.39)$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[\phi_0'(x)\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2\end{vmatrix} - \phi_1(x)\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2\end{vmatrix} + \int_0^x \phi_2(\xi)d\xi \begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix} + C_{30}\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)\phi_0'(x) - (\lambda_2^2-\lambda_1^2)\phi_1(x) + (\lambda_2-\lambda_1)\int_0^x \phi_2(\xi)d\xi + (\lambda_2-\lambda_1)C_{30}\right]$$

alırız. (2.37) ve (2.38) ifadelerinin bir kez integrallenmesiyle$\varphi_{11}(x)$ ve $\varphi_{21}(x)$ fonksiyonlarını da

$$\varphi_{11}(x) = \frac{1}{\Delta}\left[\lambda_2^2\phi_0(x) - 2\lambda_2\int_0^x \phi_1(\xi)d\xi + \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi + C_{30}x + C_{11}\right]$$

$$\varphi_{21}(x) = \frac{1}{\Delta}\left[(\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2)\phi_0(x) + 2\lambda_2\int_0^x \phi_1(\xi)d\xi - \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi - C_{30}x + C_{21}\right]$$

olarak elde ederiz. φ_{11}, φ_{21} ve φ_{22} fonksiyonları için bulunan değerler(2.29) da yerine yazılırsa, çözüm

$$u(x,t) = \frac{1}{\Delta}\left[\lambda_2^2\phi_0(x+\lambda_1 t) - 2\lambda_2\int_0^{x+\lambda_1 t} \phi_1(\xi)d\xi + \int_0^{x+\lambda_1 t} (x+\lambda_1 t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi\right.$$

$$+C_{30}x + C_{11} + \frac{1}{\Delta}\left[(\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2)\phi_0(x+\lambda_2 t) + 2\lambda_2\int_0^{x+\lambda_2 t} \phi_1(\xi)d\xi\right.$$

$$\left.-\int_0^{x+\lambda_2 t}(x+\lambda_2 t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi - C_{30}x + C_{21}\right] + \frac{t}{\Delta}[\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)\phi_0'(x+\lambda_2 t)$$

$$-(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\phi_1(x+\lambda_2 t) + (\lambda_2-\lambda_1)\int_0^{x+\lambda_2 t}\phi_2(\xi)d\xi + (\lambda_2-\lambda_1)C_{30}\Big] \qquad (2.40)$$

şeklinde elde edilir.

3. BİLGİSAYAR TESTLERİ

İkinci bölümde elde edilen çözümleri kullanarak bazı bilgisayar testleri yapalım.

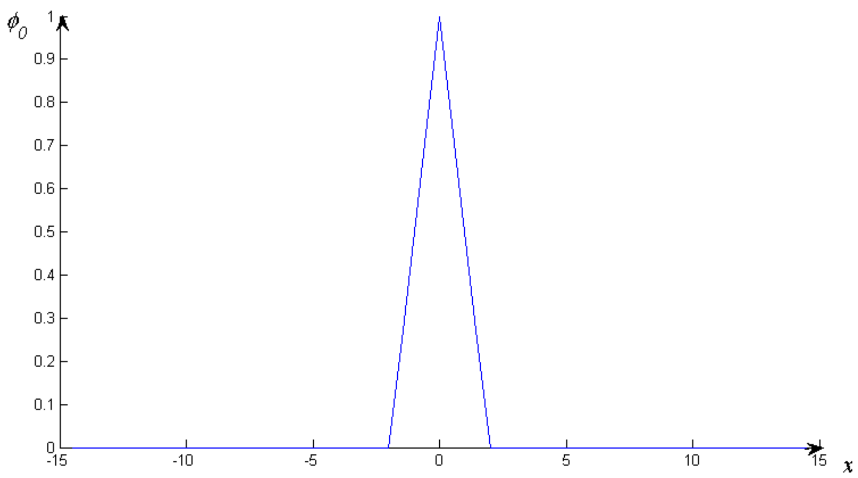
3.1. Sade Kökler Durumu

Şimdi (2.1), (2.2) probleminin D'Alembert formülünün genişletilmesi olan (2.15) deki çözümünün grafiğini elde edelim. Bunun için (2.1) denklemini aşağıdaki koşullar çerçevesinde çözelim:

Başlangıç profili, grafiği Şekil 2.1 de gösterilen

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{x+2}{2}, & -2 \le x \le 0, \\ \frac{x-2}{-2}, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

fonksiyonu olarak göz önüne alalım.

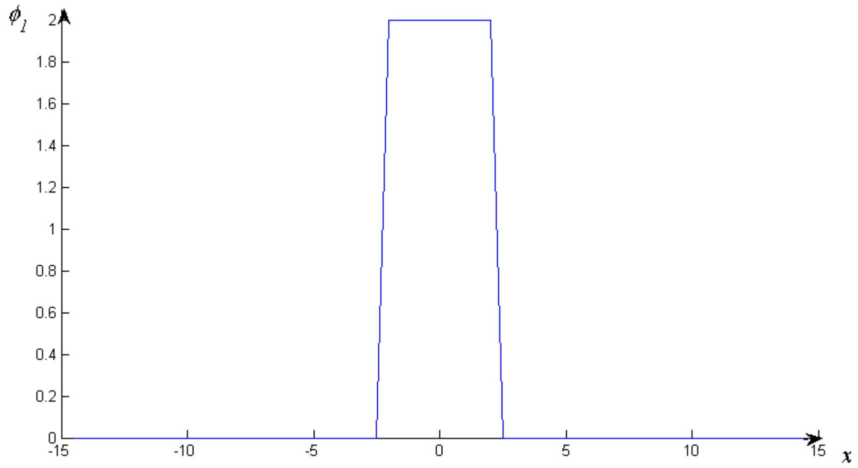


Şekil 2.1$\phi_0(x)$ fonksiyonunun grafiği

Başlangıç hız da, grafiği Şekil 2.2 de verilen

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 2, & -2 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases} \tag{3.2}$$

fonksiyonu ile ele alınsın.



Şekil 2.2$\phi_1(x)$ fonksiyonunun grafiği

Başlangıçtaki ivme olarak

$$\phi_2(x) = 0 \tag{3.3}$$

alalım.

$\phi_1(x)$ in integralini alırsak,

$$\int_0^x \phi_1(\xi)\, d\xi = \begin{cases} c_1, & x < -2, \\ 2x + c_2, & -2 \le x \le 2, \\ c_3, & x > 2 \end{cases}$$

olur. Süreklilik koşuluna göre,

$x = -2$ değeri için $2.(-2) + c_2 = c_1$ veya$c_1 = -4 + c_2$ ve

$x = 2$ değeri için $2.(2) + c_2 = c_3$ veya $c_3 = 4 + c_2$

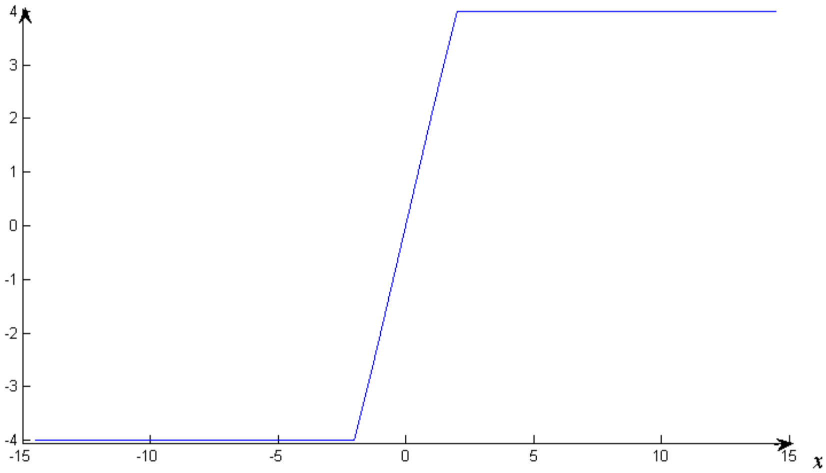
olmalıdır. Bu durumda,

$$\int_0^x \phi_1(\xi)\, d\xi = \begin{cases} -4 + c_2, & x < -2, \\ 2x + c_2, & -2 \le x \le 2, \\ 4 + c_2, & x > 2 \end{cases}$$

olur ve $c_2 = 0$ için

$$\int_0^x \phi_1(\xi)\, d\xi = \begin{cases} -4, & x < -2, \\ 2x, & -2 \le x \le 2, \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

elde edilir.



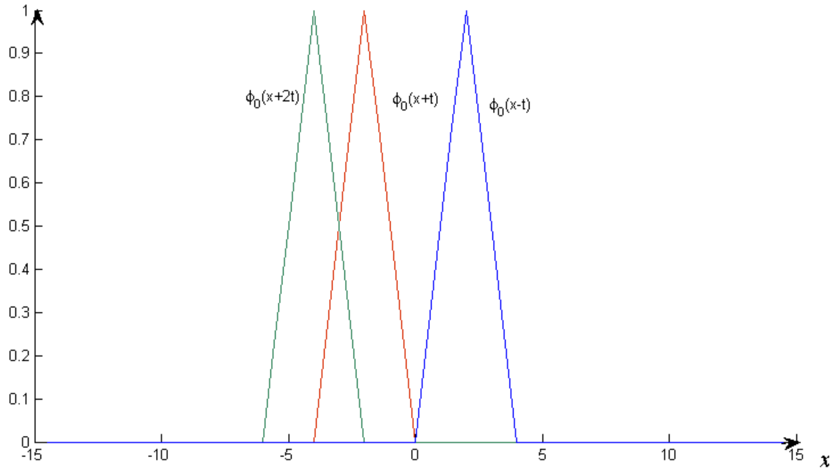
Şekil 2.3$\phi_1(x)$ fonksiyonunun integralinin grafiği

(2.16) ifadesindeki $\phi_0(x+kt), (k=-1,1,2)$ fonksiyonlarının aşağıdaki şekilde tanımlacağı ve grafiklerinin Şekil 2.4 deki gibi olacağı aşikardır.

$$\phi_0(x+t)=\begin{cases} 0, & x<-2-t, \\ \dfrac{x+t+2}{2}, & -2-t\le x\le -t, \\ \dfrac{x+t-2}{-2}, & -t\le x\le 2-t, \\ 0, & x>2-t \end{cases}$$

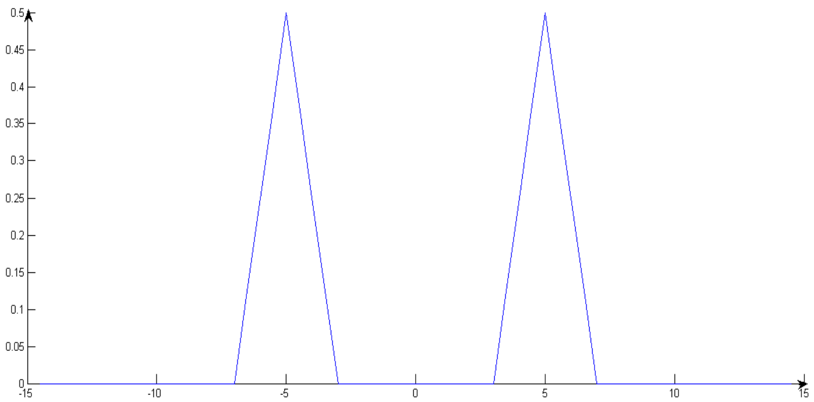
$$\phi_0(x+2t)=\begin{cases} 0, & x<-2-2t, \\ \dfrac{x+2t+2}{2}, & -2-2t\le x\le -2t, \\ \dfrac{x+2t-2}{-2}, & -2t\le x\le 2-2t, \\ 0, & x>2-2t \end{cases}$$

$$\phi_0(x-t)=\begin{cases} 0, & x<-2+t, \\ \dfrac{x-t+2}{2}, & -2+t\le x\le t, \\ \dfrac{x-t-2}{-2}, & t\le x\le 2+t, \\ 0, & x>2+t \end{cases}$$

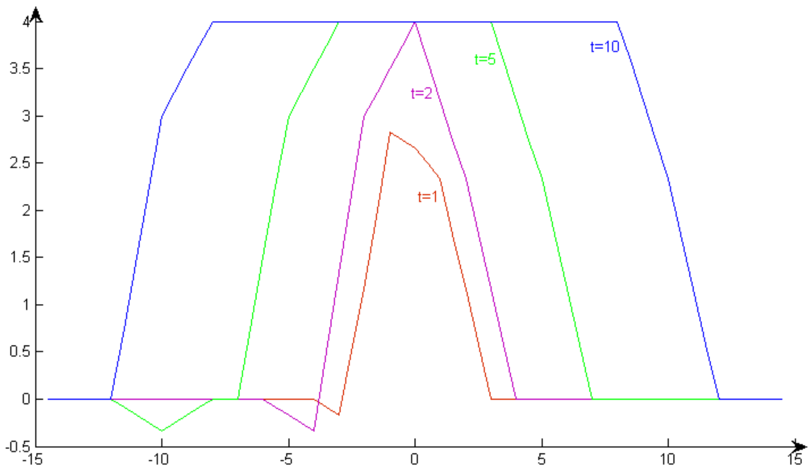


Şekil 2.4$t = 2$ için $\phi_0(x + kt)$ fonksiyonlarının grafikleri

Öncelikle (2.16) ifadesinin sağa ve sola giden dalgalardan oluştuğunu görebilmek için $\phi_1(x)$ ve$\phi_2(x)$ fonksiyonlarını sıfıra özdeş olarak alalım.



Şekil 2.5 (2.16) formülü ile elde edilen çözüm ($\phi_1(x) = \phi_2(x) = 0$)

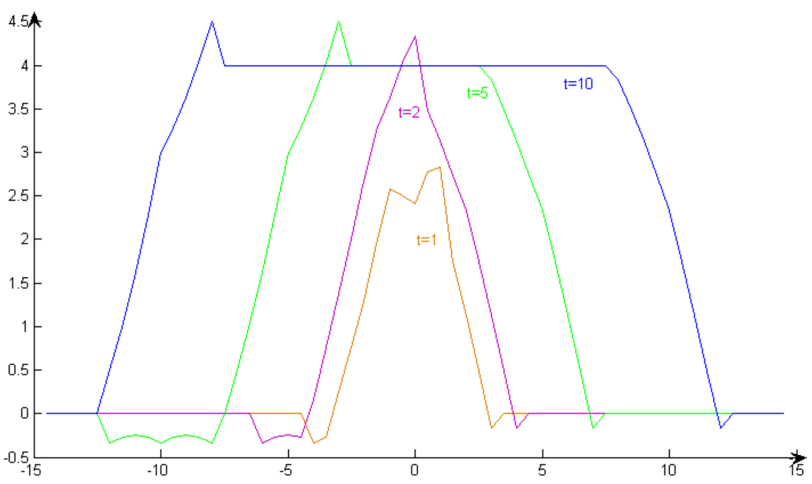


Şekil 2.5(2.16) formülü ile elde edilen çözüm ($\phi_2(x) = 0$ durumu)

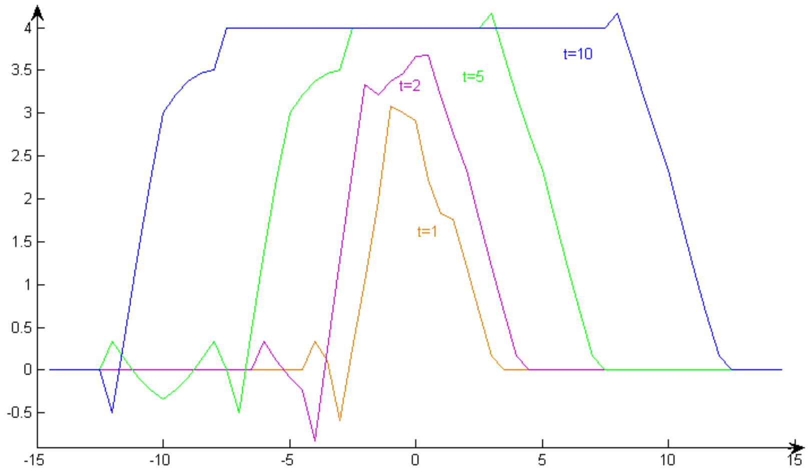
Başlangıçtaki ivme fonksiyonunun

$$\phi_2(x) = c$$

olduğu durumu göz önüne alırsak, $c < 0$ için Şekil 2.6 yı, $c > 0$ için Şekil 2.7 yi elde ederiz.



Şekil 2.6(2.16) formülü ile elde edilen çözüm ($\phi_2(x) = c < 0$ durumu)

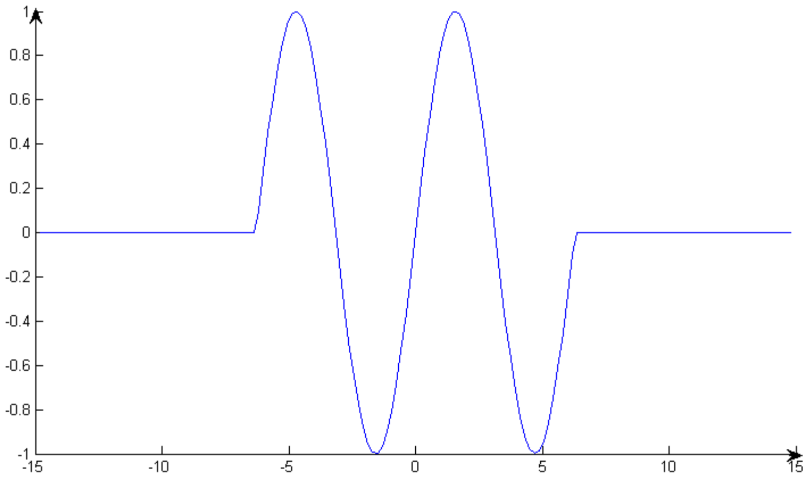


Şekil 2.7(2.16) formülü ile elde edilen çözüm ($\phi_2(x) = c > 0$ durumu)

Şimdi, başlangıç profilini Şekil 2.8 de grafiği verildiği şekliyle

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -2\pi, \\ \sin x, & -2\pi \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & x > 2\pi \end{cases} \tag{3.4}$$

olarak göz önüne alalım.

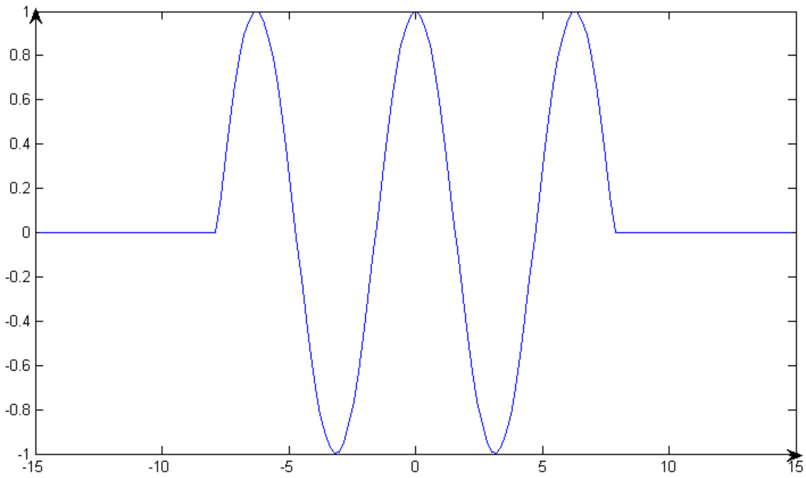


Şekil 2.8$\phi_0(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiği

Başlangıç hızı için ise

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -2\pi, \\ \cos x, & -2\pi \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & x > 2\pi \end{cases} \tag{3.5}$$

olduğunu varsayalım (Şekil2.9).

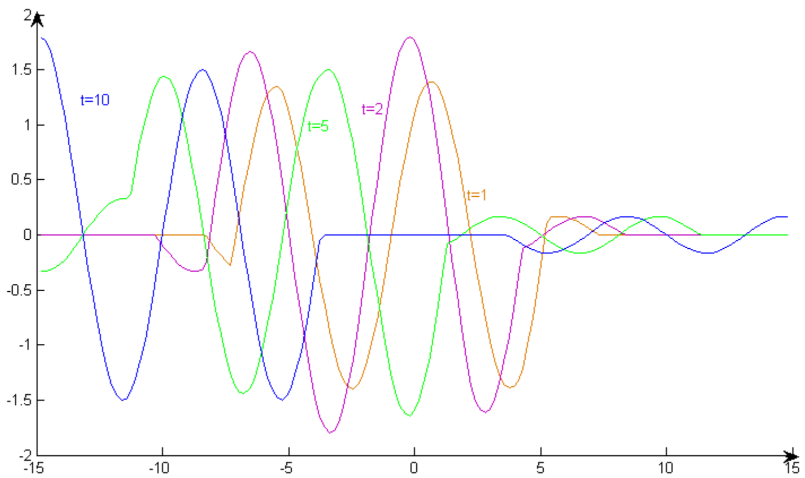


Şekil 2.9$\phi_1(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiği

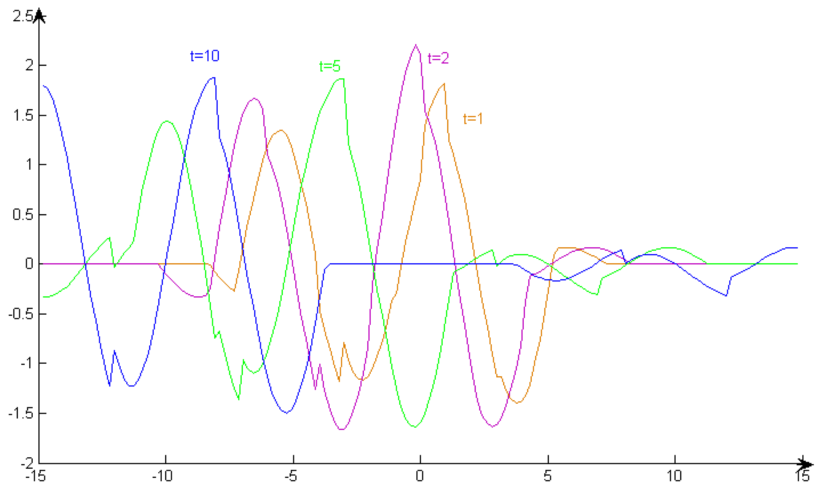
Başlangıçtaki ivme fonksiyonunun

$$\phi_2(x) = \begin{cases} -0.5, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 0.5, & x > 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

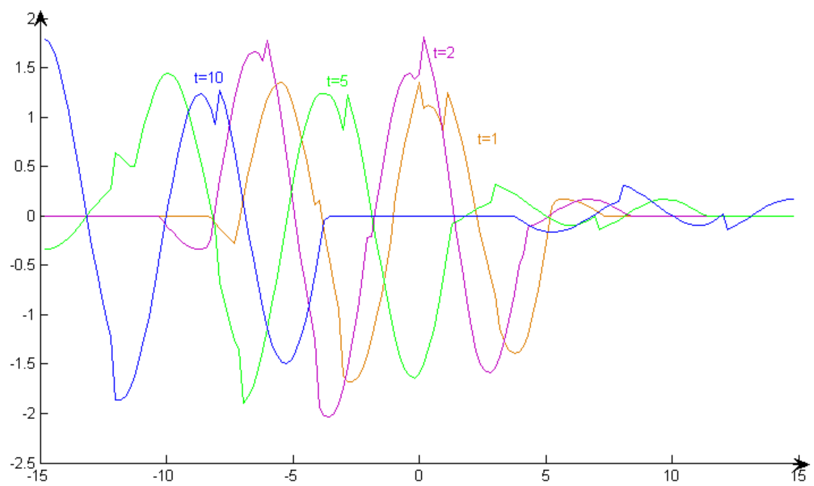
tanımlanması durumunda genel çözümün grafikleri Şekil 2.10-2.12 de gösterilmiştir.



Şekil 2.10(2.16) formülü ile elde edilen çözüm ($\phi_2(x) = 0$ durumu)



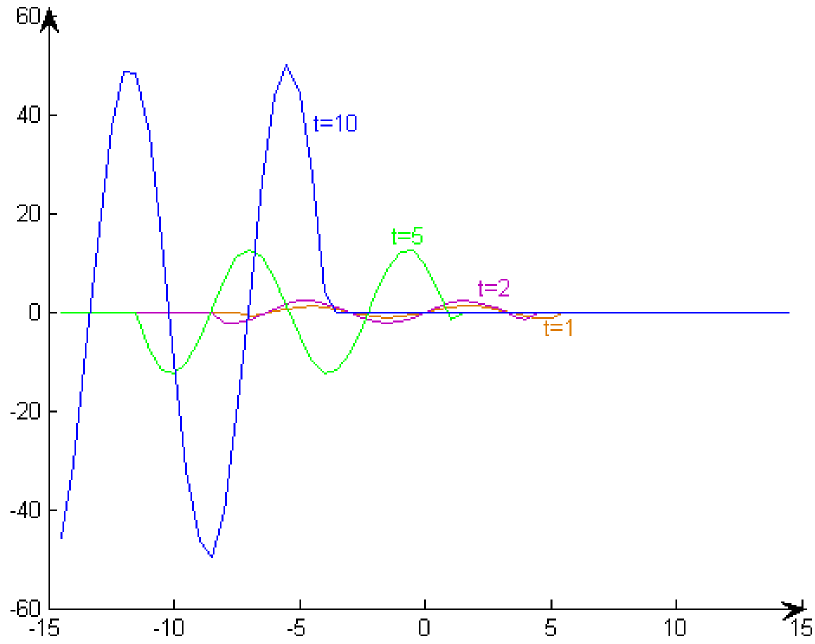
Şekil 2.11(2.16) formülü ile elde edilen çözüm ($\phi_2(x) = c < 0$ durumu)



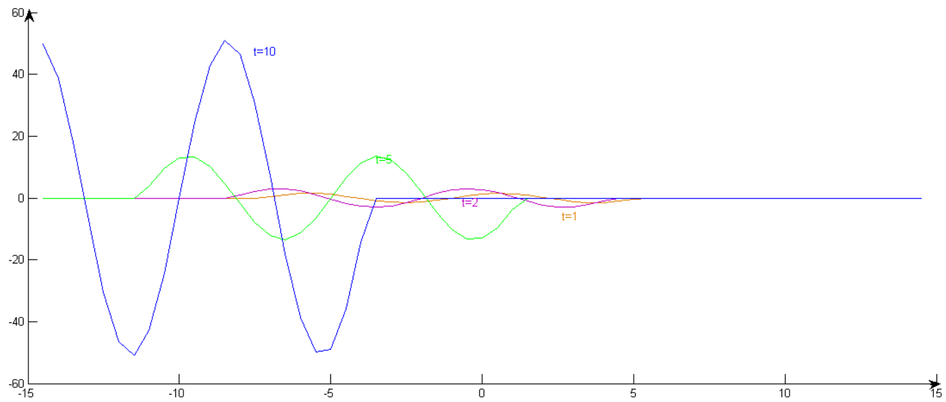
Şekil 2.12(2.16) formülü ile elde edilen çözüm ($\phi_2(x) = c > 0$ durumu)

3.2. Katlı Kökler Durumu

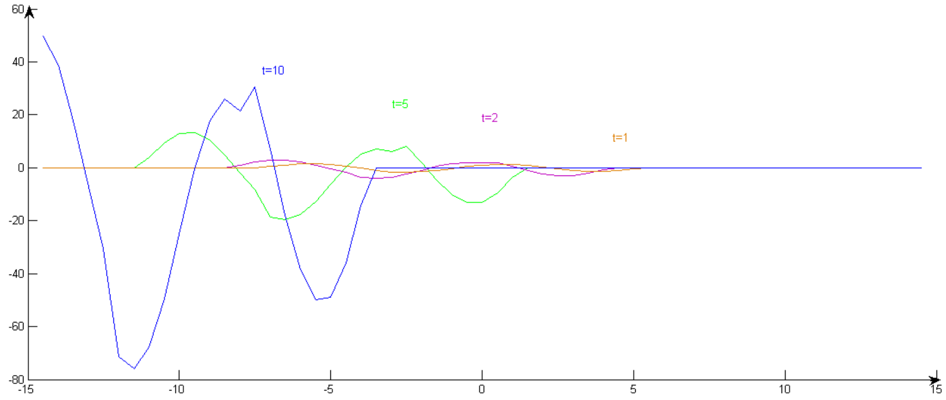
Örnek 2.2 de ele aldığımız (2.27) denklemine karşılık gelen karakteristik denklemin köklerinin $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$şeklinde üç katlı olduğunu göstermiştik. Bu denklemin (2.28) ifadesindeki çözümünün grafiğini (3.4), (3.5) ve (3.6) başlangıç koşulları dahilinde ele alalım.



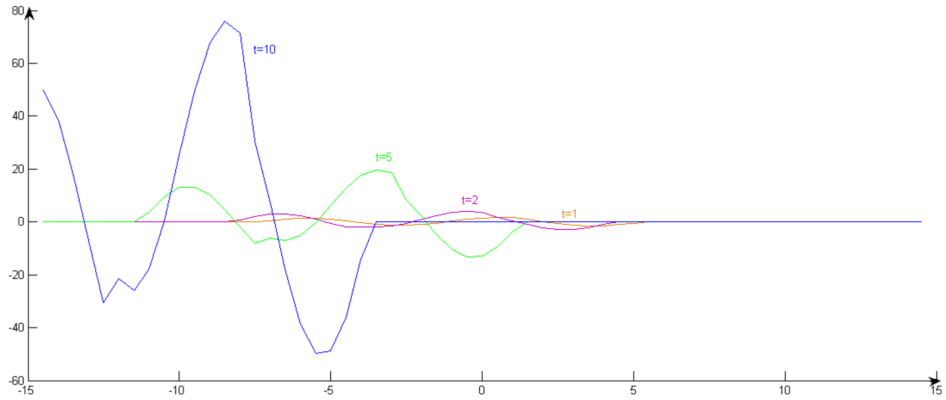
Şekil 2.13 (2.28) formülü ile elde edilen çözüm $(\phi_1(x) = \phi_2(x) = 0)$



Şekil 2.14 (2.28) formülü ile elde edilen çözüm $(\phi_2(x) = 0$ durumu)



Şekil 2.15 (2.28) formülü ile elde edilen çözüm $(\phi_2(x) = c < 0$ durumu)



Şekil 2.16 (2.28) formülü ile elde edilen çözüm $(\phi_2(x) = c > 0$ durumu)

SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır:

1. Üçüncü mertebeye göre homojen denkleme karşılık gelen karakteristik denklemin kökleri irdelenmiştir.
2. Karakteristik denklemin köklerinin sade oluşu ve katlılık derecesi dikkate alınarak denklem için yazılmış Cauchy probleminin analitik çözümleri elde edilmiştir.
3. Bazı sınıf başlangıç profillere sahip dalgaların dinamiği incelenmiştir.

KAYNAKLAR

1. Courant, K. and Hilbert, D. Methoden der MathematischenPhysik, Springer, Berlin, 1937.

2. Courant, K., and Lax, A., Remarks on Cauchy's Problem for Hyperbolic Partial Differential Equations with Constant Coefficients in Several Independent Variables, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 8, No 4, 1955, pp. 497-502.

3. Garding, L., Linear Hyperbolic Partial Differential Equations with Constant Coefficients, Acta Math., Vol. 85, 1950,1-62.

4. Hadamard, J., Le Probleme de Cauchy et les Equations aux DérivéesPartieliesLinéairesHyperboliques, Hermann, Paris, 1932.

5. John, F., Special Topics in Partial Differential Equations, Lecture Notes, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1952.

6. Lax, A., On Cauchy’s Problem for Partial Differential Equations with Multiple Characteristics, Comm. Pure Appl. Math., vol. IX, 135-169, 1956.

7. Leray, J., Hyperbolic Differential Equations, Institute for Advanced Study, Princeton, 1953.

8. Mizohata, S., Lectures on Cauchy Problem, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

9. Petrowski, I. G., On the Cauchy Problem for Systems of Linear Partial Differential Equations in the Class of Non Analytic Functions, Buul. Mosk. Gos. Univ. Seksiya A. 1, 7 ,1938.

10. Rasulov, M.L.,Methods of Contour Integration, North Holland, 1967.

11. Sneddon, I.N., Elements of Partial Differential Equations, Mc. Grav-Hill Book Company Inc., 1957.

12. Sobolev, S.L., Applications of Functional Analysis to Equations of Mathematical, Amer. Math. Sos. 1963.

13. Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A., Equations of Mathematical Physics, Pergamon Press, Oxford, 1963. [Translated by Robson, A.R.M, and Basu, P.; Translation Edited by Brink, D.M.

ÖZGEÇMİŞ

27.02.1983 tarihinde Tarsus doğdum. İlk ve orta öğrenimimi İstanbul, Abdülkadir Uztürk ilköğretim okulunda tamamladım. Lise eğitimimi İstanbul, Bakırköy de ki Hasan Polatkan lisesinde tamamladım. Ardından, 2003 yılında Bahçeşehir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik - Bilgisayar bölümüne başladım.2008 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl Marmara Üniversitesi İngilizce Öğretmenliği Sertifika Programını (Pedagojik Formasyon) bitirdim. 2014 – 2015 yılları arasında ise Bahçeşehir Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Sertifika Programını (Pedagojik Formasyon) bitirdim. 2015 yılında Beykent Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü'nde başladığım Uygulamalı Matematik alanındaki tezli yüksek lisans öğrenimime devam ediyorum.

Duygu Günerhan