T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

POLİTROPİK GAZLAR İÇİN İZENTROPİK VE ADİABATİK EULER SİSTEMİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Neziha KOÇ

İstanbul, 2018

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

POLİTROPİK GAZLAR İÇİN İZENTROPİK VE ADİABATİK EULER SİSTEMİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Neziha KOÇ

Öğrenci No:

150860004

Danışman:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İstanbul, 2018

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "**Politropik Gazlar İçin İzentropik ve Adiabatik Euler Sistemin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü** " başlıklı bu çalışmanın; akademik kurallara ve etik davranış ilkelerine uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmanın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 16.02.2018

Neziha KOÇ

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 150860004 no'lu Neziha KOÇ'un 16/02/2018 tarihinde yapılan tez savunma sınavı[1] sonucunda...50... dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında[2] oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile, ..kabul...... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Başlığı[3] : Politropik Gazlar İçin İzentropik Ve Adiabatik Euler Sistemin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü

Tez Sınav Jürisi	**Öğretim Üyesi**	**İmza**
Danışman	: Prof.Dr. Mahir RESULOV	
Üye	: Prof.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL	
Üye	: Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR (Sakarya Üniversitesi)	

---

[1] Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

[2] Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

[3] İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bana danışmanlık yapmış olan ve değerli fikirlerinden faydalandığım kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV ile Sayın Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL ’a tüm yardım ve destekleri için teşekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi her türlü desteğini esirgemeyen ve bugünlere ulaşmamda büyük pay sahibi olan sevgili babam Mehmet KOÇ ‘ a saygı ve sevgiyle minnettarlığımı bir borç bilirim.

Neziha KOÇ

İstanbul- 2018

Adı ve Soyadı : Neziha KOÇ
Danışmanı : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans, 2018
Alanı : Uygulamalı Matematik
Anahtar Kelimeler : 2D Euler Denklemler Sistemi, İzontropik Gazların Hareket Denklemleri, Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farkla Şeması

ÖZ

POLİTROPİK GAZLAR İÇİN İZENTROPİK VE ADİABATİK EULER SİSTEMİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bilindiği üzere hidrodinamikte sık rastlanan denklemler sistemi genelde korunum kuralları yardımı ile ifade edilmektedir. Bu denklemler birinci basamaktan non lineer hiperbolik tür sistem oluşturur. Söz konusu denklemler sisteminin temel özelliği çözümlerinin yerleri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olmasıdır. Bu özellikler ise kendi sırasında denklemin çözümünü bulmak için klasik yöntemlerin uygulanmasına önemli zorluklar çıkarır.

Bu nedenle tezde göz önüne alınan problemlerde bulunan özellikler dikkate alınarak özel yardımcı problemler dahil edilir ve önerilen yardımcı problemler kullanılarak etkin nümerik algoritmalar önerilmiştir.

Name and Surname : Neziha KOÇ
Supervisor : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Degree and Date : Master, 2018
Major : Applied Mathematics

Key Words : 2D Euler’s sistems, Equations of İzentopical Gas, Finite Differenses Schema in Class of Discontinuous Functisy

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF THE ISENTROPIC AND ADIABATIC EULER SYSTEM FOR POLITICAL GASES IN A CLASS OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS

As is known, the system of equations often found in hydrodynamics is generally expressed with the help of conservation rules. These equations generally are the first non-linear hyperbolic type system. The basic feature of the system of equations is that their solutions have jumps of unknown locations. These features present significant difficulties in implementing the classical methods in order to find the solution of the equation during their own time.

For this reason, special auxiliary problems are included taking into consideration the features found in the problems considered in the thesis and effective numerical algorithms are proposed by using the recommended auxiliary problems.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

1. GİRİŞ

Dalga teorisi geniş bilimsel kavramlar içerisinde en çok yaygın olanıdır, fakat diğer ilmi kavramlardan farklı olarak onu hem teorik, hem de teknik seviyede de öğrenmek olur. Sudaki dalgaların davranışı, ışığın ve sesin dağılımı herkesçe gündelik yaşamdan bilinmektedir. Örneğin ses darbelerinin oluşumu veya otobandaki arabaların tıkaç yaratması gibi çağdaş problemler de çok büyük önem taşımaktadır. Bir taraftan o olayları hiçbir teknik araştırma yapmaksızın teorik şekilde de öğrenmek mümkündür. Diğer yandan ise bu olaylar aktif şekilde çeşitli mühendisler tarafından da öğrenilir. Bu girişimler de kendi sırasında pratikte geniş kullanılan problemlerin matematiksel öğrenilmesine neden oldu. Herhangi bir mühendislik problemlerinin kendine has farklı özellikleri olmasına rağmen, istenilen dalga problemlerini öğrenmek için genel bir matematiksel yaklaşımlar üretmek mümkün olmuştur.

1.1. Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Dalgalar Arasındaki Nitel Farklar

Doğrusal olmayan dalga hareketinin bazı karakteristikleri genel terimlerle açıklanabilir. Doğrusal dalga hareketinde, örneğin ses iletimi sırasında, heyecanlanmalar daima belirli hızla (ortama göre) yayılır ve bunlar ortam içinde değişebilir. Bu ses hızı, ortamın kendisinin lokal bir özelliği olup, ortamdaki her düşünülebilen doğrusal dalga hareketi aynı kalır. Bununla birlikte, doğrusal olmayan dalgaların ayırıcı özelliği, zorunlu olarak küçük olmayan bozulmalar veya süreksizliklerle ilgilidir. Doğrusal dalga hareketinde bir yüzey boyunca herhangi bir başlangıç süreksizliği süreksizlik olarak korunur ve ses hızı ile yayılır. Doğrusal olmayan dalga hareketi farklı bir şekilde davranıyor. Farklı basınçların, yoğunlukların ve akış hızlarının iki bölgesi boyunca bir başlangıç süreksizliği olduğunu varsayalım. O zaman şu alternatif olasılıklar vardır: ya başlangıç süreksizlik derhal sürekli olur veya bozulma bir ya da iki şok cephesi boyunca çoğaltırken sonic hızla değil, süpersonik hızla üst üste gelen ortama hızlanarak ilerlenir.

Daha önce belirtildiği gibi, şok cepheleri doğrusal olmayan dalga yayılımında göze çarpan en belirgin olaylardır; başlangıçtaki sıçrayışın olmamasına rağmen sonradan oluşabilir ve yayılabilirler.

Doğrusal kısmi denklemler, doğrusal olmayan denklemlerin aksine, çoğu zaman, diferansiyel denklemlerin kendilerinin düzenli kaldığı yerlerde sürekli olarak uzatılabilen çözümleri kabul etmemektedir. Doğrusal ve doğrusal olmayan dalgalar arasındaki bir diğer

çarpıcı fark, kesişim olgusuyla ilgilidir: süperpozisyon ilkesi doğrusal dalgalar için geçerlidir, doğrusal olmayan dalgalar için geçerli değildir.
Sonuç olarak, etkileşen ses dalgalarının aşırı basıncı sadece toplanır; bu gerçeğin aksine, doğrusal olmayan dalgaların etkileşimi ve yansıması, basıncın muazzam bir artışına neden olabilir.

1.2. Hidrodinamiğin Temel Denklemleri

Genelde gaz dinamiğinin esas problemi, gazın tam hareketini ve onun diğer fiziksel cisimlere karşı olan etkisinin incelenmesidir. Bilindiği gibi, gaz ile doldurulmuş ω hacmi, sonlu sayıda hareket eden $\mu_i (i = 1, \overline{n})$ sonlu sayıda moleküllerden oluşur. Her bir μ_i - molekülü m_i - kütlesine, u_i - hız vektörüne, $m_i u_i$ – impulsa, $\frac{1}{2} m_i |u_i|^2$ – kinetik enerjisine ve ε_i – dahili enerjiye sahiptir.

Gazın hareketini direkt matematiksel olarak ifade etmek çok da optimal olmamaktadır. Çünkü $1\,cm^3$ havada $2{,}7.10^{19}$ sayıda molekül olmaktadır. Bundan dolayı, gaz dinamiğinde gazın hareketi ve karşılıklı ilişkisi ortalama parametrelerle ifade edilmektedir. Bu nedenle gaz dinamiğini ifade eden iki türlü metod kullanılmaktadır. Bunlar geokinetik ve fenomonolojik ifade tarzlarıdır.

Fenomonolojik ifade tarzında keyfi ω elementar hacmine maddi nokta gibi bakılmakta ve bu nedenle de her bir fiziksel parametrenin ω hacmi üzerinden ortalama değer alınmaktadır.

Eğer gaz, R^3de, yani üç boyutlu uzayda hareket ederse gazın her bir $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ noktadaki durumu t zamanına bağlı olmaktadır. Bundan dolayı hareketi $R^4(\vec{x}, t)$ uzayında inceleyeceğiz.

Gaz dinamiğinde esas büyüklükler aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir;

- hız vektörü $\vec{u} = \vec{u}(x,t)$
- yoğunluk $\rho = \rho(x,t)$
- basınç $p = p(x,t)$
- dahili enerji $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$

Gazın konumu $x = x(t)$ zamana bağlı olduğundan $\frac{dx}{dt} = \vec{u}(x,t)$ denklemi gazın hareketini ifade eder. Son denklemi koordinatlarda

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x,y,z,t) \\ \dfrac{dy}{dt} = v(x,y,z,t) \\ \dfrac{dz}{dt} = w(x,y,z,t) \end{cases} \tag{1.4}$$

olarak yazabiliriz. Burada, $\vec{u}(x,y,z,t) = (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t))$ olmaktadır.

Eğer, herhangi bir D bölgesinde $\vec{u}$ vektör alanı verilirse, D bölgesinin her bir noktası (1.4) denklemler sisteminin integral eğrileri ile örtülür ve bu eğrilere gaz parçacıklarının hareket yörüngeleri denir.

Eğer (1.4) denklemler sistemine uygun başlangıç koşulları $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ eklenirse (1.4) sisteminin tek bir çözümü elde edilmiş olur ve $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ koordinatları Lagrange koordinatları olarak belirlenir.

Hareket edebilen hacim, her bir t zaman için aynı moleküllerden oluşan bölgeye, hareket eden bölge veya maddi bölge denir. Bu bölgeyi $\omega(t) \subset R^3$ olarak gösterelim. Bilindiği gibi her bir maddi bölgeye bir sert ortam gibi de bakmak mümkündür. Ayrıca da bu ortamda aşağıdaki büyüklükler ele alınabilir.

kütle $\qquad \iiint\limits_{w(t)} \rho\, dw,$

impuls $\qquad \iiint\limits_{w(t)} \rho \vec{u}\, dw,$

burada $\rho = |\vec{u}|$ *hız* vektörünün modülü olmaktadır. Bu büyüklükler yardımı ile fiziksel korunma kanunlarını ifade etmek mümkündür. Örneğin, kütlenin korunma kanunu

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_{w(t)} \rho\, dw = 0, \tag{1.5}$$

impulsun korunma kanunu

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_{w(t)} \rho \vec{u}\, dw = F, \tag{1.6}$$

enerjinin korunma kanunu ise

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{w(t)} \rho\left(\frac{1}{2}q^2+\varepsilon\right)dw = W + Q$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Şimdi gazın hareketini ifade edebilen diferansiyel denklemleri ele alalım.

Tanım1. Eğer $\vec{u}$, ρ, p ve ε fonksiyonları sürekli fonksiyonlar ise, gazın hareketine sürekli hareket denir.

Eğer gazı etkiyen F kuvveti yalnız dış kuvvet, yani basınç olursa, $F = -\iint\limits_{\gamma(t)} p\vec{n}\, d\gamma$ gibi ifade edilir ve (1.6) korunma kanunu

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{w(t)} \rho\vec{u}\, dw = -\iint\limits_{\gamma(t)} p\vec{n}\, d\gamma \tag{1.7}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\gamma(t)$ $\omega(t)$'nin yüzeyini, $\vec{n}$ ise $\gamma(t)$ yüzeyinin dış normalini göstermektedir.

Şimdi, oldukça önemli bir lemmayı ifade edelim.

Lemma 1. Hareket edebilen bölge üzerinden alan integralinin zamana göre türevi

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{w(t)} f\ dw = \iiint\limits_{w(t)} (D f + f\ div\ \vec{u})dw \tag{1.8}$$

olmaktadır. Burada

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}.\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.9}$$

dır. (1.9) ifadesini dikkate alarak (1.7)'e Gauss formülünü uygularsak

$$\iiint\limits_{w(t)} [\rho_t + div\ (\rho\vec{u})]\ dw = 0 \tag{1.10}$$

olarak elde ederiz. $\omega(t)$ bölgesi keyfi olduğundan (1.10) dan

$$\rho_t + div\,(\rho \vec{u}) = 0 \tag{1.11}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz ve bu denkleme süreklilik denklemi de denir.

Aynı yolla impuls denklemini ve enerji denklemini de aşağıdaki şekilde

$$\left(\rho\left(\frac{1}{2}q^2+\varepsilon\right)\right)_t + div\,\left(\rho\left(\frac{1}{2}q^2+\varepsilon\right)\vec{u}+\rho\vec{u}\right) = 0 \quad ,$$

veya

$$\varepsilon_t + \vec{u}.\nabla\varepsilon + \frac{p}{\rho}\; div\;\vec{u} = 0 \tag{1.12}$$

şekilde elde ederiz.

Özel durumda da hareketi bir boyutlu olarak kabul edersek, aşağıdaki denklemler sistemini

$$U_t + F_x(U) = 0 \tag{1.13}$$

vektör şeklinde de

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho_u \\ e \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e+p) \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

yazabiliriz.

Euler denklem sisteminin çıkarılışına değinmeden önce akışkanlar dinamiğinin çok önemli bir kavramını ele alalım. Herhangi bir t zamanında aynı parçacıkları içeren $\omega(t) \subset R^3$ bölgesine maddi hacim veya haraket eden hacim denir. Dolayısıyla maddi hacim derken, hareket zamanı aynı akışkan parçacıklarını içeren bölge kastedilmektedir. $f(x,y,z,t)$ akışkanın hareketini ifade edebilen belli bir büyüklük olsun. Bu büyüklük örneğin, sıvı hızının bir bileşeni veya ρ yoğunluğu olabilir. Öncelikle belirtelim ki, $\partial f/\partial t$ türevi f in uzayın herhangi bir sabit alınan (x,y,z) noktasındaki (zamandan bağımsız olmak suretiyle) değişim hızı anlamına gelmektedir. Tersine, Df/Dt ile gösterilen türev ise akışkanın total değişim hızı

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{d}{dt} f\left[x(t), y(t), z(t)\right]$$

olmaktadır.

Burada $(x(t), y(t), z(t))$ lokal akış hızı , $\vec{u}$ olan sıvının zamana göre değişimi gibi anlaşılmaktadır, yani akış

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

denklemleriyle tanımlanmaktadır. Zincir kuralı uygulanarak

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ve böylece

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}$$

olmaktadır. ∇ operatörü kullanılarak son ifade için

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (u \cdot \nabla) f \tag{1.15}$$

elde edilir. (1.1) denklemini $\vec{u} = (u, v, w)$ vektörü için kullanırsak, akışın ivmesi için

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u$$

ifadesini elde ederiz.

1.3. Euler Hareket Denklemleri

Akışkanın küçük δV hacmi için lineer momentum prensibini uygulayalım. g birim kütlesini etkileyen yerçekimi kuvveti hesaba katılırsa, söz konusu hacim üzerindeki toplam kuvvet

$(-\nabla p + \rho g)\delta V$ olmaktadır. Bu kuvvet V hacimli kütle ile ivmesinin çarpımına, yani

$$\rho \delta V \frac{Du}{Dt}$$

ye eşittir. Böylece, ideal bir akışkanın temel hareket denklemleri olarak (1.16) elde edilir.

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + g, \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

.Euler denklemleri olarak bilinen bu denklemleri *u, v, w* ve *p* bilinmeyenlerine göre açık olarak dört skaler denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

şeklinde yazabiliriz. Yerçekimi terimi z-eksenine dikey yukarı doğru $\boldsymbol{g}=(0,0,-g)$ şeklinde alınmıştır.

Yerçekimi kuvvetini, bir potansiyel fonksiyonunun gradiyenti $\boldsymbol{g}=-\nabla\chi$ (1.3) cinsinden yazabiliriz (burada $\chi=gz$ olmaktadır). Akışkanın ivmesi için (1.1) ifadesini kullanarak, (1.2) denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\chi\right)$$

biçiminde tekrar yazabiliriz. Burada $\rho=sabit$ olduğu varsayılmıştır. Ayrıca,

$$(u\cdot\nabla)u=(\nabla\wedge u)\wedge u+\nabla\left(\frac{1}{2}u^2\right)$$

özdeşliğinden faydalanılarak, momentum denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(\nabla\wedge u)\wedge u=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}u^2+\chi\right) \tag{1.17}$$

formunda yazılabilir.

1.4 Bernoulli Akış Teoremi

Eğer akış sürekli ise (1.4)

$$(\nabla \wedge u) \wedge u = -\nabla H$$

denklemine indirgenir. Burada

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 + \chi$$

olmaktadır. Skaler çarpımı dikkate alarak,

$$(u \cdot \nabla)H = 0$$

elde ederiz. Yani ideal akışkan sürekli akış içinde ise *H* bir akış çizgisi boyunca sabittir. Yerçekiminin ihmalinde sürekli akışta $p + \frac{1}{2}\rho u^2$ nin bir akış çizgisi boyunca sabit olduğu görülür. Yukarıdaki teorem farklı akış çizgilerinin her biri boyunca *H* ın sabit kalacağını ifade eder, fakat aynı sabiti alacağı hakkında bir şey söylemez. Yani her akış çizgisinin kendi sabiti olmaktadır. Tüm akış alanı boyunca *H* ın sabit olması için gereken koşul aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.1 $\nabla \wedge u = 0$ koşulunun sağlanması durumunda akışa girdapsız akış adı verilir.

2. İKİ BOYUTLU EULER DENKLEMLER SİSTEMİ

Bu bölümde iki boyutlu Euler denklem sisteminin nümerik çözümü için bir sayısal algoritma geliştireceğiz. Bilindiği gibi herhangi bir diferansiyel denklemi veya diferansiyel denklemler sistemini sonlu farklara ayrıklaştırmak için çözümün yüksek mertebeden diferansiyellenebilir olması talep edilmektedir. Fakat, Euler sistemini oluşturan denklemlerin çözümü bu özelliklere sahip değildir. Bu nedenle, önce Euler denklem sistemine bilinen anlamda denk olan ve Euler denklem sisteminin sahip olmadığı özelliklere sahip özel yardımcı problem karşılık getirilecektir. Söz konusu yardımcı problemin avantajları kullanılarak nümerik çözüm için yüksek hassaslığa sahip algoritmalar geliştirilecek ve daha sonra yardımcı problemin çözümü vasıtasıyla esas problemin sayısal çözümü elde edilecektir.

2.1. İki Boyutlu Sistemin Koordinatlara Göre Ayrıklaştırılması. Bernoulli İntegrali

Her zaman olduğu gibi R^2 ile (x,y) noktalarının Euclid uzayını gösterelim.
$R_+^3 = R^2 \times [0,T) = \{ (x,y,t) \mid (x,y) \in R^2, T > t \geq 0 \}$ olsun. R_+^3 de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{2.3}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \tag{2.4}$$

$$v(x,y,0) = v_0(x,y), \tag{2.5}$$

problemini göz önüne alalım. Burada $u = u(x,y,t)$ ve $v = v(x,y,t)$ fonksiyonları bilinmeyen $\vec{u}$ hız vektörünün bileşenlerini, yani $\vec{u} = \left(u(x,y,t), v(x,y,t)\right)$ yi; $p = p(x,y,t)$ ve $\rho = \rho(x,y,t)$ sırasıyla basınç ve yoğunluğu göstermektedir. $u_0(x,y)$ ve $v_0(x,y)$ bilinen fonksiyonlar olmaktadır.

Akışta girdabın olmadığını varsayalım ve aşağıdaki potansiyel fonksiyonu

$$u = \Phi_x, \quad v = \Phi_y \tag{2.7}$$

dahil edelim. Akışta girdap olmadığı, matematiksel olarak

$$v_x - u_y = 0 \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilmektedir. (2.7) ve (2.8) dikkate alınarak, (2.1), (2.2) denklemler sistemi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

(2.9)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

(2.10)

olarak yazılabilir.

$\rho(x,y)=sabit$ olduğu taktirde (2.9), (2.10) dan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=0 \tag{2.12}$$

elde ederiz.

$$U^2=u^2+v^2 \tag{2.13}$$

ve

$$\Phi=\Phi^*+\int_0^t c(\tau)d\tau \tag{2.14}$$

notasyonlarını içerirsek, bu notasyonlarda (2.11) ve (2.12) denklemlerini

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t}+\frac{1}{2}U^2+\frac{p}{\rho}=0 \tag{2.15}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.15) denklemi (2.1), (2.2) için Cauchy veya I. aralık integrali olarak adlandırılır. $\vec{u}=(u,v)$ fonksiyonları t den bağımsız olduğu taktirde, (2.15) denklemi

$$\frac{1}{2}U^2+\frac{p}{\rho}=0$$

olarak yazılabilir. Bu bağıntı Bernoulli integrali olarak adlandırılır. Diğer bir deyimle, (2.15) denklemi (2.1), (2.2) denklemler sisteminin I. integralinin vektörel formudur. (2.1), (2.2) denklemlerinin her bir çözümünün (2.15) denklemini de sağladığı ve tersine, (2.15) in çözümlerinin (2.1), (2.2) nin de çözümleri olduğu açıktır.

Genel olarak, (2.14) denkleminde içerilen keyfi c sabiti t ye bağlıdır ve bu nedenle, (2.15) denklemi tek değerli olarak tanımlanamaz. (2.7) ve (2.13) notasyonları kullanılarak, (2.11), (2.12) denklemleri yeniden

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=0, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=0 \tag{2.17}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla (2.1), (2.2) karışık denklemler sistemi x ve y koordinatına göre iki denkleme parçalanmış olur ki, söz konusu denklemlerin her birine bir boyutlu denklem gibi bakabiliriz.

2.2. Basınc İçin Denklem

Şimdi bilinmeyen $p(x,y,t)$ basınc fonksiyonunu bulmak için bir denklem oluşturalım. Bunun için (2.16) denklemini x e göre diferansiyelleyelim

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{U^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{U^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

(2.17) denklemini y e göre diferansiyelleyelim

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{U^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

Son iki denklemi taraf- tarafa toplarsak alırız

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{U^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)$$

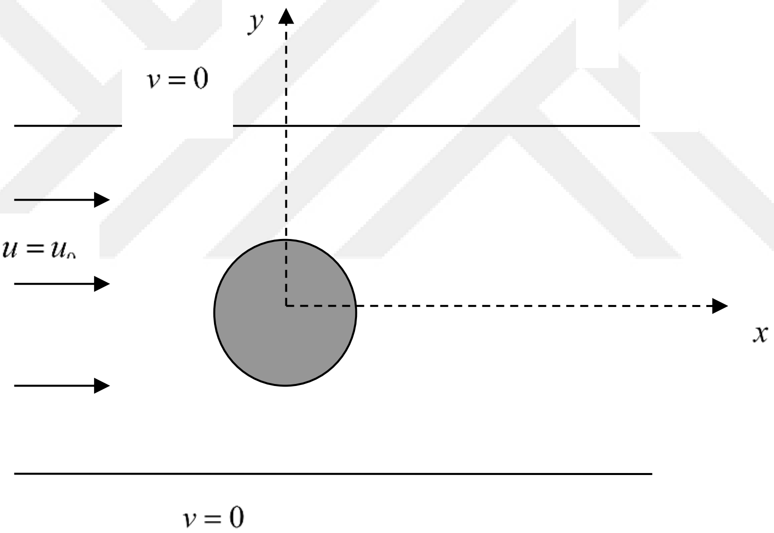
$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ olduğunu dikkate alırsak $p(x,y,t)$ için (2.18) denklemini elde ederiz

$$\Delta\left(\frac{U^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\Delta p \qquad (2.18)$$

2.3 Başlangıc ve Sınır Koşulları

(2.16)-(2.18) denklemler sistemini çözmek için aşağıdaki başlangıc ve sınır koşullarını yazalım.

Şekil (2.1)



$$p(x,y,0)=p_0(x,y) \qquad (2.19)$$

Şimdi, ρ nun x ve y ye bağlı olduğu durumu göz önüne alalım ve aşağıdaki notasyonu içerelim

$$\Im=\int\frac{dp}{\rho}.$$

Bu durumda (2.11), (2.12) denklemler sistemi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2}{2}+\Im\right]=0, \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2}{2}+\Im\right]=0 \qquad (2.19)$$

biçimini alır. (2.7) ve (2.13) dikkate alınırsa, (2.18), (2.19) denklemler sistemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U^2}{2}+\Im\right]=0, \qquad (2.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U^2}{2}+\Im\right]=0 \qquad (2.21)$$

olarak yazılabilir.

Böylece, (2.20), (2.21) (veya (2.16), (2.17)) den görüldüğü gibi, bu denklemler (2.1), (2.2) denklemler sisteminin koordinatlarına göre ayrılmış şeklidir. Problemin başlangıç fonksiyonları hem pozitif hem de negatif eğime sahip oldukları taktirde, bu sistemdeki her bir denklemin çözümü çok değerli fonksiyon olur. [3] ve [4] de belirtildiği üzere çok değerli fonksiyonlar fiziksel açıdan anlamsız çözümler olduğundan, çok değerli çözüm yerine 1. tür süreksizlik noktalarına sahip tek değerli çözüm inşa edebiliriz. Bu özelliklere sahip çözümler zayıf çözüm vasıtasıyla tanımlanabilir. Bu nedenle, $\vec{u}$ nun (u,v) bileşenlerinin zayıf çözümü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.1 (2.4), (2.5) koşullarını ve $\varphi(x,y,T)=0$ özelliğine sahip olan herhangi bir $\varphi(x,y,t)=(\varphi_1(x,y,t),\varphi_2(x,y,t))\in \overset{o}{H}{}^1(R^3)$ test fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliklerini

$$\int_{R_x^2}\left\{u(x,y,t)\frac{\partial\varphi_1(x,y,t)}{\partial t}+\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\frac{\partial\varphi_1(x,y,t)}{\partial x}\right\}dxdt+\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y,0)\varphi_1(x,y,0)dx=0, \qquad (2.22)$$

$$\int_{R_y^2}\left\{v(x,y,t)\frac{\partial\varphi_2(x,y,t)}{\partial t}+\left(\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\frac{\partial\varphi_2(x,y,t)}{\partial y}\right\}dydt+\int_{-\infty}^{\infty}v(x,y,0)\varphi_2(x,y,0)dy=0 \qquad (2.23)$$

koruyan $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarına (2.1)-(2.6) probleminin zayıf çözümü denir.

Burada $\overset{o}{H}{}^1(R^3)$, $\overset{o}{R}{}^3$ üzerinde Sobolev uzayıdır; R_x^2 ve R_y^2 sırasıyla R_+^3 ün xot, yot düzlemleri üzerindeki izdüşümünü göstermektedir.

2.4. Yardımcı Problem

(2.1), (2.2) sistemi için zayıf çözüm kavramını dahil ettiğimizde, süreksizlik noktalarının zamana göre evriminin ve yerinin bilinmemesi gibi yeni problemler ortaya çıkar. Diğer taraftan, süreksizlik noktalarının mevcudiyeti (2.1), (2.2) problemine bilinen klasik nümerik metotların uygulanmasında bir çok sorunlara neden olur. Zira, süreksizlik noktalarının civarında denklemin içerdiği türevler mevcut olmaya da bilirler.

[3] ve [4] e göre (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümünü belirlemek için,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int u(x,y,t)dx + \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_1(t), \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int v(x,y,t)dy + \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_2(t), \tag{2.25}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \tag{2.26}$$

$$v(x,y,0) = v_0(x,y) \tag{2.27}$$

yardımcı problemini içerelim. Burada $C_i(t),\ (i=1,2)$ ler keyfi sabitlerdir.

Not 2.1 (2.24) ve (2.25) denklemlerinde sırasıyla *y* ve *x* e parametre gözüyle bakılır.

(2.24)-(2.27) den açıkça görüldüğü gibi *u* ve *v* fonksiyonları süreksiz de olabilirler. Böylece, (2.24), (2.25) denklemlerinin çözüm sınıfı (2.22), (2.23) bağıntısıyla tanımlanan denklemlerin çözüm sınıfıyla çakışır.

$$\int u(x,y,t)dx + C_1(t) = {}^{x}u(x,y,t), \tag{2.28}$$

$$\int v(x,y,t)dy + C_2(t) = {}^{y}u(x,y,t) \tag{2.29}$$

notasyonlarını dahil edersek, (2.24), (2.25) sistemi bu notasyonlarda

$$\frac{\partial^{x}u}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = 0, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial^{y}u}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = 0 \tag{2.31}$$

olarak yazılabilir. (2.26), (2.27) başlangıç koşulları

$$ {}^{x}u(x,y,0) = {}^{x}u_0(x,y), \tag{2.32} $$

$$ {}^{y}u(x,y,0) = {}^{y}u_0(x,y) \tag{2.33} $$

olmaktadır. Burada, ${}^{x}u_0(x,y)$ ve ${}^{y}u_0(x,y)$ aşağıdaki denklemlerin keyfi sürekli çözümleri olmaktadır

$$ \frac{\partial^{x}u_0(x,y)}{\partial x} = u_0(x,y), \tag{2.34} $$

$$ \frac{\partial^{y}u_0(x,y)}{\partial y} = v_0(x,y). \tag{2.35} $$

Burada da yukarıda bahsettiğimiz gibi (2.34) ve (2.35) denklemlerinde sırasıyla y ve x e parametre olarak bakılmaktadır.

(2.30)-(2.33) yardımcı problemi aşağıdaki avantajlara sahiptir:

- ${}^{x}u(x,y,t)$ ve ${}^{y}u(x,y,t)$ fonksiyonlarının diferansiyellenebilme özelliği $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarınınkinden bir mertebe daha yüksektir, yani daha pürüzsüz fonksiyon olmaktadırlar.
- (2.1)-(2.6) probleminin çözümleri $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarının x, y ve t ye göre türevlerini kullanmaksızın elde edilebilir.
- $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonları süreksiz de olabilirler.

Teorem 2.1 Eğer ${}^{x}u(x,y,t)$ ve ${}^{y}u(x,y,t)$ fonksiyonları (2.30)-(2.33) yardımcı probleminin pürüzsüz çözümleri ise, bu taktirde

$$ u(x,y,t) = \frac{\partial^{x}u(x,y,t)}{\partial x}, \tag{2.36} $$

$$ v(x,y,t) = \frac{\partial^{y}u(x,y,t)}{\partial y} \tag{2.37} $$

fonksiyonları (2.1)-(2.6) probleminin Tanım 2.1 anlamında zayıf çözümleridir.

Önerilen yardımcı problem $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarının x, y ve t ye göre türevlerini içermediğinden, (2.1)-(2.6) probleminin nümerik çözümü (2.30)-(2.33) probleminin nümerik çözümünden kolayca elde edilebilir.

(2.16), (2.17) (veya (2.20), (2.21)) in her bir denklemi birinci mertebeden nonlineer denklem olmaktadır ve ayrıca korunma kanunları ifade ederler. Bu nedenle, $\int u(x,y,t)dx$ ve $\int v(x,y,t)dy$ integralleri t den bağımsızdır. Burada da, birinci integralde *y*, ikincide ise *x* parametre rolünü oynamaktadır. Şimdi, aşağıdaki notasyonları içerelim

$$E_x(0) = \int_R u_0 dx,$$

$$E_y(0) = \int_R v_0 dy.$$

$E_x(0)$ ve $E_y(0)$ sayıları sırasıyla ${}^x u(x,y,t)$ ve ${}^y u(x,y,t)$ fonksiyonlarının kritik değerleri olarak adlandırılır.

Tanım 2.2

$$ {}^x u_{gen}(x,y,t) = \begin{cases} {}^x u(x,y,t), & {}^x u(x,y,t) < E_x(0), \\ E_x(0), & {}^x u(x,y,t) \geq E_x(0), \end{cases} \tag{2.38}$$

ve

$$ {}^y u_{gen}(x,y,t) = \begin{cases} {}^y u(x,y,t), & {}^y u(x,y,t) > E_y(0), \\ E_y(0), & {}^y u(x,y,t) \geq E_y(0) \end{cases} \tag{2.39}$$

ile tanımlanan fonksiyonlara (2.30)-(2.33) probleminin genişletilmiş çözümü denir.

Teorem 2.1 den, (2.1)-(2.6) probleminin zayıf çözümü için

$$u_{gen}(x,y,t) = \frac{\partial^x u_{gen}(x,y,t)}{\partial x}, \tag{2.40}$$

$$v_{gen}(x,y,t) = \frac{\partial^y u_{gen}(x,y,t)}{\partial y} \tag{2.41}$$

elde ederiz. Böylece,

$$u(x,y,t) = (u_{gen}(x,y,t), v_{gen}(x,y,t)) \tag{2.42}$$

ile tanımlı fonksiyon, (2.1)-(2.6) probleminin genişletilmiş (ya da zayıf) çözümü olur.

O halde, ${}^{x}u(x,y,t)$ ve ${}^{y}u(x,y,t)$ fonksiyonlarının kritik değerler aldığı noktaların geometrik yeri $u(x,y,t)$ vektörünün sıçrama yüzeyini tanımlar. Diğer bir ifadeyle, $u(x,y,t)$ vektörünün sıçrama noktaları, bu noktaların sağında $u(x,y,t)$ nin sıfır değerini aldığı noktalar olmaktadır.

2.5. Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar Yöntemi

(2.1)-(2.6) problemi için nümerik algoritma geliştirmek amacıyla ilk önce $R^3_{x,y,t}$ bölgesini

$$\Omega_{h_x,h_y,\tau} = \{(x_i, y_j, t_k) \mid x_i = ih_x,\ y_j = jh_y,\ t_k = k\tau;$$

$$i = \ldots -M, -(M-1), \ldots, -1,0,1,\ldots, M, \ldots;\ j = \ldots -N, -(N-1), \ldots,$$

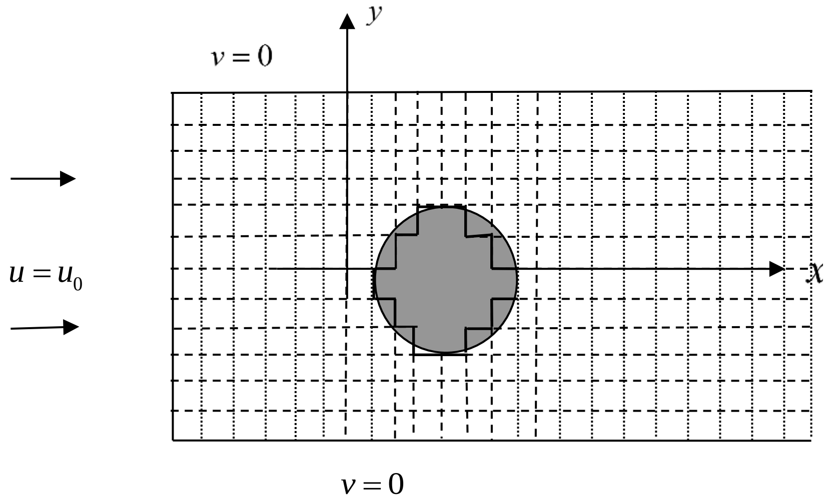
$$-1,0,1,\ldots, N, \ldots;\ k = 0,1,2,\ldots;\ h_x > 0,\ h_y > 0,\ \tau > 0\}$$

ağı ile örtelim. Burada, h_x, h_y ve τ sırasıyla x, y ve t değişkenlerine göre $\Omega_{h_x,h_y,\tau}$ ağının adımlarını göstermektedir. $\Omega_{h_x,h_y,\tau}$ ağının keyfi (x_i, y_j, t_k) noktasında (2.30)-(2.33) denklemlerini aşağıdaki gibi sonlu farklara

$${}^{x}U_{i,j,k+1} = {}^{x}U_{i,j,k} - \frac{\tau}{2}\overline{U}^2_{i,j,k} - \frac{\wp_{i,j,k}}{\rho}, \tag{2.43}$$

$${}^{y}U_{i,j,k+1} = {}^{y}U_{i,j,k} - \frac{\tau}{2}\overline{U}^2_{i,j,k} - \frac{\wp_{i,j,k}}{\rho} \tag{2.44}$$

ayrıklaştıralım. Burada, ${}^{x}U_{i,j,k}$, ${}^{y}U_{i,j,k}$, $\overline{U}^2_{i,j,k}$ ve $\wp_{i,j,k}$ ağ fonksiyonları, (x_i, y_j, t_k) noktasında ${}^{x}u$, ${}^{y}u$, U^2 ve p fonksiyonlarının yaklaşık değerlerini göstermektedir.



Şekil 2

(2.32), (2.33) başlangıç koşullarının da $\Omega_{h_x,h_y,\tau}$ ağının (x_i, y_j) noktalarında sonlu farklar karşılığı

$$^{x}U_{i,j,0} = {}^{x}u_0(x_i, y_j), \tag{2.45}$$

$$^{y}U_{i,j,0} = {}^{y}u_0(x_i, y_j) \tag{2.46}$$

olarak yazılmaktadır. Burada, $^{x}U_0(x_i, y_j)$, $^{y}U_0(x_i, y_j)$ ağ fonksiyonları

$$\frac{^{x}U_{i,j,0} - {}^{x}U_{i-1,j,0}}{h_x} = u_0(x_i, y_j), \tag{2.47}$$

$$\frac{^{y}U_{i,j,0} - {}^{y}U_{i,j-1,0}}{h_y} = v_0(x_i, y_j) \tag{2.48}$$

denklemleri ile tanımlanır. Böylece, aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 2.2 Eğer $^{x}U_{i,j,k}$ ve $^{y}U_{i,j,k}$ (2.43)-(2.46) yardımcı probleminin nümerik çözümleri ise, bu taktirde

$$U_{i,j,k+1} = \frac{^{x}U_{i,j,k+1} - {}^{x}U_{i-1,j,k+1}}{h_x}, \tag{2.49}$$

$$V_{i,j,k+1} = \frac{^{y}U_{i,j,k+1} - {}^{y}U_{i,j-1,k+1}}{h_y} \tag{2.50}$$

ile tanımlanan bağıntılar (2.1)-(2.6) esas probleminin nümerik çözümleri olur.

(2.18) denklemini çözmek için Poisson denklemi için difuzyon denklemi için yazılmış stasionel olmayan sonlu farklar şemasından eiliptik tür denklemin çözümünü elde etmek için Richardson yöntemini kullanalım. Sadelik için $h_x = h_y = h$ olduğunu kabul edelim. Bu koşul çerçevesinde (2.18) denklemi için sonlu farklar şemasını

$$\wp_{i,j}^{k+1} = \wp_{i,j}^{k} + \frac{\tau}{h^2}\left[\wp_{i+1,j}^{k} + \wp_{i-1,j}^{k} + \wp_{i,j+1}^{k} + \wp_{i,j-1}^{k} - 4\wp_{i,j}^{k} - h^2 D_{i,j}\right], \qquad (2.51)$$

burada $D_{i,j} = \Delta\left(\frac{U^2}{2}\right)_{i,j}$ olmaktadır.

(2.43), (2.44) fark şeması τ ya göre birinci mertebedendir. Ancak onun mertebesi, örneğin Runge-Kutta metodu uygulanarak daha yüksek yapılabilir.

(2.43)-(2.46) dan görüldüğü üzere, önerilen algoritmalar bilgisayar hesaplamaları açısından oldukça etkili ve ekonomiktir.

3. POLİTROPİK GAZLAR İÇİN İZENTROPİK VE ADİABATİK EULER SİSTEMİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Aşağıdaki izentropik gazların hareketini ifade eden doğrusal olmayan denklemler sistemini göz önüne alalım

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p+\rho u^2)}{\partial x} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \rho(e+\frac{u^2}{2})}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+pu]}{\partial x} = 0, \tag{3.3}$$

Burada, $\rho -$ gazın yoğunluğu, $p -$ basınç, $e -$ gazın iç enerjisi, $u -$ gazın ox yönündeki hızı, $s -$ entropi, olmaktadır. Bilinmeyenler $(\rho,\ u,\ p,\ e)$ olduğunda (3.1)-(3.3) denklemler sistemine dördüncü durum denklemi

$$e = e(\rho, p) \tag{3.4}$$

eklenir. Sadelik için $E = \frac{1}{2}u^2 + e$ kabul etsek (3.3) denklemi

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u E + pu]}{\partial x} = 0, \tag{3.3'}$$

şekline düşer. (3.4) eşitliği incelenen gazın durumuna bağlı olarak termodinamik teorisinden elde edilir. Örneğin, politropik gazlar için

$$e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}, \quad \gamma > 1$$

olabilir. Normal atmosfer basıncı ve oda sıcaklığında politropik gaz için $\gamma = 1.4$ omaktadır. Termodinamiğin ikinci kuralına göre

$$Tds = de + pd\tau$$

eşitliği ile tanımlanan S entropy değişkeni vardır, burada $\tau = \frac{1}{\rho}$, T −mutlak sıcaklıktır. Gösterilebilir ki, sürekli çözümler için $S(x, t)$ herhangi bir partikül yolu boyunca sabit olur. Yani, pürüzsüz çözümü olan Euler sistemimi aşağıdaki şekilde

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p+\rho u^2)}{\partial x} = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \tag{3.7}$$

yazılabilir.

Bu yeni form, tam Euler sisteminin izentropik Euler sistemi olarak adlandırılan basitleştirmeye imkan verir.

İzentropik Euler sisteminde, entropinin ortam alanı boyunca ve tüm zaman boyunca bir sabit olduğu varsayılır. Dolayısıyla üçüncü denklem yok sayılabilir. Termodinamikte, beş $\{\rho,\ e,\ p,\ T, S\}$ değişkenden herhangi ikisi diğer üçü ile tanımlanabildiğinden, durum denklemi $p = p(\rho)$ şeklinde alınabilir ve bu nedenle iki değişkenli bir fonksiyondan bir değişkenli fonksiyona basitleştirilebilir. Bu durumda (3.5)-(3.7) sistemi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p(\rho) + \rho u^2)}{\partial x} = 0, \tag{3.9}$$

şekline düşer.

Not 1. Eğer gaz ideal olursa Gay-Lussac kuralına göre durum denklemi

$$p\tau = RT \tag{3.10}$$

olur. Burada R gaz sabitidir ve gazın iç enerjisi e sadece T nin fonksiyonu olur. Politropik gaz da ideal sayıldığından

$$e = c_v T \tag{3.11}$$

olmaktadır. Son iki (3.10), (3.11) formülden

$$p = A(S)\rho^{\gamma},\ A(S) = Rexp(c_v^{-1}(S - S_{0)}) \tag{3.12}$$

elde ederiz. Burada $\gamma = 1 + Rc_v^{-1}$ adiyabatik gaz sabitidit.

3.1. İzentropik Euler Sistemi

Bu bölümde biz (3.1)-(3.3) denklemler sistemini inceleyeceğiz. Sonraki işlerimizin kolaylığı için $M(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ notasyonunu içerelim ve (3.1)-(3.3) denklemler sistemini aşağıdaki şekilde yazalım

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + M(\rho u) = 0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + M(p + \rho u^2) = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial(\rho E))}{\partial t} + M(\rho u(E) + pu) = 0. \tag{3.15}$$

(3.13)-(3.15) denklemler sistemi için aşağıdaki başlangıç ve başlangıç sınır değer problemi yazabiliriz.

a) Cauchy Problemi
b) Yarım Eksende Başlangıç Sınır Değer Problemi,
c) Riemann Problemi.

Şimdi bu problemleri detaylı şekilde inceleyelim.

a) Cauchy Problemi : (3.13)-(3.15) denklemler sisteminin aşağıdaki

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \tag{3.16}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3.17}$$

$$E(x,0) = E_0(x) \tag{3.18}$$

koşulları çerçevesinde çözümünün bulunmasına Cauchy problemi denir.

b) Yarım Eksende Başlangıç Sınır Değer Problemi : Bu durumda (3.19)-(3.21) denklemler sistemini aşağıdaki

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \qquad \rho(0,t) = \rho_1(t) \tag{3.19}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = u_1(t), \tag{3.20}$$

$$E(x,0) = E_0(x), \quad E(0,t) = E_1(t) \tag{3.21}$$

başlangıç- sınır koşulları çerçevesinde inceleyeceğiz.

c) Riemann problemi : Şimdi başlangıç $\rho_0(x)$, $u_0(x)$, ve $E_0(x)$ fonksiyonlarının süreksiz olduklarını varsayalım yani

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x > 0 \\ u_{2,} & x < 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

olsun. Burada u_1, u_2, ρ_1 ve ρ_2 bilinen sabitler olmaktadır ve aşağıdaki durumlar olabilir:

(i) $u_1 > u_2$, $\rho_1 < \rho_2$; (ii) $u_1 < u_2$, $\rho_1 > \rho_2$;

(iii) $u_1 > u_2$, $\rho_1 > \rho_2$; (iv) $u_1 < u_2$, $\rho_1 < \rho_2$.

Yukarıda belirttiğimiz gibi bu denklemler sisteminin çözümleri yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olur. Söz konusu sıçrayışlar da kendi sırasında (3.1)-(3.3) denklemler sistemine literatürde iyi bilinen nümerik yöntemlerin uygulanmasına engel çıkarır.

Bu amaçla tezin bu bölümünde süreksiz fonksiyonlar sınıfında etkin algoritmalar önereceğiz.

Açıktır ki, $M(\cdot)$ operatörünün tersi , $M^{-1}(\cdot)$ vardır, fakat ters operatör tek değil. (3.20)-(3.22) denklemler sisteminin her iki tarafına $M^{-1}(\cdot)$'i uygularsak

$$M^{-1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + M^{-1}M(\rho u) = M^{-1}(0),$$

$$M^{-1}\left(\frac{\partial (\rho u)}{\partial t}\right) + M^{-1}M(p + \rho u^2) = M^{-1}(0),$$

$$M^{-1}\left(\frac{\partial (\rho E)}{\partial t}\right) + M^{-1}M(\rho u E + p u) = M^{-1}(0)\,.$$

$M^{-1}\left(\frac{\partial (\cdot)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(M^{-1}(\cdot)\right)$ eşitliğini göz önüne alırsak sonuncu sistemi

$$\frac{\partial}{\partial t} M^{-1}(\rho) + \rho u = \dot{h}_1(t), \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M^{-1}(\rho u) \quad + (p + \rho u^2) = \dot{h}_2(t), \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M^{-1}(\rho E) + (\rho u E + p u) = \dot{h}_3(t)\ . \tag{3.25}$$

elde ederiz. Burada, $\dot{h}_1(t), \dot{h}_2(t), \dot{h}_3(t) \in \ker M$ olmaktadır.

Aşağıdaki notasyonları

$$M^{-1}(\rho) - \dot{h}_1(t) = v(x,t),$$

$$M^{-1}(\rho u) - \dot{h}_2(t) = w(x,t),$$

$$M^{-1}(\rho E) - \dot{h}_3(t) = \pi(x,t)$$

içerelim. Buradan

$$\rho(x,t) = M v(x,t), \tag{3.26}$$

$$\rho(x,t) u(x,t) = M w(x,t), \tag{3.27}$$

$$\rho(x,t) E(x,t) = M \pi(x,t), \tag{3.28}$$

elde ederiz.

(3.26)-(3.28) eşitliklerini dikkate alırsak (3.23)-(3.25) denklemler sistemini aşağıdaki şekilde

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \rho u = 0, \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + (p + \rho u^2) = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial \pi(x,t)}{\partial t} + \rho u E + p u = 0 \tag{3.31}$$

yazabiliriz.

(3.29)-(3.31) denklemler sisteminin aşağıdaki avantajları vardır:

- Denklemler sistemi $\rho(x,t)$, $u(x,t)$ ve $p(x,t)$ fonksiyonlarının hiçbir değişkene göre türevlerini içermemektedir,
- $v(x,t)$, $w(x,t)$ ve $\pi(x,t)$ fonksiyonları mutlak sürekli fonksiyonlardır,
- (3.29)-(3.31) denklemler sistemi için zaman değişkenine göre yüksek mertebeden sonlu farklar seması yazmağa imkan sağlamaktadır.

(3.29)-(3.31) denklemler sistemi için Cauchy problemi

$$v(x,0) = v_0(x), \tag{3.32}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \tag{3.33}$$

$$\pi(x,0) = \pi_0(x) \tag{3.33}$$

şeklinde olmaktadır. Burada $v_0(x), w_0(x)$, ve $\pi_0(x)$ fonksiyonları sırasıyla

$$v_0(x) = M^{-1}\,\rho_0(x), \tag{3.34}$$

$$w_0(x) = M^{-1}\rho_0(x)u_0(x), \tag{3.35}$$

$$\pi_0(x) = M^{-1}\rho_0(x,t)E_0(x) \tag{3.36}$$

denklemlerinin herhangi bir sürekli çözümleri olmaktadır. (3.29)-(3.36) problemine 1.tür yardımcı problem denir.

b) Yarım eksende başlangıç sınır değer problemi,

Bu durumda (3.1)-(3.3) denklemler sistemini 0 dan x'e kadar integralleyelim

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \rho(\xi,t)\,d\xi + \rho(x,t)u(x,t) - \rho(0,t)u(0,t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \rho(\xi,t)\,u(\xi,t)d\xi + p(x,t) + \rho(x,t)u^2(x,t) - [p(0,t) + \rho(0,t)u^2(0,t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \rho(\xi,t)\,E(\xi,t)d\xi + \rho(x,t)u(x,t)E(x,t) + p(x,t)u(x,t) - [\rho(0,t)u(0,t)E(0,t)] - p(0,t)u(0,t) = 0.$$

(3.20), (3.21) koşullarını dikkate alırsak sonuncu denklemler sistemini

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \rho(\xi,t)\,d\xi + \rho(x,t)u(x,t) = \rho_1(t)u_1(t), \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \rho(\xi,t)\,u(\xi,t)d\xi + p(x,t) + \rho(x,t)u^2(x,t) - [p(0,t) + \rho(0,t)u^2(0,t) = 0, \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \rho(\xi,t)\,E(\xi,t)d\xi + \rho(x,t)u(x,t)E(x,t) + p(x,t)u(x,t) = [\rho_1(t)u_1(t)E_1(t)] + p(0,t)u(0,t) \tag{3.39}$$

şeklinde yazılabilir. (3.37)-(3.39) denklemler sistemi (3.20),(3.21) koşulları çerçevesine çözeceğiz. Bu problemine 2.tür yardımcı problem denir.

Bu problemi sonlu faklar yöntemi ile çözmek için denklemlerin içerdiği integrale dikdörtgenler yöntemi ile yaklaşalım, yani

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x f(\xi,t)\,d\xi = h_x\sum_{j=0}^{i} F_{jk}$$

formülünü uygularsak

$$h_x\sum_{j=0}^{i}\frac{(\wp_{j,k+1}-\wp_{j,k})}{h_t} + \wp_{i,k}\,U_{i,k} = \rho_1(t_k)u_1(t_k)$$

elde ederiz. Sonuncu sistemi

$$\wp_{i,k+1} = \wp_{i,k} - \sum_{j=0}^{i-1}(\wp_{j,k+1} - \wp_{j,k}) - \frac{h_t}{h_x}\wp_{i,k}U_{i,k} + \frac{h_t}{h_x}\rho_1(t_k)u_1(t_k) = 0 \tag{3.40}$$

alırız.

$$h_x \sum_{j=0}^{i} \frac{\left(\wp_{j,k+1} U_{j,k+1} - \wp_{j,k} U_{j,k}\right)}{h_t} + P_{i,k} + \wp_{i,k} U^2{}_{i,k} = p_1(t) + \rho_1(t_k) u_1^2(t_k)$$

ifadesi üzerinde yukarıda yaptığımız işlemleri yaparsak

$$\wp_{i,k+1} U_{i,k+1} = \wp_{i,k} U_{i,k} - \sum_{j=0}^{i-1} \left(\wp_{j,k+1} U_{j,k+1} - \wp_{j,k} U_{j,k}\right) - \frac{h_t}{h_x}\left(P_{i,k} + \wp_{j,k} U^2{}_{i,k}\right) +$$

$$\frac{h_t}{h_x}\left(p_1(t) + \rho_1(t_k) u_1^2(t_k)\right),$$

buluruz. Sonuncu denklemler sisteminin her iki tarafını $\wp_{i,k+1}$ bölersek bilinmeyen $U_{i,k+1}$ için aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz

$$U_{i,k+1} = \frac{1}{\wp_{i,k+1}} \{\wp_{i,k} U_{i,k} - \sum_{j=0}^{i-1} \left(\wp_{j,k+1} U_{j,k+1} - \wp_{j,k} U_{j,k}\right) - \frac{h_t}{h_x}\left(P_{i,k} + \wp_{j,k} U^2{}_{i,k}\right) +$$

$$\frac{h_t}{h_x}\left(p_1(t) + \rho_1(t_k) u_1^2(t_k)\right)\}. \qquad (3.41)$$

Nihayet bilinmeyen $E_{i,k+1}$ ları bulmak için (3.3’) denklemini

$$h_x \sum_{j=0}^{i} \frac{\left(\wp_{j,k+1} E_{j,k+1} - \wp_{j,k} E_{j,k}\right)}{h_t} + P_{i,k} U_{i,k} + \wp_{i,k} U_{i,k} E_{i,k} =$$

$$\rho_1(t_k) u_1(t_k) E_1(t_k)$$

Seklinde yazalım. Buradan

$$E_{i,k+1} = \frac{1}{\wp_{j,k+1}} \{ \wp_{i,k} E_{i,k} - \sum_{j=0}^{i-1} \left(\wp_{j,k+1} E_{j,k+1} - \wp_{j,k} E_{j,k}\right) -$$

$$\frac{h_t}{h_x}\left(P_{i,k} U_{i,k} + \wp_{i,k} U_{i,k} E_{i,k}\right) - \frac{h_t}{h_x} P_{i,k} U_{i,k} + \frac{h_t}{h_x}\left(\rho(t_k) u_1(t_k) E_1(t_k) + P_{0,k} u_1(t_k)\right) \} \qquad (3.42)$$

(3.40)-(3.42) denklemler sistemine

$\wp_{i,0} = \rho_0(x_i)$,

$U_{i,0} = u_0(x_i)$,

$E_{i,0} = E_0(x_i)$ başlangıç koşullarını ekleyeceğiz. Görüldüğü gibi (3.42) algoritması bilgisayar kodlanması için sade ve ekonomiktir. Ayrıca bu algoritma kullanılarak elde edilen sonuçlar olayın fiziksel yapısını da düzgün ifade etmektedir.

4. SONUÇLAR

Teorik karakter taşıyan bu tezde elde edilen sonuçlar

- İki boyutlu Euler denklemler sistemi için özel yolla yardımcı problem elde edilmiştir. Bunun için potansiyel fonksiyonu dahil edilerek Euler denklemler sisteminin birinci aralık integral integrali bulunmuştur. Dolayısıyla, bu durumda yardımcı problem için bulduğumuz denklem Euler denklemler sistemi için Cauchy veya I. aralık integrali integrali ile çakışıyor.

- Elde edilen I. aralık integrali kullanılarak hız vektörünün bileşimleri için denklemler bulunur. Bu denklemlerdeki bilinmeyen fonksiyonların diferansiyellenebilme özellikleri esas problemdeki bilinmeyenlerden diferansiyellenebilme özellikleri aztır.

- Yardımcı problemde bulunan bu özellik problemin çözümünü elde etmek için süreksiz fonksiyonlar sınıfında sonlu farklar yöntemini imkan sağlar. Klasik şekilde yazılmış Euler denklemler sistemine , $u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}$ eşitliğinin sonlu fark karşılığı olmadığından, direkt olarak sonlu farklar yöntemini uygulamak mümkün değildir.

- Politropik gazlar için izentropik ve adiabatik Euler diferansiyel denklemler sistemin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümünün bulunması için de yüksek hassaslığa sahip yardımcı problemler dahil edilmiş ve söz konusu yardımcı denklemler kullanılarak süreksiz fonksiyonlar sınıfında sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır

5. KAYNAKÇA

1. Abasov M.T., Rasulov, M.A., Ibrahimov T.M., Ragimova T.A. On a method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok. 43, No.1, pp.150-153, 1991.

2. Ames, W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York, London, 1965.

3. Ames, W.F. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press, New York, 1977.

4. Anderson, D.A., Tannehill, J. C., Pletcher, R. H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Vol. 1,2, Hemisphere Publishing Corporation, 1984.

5. Antosik, P., Mikusinski, J., Sikorski, R., Theory of Distributions. The Sequential Approach. Elsevier Scientific Pub. Com. Amsterdam, 1973, 311p.

6. Aziz, K., Settari, A., Petroleum Reservoir Simulation, Elsevier Applied Science Pub., London, 1979.

7. Baklanovskaya V.,F. Numerical Solution one of Problem of Nonstationary Filtration. Journal of Computational Math and Math Physics, 1961, v.1, No 1, pp. 105-112.

8. Baklanovskaya, V.F., Investigation of Grid method for Parabolic Equation with Degeneration. Journal of Computational Math and Math Physics, 1977, v.XII, No 6, pp. 1458-1473.

9. Barenblatt, G.I. and M.I. Vishik, On the Finite Rate of Propagation of the Perturbations in Problems of Non-stationary Filtration of a Fluid and a Gas, Prikl. Mat. Mekh., 20, p 411-417, 1956.

10. Barenblatt, G.,I., Entov, V. M., Pijik V. M., Motions of Fluids and Gases in Reservoirs. Moskow, Nedra, 1984, 221 p.

11. Buckley, S.E., Leverett, M.C., Mechanism of Fluid Displacement in Sands. Trans. AIME

146, 1942, pp. 107-116.

12. Collins, R.E., Flow of Fluids Through Porous Materials. Penn-Well, Tulsa, OK, 1976.

13. Courant, R., Partial Differential Equations, New-York- London, 1962.

14. Courant, R, Friedrichs, K.O. Super Sonic Flow and Shock Waves, Springer-Verlag, New York, 1976.

15. Entov, B.M., Zazovskii,A.F. Hydrodynamics of Process of Increase of Oil Efficiency, Moskow, Nedra, 1989.

16. Godunov, S.K., A Difference Method for Numerical Calculation of Discontinuous Equations of Hydrodynamics, Math. Sb., 271-300, 47, 1959.

17. Godunov, S.,K., Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moskow, 1979.

18. Godunov, S.K., Ryabenkii, V.S., Finite Difference Schemes. Moskow, Nauka, 1972.

19. Godunov, S.K., Numerical Solution of Multidimensional Problems of Gas Dynamics. Moskow, Nauka, 1976.

20. GodlewskiE., Raviart P.A. Hyperbolic Systems of Conservation Laws. Ellipsec, 1991, 258p.

25. Goritski, A.Y., Krujkov, S.N., Chechkin G.A., First Order Quasi Linear Equations with Partial Derivatives, Pub. of Moskow University, Moskow, 1997.

26. Haitao, Fan, Existence of Discrete Shock Profiles of a Class of Monotonicity Preserving Schemes for Conservation Laws Mathematics of Computation, Vol. 70, No. 235, pp. 1043-1069, 200.

27. Kalashnikov, A.S., On a Non-linear Equation Arising in the Theory of non-Stationary Filtration, Trudy Sem. Petrovskogo, 4, pp. 137-146, 1978.

28. Kroner, D., Numerical Schemes for Conservation Laws. John Wiley and Sons. Inc., 508, 1997.

29. Ladyzhenskaya ,O. A., The Boundary-Value Problems of Mathematical Physics, Nauka, USSR, 1973.

30. Lax, P.D., Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations,Comm. of Pure and App. Math, Vol. VII, pp. 159-193, 1954.

31. Lax, P.D., The Formation and Decay of Shock Waves, Amer. Math Monthly, 79, pp.227-241, 1972.

32. Lax, P.D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, Comm. of Pure and App. Math, v.10, pp.537-566, 1957.

33. Lax, P.D., Development of Singularities of Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. Journal of Mathematical Physics, v.5, No 5, pp.611-613, 19 .

34. Lax, P.D., and Wendrof, B. Systems of Conservation Laws, Los Alamos Scientific Laboratory,LA-

35. LeVeque, R.J., Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, 2002,558p.

36. Muskat, M., The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Medium, McGraw-Hill, New York, 1946.

37. Noh, W. F., Protter, M. N., Difference Methods and the Equations of Hydrodynamics, Journal of Math. and Mechanics, Vol. 12, No.2, 1963.

38. Oleinik, O.A., Discontinuous Solutions of Non-linear Differential Equations, Uspekhi Mat. Nauk 12, 3, pp. 3-73, 1957.

39. Oleinik, O.A., On the Equations of Unsteady Filtration Type, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 113, pp.1210-1213, 1957.

40. Oleinik, O.A., Kalashnikov, A.S., and Chzhou Yui-Lin, The Cauchy Problem and Boundary-value Problems for Equations of Unsteady Filtration Type, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 22,pp. 667-704, 1958.

41. Oran, E.S., Boris, J.P., Numerical Simulation of Reactive Flow, Elsevier, New-York, Amsterdam-London, 1987.

42. Rapoport, L.A., Leas W.T. Properties of Linear Water Floods, Trans. AIME, 198, pp. 139-148,1953.

43. Rasulov, M.A., Abasov, M.T., Ragimova, A.T., Identification of the Saturation Jump in the Process of Oil Displacement by Water in a Two-dimensional Domain, Soviet Math. Dokl. USSR, 319, 4, 943-947, 1992.

44. Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., About One Method of the Solution of a Problem Cauchy for a Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First- Order with the Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dokl. Vol. 316, No.4, pp. 777-781, 1991.

45. Rasulov, M.A., Abasov, M.T., To the Theory Filtration of Three-phase Mixes in View of them Compressible, Soviet Math. Dokl. USSR 325, 1, 130-133, 1992.

46. Rasulov M.A., Finite Difference Scheme for Solving of Some Nonlinear Problems of Mathematical Physics in a Class of Discontinuous Functions, Baku, 196p., 1996.

47. Rasulov, M.A., Ragimova, T.A., A Numerical method of the Solution of the Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First Order Differential Equations, Minsk, Vol. 28, No.7, pp.2056-2063, 1992.

48. Rasulov, M.A., Coskun, E., Sinsoysal, B., Finite Differences Method for a Two-Dimensional Nonlinear Hyperbolic Equations in a Class of Discontinuous Functions. App. Mathematics and Computation, vol. 140, Issue l, August, pp.279-295, 2003.

49. Rasulov, M.A., Karaguler T., Finite Differences Schemes for Solving System Equation of Gas Dynamic in a Class of Discontinuous Functions. Applied Mathematics and Computation, 143, pp.145-164, 2003.

50. Rasulov, M.A., Karaguler T., Sinsoysal, B., Finite Differences Method for Solving BoundaryInitial Value Problem of a System Hyperbolic Equations in a Class of Discontinuous Functions.Applied Mathematics and Computation, 149, pp.47-63, 2004.

51. Rasulov, M.A., Karaguler T., Sinsoysal, B., Numerical Solution of Cauchy Problem for Second Order Nonlinear Wave Equation with Changeable Type in a Class of Discontinuous Functions.Applied Mathematics and Computation, 147/2, pp. 423-437, 2004.

52. Rasulov, M.A. The Finite Differences Scheme for the First Order System of Nonlinear Differential Equations in a Class of Discontinuous Functions. Applied Mathematics and Computation, 154, pp. 671-102, 139-154, 1999.

53. Rasulov, M.A., On a method of Calculation of the First Phase Saturation During the Process of Displacement of Oil by Water from Porous Medium. App. Mathematics and Computation , vol. 85, Issue l, August , pp.l-16,1997.

54. Rasulov, M.A., A Numerical Method of Solving a Parabolic Equation with Degeneration. Dif. Equations, Minsk, Vol. 18, No.8, pp. 1418-1427, 1992.

55. Rasulov M.A., Numerical Solution of One Dimensional Filtration of Three Phase Compressible Fluid Through Medium in a Class of Discontinuous Functions. Applied Mathematics and Computation. 2005.

56. Rasulov M.A., Karaguler, T., Finite Differences Scheme for the Euler System of Equations in a Class of Discontinuous Functions. In book: Numerical Analysis and its Applications, Springer, 2005.

57. Rasulov, M.A., Sinsoysal, B., Numerical Simulation of Initial and Initial-Boundary Value Problems for Traffic Flow in a Class of Discontinuous Functions. WSEAS Transactions on Electronics. Issue 6, Volume 3, pp.336-339, June 2006.

58. Rasulov, M.A., Silahtaroğlu, G., Finding the Location the Shock Wave of Traffic Flow On Highways in A Class of Discontinuous Functions. WSEAS Transactions on Electronics. Issue 6,Volume 3, pp.336-339, June 2006.

59. Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers Albuquerque, 1970.

60. Smoller, J.A., Sh and Reaction Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York Inc 1983.

61. Stoker, J.J., Water Waves. Interscience Publishers, INC, New York, 1957.

62. Tikhonov,A.N.,SamrskiiA.,A.Equations of Mathematical Physics, M. Nauka, 1967,724p.

63. Thomas, J.W., Numerical Partial Differential Equations, Finite Difference methods, Springer-Verlag 436p, 1995.

64. Thomas, J.W., Numerical Partial Differential Equations, Conservation Laws and Elliptic Equations,Springer-Verlag, 573p, 1999.

65. Toro, E.F., Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag,Berlin Heidelberg, 1999.

66. Vulkov Lubin, Conservation Laws and Symmetrization of the Equations of Incompressible Inviscid Fluids, Quart. Applied Mathematics, vol. LXII, No 3, pp 549-560.

67. Whitham, G.B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley Int., New York, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Soma’da doğdum. İlk, orta ve lise eğitimlerimi Soma’da tamamladım. Daha sonra 2007 yılında İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümünü lise birincisi kontenjanından kazanarak üniversite eğitimime başladım. Ardından 2016 yılında Beykent Üniversitesi’nde Uygulamalı Matematik programına kabul edilerek yüksek lisans eğitimime başladım. Şu anda Türkiye Vakıflar Bankası T.A.O Yetkili Yardımcısı olarak çalışmaktayım.

Neziha KOÇ