T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

BASAMAĞA GÖRE HOMOJEN HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN D'ALEMBERT TÜRLÜ ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Pelin Sılay AKÇA

İSTANBUL, 2017

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

BASAMAĞA GÖRE HOMOJEN HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN D'ALEMBERT TÜRLÜ ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Pelin Sılay AKÇA

Öğrenci No:
150860003

Danışman:
Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2017

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum" Basamağa göre Homojen Hiberbolik Denklem için Cauchy probleminin D'alembert türlü çözümü" başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 02./05/2017

Pelin Sılay AKÇA

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 150860003 no'lu Pelin Sılay AKÇA'ın 14/04/2017 tarihinde yapılan tez savunma sınavı[1] sonucunda...50.. dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında[2] oybirliği / oyçokluğu ile, ..kabul... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Başlığı[3] : Basamağa Göre Homojen Hiperbolik Denklem İçin Cauchy Probleminin D'Alembert Türlü Çözümü

Tez Sınav Jürisi	**Öğretim Üyesi**	**İmza**
Danışman	: Prof.Dr. Mahir RESULOV	
Üye	: Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR (Sakarya Üniversitesi)	
Üye	: Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL	

---

[1] Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

[2] Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

[3] İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Hem lisans hem de yüksek lisans öğrenimim boyunca bana danışmanlık yapmış olan ve değerli fikirlerinden faydalandığım kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV ile Sayın Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL ’a tüm yardım ve destekleri için teşekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi her türlü desteğini esirgemeyen ve bugünlere ulaşmamda büyük pay sahibi olan sevgili ağabey’im Ahmet SÜNGERİÇLİOĞLU’ya saygı ve sevgiyle minnettarlığımı bir borç bilirim.

Pelin Sılay AKÇA

Adı ve Soyadı : Pelin Sılay AKÇA
Danışmanı : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans, 2017
Alanı : Matematik Bilgisayar
Anahtar Kelimeler : D’alambert türlü çözüm, dördüncü mertebeden hiperbolik denklem

ÖZ

BASAMAĞA GÖRE HOMOJEN HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN D'ALEMBERT TÜRLÜ ÇÖZÜMÜ

Tezde 4. basamağa göre homojen olan lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminin çözümü için, karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak D'Alembert türlü kolay kullanılabilir ifadeler elde edilmiştir.

Name and Surname : Pelin Sılay AKÇA
Supervisor : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Degree and Date : Master, 2017
Major : Mathematics Computer
Key Words : D'alembert type solution, fourth order hyperbolic equation

ABSTRACT

ACCORDING TO THE DIGIT, D'ALEMBERT TYPE SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR HOMOGENOUS HYPERBOLIC EGUATION

For the solution of Cauchy problem that was written for linear partial differential equation according to the 4th step in the thesis, D'alembert type easy usable statements were obtainted which depend on theroots of characteristic equation.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Uygulamadaki birçok önemli sorunun teorik olarak incelenmesi kısmi diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümüne indirgenir. Hiperbolik tür (genellikle doğrusal) denklemler için Cauchy probleminin çözümü literatürde kronolojik olarak [2-10] iyice öğrenilmiştir. Formel olarak, Cauchy probleminin analizi için uygulanan yöntemleri iki yere bölebiliyoruz; bunlardan birisi varyasyon metotları, ikincisi Fourier veya diğer dönüşümleri kullanarak çözümü elde edilen klasik yöntemlerdir. [1,9,12,13]. Bu tür araştırmalarda, problemin çözümünün varlığı ve tekliği, çözümünün problemin başlangıç verilerden sürekli bağımlılığını ifade eden formüller elde edilmektedir. Bu çözümlerin, pratik amaçlar için kullanıldıklarında sıklıkla bazı zorluklarla karşı karşıya olduğu açıktır.

Pratik ve teorik açıdan yüksek dereceli kısmi diferansiyel denklemler için kullanımı kolay çözüm formülleri elde etmek önemlidir. Bu tür çözümlerle problemi çözmenin varlığı ve tekliğini sorunu da incelenebilir. Buna ek olarak, bu tür çözümler, diferansiyel denklemlere uygulanabilir sayısal çözüm yöntemleriyle elde edilen çözümlerin değerlendirilmesine de olanak tanır.

Bu tezde, dördüncü derece türevine göre homojen hiperbolik tip denklem için yazılan Cauchy probleminin çözümü için D'Alambert tipi çözümler elde edilmiştir.

1.1 Bir Boyutlu İkinci Basamaktan Dalga Denklemi İçin Cauchy Probleminin Çözümü, D'alembert Formülü

Bu kısımda R^2 Euclid uzayında verilmiş aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}, 0) = \varphi_0(x), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \tag{1.3}$$

Cauchy probleminin çözümünü araştıralım. Bu problemi çözmek için dalga denkleminin 2. kanonik formunu kullanmak daha uygundur. Bu nedenle, (1.1) denklemine karşılık gelen karakteristik denklemi

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0$$

olarak yazalım. Bu denklemi $dx - adt = 0$ ve $dx + adt = 0$ şeklinde parçaladıktan sonra integrallersek $x - at = c_1$ ve $x + at = c_2$ buluruz. Şimdi, (x,t) değişkenlerinden yeni (ξ, η)

$$x - at = \xi \text{ ve } x + at = \eta \tag{1.4}$$

değişkenlere dönüş yapalım. Bu durumda (1.1) denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{1.5}$$

kanonik formunu alır. (1.5) denkleminin genel çözümü

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \tag{1.6}$$

biçiminde elde edilir. Burada f ve g keyfi sürekli diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyonlardır. (1.6) ifadesindeki ξ ve η nın (1.4) deki değerleri yerine konursa,

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at) \tag{1.7}$$

alırız. Eğer f ve g fonksiyonlarının ikinci mertebeden sürekli türevleri varsa, u(t,x) fonksiyonu (1.1), (1.2) probleminin çözümü olabilir. (1.7) genel çözümünün (1.2) başlangıç koşullarını koruduğunu varsayarsak, bu taktirde f(x) ve g(x) fonksiyonlarını bulmak için

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi_0\,(x), \\ f'(x) - g'(x) = \frac{1}{a}\varphi_1(x) \end{cases} \tag{1.8}$$

sistemini alırız. (1.8) ifadesinin integrallenmesi sonucunda

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1\,(z\,)dz\, + c \tag{1.9}$$

olur.

Bu durumda (1.8) in birinci denklemi ve (1.9) ifadeleri birlikte lineer cebirsel denklemler sistemi oluşturur. Bu sistemin çözümleri,

$$f(x) = \frac{\varphi_{\,0}(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1\,(z\,)dz \;\; + \frac{c}{2}$$

$$g(x) = \frac{\varphi_{\,0}(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1\,(z\,)dz \;\; - \frac{c}{2}$$

dır. Bu ifadeler (1.7) de yerine koyulursa

$$u(t,x) = \frac{\varphi_{\,0}(x-at)+\varphi_{\,0}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1\,(z\,)dz \qquad (1.10)$$

elde edilir. Eğer, φ_0 in ikinci mertebeden, φ_1 in birinci mertebeden sürekli türevleri varsa, elde edilen (1.10) ifadesi (1.1), (1.2) probleminin ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip klasik çözümü olur. Bu çözümün tekliği (1.10) ın elde ediliş yolundan görülür. Diğer taraftan, (1.10) çözümünün başlangıç fonksiyonlarına sürekli bağımlı olmasını incelemek de önemli bir olaydır. Bunun nedeni ise, genelde başlangıç fonksiyonlarının deneysel yolla bulunmasıdır. Böylece, gerçek değerlerinden çok küçük farklılık gösterirler. Hadamard'ın problemi küçük değişmeye rağmen çözümün çok büyük değişime uğrayabileceğini göstermiştir. Bu ise fiziksel bakımdan yanlış olabilir. Bu sorunun cevapı [4,9] detaylı şekilde incelenmiştir.

(1.10) ifadesi ile bulunan çözüme bir boyutlu dalga denklemi için verilen Cauchy probleminin D'Alembert çözümü, yani Cauchy probleminin D'Alembert çözümü veya D'Alembert formülü denir.

1.2 Sabit Katsayılı Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde bazı sınıf lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerini inceleyeceğiz [13].

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u = f(x,y) \qquad (1.1)$$

denklemini gözönüne alalım. Burada $\mathcal{L}$ notasyonu

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \sum_i\sum_j c_{ij}\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{\partial^j}{\partial y^j}\right)u \qquad (1.2)$$

şeklinde yazılmış lineer operatör, c_{ij} ler ise bilinen sabitler olmaktadır. (1.1) e karşılık gelen homojen denklemin, yani

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0 \qquad (1.3)$$

denkleminin herhangi keyfi elemanlar içeren çözümüne, adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi genel çözüm veya tamamlayıcı fonksiyon diyeceğiz. Benzer olarak, (1.1) denkleminin herhangi bir çözümüne de özel integrali adını vereceğiz.

Teorem 1.1 $u(x, y)$ ve $z_1(x, y)$ sırasıyla tamamlayıcı fonksiyon ve özel integral olsun. Bu durumda $u + z_1$ denklemin genel çözümü olmaktadır.

İspat. (1.1) ve (1.3) denklemleri aynı cinsten olduğundan $u + z_1$ genel çözüm olur. Ayrıca,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0 \text{ ve } \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) z_1 = f(x, y)$$

ifadelerinden

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)(u + z_1) = f(x, y)$$

olur, yani $u + z_1$ (1.1) denkleminin çözümüdür.

Teorem 1.2 Eğer $u_1, u_2, \dots, u_n$ homojen denklemin çözümleri ise

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

de homojen denklemin çözümü olur.

İspat. Teoremin ispatı aşağıdaki

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)(c_i u_i) = c_i \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) u_i = c_i \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \sum_{i=1}^{n} u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) u_i = 0$$

eşitliğinden elde edilir.

Sonraki işlerimizde kolaylık sağlamak için

$$\frac{\partial}{\partial x} = D, \quad \frac{\partial}{\partial y} = D'$$

ile gösterelim. $\mathcal{L}(D, D')$ lineer operatörlerini aşağıdaki gibi sınıflandıralım:

a) Eğer a ve b sabitler olmak koşuluyla $\mathcal{L}(D, D')$ operatörü $D + aD' + b$ gibi lineer operatörlerin çarpımı şeklinde gösterilebilirse, bu taktirde $\mathcal{L}$ ye indirgenebilir operatör denir.

b) $\mathcal{L}(D, D')$ operatörü $D + aD' + b$ gibi operatörlerin çarpımı (faktörizasyonu) şeklinde ifade edilemezse, böyle operatörlere indirgenemeyen operatör denir.

Örnek 1.1 $D^2 - {D'}^2$ indirgenebilirdir. Çünkü,

$$D^2 - {D'}^2 = (D + D')(D - D')$$

şeklinde yazılabilir. Fakat, $D^2 - D'$ operatörü indirgenemeyendir.

1.3 İndirgenebilir Denklemler

Teorem 1.3 Eğer $\mathcal{L}(D,D')$ indirgenebilirse, bu taktirde lineer çarpımların sıralaması önemli değildir.

İspat. Eğer

$$(\alpha_r D+\beta_r D'+\gamma_r)(\alpha_s D+\beta_s D'+\gamma_s)$$
$$=(\alpha_s D+\beta_s D'+\gamma_s)(\alpha_k D+\beta_k D'+\gamma_k) \qquad (1.4)$$

olduğunu gösterebilirsek, bu durumda herhangi bir indirgenebilir operatör

$$\mathcal{L}(D,D')=\prod_{r=1}^{n}(\alpha_r D+\beta_r D'+\gamma_r) \qquad (1.5)$$

şeklinde gösterilebilir. (1.4) ün ispatı ise (1.4) eşitliğinin her iki tarafının da

$$(\alpha_r D+\beta_r D'+\gamma_r)(\alpha_s D+\beta_s D'+\gamma_s)=\alpha_r\alpha_s D^2+(\alpha_r\beta_s+\beta_r\alpha_s)DD'$$
$$+\beta_r\beta_s D'^2+(\alpha_r\gamma_s+\gamma_r\alpha_s)D+(\beta_r\gamma_s+\gamma_r\beta_s)D'+\gamma_r\gamma_s$$

ifadesine eşit olduğunu göstermek yeterlidir.

Teorem 1.4 Eğer $\alpha_r D+\beta_r D'+\gamma_r$ ifadesi $\mathcal{L}(D,D')$ operatörünün faktörlerinden birisi ve herhangi bir $\phi_r(\xi)$ fonksiyonu ve $\alpha_r\neq 0$ için

$$u_r=e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi_r(\beta_r x-\alpha_r y)$$

ifadesi $\mathcal{L}(D,D')u=0$ denkleminin çözümüdür.

İspat. $n=1$ durumu için

$$(\alpha_r D+\beta_r D'+\gamma_r)u=0$$

denklemini açık şekilde yazarsak

$$\alpha_r\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_r\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma_r u=0$$

olur. Karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{\alpha_r}=\frac{dy}{\beta_r}=\frac{du}{-\gamma_r}$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$C_1=\beta_r x-\alpha_r y$$

$$C_2=u-e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}$$

aralık integrallerini buluruz. Genel çözüm

$$F(C_1,C_2)=0$$

veya

$$u=e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi(\beta_r x-\alpha_r y)$$

olur.

İspatı gerçekleştirmek için u_r için yazılmış olan ifadeye sırasıyla D ve D' türev işleçlerini uygularsak

$$Du_r \equiv \frac{\partial}{\partial x}u_r = -\frac{\gamma_r}{\alpha_r}e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi_r(\beta_r x - \alpha_r y) + e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi_r{}'(\beta_r x - \alpha_r y)\beta_r$$

$$= -\frac{\gamma_r}{\alpha_r}u_r + \beta_r e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi_r{}'(\beta_r x - \alpha_r y)$$

ve

$$D'u_r \equiv \frac{\partial}{\partial y}u_r = -\alpha_r e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\phi_r{}'(\beta_r x - \alpha_r y)$$

elde ederiz. Bulunan bu değerler $(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)u$ ifadesinde yerine konulursa

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)u = 0 \tag{1.6}$$

bulunur. Teorem 1.3 ü kullanarak

$$\mathcal{L}(D, D') = \{\textstyle\prod_{s=1}^{n}(\alpha_s D + \beta_s D' + \gamma_s)\}(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)u_r \tag{1.7}$$

elde ederiz. (1.6) ve (1.7) den

$$\mathcal{L}(D, D')u_r \equiv 0$$

olduğunu görürüz. Benzer yolla aşağıdaki teoremi de ispatlayabiliriz

Teorem 1.5 Eğer $\beta_r D' + \gamma_r$ ifadesi $\mathcal{L}(D, D')$ operatörünün herhangi bir faktörü ve $\phi_r(\xi)$ herhangi bir fonksiyon, $\beta_r \neq 0$ için

$$u_r = e^{-\frac{\gamma_r}{\beta_r}y}\phi_r(\beta_r x)$$

ifadesi $\mathcal{L}(D, D')u = 0$ denkleminin çözümüdür.

Not 1.1 Aşağıdaki denklemi

$$(\beta_r D' + \gamma_r)u = 0$$

göz önüne alalım.

$$\beta_r \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_r u = 0$$

denklemini değişkenlerine ayırırsak,

$$\frac{\partial u}{u} = -\frac{\gamma_r}{\beta_r} dy$$

olur. Buradan

$$u = e^{-\frac{\gamma_r}{\beta_r} y} \phi_r(\beta_r x)$$

bulunur.

Bazı durumlarda $\mathcal{L}(D, D')$ operatörünün katlı faktörleri de olabilir, yani faktörler

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^k$$

şeklinde olabilir. Bu şekilde faktörleri olan denklemlerin çözümleri Teorem 1.4 ve Teorem 1.5 in uygulanması ile bulunur.

Özel durumu inceleyelim. $k = 2$ olsun. Bu durumda denklemi

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^2 u = 0 \tag{1.8}$$

şeklinde yazarız.

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) u = U(x, y)$$

ile gösterirsek (1.8) ifadesi

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) U = 0$$

olur. Teorem 1.4 e göre

$$U(x, y) = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r} x} \phi_r(\beta_r x - \alpha_r y), \;\; \alpha_r \neq 0$$

şeklinde yazılır. Aradığımız $u(x, y)$ fonksiyonunu bulmak için

$$(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r) u = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r} x} \phi_r(\beta_r x - \alpha_r y) \tag{1.9}$$

kısmi türevli denklemi çözmemiz gerekmektedir. (1.9) denklemini açık bir şekilde yazarsak

$$\alpha_r \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_r \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_r u = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r} x} \phi_r(\beta_r x - \alpha_r y)$$

olur. Karakteristik denklemi ise

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{dy}{\beta_r} = \frac{du}{-\gamma_r u + e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \phi_r(\beta_r x - \alpha_r y)}$$

olmaktadır. İlk birinci aralık integrali

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{dy}{\beta_r}$$

denkleminden $c_1 = \beta_r x - \alpha_r y$ olur. Şimdi

$$\frac{dx}{\alpha_r} = \frac{du}{-\gamma_r u + e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \phi_r(c_1)}$$

denklemini çözelim.

Sonuncu denklemi u ya göre düzenlersek,

$$\frac{du}{dx} + \frac{\gamma_r}{\alpha_r} u = \frac{1}{\alpha_r} e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \phi_r(c_1) \tag{1.10}$$

şeklinde adi lineer diferansiyel denklem olduğu görülür. Bu denklemi çözmek için önce

$$\frac{du}{dx} + \frac{\gamma_r}{\alpha_r} u = 0$$

homojen kısmını göz önüne alalım. Bu homojen denklemi

$$\frac{du}{u} = -\frac{\gamma_r}{\alpha_r} dx$$

şeklinde yazıp, değişkenlerine ayrıştırma yöntemini uygularsak, çözümü

$$u = ce^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}$$

şeklinde buluruz. Buradaki integral sabitini gösteren c yi x in bilinmeyen fonksiyonu olarak düşünüp, homojen olmayan denklemin genel çözümünü

$$u = c(x)e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \tag{1.11}$$

şeklinde arayalım. (1.11) den türev alırsak,

$$\frac{du}{dx} = c'(x)e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} - \frac{\gamma_r}{\alpha_r} c(x) e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x} \tag{1.12}$$

elde ederiz. (1.11) ve (1.12) ifadeleri (1.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$c'(x) = \frac{1}{\alpha_r}\phi_r(c_1)$$

bulunur ve buradan $c(x)$ bilinmeyen fonksiyonu

$$c(x) = \frac{1}{\alpha_r\beta_r}\int_0^x \phi_r(\xi)d\xi + c_2$$

olarak belirlenir. Burada c_2 integrasyon sabiti olmaktadır. $c(x)$ fonksiyonu (1.11) de yerine konursa, homojen olmayan (1.10) denkleminin genel çözümü

$$u = e^{-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x}\left\{\frac{1}{\alpha_r\beta_r}\int_0^x \phi_r(\xi)d\xi + c_2\right\}$$

Olur.

Teorem 1.6 $(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^n$ çarpımı $\mathcal{L}(D, D')$ operatötünün faktörü ve $\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \ldots, \varphi_{r_n}$ herhangi bir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\exp\left(-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x\right)\sum_{s=1}^{n} x^{s-1}\,\varphi_{r_s}(\beta_r x - \alpha_r y)$$

ifadesi $\mathcal{L}(D, D') = 0$ denkleminin çözümü olmaktadır.

Bu teorem 5. teoremin genelleştilmişi olduğundan onu ispatlamaya gerek kalmıyor.

Teorem 1.7 $(\beta_r D' + \gamma_r)^m$ çarpımı $\mathcal{L}(D, D')$ operatötünün faktörü ve $\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \ldots, \varphi_{r_m}$ herhangi bir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\exp\left(-\frac{\gamma_r}{\beta_r}y\right)\sum_{s=1}^{m} x^{s-1}\,\varphi_{r_s}(\beta_r x)$$

ifadesi $\mathcal{L}(D, D') = 0$ denkleminin çözümü olmaktadır.

Bu söylediklerimizi genelleştirmiş olursak aşağıdaki genel teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 1.8. Eğer α_r lerin hiç biri sıfır değilse ve

$$\mathcal{L}(D, D') = \prod_{r=1}^{n}(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)^m$$

operatörü dönüştürülürse,

$$u(x, y) = \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{\gamma_r}{\alpha_r}x\right)\sum_{s=1}^{m_r} x^{s-1}\,\varphi_{r_s}(\beta_r x - \alpha_r y) \tag{1.13}$$

$\mathcal{L}(D, D') = 0$ denkleminin çözümü olmaktadır.

Örnek1. Aşağıdaki denklemin

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

çözümünü bulalım.

Bunun için denklemi

$$(D + D')^2(D - D')^2 = 0$$

gibi yazalım. (1.11) formülüne göre çözümü

$$u(x, y) = x\varphi_1(x - y) + \varphi_2(x - y) + x\psi_1(x + y) + \psi_2(x + y)$$

kolayca buluruz. Burada $\varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi_2$ herhangi bir fonksiyonlardır.

(1) denklemin tamamlayıcı fonksiyonunu bulduktan sonra, çözümü tamamlamak için yalnızca özel bir integral bulmamız gerekir. Bu 6. teoremin kanıtında kullanılan benzer bir şekilde bulunabilir.

Gerçektende, eğer

$$u_1 = \prod_{r=2}^{n}(\alpha_r D + \beta_r D' + \gamma_r)u$$

olarak gösterirsek u_1 fonksiyonunu aşağıdaki denklemden

$$\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \gamma_1 u_1 = f(x, y) \tag{1.14}$$

bulmamız gerekecektir.

Örnek 1.2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x - y$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Denklemi $(D - D')(D + D')u = x - y$ seklinde yazalım. $(D + D')u = u_1$ olsun. Bu durumda $(D - D')u_1 = x - y$ olur. Sonuncu denklemi

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = x - y$$

gibi yazıp özel çözümü bulalım. Karakteristik denklem

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du_1}{x - y}$$

olur. Buradan $c_1 = x - y,$ ve $c_2 = u_1 - \frac{1}{2}(x - y)^2$ elde ederiz. Denklemin genel çözümü

$$u_1 = \frac{1}{2}(x - y)^2 + f(x - y)$$

olmaktadır. $f = 0$ alırsak özel çözümü bulmuş oluruz. Homojen denklemin de genel çözümünü

$$u = \frac{1}{2}(x - y)^2 + f(x - y) + g(x + y)$$

şeklinde buluruz.

2. 4. BASAMAĞA GÖRE HOMOJEN HİPERBOLİK DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN DALAMBERT TÜRLÜ ÇÖZÜMÜ

2.1 Karakteristik Denklem ve Çözümün Genel Şekli

Aşağıdaki 4. basamağa göre homojen hiperbolik denklemi

$$\sum_{i=0}^{4} a_i \frac{\partial^4 u}{\partial t^{4-i} \partial x^i} = 0 \quad (2.1)$$

veya açık şekilde yazarsak

$$a_0 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} + a_2 \frac{\partial^4 u}{t^2 \partial x^2} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 x^3} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (2.1')$$

göz önüne alalım, burada a_i'ler bilinen reel sabittir. (2.1) denklemini

$$\left. \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^x} \right|_{t=0} = \phi_k(x) \ \ (k = 1,2,3\,) \quad (2.2)$$

başlangıç koşulları çerçevesinde inceleyelim. (2.1),(2.2) probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \varphi(x + \lambda t) \quad (2.3)$$

cinsinden arayalım. Burada, φ fonksiyonu 4 kez sürekli diferansellenebilen fonksiyondur. λ ise bilinmeyen ve bulunulması gerekilen sabittir.

(2.3) ifadesindekini (2.1)'de yerine yazalım. Bunun için önce gereken türevleri bulalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \varphi,\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2 \varphi'', \dots ,\ \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \lambda^{\text{ıv}} \varphi^{\text{ıv}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi^{\text{ı}}, \dots ,\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \varphi^{\text{ıv}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \lambda \varphi^{\text{ıı}},\ \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 . \partial x} = \lambda^3 \varphi^{\text{ıv}} \ .$$

Elde ifadeler (2.1) de yerine konursa

$$a_0 \varphi^{\text{ıv}} \lambda^4 + a_1 \varphi^{\text{ıv}} \lambda^3 + a_2 \varphi^{\text{ıv}} \lambda^2 + a_3 \varphi^{\text{ıv}} \lambda + a_4 \varphi^{\text{ıv}} = 0$$

veya,

$$\varphi^{\text{ıv}} [a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4] = 0 \quad (2.4)$$

elde edilir. Buradan,

$$\varphi^{\text{ıv}}(x + \lambda t) = 0 \tag{2.5}$$

ve,

$$[a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4] = 0 \tag{2.6}$$

denklemlerini elde ederiz.

(2.5) denkleminden, $\xi = x + \lambda t$ dersek, $\varphi^{\text{ıv}}(\xi) = 0$ olarak yazabiliriz. Buradan 4 kez $\xi' ya$ göre integralleme yoluyla,

$$\varphi^{\text{ııı}} = c_{1,}$$

$$\varphi^{\text{ıı}} = c_1\xi + c_{2,}$$

$$\varphi(\xi) = c_1\xi^3 + c_2\xi^2 + c_3\xi + c_4$$

$$\varphi(x + \lambda t) = c_1(x + \lambda t)^3 + c_2(x + \lambda t)^2 + c_3(x + \lambda t) + c_4$$

özel çözümlerini elde ederiz.

(2.6) denklemi görüldüğü gibi 4.dereceden cebirsel denklem olmaktadır. Bu denklemi karakteristik denklem olarak adlandıracağız. Cebirden bilindiği üzere 4.dereceden denklemin köklerinin sayısı dörtten fazla olamaz.

Açıktır ki, aşağıdaki durumlar ola bilir:

1^0. denklemin bir birinden farklı dört reel kökleri vardır,

2^0. $\lambda = \lambda_1^4$ dört defa katlı köktür.

3^0. $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ yani $\lambda_1\ ve\ \lambda_2$ 2 katlı kök olabilir.

$4^{0.}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4$, yani $\lambda = \lambda_1$ üç defa $\lambda = \lambda_2$ ise sade köktür.

Bu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

2.2 Sade Kökler Olan Durum

Varsayalım ki, (2.6) denkleminin 4 tane reel kökü vardır. Bunları $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ve\ \lambda_4$ ile gösterelim. Bu durumda, açıktır ki

$$\varphi(x+\lambda_1 t),\ \varphi(x+\lambda_2 t),\ \varphi(x+\lambda_3 t),\ \varphi(x+\lambda_4 t)$$

fonksiyonları (2.1) denklemini korur. Gerçekten de, önce $u=\varphi(x+\lambda t)$ olsun. Bu durumda

$$a_0\lambda_1^4\varphi^{\imath v}+a_1\lambda_1^3\varphi^{\imath v}+a_2\lambda_1^2\varphi^{\imath v}+a_3\lambda_1\varphi^{\imath v}+a_3\varphi^{\imath v}=$$

$$=\varphi^{\imath v}[a_0\lambda_1^4+a_1\lambda_1^3+a_2\lambda_1^2+a_3\lambda_1+a_4]=0$$

olur. Benzer yolla diğer fonksiyonlarında (2.1) denklemini koruduğunu görebiliriz.

Gösterebiliriz ki,

$$u(x,t)=\varphi_1(x+\lambda_1 t)+\varphi_2(x+\lambda_2 t)+\varphi_3(x+\lambda_3 t)+\varphi_4(x+\lambda_4 t) \qquad (2.7)$$

fonksiyonu da (2.1) denklemini korur.

Şimdi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\ ve\ \varphi_4$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki, (2.7) ifadesi (2.2) başlangıç koşullarını da korusun. Bunun için (2.7) ni (2.2) de yerine yazalım. Önce (2.2) başlangıç koşullarını açık şekilde yazalım:

$$k=0, \qquad u(x,0)=\phi_0(x),$$

$$k=1, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{at}=\phi_1(x),$$

$$k:2 \qquad \frac{\partial^2 u\,(x,0)}{\partial t^2}=\phi_2(x),$$

$$k:3 \qquad \frac{\partial^3 u(x,0)}{\partial t^3}=\phi_3(x)$$

Bu ifadeler dikkate alınırsa

$$\begin{cases} \varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+\varphi_4(x)=\phi_0(x), \\ \lambda_1\varphi_1'(x)+\lambda_2\varphi_2'(x)+\lambda_3\varphi_3'(x)+\lambda_4\varphi_4'(x)=\phi_1(x), \\ {\lambda_1}^2\varphi_1''(x)+{\lambda_2}^2\varphi_2''(x)+{\lambda_3}^2\varphi_3''(x)+{\lambda_4}^2\varphi_4''(x)=\phi_2(x), \\ {\lambda_1}^3\varphi_1'''(x)+{\lambda_2}^3\varphi_2'''(x)+{\lambda_3}^3\varphi_3'(x)+{\lambda_4}^3\varphi_4'''(x)=\phi_3(x) \end{cases} \qquad (2.8)$$

cebirsel denklemler sistemini elde ederiz. (2.8) denklemler sisteminin 2.denklemin 1 kez, 3.denklemini 2.kez, 4.denklemin 3 kez x'e göre integralleyerek

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \varphi_4(x) = \phi_0(x),$$

$$\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) + \lambda_4\varphi_4(x) = \int_0^x \phi_1(\xi)d_\xi + C_{20},$$

$$\lambda_1^2\varphi_1(x) + \lambda_2^2\varphi_2(x) + \lambda_3^2\varphi_3(x) + \lambda_4^2\varphi_4(x) = \int_0^x d_\xi \int_0^x \phi_2(\xi)d_\xi + C_{30}\,\xi + C_{31,}$$

$$\lambda_1^3\varphi_1(x) + \lambda_2^3\varphi_2(x) + \lambda_3^3\varphi_3(x) + \lambda_4^3\varphi_4(x) = \int_0^x d_\xi \int_0^x d_\xi \int_0^x \Phi_3(\xi)d_{\xi +} C_{40}\xi^2 + C_{41}\xi + C_{42}$$

alırız. Burada $C_{20}, C_{30}, C_{31,}C_{40}, C_{41}\ ve\ C_{42}$ herhangi bir sabitlerdir.

$$\int_0^x d_\xi \int_0^x \phi_2(\xi)d_\xi = \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d_{\xi,}$$

$$\int_0^x d_\xi \int_0^x d_\xi \int_0^x \phi_3(\xi)d_\xi = \frac{1}{2}\int_0^x (x-\xi)^2\phi_3(\xi)d_\xi$$

ifadelerini de dikkate alırsak $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\ ve\ \varphi_4$ bilinmeyen fonksiyonları için aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini

$$\begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \varphi_4(x) = \phi_0(x), \\ \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) + \lambda_4\varphi_4(x) = \int_0^x \phi_1(\xi)d_{\xi +} C_{20} \\ \lambda_1^2\varphi_1(x) + \lambda_2^2\varphi_2(x) + \lambda_3^2\varphi_3(x) + \lambda_3^2\varphi_3(x) + \lambda_4^2\varphi_4(x) = \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d_\xi + C_{30} + C_{31} \\ \lambda_1^3\varphi_1(x) + \lambda_2^3\varphi_2(x) + \lambda_3^3\varphi_3(x) + \lambda_3^3\varphi_3(x) + \lambda_4^3\varphi_4(x) = \frac{1}{2}\int_0^X (x-\xi)^2\,\phi_3(\xi)d_\xi + C_{40}\xi^2 + C_{41}\xi + C_{40} \end{cases}$$

elde ederiz. Açıktır ki, sonuncu denklemler sisteminin tek bir çözümünün varlığı için bilinmeyenlerinin katsayılarından oluşmuş determinantın sıfırdan farklı olması gerekli ve yeterli olmaktadır.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} \qquad (2.9)$$

Bu determinant Wandermond determinantıdır ve

$$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2).(\lambda_1 - \lambda_3).(\lambda_1 - \lambda_4).(\lambda_2 - \lambda_3).(\lambda_2 - \lambda_4).(\lambda_3 - \lambda_4)$$

eşittir. $\lambda_i \ (i = 1,2,3)'ler$ biri diğerinden farklı olduğu için sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, sisteminin tek bir çözümü vardır. Söz konusu çözümleri Cramer yöntemiyle bulalım.

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0(x) & 1 & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_1(\xi)d_\xi + C_{20} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \int_0^x x_\xi \phi_2(\xi)d_\xi + C_{30}x + C_{31} & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \frac{1}{2}\int_0^X (x-\xi)^2 \phi_3(\xi)d_\xi + C_{40}x^2 + C_{41}x + C_{42} & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0(x) & 1 & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \frac{1}{2}\int_0^x (x-\xi)^2 \phi_3(\xi)d\xi & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ C_{20} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ C_{30}x + C_{31} & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ C_{40}x^2 + C_{41}x + C_{42} & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}, \qquad (2.10)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_0(x) & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \frac{1}{2}\int_0^x (x-\xi)^2\phi_3(\xi)\,d\xi & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & C_{20} & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & C_{30}x + C_{31} & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & C_{40}x^2 + C_{41}x + C_{42} & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}, \qquad (2.11)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \phi_0(x) & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \int_0^x \phi_1(\xi)d_\xi & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d_\xi & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \frac{1}{2}\int_0^x (x-\xi)^2 \Phi_3(\xi)d_\xi & \lambda_4^3 \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & C_{20} & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & C_{30}x + C_{31} & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & C_{40}x^2 + C_{41}x + C_{42} & \lambda_4^2 \end{vmatrix}, \tag{2.12}$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \phi_0(x) \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \int_0^x \phi_1(\xi)d\xi \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \int_0^x (x-\xi)\phi_2(\xi)d\xi \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \int_0^x (x-\xi)\phi_3(\xi)d\xi \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & C_{20} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & C_{30}x + C_{31} \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & C_{40}x^2 + C_{41}x + C_{42} \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

Şimdi, (2.10)-(2.13) formüllerindeki ikinci determinantları inceleyelim.

$$S_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ C_{20} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ C_{30}x + C_{31} & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ C_{40}x^2 + C_{41}x + C_{42} & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & C_{20} & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & C_{30}x + C_{31} & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & C_{40}x^2 + C_{41}x + C_{42} & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & C_{20} & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & C_{30}x + C_{31} & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & C_{40}x^2 + C_{41}x + C_{42} & \lambda_4^2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & C_{20} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & C_{30}x + C_{31} \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & C_{40}x^2 + C_{41}x + C_{42} \end{vmatrix}$$

ifadelerini göz önüne alalım.

Lemma 2.1 $f_{ij}(y) = f_{ij}(y_{1,}y_2),\ (i,j = 1{,}2)$ tanım bölgesi D olan bir değerli fonksiyonlar, λ_1, λ_2 ise parametreler olsun. Herhangi bir $y \epsilon D$ için

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f_{20}(y) & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & f_{20}(y) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.14}$$

olur. $n = 3$ olursa,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ f_{20}(y) & \lambda_2 & \lambda_3 \\ f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & f_{20}(y) & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & f_{20}(y) \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) \end{vmatrix} =$$

$$0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} - f_{20}(y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + [f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y)] \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} -$$

$$0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + f_{20}(y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} - [f_{30}(y)\lambda_4 + f_{31}(y)] \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{vmatrix} +$$

$$f_{20}(y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} + [f_{30}(y) + f_{31}(y)] \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$f_{20}(y) \left[- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} \right]$$

$$+[f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y)] \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= f_{20}(y)[-\lambda_3^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2] +$$

$$[f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y)][\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1] = 0.$$

Teorem 2.1. $f_{ij}(\mathrm{y}) = f_i(y_1, y_2, y_3, y_4)$; $(i, j = 1{,}4)$ tanım bölgesi D herhangi bir dört değişkene bağlı bir değerli fonksiyonlar olsun. Herhangi $y \epsilon D$ için,

$$A_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ f_{20}(y) & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ f_{40}(y)\lambda_1^2 + f_{41}(y)\lambda_1 + f_{42}(y) & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & f_{20}(y) & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & f_{40}(y)\lambda_1^2 + f_{41}(y)\lambda_1 + f_{42}(y) & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & f_{20}(y) & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & f_{40}(y)\lambda_1^2 + f_{41}(y)\lambda_1 + f_{42}(y) & \lambda_4^3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & f_{20}(y) \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & f_{30}(y)\lambda_1 + f_{31}(y) \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & f_{40}(y)\lambda_1^2 + f_{41}(y)\lambda_1 + f_{42}(y) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.15)$$

Teoreminin ispatı $n = 2$ ve $n = 3$ durumlarında olduğu gibi hesaplamalar yoluyla yani tümevarım yöntemi ile elde edilebilir.

Bu durumda (2.1),(2.2) probleminin çözümü için (2.7)'den elde ederiz

$$u(x,t) = \left\{ \begin{vmatrix} \phi_0(x + \lambda_1 t) & 1 & 1 & 1 \\ \int_0^{x+\lambda_1 t} \phi_1(\xi) d\xi & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \int_0^{x+\lambda_1 t} (x + \lambda_1 t - \xi)\phi_2(\xi) d\xi & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \frac{1}{2}\int_0^{x+\lambda_1 t} (x + \lambda_1 t - \xi)\phi_3(\xi) d\xi & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \phi_0(x+\lambda_1 t) & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \int_0^{x+\lambda_2 t} \Phi_1(\xi)d\xi & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \int_0^{x+\lambda_2 t}(x+\lambda_2 t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \frac{1}{2}\int_0^{x+\lambda_2 t}(x+\lambda_2 t-\xi)^2\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \phi_0(x+\lambda_1 t) & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \int_0^{x+\lambda_2 t} \phi_1(\xi)d\xi & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \int_0^{x+\lambda_2 t}(x+\lambda_2 t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \frac{1}{2}\int_0^{x+\lambda_2 t}(x+\lambda_2 t-\xi)^2\phi_2(\xi)d\xi & \lambda_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \phi_0(x+\lambda_4 t) \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \int_0^{x+\lambda_4 t} \phi_1(\xi)d\xi \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \int_0^{x+\lambda_4 t}(x+\lambda_4 t-\xi)\phi_2(\xi)d\xi \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \frac{1}{2}\int_0^{x+\lambda_4 t}(x+\lambda_4 t-\xi)\phi_3(\xi)d\xi \end{vmatrix} \tag{2.16}$$

(2.16) ifadesini (2.1),(2.2) probleminin A’Dambert ‘nün genişletilmesi olmaktadır.

Şimdi (2.16) ifadesinden klasik telin titreşim denklemi için A’Dhambert formülünü elde edelim. Bunun için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.17}$$

$$u(x,0) = \varphi_0\,(x) \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \tag{2.19}$$

probleminin çözümü elde edelim. (2.17) denklemine karşılık gelen karakteristik denklemin kökleri $\lambda_{1=}a\,, \lambda_2 = -a$ olur. Şimdi, Δ determinantı hesaplayalım. (2.9) formülünden

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{vmatrix} = -2\mathrm{a} \neq 0$$

alırız. Bu durumda (2.16) formülü

$$u(x,t) = -\frac{1}{2a}\left\{\begin{vmatrix} \varphi_0(x+at) & 1 \\ \int_0^{x+at}\varphi_1(\xi)d\xi & -a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \varphi_0(x-at) \\ a & \int_0^{x-at}\varphi_1(\xi)d\xi \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2a}\left\{-a\varphi_0(x+at) - \int_0^{x+at}\varphi_1(\xi)\,d_\xi + \int_0^{x-at}\varphi_1(\xi)d\xi - a\varphi_0(x-at)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2a}[-a\varphi_0(x+at) - a\varphi_0(x-at)] - \frac{1}{2a}\left[-\int_0^{x+at}\varphi_1(\xi)d\xi + \int_0^{x-at}\varphi_1(\xi)d\xi\right]$$

$$= \frac{\varphi_0(x+at)+\varphi_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(\xi)d\xi$$

şeklini alır. Bu ise klasik A'Dlambert formülü yani olmaktadır, [1,9,13].

2.3 Dört Defa Katlı Kök Olan Durum

Bu bölümde (2.1) denklemine karşılık gelen karakteristik denklemin 4 kez katlı kökü olduğunu varsayalım.

Yukarıda olduğu gibi (2.6) denklemini göz önüne alalım. Varsayalım ki, λ_1 (2.6) denkleminin 4 defa katlı kökündür. Açıktı ki, $\varphi_1(x+\lambda_1 t)$, $t\varphi_2(x+\lambda_1 t)$, $t^2\varphi_3(x+\lambda_1 t)$, $t^3\varphi_4(x+\lambda_1 t)$ (2.1) denklemini sağlamaktadır.

Gerçekten de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1'.\lambda_1, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \lambda_1^2.\varphi_1'',\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \lambda_1^3.\varphi_1''',\ \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \lambda_1^4.\varphi_1^{\text{ıv}}$$

$$\frac{\partial_4^4}{\partial t\partial x^3} = \lambda_1\varphi_1^{(\text{ıv})}, \frac{a_4^4}{at^2ax^2} = {\lambda_1}^2\varphi_1^{(\text{ıv})}, \frac{\partial_4^4}{\partial t^3\partial x} = {\lambda_1}^3\varphi_1^{(\text{ıv})}, \frac{\partial_4^4}{\partial t^4} = \varphi_1^{(\text{ıv})}$$

ifadeleri (2.1) yerine konursa,

$$\varphi^{(\text{ıv})}[a_0\lambda_1^4 + a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_1^2 + a_3\lambda_1 + a_4] = 0$$

olur. Gösterelim ki,

$$u_1 = t\varphi_2(x+\lambda_1 t)$$

fonksiyonunun (2.1) denklemini sağlamaktadır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t\varphi_2'\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\varphi_2''\ ;\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = t\varphi_2'''\ ;\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = t\varphi_2^{IV}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_2 + \lambda_1 t\varphi_2' \ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda_1\varphi_2 + \lambda_1\varphi_2' + \lambda_1^2 t\varphi_2'' = 2\lambda_1\varphi_2' + \lambda_1^2 t\varphi_2'';$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \lambda_1^2\varphi_2'' + \lambda_1^2 t\varphi_2'' + \lambda_1^2\varphi_2'' + \lambda_1^3 t\varphi_2''' = 3\lambda_1^2\varphi_2'' + \lambda_1^3 t\varphi_2'''$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 4\lambda^2\varphi_2''' + \lambda_1^4 t\varphi^{\text{ıv}}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t\partial x^3} = \lambda_1 t\varphi_2^{IV}, \ \frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2} = \lambda_1^2 t\varphi_2^{III}, \ \frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x} = \lambda_1^3 t\varphi_2^{\text{ıv}},$$

$$a_0[4\lambda_1^3\varphi_2''' + \lambda_1^4 t\varphi^{\text{ıv}}] + a_1[\lambda_1^3 t\varphi^{\text{ıv}}] + a_2[\lambda_1^2 t\varphi_2'''] + a_3[\lambda_1 t\varphi^{\text{ıv}}] + a_4 t\varphi^{\text{ıv}} =$$

$$\varphi_2'''\left[4a_0{\lambda_1}^3 + 3a_1{\lambda_1}^2 + 2a_2\lambda_1 + a_3\right] + \varphi_2'^{v}[a_0{\lambda_1}^4 + a_1{\lambda_1}^3 + a_2{\lambda_1}^2 + a_3\lambda_1 + a_4] = 0\,.$$

Benzer yolla $t\varphi_2(x+\lambda_1 t),\ t^2\varphi_3(x+\lambda_1 t),\ t^3\varphi_4(x+\lambda_1 t)$, fonksiyonlarının da (2.1) denkleminin çözümleri olduğunu göstermek olur. Burada $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\ ve\ \varphi_4$, 4 kez sürekli diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyonlardır.

Açıktır ki, λ_1 (2.6) denkleminin 4 katlı kökü ise, $P_4(\lambda_1) = 0$, $P_4'(\lambda_1) = 0, P_4''(\lambda_1) = 0$, $P_4'''(\lambda_1) = 0$ olmaktadır. Burada,

$$P_4' = 4a_0\lambda_1^3 + 3a_1\lambda_1^2 + 2a_2\lambda_1 + a_3 = 0$$

$$P_4'' = 12a_0\lambda_1^2 + 6a_1\lambda_1 + 2a_2 = 0$$

$$P_4''' = 24a_0\lambda_1 + 6a_1 = 0$$

$$P_4^{\text{ıv}} = 24a_0 \neq 0.$$

(1.11) formülüne göre (2.1) denkleminin genel çözümü

$$u(x,t) = \varphi_1(x+\lambda_1 t) + t\varphi_2(x+\lambda_1 t) + t^2\varphi_3(x+\lambda_1 t) + t^3\varphi_4(x+\lambda_1 t) \qquad (2.20)$$

oluyor. Bilinmeyen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\ ve\ \varphi_4$ fonksiyonları başlangıç koşullar kullanıldıktan sonra

$$\varphi_1(x) = \phi_0(x),$$

$$\lambda\varphi_1' + \varphi_2(x) = \phi_1(x),$$

$$\lambda^2\varphi_1'' + 2\lambda\varphi_2' + 2\varphi_3 = \phi_2(x),$$

$$\lambda^3\varphi_1''' + 3\lambda^2\varphi_2'' + 6\lambda\varphi_3' + 6\varphi_4 = \phi_3(x)$$

cebirsel denklemler sisteminden bulunacaktır. Buradan,

$$\varphi_1(x) = \phi_0(x),$$

$$\varphi_2(x) = \phi_1(x) - \lambda\phi_0'(x),$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{2}[\phi_2(x) - 2\lambda\phi_1'(x) + 2\lambda^2\phi_0''(x) - \lambda^2\phi_0''(x)] =$$

$$\frac{1}{2}[\phi_2(x) - 2\lambda\phi_1'(x) + \lambda^2\phi_0''(x)]; \quad (3.4)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{6}[\phi_3(x) - \lambda^3\varphi_1''' - 3\lambda^2\varphi_2'' - 6\lambda\varphi_3'] =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\phi_3(x) - \lambda^3\phi_0'''(x) - 3\lambda^2\left(\phi_1''(x) - \lambda\phi_0'''(x)\right) - 6\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\phi_2' - 2\lambda\phi_1''(x) + \lambda^2\phi_0''(x)\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\{\phi_3(x) - \lambda^3\phi_0'''(x) - 3\lambda^2\phi_1''(x) + 3\lambda^3\lambda\phi_0'''(x) -$$

$$- 6\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\phi_2' - 2\lambda\phi_1''(x) + \lambda^2\phi_0''(x)\right)\right]\}$$

$$\frac{1}{6}\{\phi_3(x) + 2\lambda^3\phi_0'''(x) - 3\lambda^2\phi_1''(x) - 3\lambda\phi_2' + 6\lambda^2\phi_1'' - 3\lambda^3\phi_0'''(x)\} =$$

$$\frac{1}{6}\{\phi_3(x) - 3\lambda\phi_2'(x) + 3\lambda^2\phi_1''(x) - \lambda^3\phi_0'''(x)\}.$$

Elde edilen ifadeler (2.20) de yerine konursa

$$u(x,t) = \phi_0(x+\lambda t) + t[\phi_1(x+\lambda t) - \lambda\phi_0'(x+\lambda t)] +$$

$$+\frac{t^2}{2}[\phi_2(x+\lambda t) - 2\lambda\phi_1'(x+\lambda t) + \lambda^2\phi_0''(x+\lambda t)] +$$

$$+\frac{t^3}{6}[\phi_3(x+\lambda t) - 3\lambda\phi_2'(x+\lambda t) + 3\lambda^2\phi_1''(x+\lambda t) - \lambda^3\phi_0'''(x+\lambda t)] =$$

$$= \phi_0(x+\lambda t) + t\phi_1(x+\lambda t) + \frac{t^2}{4}\phi_2(x+\lambda t) + \frac{t^3}{6}\phi_3(x+\lambda t) -$$

$$-\lambda t\phi_0''(x+\lambda t) - \lambda t^2\phi_1'(x+\lambda t) - \frac{\lambda t^3}{2}\phi_2'(x+\lambda t) +$$

$$+\frac{\lambda^2 t^2}{2}\phi_0''(x+\lambda t) + \frac{\lambda^2 t^3}{2}\phi_1''(x+\lambda t) - \frac{\lambda^3 t^3}{2}\phi_0'''(x+\lambda \square)$$

veya

$$u(x,t) = \phi_0(x+\lambda t) + t\phi_1(x+\lambda t) + \frac{t^2}{2}\phi_2(x+\lambda t) + \frac{t^3}{6}\phi_3(x+\lambda t)$$
$$-\lambda[t\phi_0'(x+\lambda t) + \frac{t^2}{2}\phi_1'(x+\lambda t) + \frac{t^3}{2}\phi_2'(x+\lambda t)] +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}[t^2\phi_0''(x+\lambda t)+t^3\phi_1''(x+\lambda t)]-\frac{\lambda^3}{6}\ t^3\phi_0'''(x+\lambda t)$$

alırız.

Taylor açılımını kullanarak, çözüm için

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3-j}\frac{t^j}{j!}\phi_j^{(k)}(\xi)(x-\xi)^k=\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3-j}\frac{t^j}{j!}\phi_j^{(k)}(x+\lambda t)(x-\xi)^k \quad (2.21)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Burada $\xi = x-\lambda t$ olmaktadır.

(2.21) formülünün doğrulanması

Koşullar:$\phi_{j-4}(x)$ $(j=0,1,2,3)$ $fonksiyonlar$ı $(6-j)$. mertebeden sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olmaktadır. (36) formülünden görüldüğü gibi bu çözüme $-\lambda$ hızı ile O_X ekseninin sol tarafına doğru dağılan bir basit dalgayı

$$u(x,t)=\phi_0+t(-\lambda\phi_0'+\phi_1)+\frac{t^2}{2}(\lambda^2\phi_0''-2\lambda\phi_1'+\phi_2)+$$

$$+\frac{t^3}{6}(-\lambda^3\phi_0'''+3\lambda^2\phi_1''-3\lambda\phi_2'+\phi_3)$$

$$u(x,0)=\phi_0(\mathrm{x});$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\lambda\phi_0'-\lambda\phi_0'+\phi_1+\mathrm{t}(-\lambda^2\phi_0''+\lambda\phi_1')+\mathrm{t}(\lambda^2\phi_0''-2\lambda\phi_1'+\phi_2)$$

$$+\frac{t^2}{2}(\lambda^3\phi_0'''-2\lambda\phi_1''+\lambda\phi_2')+\frac{t^2}{2}(-\lambda^3\phi_0'''+3\lambda^2\phi_1''-3\lambda\phi_2'+\phi_3)$$

$$+\frac{t^3}{6}(-\lambda^4\phi_0^{\prime v}+3\lambda^3\phi_1'''-3\lambda^2\phi_2''+\lambda\phi_3')\ \ \mathrm{t=0}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\phi_1(\mathrm{x});$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\lambda\phi_1'+(-\lambda^2\phi_0''+\lambda\phi_1')+\mathrm{t}(-\lambda^3\phi_0'''+\lambda^2\phi_1'')+\lambda\phi_0''-2\lambda\phi_1'$$

$$+\phi_2+t(\lambda^3\phi_0'''-2\lambda^2\phi_1''+\lambda\phi_2')+t(\lambda^3\phi_0'''-2\lambda^2\phi_1''+\lambda\phi_2')+$$

$$\frac{t^2}{2}(\lambda^4\phi_0^{\prime v}-2\lambda^3\phi_1'''+\lambda^2\phi_2'')+t(-\lambda^3\phi_0'''+3\lambda^2\phi_1''-3\lambda\phi_2'+\phi_3)$$

$$+\frac{t^2}{2}(-\lambda^4\phi_0^{\prime v}+3\lambda^3\phi_1'''-3\lambda^2\phi_2''+\lambda\phi_3')+$$

$$+\frac{t^2}{2}(-\lambda^4\phi_0^{\prime v}+3\lambda^3\phi_1^{\prime\prime\prime}-3\lambda^2\phi_2^{\prime\prime}+\lambda\phi_3^{\prime})+$$

$$+\frac{t^3}{6}(-\lambda^5\phi_0^5+3\lambda^4\phi_1^{\prime v}-3\lambda^3\phi_2^{\prime\prime\prime}+\lambda^2\phi_3^{\prime\prime});$$

$t=0$ olduğunda

$$\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2}=\lambda\phi_1^{\prime}-\lambda^2\phi_0^{\prime\prime}+\lambda\phi_1^{\prime}+\lambda\phi_0^{\prime\prime}-2\lambda\phi_1^{\prime}+\phi_2=\phi_2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\phi_2+t[-\lambda^3\phi_0^{\prime\prime\prime}+\lambda^2\phi_1^{\prime\prime}+\lambda^3\phi_0^{\prime\prime\prime}-2\lambda^2\phi_1^{\prime\prime}+\lambda\phi_2^{\prime}+\lambda^3\phi_0^{\prime\prime\prime}-$$

$$-2\lambda^2\phi_1^{\prime\prime}+\lambda\phi_2^{\prime}-\lambda^3\phi_0^{\prime\prime\prime}+3\lambda^2\phi_1^{\prime\prime}-3\lambda\phi_2^{\prime}+\phi_3]+\frac{t^2}{2}(\lambda^4\phi_0^{\prime v}-$$

$$-2\lambda^3\phi_1^{\prime\prime\prime}+\lambda^2\phi_2^{\prime\prime}-\lambda^4\phi_0^{\prime v}+3\lambda^3\phi_1^{\prime\prime\prime}-3\lambda^2\phi_2^{\prime\prime}+\lambda\phi_3^{\prime}-\lambda^4\phi_0^{\prime v}+$$

$$+3\lambda^2\phi_1^{\prime\prime\prime}-3\lambda^2\phi_2^{\prime\prime}+\lambda\phi_3^{\prime})+\frac{t^3}{6}(\lambda^5\phi_0^5+3\lambda^4\phi_1^{\prime v}-3\lambda^3\phi_2^{\prime\prime\prime}+\lambda^2\phi_3^{\prime\prime})=$$

$$=\phi_2+t[-\lambda\phi_2^{\prime}+\phi_3]+\frac{t^2}{2}[-\lambda^4\phi_0^{\prime v}+4\lambda^3\phi_1^{\prime\prime\prime}-5\lambda^2\phi_2^{\prime\prime}+2\lambda\phi_3^{\prime})]+$$

$$\frac{t^3}{6}(-\lambda^5\phi_0^5+3\lambda^4\phi_1^{\prime v}-3\lambda^3\phi_2^{\prime\prime\prime}+\lambda^2\phi_3^{\prime\prime})$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\lambda\phi_2^{\prime}-\lambda\phi_2^{\prime}+\phi_3+t[-\lambda^2\phi_2^{\prime\prime}+\lambda\phi_3^{\prime}]+t(-\lambda^4\phi_0^{\prime v}+4\lambda^3\phi_1^{\prime\prime\prime}-$$

$$-5\lambda^2\phi_2^{\prime\prime}+2\lambda\phi_3^{\prime})+\frac{t^2}{2}(-\lambda^5\phi_0^5+4\lambda^4\phi_1^{\prime v}-5\lambda^3\phi_2^{\prime\prime\prime}+2\lambda^2\phi_3^{\prime\prime})+$$

$$+\frac{t^2}{2}(-\lambda^5\phi_0^5+3\lambda^4\phi_1^{\prime v}-3\lambda^3\phi_2^{\prime\prime\prime}+\lambda^2\phi_3^{\prime\prime})+\frac{t^3}{6}(-\lambda^6\phi_0^6+3\lambda^5\phi_1^5-$$

$$-3\lambda^4\phi_2^{\prime v}+\lambda^3\phi_3^{\prime\prime});$$

$t=0$ *olduğunda* $\quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\phi_3(x)$ *olur.*

2.4 $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ yani λ_1 ve λ_2 2 Katlı Kök Olan Durum

Şimdi varsayalım ki, λ_1 ve λ_2 (2.6) denkleminin iki kez katlı kökü olmaktadır. Bu durumda çözüm

$$u_1(x,t) = \varphi_{11}(x+\lambda_1 t), \quad u_2(x,t) = t\varphi_{12}(x+\lambda_1 t)\,,$$

$$u_3(x,t) = \varphi_{21}(x+\lambda_2 t) \text{ ve } u_4(x,t) = t\varphi_{22}(x+\lambda_2 t)$$

fonksiyonları (2.1) denkleminin çözümleri olur. Gerçekten de,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \lambda_1\varphi'_{11}\,, \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \lambda_1^2\varphi''_{11}\,, \frac{\partial^3 u_1}{\partial \square^3} = \lambda_1^3\varphi'''_{11}\,, \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} = \lambda_1^4\varphi^{\text{ıv}}_{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_{11}\,, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''_{11}\,, \frac{\partial^2 u}{\partial x^3} = \varphi'''_{11}\,, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \varphi^{IV}_{11}\,,$$

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial t^3 \partial x} = \lambda_1^3\varphi^4_{11}, \quad \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^2 \partial x^2} = \lambda_1^2\varphi^4_{11}$$

ifadeleri (2.1) denkleminde yerine konursa

$$a_0\lambda_1^4\varphi^{\text{ıv}}_{11} + a_1\lambda_1^3\varphi^{\text{ıv}}_{11} + a_2\lambda_1^2\varphi^{\text{ıv}}_{11} + a_3\lambda_1\varphi^{\text{ıv}}_{11} + a_4\varphi^{\text{ıv}}_{11} =$$

$$= \varphi^{\text{ıv}}_{11}[a_0\lambda_1^4 + a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_1^2 + a_3\lambda_1 + a_4] = 0$$

olur. $\lambda_1 -$ karekteristik denklemin 2.kez katlı kökü olduğundan

$$F'(\lambda_1) = a_0\lambda_1^4 + a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_1^2 + a_3\lambda_1 + a_4 = 0$$

ve

$$F'(\lambda_1) = 4a_0\lambda_1^3 + 3a_1\lambda_1^2 + 2a_2\lambda_1 + a_3 = 0$$

olmaktadır.

Benzer yolla $u_2 = t\varphi_{12}(x+\lambda_1 t)$ fonksiyonunun da (2.1) denklemini sağladığını gösterebiliriz

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = t\varphi'_{12}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = t\varphi''_{12}, \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} = t\varphi'''_{12}, \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = t\varphi^4_{12};$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \varphi_{12} + t\lambda_1\varphi'_{12}, \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 2\lambda_1\varphi'_{12} + t\lambda_1^2\varphi''_{12};$$

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^3} = 2\lambda_1^2\varphi^{\text{ı}\prime}_{12} + \lambda_1^2\varphi^{\text{ı}\prime}_{12} + t\lambda_1^3\varphi^{\text{ı}\prime\prime}_{12} = 3\lambda_1^2\varphi^{\text{ı}\prime}_{12} + \lambda_1^3\varphi^{\text{ı}\prime\prime}_{12};$$

$$\frac{\partial^4 u_2}{\partial t^4} = 3\lambda_1^3\varphi'''_{12} + \lambda_1^3\varphi'''_{12} + t\lambda_1^4\varphi^4_{12} = 4\lambda_1^3\varphi^{\text{ı}'''}_{12} + t\lambda_1^4\varphi^4_{12};$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} = 3\lambda_1^2 \varphi_{12}''' + t\lambda_1^3 \varphi_{12}^4 , \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = 2\lambda_1 \varphi_{12}''' + t\lambda_1^2 \varphi_{12}^4 ,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = \varphi_{12}''' + t\lambda_1 \varphi_{12}^4,$$

Bu ifadeler denklemde yerine konursa,

$$a_0[4\lambda_1^3 \varphi_{12}''' + t\lambda_1^4 \varphi_{12}^4] + a_1[3\lambda_1^2 \varphi_{12}''' + t\lambda_1^3 \varphi_{12}^4] + a_2[2\lambda_1 \varphi_{12}''' + t\lambda_1^2 \varphi_{12}^4] +$$

$$a_3[\varphi_{12}''' + t\lambda_1 \varphi_{12}^4] + a_4 t\varphi_{12}^4 =$$

$$= \varphi_{12}^4\, t[a_0\lambda_1^4 + a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_1^2 + a_3\lambda_1 + a_4] +$$

$$+\varphi_{12}'''[4a_0\lambda_1^4 + 3a_1\lambda_1^2 + 2a_2\lambda_1 + a_3] = 0$$

olur. Benzer yolla, $u_3 = \varphi_{21}(x + \lambda_2 t)$, $u_4 = \varphi_{22}(x + \lambda_2 t)$'ninde (2.1) denklemini koruduğunu gösterebiliriz.

Açıktır ki, bu durumda (2.1) denkleminin genel çözümü

$$u(x,t) = \varphi_{11}(x + \lambda_1 t) + t\varphi_{12}(x + \lambda_1 t) + \varphi_{21}(x + \lambda_2 t) + +t\varphi_{22}(x + \lambda_2 t) \quad (2.22)$$

şeklinde olacaktır.

(2.22) ifadesindeki bilinmeyen $\varphi_{ij}, (i,j = 1,2)$ fonksiyonlarını yine de (2.1) başlangıç koşullarından bulabiliriz.

Gerçekten de

$$u(x,0) = \varphi_{11}(x) + \varphi_{21}(x) = \phi_0(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_1 \varphi_{11}'(x + \lambda_1 t) + \varphi_{12}(x + \lambda_1 t) + t\lambda_1 \varphi_{12}'(x + \lambda_1 t) +$$

$$+\lambda_2 \varphi_{21}'(x + \lambda_2 t) + \varphi_{22}(x + \lambda_2 t) + t\lambda_2 \varphi_{22}'(x + \lambda_2 t);$$

$t = 0$ olursa,

$$\lambda_1 \varphi_{11}'(x) + \varphi_{12}(x) + \varphi_{22}(x) = \phi_1(x);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda_1 \varphi_{11}''(x + \lambda_1 t) + \lambda_1 \varphi_{12}'(x + \lambda_1 t) + \lambda_1 \varphi_{12}'(x + \lambda_1 t) +$$

$$t{\lambda_1}^2 \varphi_{12}''(x + \lambda_1 t) + {\lambda_2}^2 \varphi_{21}''(x + \lambda_2 t) + \lambda_2 \varphi_{22}'(x + \lambda_1 t) +$$

$$\lambda_2 \varphi_{22}'(x + \lambda_1 t) + t{\lambda_2}^2 \varphi_{22}''(x + \lambda_2 t);$$

$t = 0$ olursa

$$\lambda_1 \varphi_{11}''(x) + 2\lambda_1 \varphi_{12}'(x) + {\lambda_2}^2 \varphi_{21}''(x) + 2\lambda_2 \varphi_{22}'(x) = \phi_2(x) \; ;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = {\lambda_1}^3 \varphi_{11}'''(x+\lambda_1 t) + 2{\lambda_1}^2 \varphi_{12}''(x+\lambda_1 t) + {\lambda_1}^2 \varphi_{12}''(x+\lambda_1 t) +$$

$$+ t{\lambda_1}^3 \varphi_{12}'''(x+\lambda_1 t) + {\lambda_2}^3 \varphi_{21}'''(x+\lambda_2 t) + 2{\lambda_2}^2 \varphi_{22}''(x+\lambda_2 t) +$$

$${\lambda_2}^2 \varphi_{22}''(x+\lambda_2 t) + t{\lambda_2}^3 \varphi_{22}'''(x+\lambda_2 t);$$

$t = 0$ olursa

$${\lambda_1}^3 \varphi_{11}'''(x) + 3{\lambda_1}^2 \varphi_{12}''(x) + {\lambda_2}^3 \varphi_{21}'''(x) + 3{\lambda_2}^2 \varphi_{22}''(x) = \phi_3(x)$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\varphi_{ij}, (i,j = 1,2)$ fonksiyonları

$$\varphi_{11}(x) + \varphi_{21}(x) = \phi_0(x),$$

$$\lambda_1 \varphi_{11}'(x) + \lambda_2 \varphi_{21}'(x) + \varphi_{12}(x) + \varphi_{22}(x) = \phi_1(x),$$

$${\lambda_1}^2 \varphi_{11}''(x) + {\lambda_2}^2 \varphi_{21}''(x) + 2\lambda_1 \varphi_{12}'(x) + 2\lambda_2 \varphi_{22}'(x) = \phi_2(x),$$

$${\lambda_1}^3 \varphi_{11}''' + {\lambda_2}^3 \varphi_{21}'''(x) + 3{\lambda_1}^2 \varphi_{21}'' + 3{\lambda_2}^2 \varphi_{22}''(x) = \phi_3(x)$$

cebirsel denklemler sistemi elde ederiz.

Bu sistemini çözmek için sistemin 1.denklemini 1 defa diferanselleyelim. Sonra 4.denklemi 2.kez, 3.denklemi ise 1.kez x'e göre 0'dan x'e kadar integralleyelim. Bu durumda bilinmeyenler $\varphi_{11}'(x)$, $\varphi_{21}'(x)$, $\varphi_{12}(x)$, $\varphi_{22}(x)$ olmak suretiyle aşağıdaki cebirsel denklemler sistemini elde ederiz.

$$\varphi_{11}'(x) + \varphi_{21}'(x) = \phi_0(x),$$

$$\lambda_1 \varphi_{11}'(x) + \lambda_2 \varphi_{21}'(x) + \varphi_{12}(x) + \varphi_{22}\,(x) = \phi_{1,}$$

$${\lambda_1}^2 \varphi_{11}'(x) + {\lambda_2}^2 \varphi_{21}'(x) + 2\lambda_1\, \varphi_{12}(x) + 2\lambda_2\, \varphi_{21}(x) =$$

$$= \int_0^x \phi_2(x) d_x + C_{20},$$

$${\lambda_1}^3 \varphi_{11}'(x) + {\lambda_2}^2 \varphi_{21}'(x) + 3\lambda_1\, \varphi_{12}(x) + 3\lambda_2\, \varphi_{21}(x) =$$

$$= \int_0^x dx \int_0^x \phi_3(x) dx + C_{30}x + C_{31},$$

Sistemin baş determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 1 \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & 3\lambda_1 & 3\lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda_1^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 1 \\ {\lambda_2}^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} + \lambda_2^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 1 \\ {\lambda_2}^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} -$$

$$3\lambda_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} + 3\,\lambda_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda_1^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} + \lambda_2^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} - 3\lambda_1 \left[\begin{vmatrix} \lambda_2 & 1 \\ \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} \right]$$

$$+3\,\lambda_2 \left[\begin{vmatrix} \lambda_2 & 1 \\ \lambda_2^2 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} \right] = -\lambda_1^3(\,2\lambda_2 - 2\lambda_1) +$$

$$+\lambda_2^3(\,2\lambda_2 - 2\lambda_1) - 3\lambda_1\left[\left(\,2{\lambda_2}^2 - \,{\lambda_2}^2\right) - \left(2\lambda_1\lambda_2 - {\lambda_1}^2\right)\right] +$$

$$3\,\lambda_2\left[\left(2\lambda_1\lambda_2 - {\lambda_2}^2\right) - \left(\,2{\lambda_1}^2 - \,{\lambda_1}^2\right)\right] = -2\lambda_1^3(\lambda_2 - \lambda_1) +$$

$$+2\lambda_2^3(\lambda_2 - \lambda_1) - 3\lambda_1\left({\lambda_2}^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + {\lambda_1}^2\right) +$$

$$+3\lambda_2\left(2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1 - {\lambda_1}^2\right) = (\lambda_2 - \lambda_1)\left(-2{\lambda_1}^3 + {\lambda_1}^3\right) -$$

$$-3\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)^2 - 3\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)^2 = (\lambda_2 - \lambda_1)[2\lambda_2^3 - 2\lambda_1^3 -$$

$$-3\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1) - 3\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)] = (\lambda_2 - \lambda_1)\left[2\lambda_2^3 + 3{\lambda_2}^2 +\right.$$

$$\left.+3\lambda_1\lambda_2 + 3{\lambda_2}^2\right] = (\lambda_2 - \lambda_1)[2\lambda_2^3 + 3{\lambda_2}^2 + 3\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1^3 - 3{\lambda_1}^2]$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)\left[{\lambda_2}^2(2\lambda_2 + 3) - {\lambda_1}^2(2\lambda_1 + 3)\right] \neq 0$$

olmaktadır.

Cramer kuralına göre

$$\varphi'_{11}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0 & 1 & 0 & 0 \\ \phi_1 & \lambda_2 & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_2 d_x + C_{20} & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ \int_0^x d_x \int_0^x \phi_3(x) d_x + C_{30}(x) + C_{31} & \lambda_2^3 & 3\lambda_1 & 3\lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0(x) & 1 & 0 & 0 \\ \phi_1(x) & \lambda_2 & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_2(x) d_x & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ \int_0^x d_x \int_0^x \phi_3(x) d_x & \lambda_2^3 & 3\lambda_1 & 3\lambda_2 \end{vmatrix} +$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 1 \\ C_{20} & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ C_{30}x + C_{31} & \lambda_2^3 & 3\lambda_1 & 3\lambda_2 \end{vmatrix} \right\} (2_{11})$$

$$\varphi'_{21}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \phi_1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \int_0^x \phi_1 d_x + C_{20} & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ \lambda_1^3 & \int_0^x d_x \int_0^x \phi_3(x) d_x + C_{30}x + C_{31} & 3\lambda_1 & 3\lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \phi_1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \int_0^x \phi_2(x) d_x & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ \lambda_1^3 & \int_0^x d_x \int_0^x \phi_3(x) d_x & 3\lambda_1 & 3\lambda_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & C_{20} & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ \lambda_1^3 & C_{30}x + C_{31} & 3\lambda_1 & 3\lambda_2 \end{vmatrix} 2_{12}$$

$$\varphi_{12}(x)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & 1 & \phi_0 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \phi_1 & 1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \int_0^x \phi_2(x)d_x & 2\lambda_2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \int_0^x d_x\int_0^x \phi_3(x)d_x+C_{30}x+C_{31} & 3\lambda_2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & 1 & \phi_0 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \phi_1 & 1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \int_0^x \phi_2(x)d_x & 2\lambda_2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \int_0^x d_x\int_0^x \phi_3(x)d_x & 3\lambda_2\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & C_{20} & 2\lambda_2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & C_{30}x+C_{31} & 3\lambda_2\end{vmatrix}$$

$$\varphi_{22}(x)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & \phi_0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & \phi_1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & \int_0^x \phi_2 d_x+C_{20}\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_1 & \int_0^x d_x\int_0^x \phi_3(x)d_x+C_{30}x+C_{31}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & \phi_0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & \phi_1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & \int_0^x \phi_2(x)d_x\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_1 & \int_0^x d_x\int_0^x \phi_3(x)d_x\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 0\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & C_{20}\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_1 & C_{30}x+C_{31}\end{vmatrix}\quad (2_{14})$$

Elde ederiz. Şimdi (2.11) – (2.14) determinantlarını hesaplayalım.

(2.11), (2.12), (2.13) ve (2.14) ifadelerindeki ikinci determinantları sırasıyla $\mathrm{I}_{10},\mathrm{I}_{20},\mathrm{I}_{30}\ ve\ \mathrm{I}_{40}$ olarak gösterelim ve bu determinantları hesaplayalım.

$$\mathrm{I}_{10}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 1 & 1\\ C_{20} & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_1\\ C_{30}x+C_{31} & \lambda_2^3 & 3\lambda_1 & 3\lambda_1\end{vmatrix}=C_{20}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda_2 & 1 & 1\\ \lambda_2^3 & 3\lambda_1 & 3\lambda_2\end{vmatrix}-$$

$$-(C_{30}x+C_{31})\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda_2 & 1 & 1\\ \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2\end{vmatrix}=C_{20}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3\lambda_1 & 3\lambda_2\end{vmatrix}-$$

$$-(C_{30}x+C_{31})\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2\lambda_1 & 2\lambda_2\end{vmatrix}$$

$$\mathrm{I}_{20}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \lambda_1 & 0 & 1 & 1\\ \lambda_1^2 & C_{20} & 2\lambda_1 & 2\lambda_2\\ \lambda_1^3 & C_{30}x+C_{31} & 3\lambda_1 & 3\lambda_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ C_{20} & 2\lambda_1 & 2\lambda_2\\ C_{30}x+C_{31} & 3\lambda_1 & 3\lambda_2\end{vmatrix}$$

$$=-C_{20}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3\lambda_1 & 3\lambda_2\end{vmatrix}+(C_{30}x+C_{31})\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2\lambda_1 & 2\lambda_2\end{vmatrix};$$

$$\mathrm{I}_{30}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & C_{20} & 2\lambda_2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & C_{30}x+C_{31} & 2\lambda_2\end{vmatrix}=C_{20}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_2\end{vmatrix}-$$

$$-(C_{30}x+C_{31})\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_2\end{vmatrix}=C_{20}\left[\begin{vmatrix}\lambda_2 & 1\\ \lambda_2^3 & 3\lambda_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\lambda_1 & 1\\ \lambda_1^3 & 3\lambda_2\end{vmatrix}\right]-$$

$$-(C_{30}x+C_{31})\left[\begin{vmatrix}\lambda_2 & 1\\ \lambda_2^2 & 2\lambda_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\lambda_1 & 1\\ \lambda_1^2 & 2\lambda_2\end{vmatrix}\right];$$

$$\mathrm{I}_{40}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 & C_{20}\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_2 & C_{30}x+C_{31}\end{vmatrix}=-C_{20}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_2\end{vmatrix}+$$

$$+(C_{30}x+C_{31})\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2\end{vmatrix}=-C_{20}\left[\begin{vmatrix}\lambda_2 & 1\\ \lambda_2^3 & 3\lambda_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\lambda_1 & 1\\ \lambda_1^3 & 3\lambda_2\end{vmatrix}\right]$$

$$+(C_{30}x+C_{31})\left[\begin{vmatrix}\lambda_2 & 1\\ \lambda_2^2 & 2\lambda_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\lambda_1 & 1\\ \lambda_1^2 & 2\lambda_2\end{vmatrix}\right]=$$

Hesaplamalardan görüldüğü gibi

$$\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2=0\,,\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4=0\ (2.15)\ olur.$$

Şimdi $\varphi_{11}(x)\ \ ve\ \ \varphi_{21}(x)$ fonksiyonlarını elde etmek için (2.11) ve (2.12) ifadelerini x'e göre 0'dan x'e kadar integrallersek

$$\varphi_{11}(x) = \frac{1}{\Delta}\int_0^x [\mathrm{I}_{11}(x) + \mathrm{I}_{10}]d_x = \frac{1}{\Delta}\int_0^x \mathrm{I}_{11}(\xi)\, d_\xi + \frac{1}{\Delta}\int_0^x \mathrm{I}_{10}\, d_x,$$

$$\varphi_{21}(x) = \frac{1}{\Delta}\int_0^x (\mathrm{I}_{21}(\xi) + \mathrm{I}_{20})d_\xi = \frac{1}{\Delta}\int_0^x \mathrm{I}_{21}(\xi)d_\xi + \frac{1}{\Delta}\int_0^x \mathrm{I}_{20}d_x$$

elde ederiz. Burada $\mathrm{I}_{11}(x)\ ve\ \mathrm{I}_{21}(x)$ sırasıyla (2.11) ve (2.12) deki sırasıyla birinci determinantları göstermektedir. (2.15) den görüldüğü gibi $\frac{1}{\Delta}\int_0^x (\mathrm{I}_{10} + \mathrm{I}_{20})d_x = 0$ olur. (2.17)

(2.13) , (2.14) , (2.15) , (2.16) ve (2.17) ifadelerini dikkate alarak

(2.4) ten çözüm için aşağıdaki gösterimi ifade ederiz.

$$u(x,t) = \frac{1}{\Delta}\left[\int_0^{x+\lambda_1 t} \mathrm{I}_{11}(\xi)d_\xi + t\int_0^{x+\lambda_1 t} \mathrm{I}_{31}(\xi)d_\xi\right] +$$

$$+\left[\int_0^{x+\lambda_2 t} \mathrm{I}_{21}(\xi)d_\xi + t\int_0^{x+\lambda_2 t} \mathrm{I}_{41}(\xi)d_\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left\{\int_0^{x+\lambda_1 t}[\mathrm{I}_{11}(\xi) + t\mathrm{I}_{31}(\xi)]\, d_\xi + \int_0^{x+\lambda_2 t}[\mathrm{I}_{21}(\xi) + t\mathrm{I}_{41}(\xi)]d_\xi\right\} \qquad (2.23)$$

Örnek 2

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = \phi_k(x)$$

probleminin çözümü (2.22) formülü ile bulunabilir. Burada,

$F(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$ ve $\lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 1$ olmaktadır.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= [(6+2+3) - (-2+6-3)] - [(-6-2+3) - (2-6-3)] =$$

$$= (11-1) - (-5+7) = 10 - 2 = 8$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_1 & 3\lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)\left[{\lambda_2}^2(2\lambda_2 + 3) - {\lambda_1}^2(2\lambda_1 + 3)\right]$$

$\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = -1 \;\; olursa,$

$$\Delta = (-1-1)[(-1)^2(2.(-1)+3) - 1^2(2.1+3)] =$$

$$= -2[(-2+3)-(2+3)] = -2(1-5) = -2(-4) = 8$$

$$\varphi'_{21}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_0(x) & 0 & 0 \\ 1 & \phi_1(x) & 1 & 1 \\ 1 & \int_0^x \phi_2(\xi) d_\xi + C_{30} & 2 & -2 \\ 1 & \int_0^x (x-\xi)\phi_3(\xi) d_\xi + C_{41}x + C_{40} & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{vmatrix} 1 & \phi_0(\xi) & 0 & 0 \\ 1 & \phi_1() & 1 & 1 \\ 1 & \int_0^x \phi_2(\xi) d_\xi & 2 & -2 \\ 1 & \int_0^x (x-\xi)\phi_3(\xi) d_\xi & 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & C_{30} & 2 & -2 \\ 1 & C_{41}x + C_{40} & 3 & -3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$\varphi'_{11}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0 & 1 & 0 & 0 \\ \phi_1 & -1 & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_2(\xi) d_\xi + C_{30} & 1 & 2 & -2 \\ \int_0^x (x-\xi)\phi_3(\xi) d_\xi + C_{41}x + C_{40} & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0 & 1 & 0 & 0 \\ \phi_1 & -1 & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_2(\xi) d_\xi & 1 & 2 & -2 \\ \int_0^x (x-\xi)\phi_3(\xi) d_\xi & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ C_{30} & 1 & 2 & -2 \\ C_{41}x + C_{40} & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0 & 1 & 0 & 0 \\ \phi_1 & -1 & 1 & 1 \\ \int_0^x \phi_2(\xi) d_\xi & 1 & 2 & -2 \\ \int_0^x (x-\xi)\phi_3(\xi) d_\xi & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

2.5 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4$, yani $\lambda = \lambda_1$ üç defa $\lambda = \lambda_2$ ise Sade Kök Olan

Bu bölümde λ_1 kökünün üç defa katlı λ_2 kökünün ise sade kök olduğunu varsayalım. Bu durumda açıktır ki, $u_1 = \varphi_{11}(x + \lambda_1 t)$, $u_2 = t\varphi_{12}(x + \lambda_1 t)$, $u_3 = t^2\varphi_{13}(x + \lambda_1 t)$ ve

$u_4 = \varphi_{21}(x + \lambda_2 t)$ fonksiyonları (2.1) denkleminin özel çözümleri olacaktır. 3.bölümde u_1 , u_2 ve u_3 fonksiyonlarını (2.1) denklemini koruduğu ispatlanmıştır. u_4 fonksiyonunun (2.1) denklemini koruduğu açıktır. (2.1) denklemi lineer olduğundan

$$u(x,t) = \varphi_{11}(x + \lambda_1 t) + t\varphi_{12}(x + \lambda_1 t) + t^2\varphi_{13}(x + \lambda_1 t) + \varphi_{21}(x + \lambda_2 t) \quad (2.24)$$

şeklinde arayalım. Burada $\varphi_{11}(x)$, $\varphi_{12}(x)$, $\varphi_{13}(x)$ ve $\varphi_{21}(x)$ şimdilik bilinmeyen fonksiyondur. Söz konusu fonksiyonları bulmak için (2.3) başlangıç koşullarını kullanalım.

$$\varphi_{11}(x) + \varphi_{21}(x) = \phi_0(x)$$

$$\frac{\partial_u}{\partial_t} = \lambda_1\varphi'_{11}(x + \lambda_1 t) + \varphi_{12}(x + \lambda_1 t) + t\lambda_1\varphi'_{12}(x + \lambda_1 t) +$$

$$2t\varphi_{13}(x + \lambda_1 t) + t^2\lambda_1\varphi'_{13}(x + \lambda_1 t) + \lambda_2\varphi'_{21}(x + \lambda_2 t)$$

olur. Buradan,

$$\lambda_1\varphi'_{11}(x) + \varphi_{12}(x) + \lambda_2\varphi'_{21}(x) = \phi_1(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda_1^2\varphi''_{11}(x + \lambda_1 t) + \lambda_1\varphi'_{12}(x + \lambda_1 t) + \lambda_1\varphi'_{12}(x + \lambda_1 t) +$$

$$+t\lambda_1^2\varphi''_{12}(x + \lambda_1 t) + 2\varphi_{13}(x + \lambda_1 t) + 2t\lambda_1\varphi'_{13}(x + \lambda_1 t) +$$

$$+2t\lambda_1\varphi'_{13}(x + \lambda_1 t) + t^2\lambda_1^2\varphi''_{13}(x + \lambda_1 t) + \lambda_2^2\varphi''_{21}(x + \lambda_2 t),$$

$$\lambda_1^2\varphi''_{11}(x) + 2\lambda_1\varphi'_{12}(x) + 2\varphi_{13}(x + \lambda_1 t) + \lambda_2^2\varphi''_{21}(x) = \phi_2(x), \quad (4.4)$$

Son olarak

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \lambda_1^3\varphi'''_{11}(x + \lambda_1 t) + \lambda_1^2\varphi''_{12}(x + \lambda_1 t) + 2\lambda_1\varphi'_{13}(x + \lambda_1 t) +$$

$$2t\lambda_1\varphi'_{13}(x + \lambda_1 t) + 2t\lambda_1^2\varphi''_{13}(x + \lambda_1 t) + 2\lambda_1\varphi'_{13}(x + \lambda_1 t) +$$

$$2t\lambda_1^2\varphi''_{13}(x + \lambda_1 t) + 2t\lambda_1^2\varphi''_{13}(x + \lambda_1 t) + t^2\lambda_1^3\varphi'''_{13}(x + \lambda_1 t) +$$

$$\lambda_2^3\varphi'''_{21}(x + \lambda_2 t)$$

buradan,

$$\lambda_1^3\varphi'''_{11}(x) + 3\lambda_1^2\varphi''_{12}(x) + 6\lambda_1\varphi'_{13}(x) + \lambda_2^3\varphi'''_{21} = \phi_3(x)$$

Dolayısıyla bilinmeyen fonksiyonlar için aşağıdaki cebirsel sistemler denklemi oluşturulur.

$$\varphi_{11}(x) + \varphi_{21}(x) = \phi_0(x)$$

$$\lambda_1\varphi_{11}' + \varphi_{12}(x) + \lambda_2\varphi_{21}'(x) = \phi_1(x)$$

$$\lambda_1^2\varphi_{11}'' + 2\lambda_1\varphi_{12}'(x) + \lambda_2^2\varphi_{21}''(x) = \phi_2(x)$$

$$\lambda_1^3\varphi_{11}''' + 3\,\lambda_1^2\varphi_{12}''(x) + 6\lambda_1\varphi_{13}'(x) + \lambda_2^3\varphi_{21}'''(x) = \phi_3(x)$$

(4.6)'nın 1.denklemini diferanselleyelim.

$$\varphi_{11}'' + \varphi_{21}'' = \phi_0''(x)$$

$$\lambda_1\varphi_{11}'' + \varphi_{12}'(x) + \lambda_2\varphi_{21}'' = \phi_1'(x)$$

$$\lambda_1^2\varphi_{11}'' + 2\lambda_1\varphi_{12}'(x) + \lambda_2^2\varphi_{21}''(x) = \phi_2(x)$$

$$\lambda_1^3\varphi_{11}''(x) + 3\lambda_1^2\varphi_{12}'(x) + 6\lambda_1\varphi_{13} + \lambda_2^2\varphi_{21}'' = \int_0^x \phi_3\,d_x + C_{40}$$

Bilinmeyenlerin $\varphi_{11}''(x)\,, \varphi_{12}'(x)\,, \varphi_{13}(x)\,, \varphi_{21}''(x)$ olduğunu kabul edersek

$$\varphi_{11}''(x) + \varphi_{21}''(x) = \phi_0''(x),$$

$$\lambda_1\varphi_{11}'' + \varphi_{12}'(x) + \lambda_2\varphi_{21}'' = \phi_1'(x)$$

$$\lambda_1^2\varphi_{11}'' + 2\lambda_1\varphi_{12}'(x) + \lambda_2^2\varphi_{21}''(x) = \phi_2(x)$$

$$\lambda_1^3\varphi_{11}''(x) + 3\lambda_1^2\varphi_{12}' + 6\lambda_1\varphi_{13} + \lambda_1^3\varphi_{21}'' = \int_0^x \phi_3(x)\,d_x + C_{40}$$

elde ederiz. Sistemin baş determinantı

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 6\lambda & \lambda_2^3 \end{vmatrix} \text{(4.8)} = (-1)^{4+3}6\lambda_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6\lambda_1\left[\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 \\ 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 \end{vmatrix}\right] = -[(\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_1) + (2\lambda_1^2 - \lambda_1^2)] =$$

$$= -6\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)$$

olmaktadır.

$$\varphi_{11}''(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0'''(x) & 0 & 0 & 1 \\ \phi_1'(x) & 1 & 0 & \lambda_2 \\ \phi_2(x) & 2\lambda_1 & 0 & \lambda_2^2 \\ \int_0^x \phi_3 d_x + C_{40} & 3\lambda_1^2 & 6\lambda_1 & \lambda_2^3 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \begin{matrix}\phi_0'''(x)\\ \phi_1'(x)\\ \phi_2(x)\\ \int_0^x \phi_3 d_x\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\2\lambda_1\\3\lambda_1^2\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\0\\6\lambda_1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\ \lambda_2\\ \lambda_2^2\\ \lambda_2^3\end{matrix}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 & \lambda_2^2 \\ C_{40} & 3\lambda_1^2 & 6\lambda_1 & \lambda_2^3 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{I}_{110} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 & \lambda_2^2 \\ C_{40} & 2\lambda_1^2 & 6\lambda_1 & \lambda_2^3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ C_{40} & 2\lambda_1^2 & 6\lambda_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathrm{I}_{110} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 0 & 0 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & C_{40} & 6\lambda_1 & \lambda_2^3 \end{vmatrix} = \quad C_{40}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_2^2 & 0 & \lambda_2^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\varphi_{12}''(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_0'''(x) & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \phi_1'(x) & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \phi_2(x) & 0 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & \int_0^x \phi_3(x) d_x + C_{40} & 6\lambda_1 & \lambda_2^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_0'''(x) & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \phi_1'(x) & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \phi_2(x) & 0 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & \int_0^x \phi_3(x) d_x + C_{40} & 6\lambda_1 & \lambda_2^3 \end{vmatrix} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 0 & 0 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & C_{40} & 6\lambda_1 & \lambda_2^3 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{13}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \phi_0'''(x) & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \phi_1'(x) & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \phi_2(x) & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & 2\lambda_1^2 & \int_0^x \phi_3(x) d_x + C_{40} & \lambda_2^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \phi_0'''(x) & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \phi_1'(x) & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \phi_2(x) & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & \int_0^x \phi_3(x) d_x & \lambda_2^3 \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & C_{40} & \lambda_2^3 \end{vmatrix}_{\mathrm{I}_{130}}$$

$$A\ \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \phi_0'''(x) \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \phi_1'(x) \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 & \phi_2(x) \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 6\lambda_1 & \int_0^x \phi_3(x)d_x \end{vmatrix}_{\mathrm{I}_{211}(x)} +$$

$$\mathrm{I}_{130} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & C_{40} & \lambda_2^3 \end{vmatrix} = -\,C_{40}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$-\,C_{40}\left[\begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 \\ 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 \end{vmatrix}\right] = -\,C_{40}[\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_1 + 2\lambda_1^2 - \lambda_1^2] =$$

$$= -\,C_{40}(\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^2) = -\,C_{40}(\lambda_2 - \lambda_1)^2\ .$$

Aşağıdaki notasyonları kabul edelim

$$\mathrm{I}_{111}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \phi_0'''(x) & 0 & 0 & 1 \\ \phi_1'(x) & 1 & 0 & \lambda_2 \\ \phi_2(x) & 2\lambda_1 & 0 & \lambda_2^2 \\ \int_0^x \phi_3(x)d_x & 3\lambda_1^2 & 6\lambda_1 & \lambda_2^3 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{I}_{121}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_0'''(x) & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \phi_1'(x) & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \phi_2(x) & 0 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & \int_0^x \phi_3(x)d_x & 6\lambda_1 & \lambda_2^3 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{I}_{131}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \phi_0'''(x) & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \phi_1'(x) & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \phi_2(x) & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & \int_0^x \phi_3(x)d_x & \lambda_2^3 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{I}_{211}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \phi_0'''(x) \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \phi_1'(x) \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 & \phi_2(x) \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 6\lambda_1 & \int_0^x \phi_3(x)d_x \end{vmatrix}$$

$\mathrm{I}_{131} = \mathrm{I}_{131} = \mathrm{I}_{131} = 0$ olduğundan bilinmeyen $\varphi_{11}(x), \varphi_{12}(x), \varphi_{13}(x)\ ve\varphi_{21}(x)$ fonksiyonları için

$$\varphi_{11}(x) = \int_0^x d_\xi \int_0^x \mathrm{I}_{111}(\xi) d_\xi + C_{111}x + C_{110}$$

$$\varphi_{12}(x) = \int_0^x \mathrm{I}_{121}(\xi) d_\xi + C_{120,}$$

$$\varphi_{13}(x) = \mathrm{I}_{131}(x) + \mathrm{I}_{130\,,}$$

$$\varphi_{21}(x) = \int_0^x d_\xi \int_0^x \mathrm{I}_{211}(\xi) d_\xi + C_{211}x + C_{210} =$$

$$= \int_0^x (x-\xi) \int_0^x \mathrm{I}_{211}(\xi) d_\xi + C_{211}x + C_{210}$$

ifadelerini elde ederiz.Bulduğumuz ifadelerini (2.24) de yerine yazarsak

$$u(x,t) = \int_0^{x+\lambda_1 t} (x-\xi-\lambda_1 t)\mathrm{I}_{111}(\xi) d_\xi + C_{111}(x+\lambda_1 t) + C_{110} +$$

$$+t\int_0^{x+\lambda_1 t} \mathrm{I}_{121}(\xi) d_\xi + C_{120} + \mathrm{I}_{131}(x+\lambda_1 t) - C_{40}(\lambda_2-\lambda_1)^2 +$$

$$\int_0^{x+\lambda_2 t} (x-\xi-\lambda_2 t)\mathrm{I}_{211}(\xi) d_\xi + C_{211}(x+\lambda_2 t) + C_{210} =$$

$$= \int_0^{x+\lambda_1 t} (x-\xi-\lambda_1 t)\mathrm{I}_{111}(\xi) d_\xi + t\int_0^{x+\lambda_1 t} \mathrm{I}_{121}(\xi) d_\xi + \mathrm{I}_{131}(x+\lambda_1 t) +$$

$$+\int_0^{x+\lambda_2 t} (x-\xi-\lambda_2 t)\mathrm{I}_{211}(\xi) d_\xi + C_{111}(x+\lambda_1 t) + C_{211}(x+\lambda_2 t) +$$

$$C_{110} + C_{120} + C_{210} - C_4(\lambda_2-\lambda_1)^2$$

$$= \int_0^{x+\lambda_1 t} \left[(x-\xi-\lambda_1 t)\mathrm{I}_{111}(\xi) d_\xi + t\mathrm{I}_{121}(\xi)\right] d_\xi + \mathrm{I}_{131}(x+\lambda_1 t) +$$

$$\int_0^{x+\lambda_2 t} (x-\xi-\lambda_2 t)\mathrm{I}_{211}(\xi) d_\xi + P_1(x,\lambda_1,\lambda_2,t)$$

SONUÇ

Tezde 4. basamağa göre homojen olan lineer kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılmış Cauchy probleminin çözümü için, karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak D'Alembert türlü kolay kullanılabilir ifadeler elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Courant, K. and Hilbert, D. Methoden der Mathematischen Physik, Springer, Berlin, 1937.

2. Courant, K., and Lax, A., Remarks on Cauchy's Problem for Hyperbolic Partial Differential Equations with Constant Coefficients in Several Independent Variables, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 8, No 4, 1955, pp. 497-502.

3. Garding, L., Linear Hyperbolic Partial Differential Equations with Constant Coefficients, Acta Math., Vol. 85, 1950, 1-62.

4. Hadamard, J., Le Probleme de Cauchy et les Equations aux Dérivées Partielies Linéaires Hyperboliques, Hermann, Paris, 1932.

5. John, F., Special Topics in Partial Differential Equations, Lecture Notes, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1952.

6. Lax, A., On Cauchy’s Problem for Partial Differential Equations with Multiple Characteristics, Comm. Pure Appl. Math., vol. IX, 135-169, 1956.

7. Leray, J., Hyperbolic Differential Equations, Institute for Advanced Study, Princeton, 1953.

8. Mizohata, S., Lectures on Cauchy Problem, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

9. Petrowski, I. G., On the Cauchy Problem for Systems of Linear Partial Differential Equations in the Class of Non Analytic Functions, Buul. Mosk. Gos. Univ. Seksiya A. 1, 7 ,1938.

10. Rasulov, M.L., Methods of Contour Integration, North Holland, 1967.

11. Sobolev, S.L., Applications of Functional Analysis to Equations of Mathematical, Amer. Math. Sos. 1963.

12. Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A., Equations of Mathematical Physics, Pergamon Press, Oxford, 1963. [Translated by Robson, A.R.M, and Basu, P.; Translation Edited by Brink, D.M.]

13. Sneddon J.N. Elements of Partial Differential Equations, Mc GRAW-HILL BOOK COMPANY, 1957.

ÖZGEÇMİŞ

05.12.1990 tarihinde Zonguldak da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Zonguldak, Gazi ilköğretim okulunda tamamladım. Lise eğitimimi İstanbul, Bakırköy de ki Gürlek Nakipoğlu lisesinde tamamladım. Ardından, 2008 yılında Maltepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne başladım . 2015 yılında Beykent Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü'nde başladığım Uygulamalı Matematik alanındaki tezli yüksek lisans öğrenimime devam ediyorum.

Pelin Sılay AKÇA