ADIYAMAN ÜNİVERTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KATSAYILARI PERİYODİK FONKSİYON OLAN DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ANALİZİ

HARUN TEKİN

MATEMATİK

ANA BİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

Prof.Dr MANAF MANAFLI

ADIYAMAN

2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KATSAYILARI PERİYODİK FONKSİYON OLAN DİFERANSİYEL

OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ANALİZİ

Harun TEKİN

Adıyaman Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Manaf MANAFLI

Bu yüksek lisans tez çalışmasında Periyodik Katsayılı Diferansiyel Operatörlerin Spektral Analizi incelenmiştir.

Anatar Kelimeler: Periyodik Katsayılı Diferansiyel Operatörler, Spektrum, Özfonksiyonlar Cinsinden Açılım Formülleri.

ABSTRACT

Master Thesis

SPEKTRAL ANALYSİS OF DİFFERENTİAL OPERATORS WİTH PERIODIC COEFFICIENTS.

Harun TEKIN
Adıyaman University
Institute of Science
Department of Mathematics
Advisor: Prof.Dr.Manaf MANAFLI

In this master thesis investigated spectral analysis of differential operators with periodic coefficients

Key Words: Differential Operators with Periodic Coefficients, Specktrum, Eigenfunction Expansions.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen hocam sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI' ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

R	reel sayılar kümesi
Z	tam sayılar kümesi
N	doğal sayılar kümesi
H	Hilbert uzayı
$l(y)$	diferansiyel ifade
L	diferansiyel operatör
λ	özdeğer
$\Delta(\lambda)$	karakteristik determinant
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrum kümesi
W_m^n	Sobelev uzayı
G	Green fonksiyonu
$L_2(\mathbb{R})$	R kümesinde ölçülebilir, hemen hemen sonlu yakınsak olan ve 2. kuvvetten Riamann anlamında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi

1.GİRİŞ

Son altmış yılda matematiksel yayınlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi hızlı bir gelişim göstermiştir. Katı hal fiziğinde ve kristallerin kuantum mekaniği ile ilgili metallerin teorisinde ortaya çıkan periyodik katsayılı diferansiyel denklemlerin spektral analizi fizikçilerin ve matematikçilerin ortak alanlarından biri olmuştur.

Genel olarak periyodik katsayılı diferansiyel denklemler, P(x) ve Q(x) reel değerli ve aynı periyoda sahip periyodik fonksiyonlar olmak üzere

$$\{P(x)y'(x)\}' + Q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

biçimindedir. Bu denklemle ilgili çalışmaların bir kısmı W.Magnus ve S.Winkler [1] tarafından incelenmiş, kararlılık ve kararsızlık aralıkları tespit edilmiştir. M.S.P.Estham [2],
[1]'deki çalışmalardan faydalanarak periyodik katsayılı diferansiyel operatörlerin Floquet teorisinin temellerine dayanarak kararlılık ve kararsızlık aralıklarını incelemiş ve çözümlerin asimtotik formüllerini elde etmiştir.Öte yandan E.C. Titchmarsh [3] bu tür operatörlerin spektrumu üzerinden öz fonksiyonlar üzerine açılım formülleri elde etmiştir.

Daha sonra bu konu değişik durumlarda M.M. Hecktman , I.V. Stanbevich [4], G.S. Guseinov [5] , V.A. Mikhailets, A.V. Sobolev [6] , M.Dzh.Manafov [7] ve başkaları tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada

$$l_\alpha[y] \equiv -y'' + (q(x)) + \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(x-n)y = \lambda^2 y, \ \mathrm{x} \in \mathrm{R} \qquad (3.1)$$

biçiminde katsayıları genelleşmiş fonksiyonlar olan ikinci mertebeden periyodik diferansiyel denklemin spektral yapısı incelenmiştir.

Burada q(x) , reel, periyodik, parçalı sürekli bir fonsiyon $(q(x+1) = q(x)), \sigma(x)$ Dirac delta fonksiyonu, $\alpha \neq 0$ reel sayı ve λ spektral parametredir.

1. ve 2. Bölümlerde inceleme için gerekli olan Floquet teorisi, kararlılık ve kararsızlık

aralıkları hakkında genel tanım, teorem ve yöntemler üzerinde durulmuştur. 3. bölümde ise 1. ve 2. bölümlerdeki bilgilerden faydalanılarak yukarıda bahsettiğimiz diferansiyel denklemin spektral yapısı incelenmiştir

1.FLOQUET TEOREMİ

1.1 Floquet Teoremi

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=0 \qquad (1.1.1)$$

denklemini ele alalım.

Burada $a_r(x)$ komplex değerli parçalı sürekli ve a'ya göre aynı periyottadır. Böylece a reel sabit olmak üzere

$$a_r(x+a)=a_r(x) \quad (o \le r \le 2)$$

Ayrıca a_0 (x)'in her noktadan sağ ve sol limitlerinin 0'dan farkı olduğunu kabul edelim ve böylece bu denkleme lineer diferansiyel denklemlerin genel teorisi uygulanabilir.Aksi söylenme- dikçe x değerleri $(-\infty,\infty)$ aralığındadır ve (1.1.1) eşitliğindeki gibi x'in fonksiyonlarıyla ilgili bağlantılar tüm x'ler için geçerlidir. (1.1.1) eşitliği hakkında yapacağımız ilk işlem x yerine (x+a) alındığında denklemin değişmediğidir. Şunu gösterir ki eğer $\psi(x)$ aşikar olmayan bir çözüm ρ sıfırdan farklı bir sabit iken

$$\psi(x+a)=\rho\,\psi(x) \qquad (1.1.2)$$

özelliğinin geçerli olduğu gösterilebilir.

Bu sonuçlar ve bunların ispatları G.Floquet (1883) verdiği için Floquet teorisi olarak bilinir.

TEOREM 1.1.1:

ρ sıfırdan farklı bir sabit ve $\psi(x)$ aşikar olmayan bir çözüm olmak üzere (1.1.2) *bağıntısı doğrudur.*

İSPAT:

Varsayalım ki, $\Phi_1(x)$ ve $\Phi_2(x)$ çözümleri (1.1.1) denkleminin

$$\Phi_1(0)=1\ ,\ \Phi_1^1(0)=0\ ,\ \Phi_2(0)=0\ ,\ \Phi_2'(0)=1 \tag{1.1.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan lineer bağımsız çözümleri olsunlar.

Böylece $\Phi_1(x+a)$ ve $\Phi_2(x+a)$ (1.1.1)'in lineer bağımsız çözümleridir. Bu durumda A_{ij} $(1 \le i, j \le 2)$ sabitler ve $A=(A_{ij})$ sıfırdan farklı matris olmak üzere

$$\begin{aligned}\Phi_1(x+a) &= A_{11}\Phi_1(x)+A_{12}\Phi_2(x)\\ \Phi_2(x+a) &= A_{21}\Phi_1(x)+A_{22}\Phi_2(x)\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

(1.1.1) denkleminin $\psi(x)$ çözümü

$$\psi(x)=c_1\Phi_1(x)+c_2\Phi_2(x)\ ,$$

formuna sahiptir, burada c_1 ve c_2 sabirlerdir.

Bu durumda

$$\begin{aligned}(A_{11}-\rho)c_1+A_{21}c_2 &= 0\\ A_{12}c_1+(A_{22}-\rho)c_2 &= 0\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

$c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ olduğundan ρ 'ler için

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\rho & A_{21} \\ A_{12} & A_{22}-\rho \end{vmatrix} = 0, \text{ yani } \rho^2 - (A_{11} + A_{22})\rho + \det A = 0 \qquad (1.1.6)$$

olur.

Bu ρ için kuadratik denklemdir ve ρ 'nin en az bir değeri için sağlanır $\det A \neq 0$ olduğu için bu değer sıfırdan farklıdır. Bu teoremi ispatlar.

(1.1.3) ve (1.1.4) şartlarından

$$A_{11} = \Phi_1(a) A_{12} = \Phi_1'(a) A_{21} = \Phi_2(a) A_{22} = \Phi_2'(a) \qquad (1.1.7)$$

elde edilir.

Wronskiyenin genel ifadesinden

$$\det A = W(\Phi_1, \Phi_2)(a) = \exp\left(-\int_0^a \{a_1(x)/a_0(x)\}\, dx \right)$$

olmak üzere (1.1.3)'e göre

$$W(\Phi_1, \Phi_2)(0) = 1\text{'dir}$$

Böylece (1.1.6) ifadesi

$$\rho^2 - \left\{ \Phi_1(a) + \Phi_2'(a) \right\} \rho + \exp\left(-\int_0^a \{a_1(x)/a_0(x)\}\, dx \right) = 0 \qquad (1.1.8)$$

şeklindedir.

TEOREM 1.1.2:

(1.1.1)*'in lineer bağımsız iki çözümü* $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ *olmak üzere*

Ya

$$\text{(i)}\quad \psi_1(x) = e^{m_1 x} p_1(x) \quad , \quad \psi_2(x) = e^{m_2 x} p_2(x)'dir.$$

Burada m_1 ve m_2 *sabitler ve birbirinden farklıdırla ve* $p_1(x)$ *ile* $p_2(x)$, *a periyotlu periyodik fonksiyonlardır.*

Ya da ;

$$\text{(ii)}\quad \psi_1(x) = e^{mx} p_1(x), \quad , \quad \psi_2(x) = e^{mx}\{x p_1(x) + p_2(x)\}$$

İSPAT:

Burada m sabit , $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ a periyotlu periyodik fonksiyonlardır.

Kabul edelim ki ; (1.1.6) , p_1 ve p_2 gibi iki farklı çözüme sahip olsun. Böylece Teorem (1.1.1)'den (1.1.1) denkleminin aşikar olmayan iki çözümü $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ olmak üzere

$$\psi_k(x+a) = p_k \psi_k(x) \quad (k=1,2) \tag{1.1.9}$$

$\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)'in$ lineer bağımsız olduğu kolayca görülebilir. ρ_1 ve p_2 sıfırdan farklı olduğu için m_1 ve $m_2'yi$

$$e^{am_k} = p_k \tag{1.1.10}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Şimdi ;

$$\mathrm{p}_{\mathrm{k}}(x) = e^{-m_k x}\psi_{\mathrm{k}}(x)$$

tanımlanırsa (1.1.9) ve (1.1.10)'dan

$$\mathrm{p}_{\mathrm{k}}(x+a) = e^{-m_k(x+a)} p_{\mathrm{k}}\psi_{\mathrm{k}}(x) = p_{\mathrm{k}}(x)$$

elde edilir.

Böylece (1.1.11)'den $\mathrm{p}_{\mathrm{k}}(x)$, a periyotlu periyodik fonksiyonlar olmak üzere

$$\Psi_{\mathrm{k}}(x) = e^{-m_k x}\ \mathrm{p}_{\mathrm{k}}(x)'dir.$$

Daha sonra (1.1.6)'nın (1.1.10)'da olduğu gibi tekrarlanmış ρ çözümü sahip olduğunu kabul edelim ve m'yi $\mathrm{e}^{am} = \rho$ biçiminde tanımlayalım. Teorem (1.1.1)'den (1.1.1) denkleminden $\Psi_1(x)$ aşikar olmayan çözümü vardır ve

$$\Psi_1(x+a) = \rho\Psi_1(x) \tag{1.1.12}$$

şeklindedir.

(1.1.1)'in $\Psi_1(x)$ ile lineer bağımsız başka bir çözümü $\Psi_2(x)$ olsun. Bu durumda $\Psi_2(x+a)$ (1.1.1) denklemini sağlar.

d_1 ve d_2 sabit olmak üzere

$$\Psi_2(x+a) = \mathrm{d}_1\Psi_1(x) + \mathrm{d}_2\Psi_2(x)'dir.$$

Şimdi d_2'yi hesaplayabiliriz. (1.1.12) ve (1.1.13)'den

$$\mathrm{W}(\Psi_1,\Psi_2)(x+a) = \rho\mathrm{d}_2\mathrm{W}(\Psi_1,\Psi_2)(\mathrm{x})$$

elde edilir.

Böylece , Wronskian için Liouville formülünden, integratın periyodu a olduğu için

$$\rho \mathrm{d}_2 = \exp\left(-\int_{a}^{x+a} \{a_1(t)/a_0(t)\}\, dt \right) = \exp\left(-\int_{0}^{a} \{a_1(t)/a_0(t)\}\, dt \right)'dir.$$

Fakat ρ (1.1.8)'in tekrarlı çözümü olduğundan sağ taraftaki terim ρ^2 'dir. Böylece $\mathrm{d}_2 = \rho$'dir.

Böylece (1.1.13) eşitliğinden

$$\Psi_2(x+a) = \mathrm{d}_1\Psi_1(x) + \rho\Psi_2(x) \qquad (1.1.14)$$

elde edilir.

Üzerinde düşünülecek iki durum vardır.Birincisi , $\mathrm{d}_1 = 0$ ise

$$\Psi_2(x+a) = \rho\Psi_2(x)$$

elde edilir.Bu ise (1.1.12) ile birlikte (1.1.9)'daki aynı durumu elde ettiğimizi, fakat $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ olduğunu gösterir. Böylece Teoremin ispatının iki kısmındaki gibi

$$\psi_k(x) = \Psi_k(x)$$

ve $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_2 = \mathrm{m}$ olduğu anlaşılır.

İkincisi ; eğer $\mathrm{d}_1 \neq 0$ ise

$$\mathrm{p}_1(x) = e^{-mx}\Psi_1(x)$$

ve

$$p_2(x) = e^{-mx}\Psi_2(x) - (d_1 / a\rho)xp_1(x)$$

tanımlanır. Böylece (1.1.12) ve (1.1.14)'den $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ a periyotludur.

Böylece

$$\Psi_1(x) = e^{mx} p_1(x)$$

ve

$$\Psi_2(x) = e^{mx} \{(d_1 / a\rho)xp_1(x) + p_2(x)\}'dir.$$

Bu ise

$$\Psi_1(x) = \Psi_1(x) \text{ ve } \psi_2(x) = (a\rho / d_1)\Psi_2(x)$$

olduğu teoremin (ii) kısmındaki durumunda yer alır. Böylece ispat tanımlanır.

Yukarıdaki ispat incelendiğinde Teoremin (i)kısmının (1.1.1)'in iki lineer bağımsız çözümü- nün ρ'nin (1.1.2)'deki aynı veya farklı değerlerini sağladığında meydana gelir. (ii) kısmı ise, yalnızca bir çözüm olduğunda meydana gelir.

Şimdi c_1 ve c_2'yi içeren sütun matrisi A^T transpoz matrisinin özvektörü olduğu durumunda (1.1.5)'den (1.1.2) elde edilir. Böylece teoremin (i) ve (ii) kısımları A^T bu durumda A'nın lineer bağımsız iki özvektörüne veya sadece bir özvektörüne göre oluşur. Özel olarak eğer rank $(A-\rho I)=0$ ise (1.1.8)'in tekrarlanan bir çözümü olduğunda teoremin (i) kısmı meydana gelir. Eğer rank $(A-\rho I)=1$ ise teoremin (ii) kısmı meydana gelir.

(1.1.8)'in veya (1.1.6)'nın ρ_1 ve ρ_2 çözümleri farklı olsun veya olmasın (1.1.1)'in karakteristik çarpanları olarak adlandırılır. (1.1.10)'da tanımlanan m_1 ve m_2 (1.1.1)'in karakteristik üsleri olarak adlandırılır.

1.2 Hill Denklemi:

P(x) ve Q(x) reel değerli ve aynı a periyoduna sahip fonksiyon olsun ayrıca p(x) sürekli ve her yerde 0 sıfırdan farklı , $p'(x)$ ve $Q(x)$'in parçalı sürekli olduğunu kabul edelim.

$$\{p(x)y'(x)\}' + Q(x)y(x) = 0 \qquad (1.2.1)$$

denklemi Hill denklemi olarak adlandırılır. (1.2.1) (1.1.1)'in özel bir durumdur ve G.W.Hill 1897 çalışmalarından sonra bu ismi almıştır. Burada reel katsayılı (1.1.1) denkleminin (1.2.1) tipindeki denkleme dönüşebileceği iki durumdan bahsedeceğiz.

Birincisi

$$A(x) = \int_0^x \{a_1(t)/a_0(t)\}\,dt$$

olmak üzere (1.1.1) denleminin $\{a_0(x)\}^{-1}\exp A(x)$ ile çarpılırsa denklem (1.2.1) formunu $p(x) = \exp A(x)$ ve

$$Q(x) = \{a_2(x)/a_0(x)\}\exp A(x)$$

olmak üzere

$$\int_0^a \{a_1(t)/a_0(t)\}\,dt = 0 \quad (1.2.2) \ ile\ alır.$$

Burada A(x) a periyodundadır. Buna bağlı olarakta p(x) ve Q(x) a periyodundadır.

İkincisi (1.2.2) denklemi için $a_1(x)/a_0(x)$ parçalı sürekli türeve sahip olduğunu kabul ederek (1.1.1)'de

$$y(x) = Z(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x \{a_1(t)/a_0(t)\}\,dt\right)$$

değişikliği yapılsın. Böylece denklem

$$z''(x) + \left(a_2(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)'\right) z(x) = 0$$

halini alır.

(1.2.1) denklemi bu çalışmada temel konumuz olacaktır. Şimdi teorem (1.1.2)'de verilen ve (1.2.1)'e uygulanan ψ_1(x) ve $\psi_2(x)$ çözümleri için daha detaylı inceleme yapacağız.

(1.2.1) için (1.1.8) kuadratik denlemi ;

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 1$$

olmak üzere

$$\rho^2 - \left\{\Phi_1(a) + \Phi_2'(a)\right\}\rho + 1 = 0 \text{ halini alır.}$$

(1.2.1)'in (1.1.3) sağlayan Φ_1(x) ve $\Phi_2(x)$ çözümleri p(x) ve Q(x) reel değerli olduğu için reeldir.

$$D=\Phi_1(a)+\Phi_2'(a) \qquad (1.2.5)$$

gibi tanımlanan D(1.2.1) diskirminantı olarak tanımlanır ve aşağıdaki 5 durumda incelenir.

A. D>2 (1.2.3)'de ρ_1 ve ρ_2 reel ve farklıdırlar. Ayrıca pozitiftir ancak 1'e eşit değildir. Böylece sıfırdan farklı reel m sayısı (1.1.10) dolayı (1.2.4) tarafından $e^{am}=\rho_1$, $e^{-am}=\rho_2$ gibi tanımlanır. Bu durumda teorem (1.1.2)'nin (i) kısmından $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ a periyotlu olmak üzere

$$\psi_1(x)=e^{mx}p_1(x),\ \psi_2(x)=e^{-mx}p_2(x),... \qquad (1.2.6)$$

olur.

B. D<-2 Bu durum ρ_1 ve ρ_2 negatif ve -1'den farklı olmak üzere A, durumu ile aynıdır. Böylece (1.2.6)'da m yerine $m+\pi i/a$ yazılmalıdır.

C. -2<D<2 (1.2.3)'deki ρ_1 ve ρ_2 reeli olmayan ve farklı olsunlar. (1.2.4) modüllerinin 1'e eşit olduğunu gösterir.Çünkü onlar kompleks eşleniktir.Böylece $0<a\alpha<\pi \ veya \ -\pi<a\alpha<0$ olacak şekilde bir reel α sayısı vardır. Öyle ki;

$$e^{ia\alpha}=\rho_1 \quad , \quad e^{-ia\alpha}=\rho_2\,'dir.$$

Böylece Teorem (1.1.2)'nin (i) kısmından $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ a periyotlu olmak üzere

$$\psi_1(x)=e^{ia\alpha}p_1(x)\ ,\ \psi_2(x)=e^{-ia\alpha}p_2(x)... \qquad (1.2.7)$$

D. D=2 Bu durumda (1.2.3) $\rho_1=\rho_2=1$ eşit çözümlere sahiptir. Teorem (1.1.2)'nin (i) kısmımı yoksa (ii) kısmımı uygulanacağına karar vermek için A'nın (1.1.7) verilen (Aij) matrisi olduğu $\xi 1.1$'in sonunda anlatıldığı gibi A-I'nın rankını belirlemeliyiz.

Burada iki alt durumu incelememiz gerekir.

1- $\Phi_2(a) = \Phi_1'(a) = 0;$

$$W(\Phi_1, \Phi_2)(a) = W(\Phi_1, \Phi_2)(0) \ = 1$$

olduğundan bu durumda

$$\Phi_1(a)\Phi_2'(a) = 1,$$

ayrıca

$$\text{D}=\Phi_1(a) + \Phi_2'(a) = 2'dir.$$

Böylece

$$\Phi_1(a) = \Phi_2'(a) = 1$$

Bu nedenle rank (A-I)=0 ve teorem (1.1.2) ’ deki (i) kısmı uygulanır. Karakteristik üsler m_1 ve m_2 'nin her ikiside sıfırdır. Teorem (1.1.2) ’ den $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ a periyoduna sahip olmak üzere

$$\psi_1(x) = p_1(x) \text{ ve } \psi_2(x) = p_2(x)$$

elde edilir. Bu durumda (1.2.1) bütün çözümleri a periyodundadır.

2- $\Phi_2(a)$ ve $\Phi_1'(a)$ her ikiside sıfır olmasın. Bu durumda $\text{rank}(\text{A - I}) \neq 0$'dır ve teorem (1.1.2) (ii) kısmı m=0 olduğundan uygulanabilir. Bu nedenle $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ a periyotlu olmak üzere

$$\psi_1(x) = p_1(x)\ ,\ \psi_2(x) = xp_1(x) + p_2(x) \text{ 'dir.}$$

E. D=-2 Bu durumda (1.2.3) ' ün $\rho_1 = \rho_2 = -1$ olmak üzere eşit çözümleri vardır. D'deki gibi benzer alt durumları inceleyelim.

1- $\Phi_2(a) = \Phi_1'(a) = 0$ D1' deki gibi rank (A+I)=0 ve $m_1 = m_2 = \pi i / a$ olmak üzere Teorem (1.1.2) ' nin (i) kısmı uygulanabilir. Böylece $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ a periyotlu olmak üzere;

$$\psi_1(x) = e^{\pi i x / a} p_1(x) \quad , \quad \psi_2(x) = e^{\pi i x / a} p_2(x) \ldots \tag{1.2.8}$$

dir.

Bu ise (1.2.8)'den

$$\psi_k(x+a) = -\psi_k(x) \text{ (k=1,2)}$$

sonucunu verir.

Böylece (1.2.1) bütün çözümleri $\psi(x+a) = -\psi(x)$ şartını sağlar.

2- $\Phi_2(a)$ ve $\Phi_1'(a)$ her ikiside sıfırdan farklı olduğu durum. Burada $rank(A+I) \neq 0$ ve $m = \pi i / a$ olduğu durumda Teorem (1.2.2) (ii) kısmı uygulanabilir.

Böylece

$$p_k(x) = e^{\pi i x / a} \; p_k(x) \text{ (k=1,2)}$$

olmak üzere

$$\psi_1(x) = p_1(x) \quad , \quad \psi_2(x) = x p_1(x) + p_2(x) \text{ 'dir.}$$

Bu halde $p_k(x+a) = -p_k(x)$ sağlar.

Bütün x ’ ler için a semi-periyotlu ve $f(x+a) = -f(x)$ özelliğine sahip bir f(x) fonksiyonuna semi-periyodik denir. Açıkca böyle bir fonksiyon $2a$ periyotludur. Yukarıdaki E1 olması durumunda (1.2.1) tüm çözümleri a yarı periyoduna sahiptir.

1.3 Sınırlılık ve Çözümlerin Periyodikliği

Teorem 1.3.1:

(i) *Eğer* $|\mathrm{D}| > 2$ *ise* (1.2.1)*’in tüm çözümleri* $(-\infty,\infty)$'da *sınırsızdır.*

(ii) *Eğer* $|\mathrm{D}| < 2$ *ise* (1.2.1)*’in tüm çözümleri* $(-\infty,\infty)$'da *sınırlıdırlar.*

İSPAT: (1.2.6) mevcuttur. Açıkca bu durumda (1.2.1)’in tüm çözümleri $(-\infty,\infty)$ ’da sınırlıdır. $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$'*in* herhangi bir aşikar olmayan kombinasyonu ya $x \to \infty$ ya da $x \to -\infty$ için veya her ikisi için sınırsızdır.

D<-2 durumu ise durum B2ye benzerdir. Bu ise (i) durumunu ispatlar.

Eğer $|\mathrm{D}| < 2$ ise, C durumunu elde ederiz ve (1.2.7) şartı geçerlidir. Bu yüzden,

$$|\psi_k(x)| = |p_k(x)| \quad (k=1,2)$$

Şimdi $p_1(x)$ ve $p_2(x)$, $(-\infty,\infty)$ aralığında periyodik olarak sınırlıdır. Bu nedenle $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$, $(-\infty,\infty)$ aralığında sınırlıdır. Bu ise (ii) kısmını ispatlar.

Tanım 1.3.1: (1.2.1) denklemine

(a) Eğer bütün aşikar olmayan çözümler $(-\infty,\infty)$ aralığında sınırsız ise *kararsızdır.*

(b) Eğer aşikar olmayan bütün çözümler $(-\infty,\infty)$'da sınırlı ise, *koşullu kararlıdır*.

(c) Eğer bütün çözümler $(-\infty,\infty)$'da sınırlı ise *kararlıdır* diyeceğiz.

Böylece kararsız olmayan bir denklem koşullu kararlı olabili veya kararlı olmayabilir.

Teorem 1.3.1'den; Eğer $|D| > 2$ ise (1.2.1) kararsız, ve Eğer $|D| < 2$ ise kararlıdır. Periyodik ve yarı-periyodik fonksiyonlar $(-\infty,\infty)$'da sınırlı olduğu için D1 ve E1 durumlarında (1.2.1) ' de kararlıdır. Eğer

$$|D| = 2 \text{ ve } \Phi_2(a) = \Phi_1'(a) = 0$$

ise ayrıca kararlıdır. Sonuç olarak eğer $|D| = 2$ ve $\Phi_2(a)$ ve $\Phi_1'(a)$ her ikisi sıfırdan farklı ise D2 ve E2 durumlarında (1.2.1)'de kararlı değildir.

D ve E durumunda , (1.2.1)'in periyodik ve yarı periyodik çözümlerin varlıkları hakkındaki teorem verilebilir.

Teorem 1.3.2:

(1.2.1) denkleminin a periyotlu aşikar olmayan çözümleri olması için gerek ve yeter şart D=2 olmasıdır ve yarı periyodik olması için $\Leftrightarrow$ D=-2 *olmasıdır.*

İSPAT: (1.2.1)'in tüm çözümleri a periyoduna sahiptir veya a yarı periyoduna sahiptir.

$$\Phi_2(a) = \Phi_1'(a) = 0'dır.$$

İlerideki sonuçlarda ka periyoduyla olan çözümleri göstereceğiz.

Teorem 1.3.3:

k pozitif tamsayı olsun. (1.2.1)'in ka periyotlu aşikar olmayan çözümleri olması için gerek ve yeter şart $D=2\cos(2l\pi/k)$ *olacak şekilde l tamsayısı olmasıdır.*

İSPAT:

Periyodik çözümler $(-\infty,\infty)$'da sınırlı olduğundan 1.2'nin A ve B durumları ortaya çıkmaz.

k=1 olduğunda ve $l=0$ seçildiğinde Teorem D durumu ile çakışır.

k=2 olduğunda C durumu meydana gelmez, çünkü (1.2.7) ' deki $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)'in$ $2a$ periyotlu lineer kombinasyonunun sıfırdan farklı olduğu kolayca görülebilir. Böylece D ve E durumunda $l=0$ *ve* $l=1$ seçiminde teorem ile çakışır.

k>2 alındığında ve çözümler a veya $2a$ periyotlu olmadığında C durumu meydana gelir. (1.2.7)'deki

$$\psi_1(x) \text{ ve } \psi_2(x)'in\ c_1\psi_1(x)+c_2\ \psi_2(x)$$

Kombinasyonu ka periyoduna sahip olması için gerek ve yeter şart

$$c_1\psi_1(x)(1-e^{ika\alpha}) + c_2\ \psi_2(x)(1-e^{-ika\alpha}) = 0$$

olmasıdır veya ancak ve ancak $e^{ika\alpha} = 1$ olmasıdır.

Böylece herhangi bir l tamsayısı için $ka\alpha = 2l\pi'dır$ ve

$$D = \rho_1+\rho_2 = 2\cos\ (a\alpha) = 2\cos\ (2l\pi/k)'dır.$$

SONUÇ 1.3.1:

(1.2.1)'in $2a$ periyotlu aşikar olmayan bir çözümünün ya periyodu a'dır ya da yarı-periyodu a'dır.

Şimdi açıklanan gerçekten yola çıkarak k=2 olduğunda D ve E durumu gerçekleşir.

SONUÇ 1.3.2:

k pozitif tamsayı ve *k*>2 olmak üzere, eğer (1.2.1)'in ka periyotlu aşikar olmayan çözümü varsa (a veya $2a$ periyotlu değil) tüm çözümleri ka periyotludur.

(1.3.1)'in geçerli olduğu durumlarda C durumu oluşur. Böylece (1.2.7)'de verilen

$$\psi_1(x) \text{ ve } \psi_2(x)$$

Sonuçta verildiği gibi a periyoduna sahiptir. Ayrıca (1.3.1), $\alpha = 2l\pi / ka$ sonucunu verdiği için (1.2.7) ' den görebiliriz ki, 1.3.2 sonucunun durumlarında da , (1.2.1)'in her $\Psi(x)$ çözümü c_1 ve c_2 sabit olmak üzere

$$\psi(x) = c_1 \exp(2l\pi ix / ka) p_1(x) + c_2 \exp(-2l\pi ix / ka) p_2(x)$$

biçimindedir.

(1.2.1)' de verilen denklem için, tüm çözümler a periyotlu ise a periyotlu çözümler bir aradadır diyebiliriz. Benzer olarak a yarı-periyotlu çözümler için (aslında ka periyotlu (*k*>2)) (1.2.1) için birlikte var olma problemi, bu tipteki çözümlerin birinin varlığı durumunda tüm çözümlerin aynı tipten olup olmadığını belirleme problemidir.

Sonuç (1.3.2) ' da gösterildiği gibi, *k*>2 gibi ka periyotlu çözümlerde var olma problemi hakkında söylenecek fazla bir şey yoktur. Bununla birlikte periyodu a olan veya yarı-periyotlu çözümler için var olma problemi daha ilginçtir.

Eğer (1.2.1)'de p(x) ve Q(x) x'in çift fonksiyonları ise yani

$$P(x)=P(-x) \text{ ve } Q(x)=Q(-x)$$

Aşağıdaki gibi çift ve tek periyodik çözüm olasılıkları vardır.

TEOREM 1.3.4:

$\rho(\mathrm{x})$ ve $\Phi(\mathrm{x})$ *çift olsun bu durumda (1.2.1) aşikar olmayan çözüme sahiptir. Öyle ki;*

$$(i)\ \textit{çift ve a periyotludur} \Leftrightarrow \Phi_1'\left(\frac{1}{2}a\right) = 0$$

$$(ii)\ \textit{tek ve a periyotludur} \Leftrightarrow \Phi_2\left(\frac{1}{2}a\right) = 0$$

$$(iii)\ \textit{çift ve a semi-periyotludur} \Leftrightarrow \Phi_1\left(\frac{1}{2}a\right) = 0$$

$$(i\vee)\ \textit{tek ve a semi-periyotludur} \Leftrightarrow \Phi_2'\left(\frac{1}{2}a\right) = 0$$

İSPAT:

p(x) ve Q(x) çift olduğu için (1.2.1) ’ in $\psi(\mathrm{x})$ çözümü olduğunda ψ(-x)'de (1.2.1)’in çözümüdür. Özel olarak $\Phi_1(x)$ ve $\Phi_1(-x)$ x=0 noktasında aynı başlangıç koşulu sağlarlar.

Böylece;

$$\Phi_1(x) = \Phi_1(-x) \text{ ’dir.}$$

O halde $\Phi_1(x)$ çifttir. Benzer olarak

$$\Phi_2(x) = -\Phi_2(-x)$$

Böylece $\Phi_2(x)$ tektir.

(1.2.1)’in $\Phi_1(x)$’in katı olan her çift çözümü ve $\Phi_2(x)$’in katı olan her çözümü bu şekildedir.

Şimdi $\Phi_1\left(\frac{1}{2}a\right)=\Phi_1\left(-\frac{1}{2}a\right)$'dır, ve böylece $\Phi_1(x)'in$ periyodunun a olması için gerek ve yeter şart

$$\Phi_1'\left(\frac{1}{2}a\right)=\Phi_1'\left(-\frac{1}{2}a\right) \text{ olmasıdır.}$$

Fakat $\Phi_1(x)$ tek olduğu için

$$\Phi_1'\left(\frac{1}{2}a\right)=-\Phi_1'\left(-\frac{1}{2}a\right)\text{’dır.}$$

Kısım (i) gerçekleşir.
Kısım (iii) için $\Phi_1(x)$ a yarı-periyoduna sahiptir $\Leftrightarrow$ (1.3.4)’e göre

$$\Phi_1\left(\frac{1}{2}a\right)=-\Phi_1\left(-\frac{1}{2}a\right)'dır.$$

Fakat (1.3.3)’den

$$\Phi_1\left(\frac{1}{2}a\right)=\Phi_1\left(-\frac{1}{2}a\right)$$

ve kısım (iii) gerçekleşir. (ii) ve (iv) kısmı $\Phi_2(x)$ kullanılarak benzer şekilde ispatlanır.

1.4 KOMPLEKS DEĞERLİ KATSAYILAR

Bu kesimde (1.2.1) tipindeki denklemi inceleyeceğiz. Ancak kompleks değerli katsayılarla olan bir yada iki durum vardır. D numarası hala (1.2.5) ile tanımlanır fakat şimdi kompleks alacağız ve bu nedenle 1.2'nin A-E durumlarına ek olarak bir durum daha vardır. F-D reel değildir. Burada ρ_1 ve ρ_2 reel değil ve farklıdır. Ayrıca ρ_1 ve ρ_2'nin modül uyumu yoktur, çünkü;

Q'nun reel olduğundan ve $\rho_1 = e^{i\Phi}$ ise (1.2.4)'den $\rho_2 = e^{-i\Phi}$ ve böylece

D=$\rho_1 + \rho_2 = 2\cos\Phi$ sayısı reeldir.

Böylece reel olmayan m $(\mathrm{re}m \neq 0)$ vardır. Öyleki $\mathrm{re}m \neq 0$

$$e^{am} = \rho_1 \quad , \quad e^{-am} = \rho_2$$

Böylece (1.2.6) göre (1.4.1)'den dolayı

$$\psi_1(x) = e^{mx} p_1(x) \quad , \quad \psi_2(x) = e^{-mx} p_2(x)$$

elde edilir. Buradan (1.3.1)'in (i) kısmında olduğu gibi (1.2.1)'in aşikar olmayan tüm çözüm- lerinin sınırsız olduğu sonucuna varılır.

Gerçek yada karmaşık değerli katsayılarla (1.1.2)'de tam olarak görülebilen 1.2.1 örneği

$$\psi(x) = \left[\exp\left\{ \int_0^x g(t)\cos t\,dt \right\} \right] \cos x$$

biçiminde tanımlanan $\psi(x)$ fonksiyonunu gözden geçirerek elde edilir.Burada $\mathrm{g}'(\mathrm{x})$ mevcut ve parçalı süreklidir. $\psi(x)'in$

$$\mathrm{y}''(\mathrm{x}) + \left\{ 1 + 3\mathrm{g}(\mathrm{x})\sin\mathrm{x} - \mathrm{g}'(\mathrm{x})\cos\mathrm{x} - \mathrm{g}^2(x)\cos^2 x \right\} y(x) = 0$$

diferansiyel denklemini sağladığı kolayca görülür.

Eğer g(x)'in 2π periyotlu ise, bu bir periyodik diferansiyel denklemdir ve (1.1.2)'de $a = 2\pi$ için sağladığı görülür ve

$$\rho = \exp\left\{ \int_a^{2\pi} g(t)\cos t dt \right\}$$

Burada eğer $g(x)$ $[a, 2\pi]$ aralığında cosx ile ortogonal ise ρ=1'dir.

1.5 DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

C(x) kompleks değerli, parçalı sürekli ve $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere 1.1'deki Floquet teorisi

$$y'(x)=C(x)y(x) \tag{1.5.1}$$

lineer sistemine genişletilebilir. Bu kısımda, küçük harflere n-bileşenli vektör fonksiyonlarını, büyük harflerle matrisleri belirteceğiz.

TEOREM 1.5.1:

ρ sıfırdan farklı sabit ve (1.5.1)'in aşikar olmayan bir çözümü $\psi(x)$ olsun, öyle ki;

$$\psi(x + a) = \rho\psi(x) \tag{1.5.2}$$

İSPAT:

İspatımız teorem 1.1.1'e benzerdir. $\Phi(x)$ (1.1.5)'in temel çözümler matrisi olsun.

$n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere

$$\Phi(0)=I \tag{1.5.3}$$

dır.

$\Phi(x+a)'da$ ayrıca (1.5.1)' in bir temel matrisi olduğu için, sıfırdan farklı bir A matrisi vardır, öyle ki;

$$\Phi(x+a)=\Phi(x)A \tag{1.5.4}$$

(1.5.1)'in her ψ(x) çözümü ψ(x)=Φ(x) c formundadır. C sabit vektördür ve eğer Ac=ρc ise (1.5.4) ve (1.5.2) sağlanır. Eğer $\det(A-\rho_1 I)=0$ ise, bu denklem sıfırdan farklı c vektörü tarafından sağlanır.

Bu; g için n dereceli bir polinomdur ve ρ'nin en az bir değeriyle çözülür; değerin sıfırdan farklı olması gerekir. Çünkü A tekil değildir. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

Bir sonraki teoremin ispatı A'nın Jardon'nın kanonik formuna bağlıdır.

$$\rho_1,..,\rho_n,..,\rho_{n+1},..,\rho_{N+M}$$

kök olsunlar ve $\rho_1,..\rho_n$ ise (1.5.5) ' in açık kökleri olarak adlandırılsın, p_{n+j} ise J'nin çarpanı olsun bu durumda A'nın kanonik formu

$$A=JBJ^{-1}\text{'dir.}$$

Burada J tekil olmayan, ve B ise diagonel bölümlü matristir.

$$B_0=dg(\rho_1,..,\rho_n)$$

olmak üzere

$$dg(B_0,B_1,...,B_M)\text{'dir.}$$

ve $B_i (1 \le j \le M)$, $r_i \times r_i$ tipinden matristir.

$$\begin{pmatrix} \rho_{N+j} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{N+j} & 1 & & \\ . & 0 & \ddots & & \\ . & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \rho_{N+j} \end{pmatrix}$$

TEOREM 1.5.2:

(1.5.2)*'in lineer bağımsız çözümleri* $\psi_1(x),...,\psi_n(x)$ *olsun. Öyle ki;*

$$\psi_k(x) = e^{m_k x} p_k(x) \qquad (1 \le k \le N)$$

$$\psi_{N+1}(x) = e^{m_{N+1}\infty} p_{N+1}(x)$$

$$\psi_{N+k_1}(x) = e^{m_{N+1}\infty}\left(\sum_{s=1}^{k_1-1} \frac{x(x-a)\left(x-(s-1)a\right)}{s!(a\rho_{N+1})^s} p_{N+k_1-s}(x) + p_{N+k_1}(x)\right) \quad (2 \le k_1 \le r_1)$$

$$\Psi_{N+r_1+1}(x) = e^{m_{N+2}\infty} p_{N+r_1+1}(x)$$

İSPAT:

Burada $m_1,..,m_{N+M}$ sabit ve $p_1(x),..,p_n(x)$ ise a periyotlu olsun.

$\Psi(x)$, (1.5.1)'in temel matrisi olsun ve $\Psi(x)=\Phi(x)J$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda (1.5.4) ve (1.5.6)'dan

$$\Psi(x+a) = \Psi(x)B' dir.$$

$\psi(\mathrm{x})$ sütununu $\psi_1(x)$,.., $\psi_{\mathrm{n}}(x)$ ile işaretlenmiştir. (1.5.7) ve (1.5.10)'dan

$$\psi_k(x+a)=p_k\psi_k(x) \qquad (1\le k\le N)$$

$\mathrm{m_k}$ ve $\rho_{\mathrm{k}}(\mathrm{x})$ ise

$$e^{am_k} = \rho_k \ ve\ p_k(x)=e^{m_k x}\psi_k(x)$$

Daha sonra 1.5.8 ile 1.5.10'dan

$$\psi_{\mathrm{N+1}}(x+a)=\rho_{N+1}\psi_{\mathrm{N+1}}(x) \qquad (1.5.11)$$

ve

$$\psi_{\mathrm{N+1}}(x+a)=\rho_{N+1}\psi_{\mathrm{N+k_1}}(x)+\psi_{\mathrm{N+k_1-1}}(x)$$

elde edilir.

Burada, $\mathrm{m_{N+1}}, p_{\mathrm{N+1}}(x)$ ve $\mathrm{p_{N+k_1}}(x)$ ise

$$e^{am_{N+1}}=\rho_{N+1} \qquad , p_{N+1}(x)=e^{-m_{N+1}x}\ \ \psi_{N+1}(x),$$

$$\mathrm{p_{N+k_1}}(x)=e^{-m_{N+1}x}\psi_{\mathrm{N+k_1}}(x)-\sum_{s=1}^{k_1-1}\frac{x(x-a)\big(x-(s-1)a\big)}{s!(a\rho_{\mathrm{N+1}})^s}p_{\mathrm{N+k_1}-s}(x)$$

(1.5.11)'den $\mathrm{k_1}'e$ indirgeyerek $\rho_{\mathrm{N+k_1}}(x)$'in a periyodunda olduğunu elde ederiz. $\mathrm{M_{n+1}}$ terimini içeren teorem ve $\mathrm{M_{n+2}},...,\mathrm{M_{N+M}}$ içeren teorem ispatı benzerdir.

(1.5.1)'in bütün çözümleri $(-\infty,\infty)$'da sınırlıdır $\Leftrightarrow$

$$\left|p_{\mathrm{k}}\right| \leq 1 \ (1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{N}) \text{ ve } \left|p_{\mathrm{N+j}}\right| < 1 \ (1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{M})$$

ve (1.5.1)’in a periyotlu çözüme sahiptir. ρ=1'in (1.5.5)’in köküdür.

Teorem (1.5.2)’nin bir sonucu matrisin üssü fikri kullanılarak tam olarak yazılabilir. (1.5.10)’daki B matrisi tekil olmadığı için , M matrisi vardır, öyle ki;

$$\mathrm{B}=\exp \ aM$$

Şimdi $P(\mathrm{x})=\Psi(\mathrm{x})\exp(\mathrm{-xM})$ tanımlayalım. O halde (1.5.10)’dan

$$P(x+a)=\Psi(x+a)\exp(-aM)\exp(-xM)=\Psi(x)BB^{-1}\exp(-xM)$$

Böylece $\rho(\mathrm{x})$ periyodiktir ve (1.5.12)’den $\Psi(\mathrm{x})\rho(\mathrm{x})\exp(\mathrm{xM})$'dir.

(1.5.1)’in her $\Psi_1(x)$ temel çözümler matrisi durumunda 1.5.4 ve 1.5.10 ilişkisi devam etmektir. Bu ise B_1 singüler olmayan matris olmak üzere

$$\Psi_1(x+a)=\Psi_1(x)B_1$$

biçiminde B_1 matrisi vardır.

(1.5.10)’dan (1.5.13)’e kadar devam eden tartışma $\psi_1(x)'e$ uygulanabilir ve $p_1(x)$ a periyotlu fonksiyon olmak üzere

$$\Psi_1(x)'in \ \Psi_1(x)=p_1(x)\exp xM$$

şeklinde yazılabileceği sonucuna varılır.

1.6 TÜM ÇÖZÜMLERİ PERİYODİK OLAN SİSTEMLER

Bir önceki bölümdeki tartışma 1.1'in ikinci dereceden denklemler için direk bir uzantısıdır. Bu bölümde denklemler için zıt bir bölüm olmadan sistemler içinde meydana gelen durum olarak bitirebiliriz.

TEOREM 1.6.1:

C(x) *a periyotlu* $f_1(t), f_2(t)$ $[t_1,t_2]$ *aralığında sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Öyle ki,*

$$\text{(i) } f_1'(t)C\{f_1(t)\} = f_2'(t)C\{f_2(t)\} \qquad [t_1,t_2] \tag{1.6.1}$$

$$\text{(ii) } f_1(t_1) = f_2(t_1) \tag{1.6.2}$$

$$\text{ve} \qquad f_1(t_2) = f_2(t_2) \tag{1.6.3}$$

Bu durumda (1.5.1)'in bütün çözümleri a periyotludur.

İSPAT:

(1.5.1)'in temel çözümleri matrisi $\Phi(x)$ (1.5.3)'ü sağlasın ve

$$y_i(t) = \Phi\{f_i(t)\} \qquad (i=1,2)$$

her $t \in [t_1,t_2]$ için şekilde tanımlansın. O halde

$$y_i'(t) = C\{f_i(t)\Phi f_i(t)\} f_i'(t) = E(t)y_i(t)'\,dir.$$

Burada $E(t) = f_i'(t)C\{f_i(t)\}$ şeklindedir.

i =1 ve i =2 için E(t) benzer şekildedir ve böylece $y_i(t)$ her ikisi içinde $y'(t)=E(t)y(t)$'nin $[t_1,t_2]$ aralığında bir çözümdür.

(1.6.4) ve (1.6.2)’den $y_1(t_1) = y_2(t_1)'dir$. Böylece $[t_1,t_2]$ aralığında

$$y_1(t) = y_2(t) \text{ 'dir.}$$

Ayrıca (1.6.4), (1.6.3) ve (1.5.4)’den

$$y_1(t_2) = \Phi\{f_2(t_2) + a\} = \Phi\{f_2(t_2)\} A = y_2(t_2)A \text{ 'dır.}$$

2.KARARLILIK VE KARARSIZLIK ARALIKLARI

2.1 GİRİŞ:

Paragraf 1.2 ve 1.3 de Q(x)=λ.S(x)-q(x) şeklinde forma girdiğinde incelenen problem belirli bir önem kazanır. Burada λ reel parametre, s(x) ve q(x) a periyotlu parçalı sürekli olmak üzere öyle s>0 sabiti vardırki s(x) ≥ s'dir.

Eğer P(x) yerine p(x) yazıldığında (1.2.1) denklemi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x)\text{-}q(x)\}.y(x) = 0 \qquad (2.1.1)$$

(1.1.3) Başlangıç şartlarını sağlayan (2.1.1)'in çözenlerinin λ bağımlılığını belirtmek için bu çözümleri $\Phi_1(x,\lambda)$ ve $\Phi_2(x,\lambda)$ olarak yazalım. Bu durumda (1.2.5)'e karşılık gelen diskriminant

$$D(\lambda) = \Phi_1(a,\lambda) + \Phi_2'(a,\lambda) \qquad (2.1.2)$$

şeklinde yazılır.

Yukarıda bakılan problemde λ parametresi gerçek yada karmaşık olabilir.

Söylediklerimizden bağımsız olarak her kaydolmuş x'ler için $\Phi_1(x,\lambda)$ *ve* $\Phi_2(x,\lambda)$ ve onların türevleri λ'nin analitik fonksiyonlarıdır. Farklı şekilde ifade edilmedikçe λ gerçek olarak kabul edilecektir.

D(λ) λ'ın sürekli fonksiyonu olduğundan $|D(\lambda)| < 2$ şartını sağlayan λ değerleri gerçek x ekseninde açık bir küme oluşturdular. Boş olmadığını göstereceğimiz bir küme ayrışık açık aralıkların sayılabilir toplamının birleşimi olarak ifade edilebilir. Böylece teorem (1.3.1)'in (ii) bölümü gereği λ'nın bu aralıkları (2.1.1) probleminin kararlıklı aralıklarıdır ve bu nedenle bu küme (2.1.1) kararlılık aralıkları olarak adlandırılır.

Benzer olarak $|D(\lambda)| > 2$ şartını sağlayan aralıklar (2.1.1)'in kararsızlık aralıklarıdır. Sonuç olarak kararlılık aralıklarının kapanmasıyla oluşan aralıklar $|D(\lambda)| \le 2$ şartını sağlamak koşuluyla (2.1.1) probleminin şartı kararlılık aralıklarıdır. Bu bölümde kararlılık ve kararsızlık aralıkları tanımlanmıştır.

2.2 PERİYODİK VE YARI-PERİYODİK ÖZDEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde (2.1.1) denklemi için iki özdeğer problemini ele alacağız. Bu problemler (2.1.1)'in temel terimleridir.Burada bahsedeceğimiz özellikler 2.3'teki D(λ)'nın incelenmesinde kullanılacaktır. (i) (2.1.1)'in periyodik özdeğer problemi derken, $[0,a]$ aralığında bakılan ve

$$y(a) = y(0) \ , \ y'(a) = y'(0) \tag{2.2.1}$$

periyodik sınır şartlarını sağlayan problem anlaşılır. Bu problem öz eşleniktir ve sayılabilir sayıda özdeğerlere sahiptir.

$$\lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \quad \text{ve} \quad \lambda_n \to \infty \ \ \text{n} \to \infty$$

$\lambda_n (n = 0,1,2,..)$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları $\psi_n(x)'le$ gösterirsek bunlarda aşağıdaki özelliğe sahiptirler.

$$\int_0^a \psi_m(x)\psi_n(x)s(x)dx = \begin{pmatrix} 1 & (m = n)\ ise \\ 0 & (m \neq n)\ ise \end{pmatrix}$$

(2.1.1) denklemine göre $\psi_n(x)$ a periyotlu sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olmak üzere (-∞,+∞) aralığı sürekli devam ettirilebilir. Bu nedenle bu fonksiyonlar bu özdeğerlere karşılık gelen (2.1.1) probleminin çözümleridir. Başka bir değişle bakılan problem iki kat özdeğere sahipse (2.1.1) tüm hallerinde aynı 1.2'nin D durumuna göre a periyoduna sahip olacaktır. Onuda kaydedelim ki D(λ)-2 fonksiyonunun iki kat λ_n özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$\Phi_2(a,\lambda_n) = \Phi_1'(a,\lambda_n) = 0$$

olmasıdır.

(ii) (2.1.1)'in yarı-periyodik özdeğer problemi derken $[0,a]$ aralığında bakılan ve

$$y(a) = -y(0) \quad , \quad y'(a) = -y'(0) \tag{2.2.2}$$

Yarı-periyodik sınır şartlarını sağlayan problem anlaşılır.Bu problemde öz eşleniktir ve sayılabilir sayıda özdeğerlere sahiptir. $\mu_n (n = 0,1,...)$ ile bu problemin özdeğerlerini ve $\xi_n(x)'le$ bu özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonları gösterelim.

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \ , \quad \mu_n \to \infty \ \text{n} \to \infty$$

Yukarıdakilere benzer olarak söylenebilirli bu özdeğerlerde iki katı olabilirler ve s(x) ağırlık fonksiyonuna göre bu öz fonksiyonlar $[0,a]$ ortanormal küme oluştururlar.

Onuda kaydedelim ki 1-2 'nin e durumuna göre D(λ)+2 fonksiyonunun sıfırlarının iki katlı μ_n özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$\Phi_2(a,\mu_n) = \Phi_1'(a,\mu_n) = 0 \quad \text{olmasıdır.} \qquad (2.2.3)$$

İlerleyen bölümlerde λ_n ve μ_n'lerin asimtotik durumuyla ilgili bazı sonuçlar verilecektir. μ_n sonuçları λ_n'e benzerdir ve böylece burada λ_n'*in* durumuyla ilgili sonuçları vereceğiz. F ile $[0,a]$ sürekli ve aynı aralıkta parçalı sürekli türeve sahip kompleks değerli f(x) fonksiyonlar kümesini işaretleyelim. Bu durumda

$$f(x), g(x) \in F$$

olan fonksiyonlar için J(f,g) Dirichlet integrali tanımlanmıştır ve

$$J(f,g) = \int_0^a \left\{ p(x)f'(x)\overline{g'(x)} + q(x)f(x)\overline{g(x)} \right\} dx \qquad (2.2.4)$$

şeklinde gösterelim.

Eğer g″(x) varsa ve $[0,a]$'*da* parçalı sürekli ise kısmi integrasyon formülü gereği;

$$J(f,g) = -\int_0^a f(x)[\{p(x)\overline{g'(x)}\}' - q(x)\overline{g(x)}]dx + [p(x)f(x)\overline{g'(x)}]_{\alpha=a}^{\alpha=0} \qquad (2.2.5)$$

Eğer f(x) ve g(x) (2.2.1) sınır şartlarını sağlıyorsa bu formüldeki tümleşik terimler iptal edilir.

Özel olarak g(x)=$\mu_n(x)$ olduğunda (2.2.5)'ten

$$J(f_1,\psi_n) = \lambda_n f_n \quad \text{bulunur.} \qquad (2.2.6)$$

Burada f_n Fourier katsayıdır.

$$\int_0^a f(x).\psi_n(x).s(x).dx$$

özel olarak (2.2.6)

$$J(\psi_m,\psi_n)=\lambda_n (m=n) = 0 \ (m \neq n) \tag{2.2.7}$$

TEOREM (2.2.1):

$f(x) \in F$ *için (2.1.1) sınır şartlarını sağladığını varsayalım. Bu durumda* f_n *fourier katsayıları için*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |f_n|^2 \leq J(f,f) \tag{2.2.8}$$

İSPAT:

Öncelikle $q(x) \geq 0$ olduğunu farzedelim. Bu durumda (2.2.4) gereği $g(x) \in F$ için

$J(g,g) \geq 0$ Özel olarak

$$J\left(f - \sum_{n=0}^{N} f_n\psi_n ,\ f - \sum_{n=0}^{N} f_n\psi_n \right) \geq 0,$$

burada N herhangi pozitif tamsayıdır.

J'nin dağılma özelliği gereği

$$J(f,f) - \sum_{n=0}^{N} f_n J(\psi_n, f) - \sum_{n=0}^{N} \overline{f}_n J(f,\psi_n) + \sum_{n=0}^{N} \lambda_n f_n \overline{f}_n \geq 0$$

$$J(\psi_n, f) = \overline{J(f, \psi_n)}$$

olduğundan ve (2.2.6) yı kullanarak

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda_n |f_n|^2 \le J(f, f)$$

elde ederiz.

Sonuçta $N \to \infty$ şartına geçilirse teoremin ispatı tamamlanmış olur.,

(2.2.8)'i $q(x) \ge 0$ farzetmeden kanıtlamak için q_0'ın $[0, a]$'dan

$$q_0 = sabit$$

olmak şartıyla $q(x)+q_0 s(x) \ge 0$ olduğunu farzedelim Bu durumda (2.2.1)'i

$$\{p(x).y'(x)\}' + \{\Lambda s(x) - Q(x)\} y(x) = 0,$$

burada $\Lambda = \lambda + q_0, Q(x) = q(x) + q_0 s(x)$'dir.

$Q(x) \ge 0$ olduğundan ispatın ilk bölümüne göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n + q_0) |f_n|^2 \le \int_0^a \left[p(x)|f'(x)|^2 + \{q(x) + q_0 s(x)\}^0 |f(x)|^2 \right]' dir.$$

Her tarafta q_0 ile ilgili olan terimler için

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2 = \int_0^a |f(x)|^2 s(x)dx \qquad (2.2.9)$$

Parseval formülü doğru olduğundan (2.2.8) genel durumu elde edilir. $\lambda_n \geq \lambda_0$ olduğunda (2.2.8) ve (2.2.9)

$$\mathrm{J}(\mathrm{f}\,,\,\mathrm{f}) \geq \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2 = \lambda_0 \int_0^a |\mathrm{f}(\mathrm{x})|^2\, s(x).dx$$

bağıntısı verir.

f(x), λ_0'*a* karşılık gelen özfonksiyon olduğunda $\lambda_n > \lambda_0$'*daki* n gibi tüm sayılar için $\mathrm{f}_n = 0$ olduğunda eşitlik geçerlidir.

Böylece

$$\lambda_0 = \min\left(J(f\,,f) \int_0^a |f(x)|^2\, s(x).dx \right) \qquad (2.2.10)$$

Burada λ_0'*a* karşılı gelen f(x)'in bir özfonksiyon olduğunda minimum kullanılır. Sonuçta $[0,a]$'da iki farklı periyodik özdeğer problemindeki özdeğerleri karşılaştırıyoruz. Bu ve sonrasındaki teoremdede p - p ifadesini hemen hemen her yerde kullanırız. Genellikle p-p terimini parçalı sürekli fonksiyonlarla alakalı ifadelerde kullanıyoruz ve o zaman “izole noktalar dışında” kısaca bir ifade olur.

TEOREM (2.2.2):

$(\lambda_{1,\mathrm{n}})$ $(\mathrm{n} \geq 0)$ *ile* $[0,a]$'da *periyodik özdeğerlerini işaretleyelim.* p(x),q(x) ve s(x) ile $\mathrm{p}_1(\mathrm{x}),\mathrm{q}_1(\mathrm{x})$ ve $\mathrm{s}_1(\mathrm{x})$ *yer değiştirelim öyleki*

$$\mathrm{p}_1(\mathrm{x}) \geq \mathrm{p}(\mathrm{x}) \quad \mathrm{g}_1(\mathrm{x}) \geq g(\mathrm{x}) \quad \mathrm{s}_1(\mathrm{x}) \geq \mathrm{s}(\mathrm{x}) \qquad (2.2.11)$$

Bu durumda (i) Eğer $\mathrm{s}_1(\mathrm{x})=\mathrm{s}(\mathrm{x})$ p.p *ise tüm n'ler için* $\lambda_{1,\mathrm{n}} \geq \lambda_{\mathrm{n}}$ *(ii) yoksa* $\lambda_{\mathrm{n}} \geq 0$ *olduğu zaman* $\lambda_{1,\mathrm{n}} \geq \lambda_{\mathrm{n}}$ olur.

İSPAT:

$\psi_{1,\mathrm{n}}(\mathrm{x})$'in $\lambda_{1,\mathrm{n}}$'ye kabul eden öz fonksiyonun ve $\mathrm{J}_1(f,g)$ 'in p(x), q(x) 'in yerine $\mathrm{p}_1(\mathrm{x})$ ve $\mathrm{q}_1(\mathrm{x})$ yazıldığında (2.2.4) Dirichlet integrali gösterdiğini farzedelim.
(2.2.11) gereği

$$\mathrm{J}_1(f,f) \geq \mathrm{J}(f,f) \qquad (2.2.12)$$

olduğunu alırız.

n=0 için teoremi kanıtlamak için f(x)=$\psi_{1,0}(x)$ olduğu durumu ele alalım:

$$\lambda_{1,0} = \mathrm{J}_1(\psi_{1,0},\psi_{1,0}) \geq \mathrm{J}(\psi_{1,0},\psi_{1,0}) \geq \lambda_0 \int_0^a \psi^2{}_{1,0}(x).s(x).d(x) \qquad (2.2.13)$$

(2.2.11) gereği

$$\int_0^a \psi^2{}_{1,0}(x).s(x).d(x) \;\geq \int_0^a \psi^2{}_{1,0}(x).s_1(x).d(x) = 1$$

bu ise teoremin (i) eşitlik durumunu ve (ii) eşitsizlik durumunun geçerli olduğunu gösterir.Bu nedenle (2.2.13) ilk durumda $\lambda_{1,0} \geq \lambda_0$ olduğunu verir ve ancak

2. durumda

$\lambda_0 \geq 0$ olduğunda $\lambda_{1,0} \geq \lambda_0$ olduğu görülür.

Dolayısıyla teorem n=0 için doğrudur.

n=1 için f(x)=$c_0\psi_{1,0}(x) + c_1\psi_{1,1}(x)$ fonksiyonuna bakalım öyleki c_0 ve c_1 reel sabitler olmak üzere

$$c_0^2 + c_1^2 = 1 \text{ ve } c_0 A_0 + c_1 A_1 = 0$$

Burada

$$A_r = \int_0^a \psi_{1,r}(x)\psi_0(x).s(x)dx \qquad (r=0,1)$$

Böyle c_0 ve c_1 şartlarda her zaman bulunabilir. İlk durumda

$$\int_0^a f^2(x)s_1(x).dx = 1 \; ve$$

ikinci durumda

$$f_0 = \int_0^a f(x).\psi_0(x).s(x).dx = 0 \quad \text{alalım.}$$

J_1'e (2.2.7) uygulanırsa;

$$J_1(f,f) = \lambda_{1,0}c_0^2 + \lambda_{1,1}c_1^2 \leq \lambda_{1,1}(c_0^2 + c_1^2) = \lambda_{1,1}$$

Ayrıca (2.2.8)'e göre ve $f_0 = 0$ gerçeğiyle, Parseval (2.2.9) formülünü kullanarak

$$J(f_1 f) \geq \sum_1^{\infty} \lambda_n f_n^2 \geq \lambda_1 \sum_1^{\infty} f_n^2 = \lambda_1 \int_0^a f^2(x).s(x).dx$$

elde edilir.Böylece (2.2.12)'e göre

$$\lambda_{1,1} \geq \lambda_1 \int_0^a f^2(x).s(x).dx$$

elde edilir.

Sonuçta n=1 için teoremin doğruluğu ispat edilmiş olur. Genel n durumu için bu tartışma ispatlanabilir.

$$f(x)=c_0\psi_{1,0}(x)+.......+c_n\psi_{1,n}(x)$$

Burada c_r reel sabitlerdir, öyleki

$$c_0^2+.........+c_n^2=1 \qquad (2.2.14)$$

ve

$$f_r=0 \quad (0 \leq r \leq n\text{-}1)$$

Bu durumda n+1 tane $C_0,........,C_n$ sayılarının bulunması için n homojen lineer cebirsel denklemi ve normalleşmiş (2.2.14) şartı elde edilir.

Eğer (2.2.12) de $\lambda_{1,n} \succ \lambda_n$ eşitsizliği kesin ise bu durumda $p_1(x)=p(x)$ ve $q_1(x)=q(x)$ $p.p$ olmadıkça sağlanır.

(2.2.1)'in tam olarak çözülebildiği ve λ_n ve μ_n $'nin$ belirlenebildiği iki basit örnekle bu bölümü bitereceğiz.

1- p(x)=q(x)=1 , q(x)=0 bu iyi bilinen bir örnektir.

Bu durumda $\lambda_0=0$ ve $m \geq 0$ için

$$\lambda_{2m+1} = \lambda_{2m+2} = 4(m+1)^2\pi^2 / a^2$$

$$\mu_{2m} = \mu_{2m+1} = (2m+1)^2\pi^2 / a^2$$

2- p(x)=1 , q(x)=0

$$s(x) = 1(-\frac{1}{2a} < x \le 0) = 9(0 < x \le \frac{1}{2a})$$

öncelikle bu periyodik problemin λ=0 özdeğerine karşı (normalleştirilmemiş) $\psi_0(x) = 1$ öz fonksiyonunun olduğu açıktır. Şimdi $\lambda \neq 0$ durumuna bakılırsa denklemin genel çözümü aşağıdaki forma sahiptir.

$$A.Cos\ x\sqrt{\lambda} + B.\sin\ x\sqrt{\lambda} \quad (-\frac{1}{2a} \le x \le 0)$$

$$C.Cos 3x\sqrt{\lambda} + D.\sin 3x\sqrt{\lambda} \quad (0 \le x \le \frac{1}{2a})$$

Burada A,B,C,D sabitlerdir. Çözümün sürekliliği ve x=0'daki türevi A=C, B=3D verir. $\left[-1/2a, 1/2a\right]$ aralığına ilişkin periyodik sınır şartları

$$C\left\{Cos(\frac{3}{2a}\sqrt{\lambda}) - Cos(\frac{1}{2a}\sqrt{\lambda})\right\} + D\left\{\sin(\frac{3}{2a}\sqrt{\lambda}) + 3\sin(\frac{1}{2a}\sqrt{\lambda})\right\} = 0$$

$$C\left\{3\sin(\frac{3}{2a}\sqrt{\lambda}) + Sin(\frac{1}{2a}\sqrt{\lambda})\right\} - 3D\left\{Cos(\frac{3}{2a}\sqrt{\lambda}) - Cos(\frac{1}{2a}\sqrt{\lambda})\right\} = 0$$

olduğunda problem çözümlenir.

Bu denklemlerde her ikiside sıfır olmayan C ve D için

$$8Cos^2 a\sqrt{\lambda} - Cos a\sqrt{\lambda} - 7 = 0$$

(2.2.15) veya Cosa$\sqrt{\lambda}=-7/8$ and Cosa$\sqrt{\lambda}=1$ elde ederiz.Sonraki durumda C ve D'ler keyfidir ve bu nedenle karşılık gelen özdeğerler iki katlıdır. Önceki durumda ise özdeğerler basittir. Bu nedenle λ_0=0 vardır ve m $\geq$ 0 için

$$\lambda_{4m+1}=4(m\pi+\frac{1}{2\alpha})^2/a^2 \quad \lambda_{4m+2}=4\left\{(m+1)\pi-\frac{1}{2a}\right\}^2/a^2$$

$$\lambda_{4\mathrm{m}+3}=\lambda_{4\mathrm{m}+4}=4(m+1)^2\pi^2/a^2$$

Burada

$$\alpha=\mathrm{Cos}^{-1}(7/8) \text{ ve } 0<\alpha<\frac{1}{2\pi}$$

Yarı-periyodik problem için (2.2.15)'e denk gelen özdeğerler için denklem

$$8Cos^2a\sqrt{\lambda}-Cosa\sqrt{\lambda}-1=0veya\ Cosa\sqrt{\lambda}=(1\pm\sqrt{33})/16$$

Bu durumda özdeğerlerin tümü basittir ve

$$\mu_{4m}=4(m\pi+1/2\beta)^2/a^2 \quad \mu_{4m+1}=4(m\pi+1/2\gamma)^2/a^2$$

$$\mu_{4m+2}=4\{(m+1)\pi-1/2\gamma\}^2/a^2 \quad \mu_{4m+3}=4\{(m+1)\pi-1/2\beta\}^2/a^2$$

Burada

$$\beta=\mathrm{Cos}^{-1}\left\{(1+\sqrt{33})/16\right\} \quad \gamma=\mathrm{Cos}^{-1}\left\{(1-\sqrt{33})/16\right\} \text{ ve } 0<\beta<\gamma<\pi\text{'dır.}$$

2.3 D(λ) FONKSİYONU

D(λ) fonksiyonunu incelemek için 2.2'nin (i) ve (ii) özdeğer probleminde λ_n ve μ_n özdeğerlerinin varlığını kullanacağız.

TEOREM 2.3.1:

i)λ_n ve μ_n sayıları $\lambda_0 < \mu_0 \le \mu_1 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \mu_2 \le \mu_3 < ......$ sırasını oluşturur.

ii)$[\lambda_{2m}, \mu_{2m}]$ aralığında D(λ) 2'den -2'ye azalır.

iii)$[\lambda_{2m+1}, \mu_{2m+1}]$ aralığında D(λ) -2'den 2'ye artar.

iν)(-∞,λ_0) ve (λ_{2m+1},λ_{2m+2}) aralığında D(λ)>2

ν)(μ_{2m},μ_{2m+1}) aralığında D(λ)<2

ispatı birkaç durumda vereceğiz.

a) Öyle bir Λ sayısı vardır ki $\lambda \le \Lambda$ için D(λ)>2 s(x) ≥ s>0 olduğundan, Λ sabitini seçebiliriz. Öyleki

$$q(x)-\Lambda s(x)>0 \tag{2.3.2}$$

Varsayalım ki y(x) (2.2.1)'in aşikar olmayan herhangi bir çözümü olsun öyleki

öyleki $y(0) \ge 0$ ve $y'(0) \ge 0$

Bu durumda (0,δ) intervaline bakalım, öyleki y(x)>0'dır. y(x)>0 olacak şekilde (0,X) intervaline bakalım.Bu intervalde tüm $\lambda \le \Lambda$ için

$$\{p(x)y'(x)\}' = \{q(x) - \lambda s(x)\}\, y(x) > 0\,'dır.$$

Bu nedenle $p(x).y'(x)$, (0,x)'de artar. Buda (0,x) ' de $y'(x)$>0'ı verir ve böylece y(x),(0,x)'de artandır.Buradan y(x) (0,∞) arlığındaki x=X'de 0’a sahip olmadığı kanaatine varırız ve bu nedenle $p(x)y'(x)$ ve y(x) (0,∞)'da artandır.

Özel olarak

$$\Phi_1(a,\lambda) > \Phi_1(0,\lambda) = 1$$

$$\Phi_2'(a,\lambda) > \Phi_2'(0,\lambda) = 1$$

Böylece $\lambda \leq \wedge$ için D(x)>2

b) $|\mathrm{D}(\lambda)| < 2$ sağlayan λ değerleri için $\mathrm{D}'(\lambda) \neq 0$ ' dır. (2.2.11)'de y(x)=$\Phi_1(x,\lambda)$ alarak λ parametresine göre türev alalım:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{p(x)})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\partial\Phi_1(x,\lambda)}{\partial x}\right)+\{\lambda s(x)-q(x)\}\left(\frac{\partial\Phi_1(x,\lambda)}{\partial x}\right)=-s(x)\Phi_1(x,\lambda) \qquad (2.3.3)$$

Ayrıca $\Phi_1(x,\lambda)$ için (1.1.3) başlangıç şartlarından

$$\left(\frac{\partial\Phi_1(0,x)}{\partial x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\partial\Phi_1(0,x)}{\partial x}\right)=0 \qquad (2.3.4)$$

elde ederiz.

(2.3.3) ve (2.3.4)'e sabitlerin değişim formülünü uygularsak

$$\partial\Phi_1(x,\lambda)/\partial x = \{(p/0)\}^{-1} =$$

$$\int_0^\infty \{\Phi_1(x,\lambda)\Phi_2(t,\lambda)-\Phi_2(x,\lambda)\Phi_1(t,\lambda)\}\times s(t)\Phi_1(t,\lambda)dt$$

Burada p(x).w(Φ_1,Φ_2)(x) sabittir. (2.3.5) p(0) değerine eşit olduğu dikkate alınmıştır.

Benzer olarak

$$\partial\Phi_2(x,\lambda)/\partial x = \{(p/0)\}^{-1}$$

$$\int_0^\infty \{\Phi_1(x,\lambda)\Phi_2(t,\lambda)-\Phi_2(x,\lambda)\Phi_1(t,\lambda)\}\, s(t)\Phi_2(t,\lambda)dt$$

(2.3.6)'dan x'e göre türev alınırsa

$$\mathrm{d}\Phi_2'(x,\lambda)/dx=\{(p/0)\}^{-1}$$

$$\int_0^x \left\{\Phi_1'(x,\lambda)\Phi_2(t,\lambda)-\Phi_2'(x,\lambda)\Phi_1(t,\lambda)\right\} s(t)\Phi_2(t,\lambda)dt$$

elde ederiz. Bu (2.3.5) ile

$$\mathrm{D}'(\lambda)=\{(p/0)\}^{-1}$$

$$\int_0^a \left\{\Phi_1'\Phi_2^2(t,\lambda)+(\Phi_1-\Phi_2')\Phi_1(t,\lambda)\Phi_2(t,\lambda)-\Phi_2\Phi_1^{\,2}(t,\lambda)\right\} s(t)dt \qquad (2.3.7)$$

Bu formüllerin çıkarılışında

$$\Phi_1\Phi_2'-\Phi_2\Phi_1'=W(\Phi_1,\Phi_2)(a)=p(0)/p(a)=1 \qquad (2.3.8)$$

dikkate alınmıştır. (2.3.7)'in aşağıdaki denk formunda yazabilriz.

$$4\Phi_2 p(0)D'(x)=-\int_0^a \left\{2\Phi_2\Phi_1(t,\lambda)+(\Phi_1-\Phi_2')\Phi_2(t,\lambda)\right\}^2 s(t)dt$$

$$-\{4\text{-}\mathrm{D}^2(\lambda)\}\int_0^a \Phi_2^{\,2}(t,\lambda)s(t)dt \qquad (2.3.9)$$

Burada $\mathrm{D}^2(\lambda)=4+(\Phi_1-\Phi_2')^2+4\Phi_2\Phi_1'$ eşitsizliği dikkate alınmıştır.

(c) D(λ)-2'nin λii sıfırında D$'(\lambda_{\mathrm{n}})$=0 ve

$$\Phi_2(a,\lambda_{\mathrm{n}})=\Phi_1'(a,\lambda_{\mathrm{n}})=0$$

Üstelik $D'(\lambda_n)$=0 ise $D''(\lambda_n)$<0

(2.3.10) sağlarsa 1.2'nin D1'deki durumu gibi

$$\Phi_1(a,\lambda_n) = \Phi_2'(a,\lambda_n) = 1$$

O zaman (2.3.7)'den $D'(\lambda_n)$=0 aksine $D'(\lambda_n)$=0 ise (2.3.9)'un sağındaki ilk integrant sıfırdır.

Φ_1 ve Φ_2 için bağımsız olan $\Phi_2(a,\lambda_n) = 0$ ve $\Phi_1(a,\lambda_n) = \Phi_2'(a,\lambda_n)$ o zaman (2.3.7)'den $Q_1'(a,\lambda_n) = 0$

$D''(\lambda_n)$ hakkındaki sonucu ispat etmek için (2.3.7)'i λ'ye göre türev alalım,

$D''(\lambda)$'yı Φ_i ve Φ_i '*nin* λ türevleri cinsinden ifade etmek için .

O zaman λ=λ_n koyarız ve 2.3.5 ve 2.3.6 ' yı kullanarak λ türevlerini yer değiştiriniz. 2.3.10 ve 2.3.11'den

$$D''(\lambda_n) = 2\{p(a)\}^{-2} \quad \text{elde edilir.}$$

Böylece Schwarz eşitsizliğinden $D''(\lambda_n) \le 0$ ve üstelik eşitsizliğin durumu kural dışıdır. Çünkü $\Phi_1(t,\lambda_n)$ ve $\Phi_2(t,\lambda_n)$ bağımsızdır. $D(\lambda)$+2' nin M_n sıfırları için (c)'ye karşılık olan bir sonuç vardır, tek farkla $D'(M_n)$=0 ise

$$D''(M_n)>0$$

İki mertebeden yüksek $D(\lambda) \pm 2$'*nin* sıfırı olmadığını ispat ettik. Hemde

$D(\lambda)$-2'nin bir λ_n

sıfırı sadece $D(\lambda)$ λ_n'de bir maksimum farz edilirse 2.mertebedendir.

D(λ)+2'nin bir M_n sıfırı sadece D(λ) M_n'de bir minimum farz edilirse 2.mertebedendir.

(d) Şimdi λ -∞'dan ∞'a artarken D(λ)'nın davranışlarını incelemek için (a)-(c) sonuçlarını kullanacağız. λ büyük ve negatif iken (a)'dan D(λ) > 2 Böylece λ-∞' dan artarken , λ

D(λ)-2'nin ilk λ_0 'a ulaşana kadar D(λ) 2'den daha büyük kalır.

D(λ), λ_0 'da bir maksimuma sahip olmadığı farz edildiğinden , λ_0 D(λ)-2'nin basit sıfırdır ve buradan λ_0 '$\imath n$ sağında göre D(λ)<2 olduğu hemen anlaşılır.

3.PROBLEME GİRİŞ

Bu bölümde 1. ve 2. bölümdeki tanım, teorem ve yöntemlerden faydalanarak aşağıdaki diferansiyel denklemin spektral yapısı incelenmektedir.

$$l_\alpha[y] \equiv -y'' + (q(x)) + \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(x-n)y = \lambda^2 y, \ \mathrm{x} \in \mathrm{R} \tag{3.1}$$

Burada *q(x)* reel, periyodik *(q(x+1)=q(x)),* parçalı sürekli bir fonksiyon; $\sigma(x)$ Dirac delta fonksiyonu, $\alpha \neq 0$ reel sayı ve λ spektral parametredir.

Bu tür denklemler matematiksel fiziğin bir çok problemlerinde ortaya çıkmıştır. Bu denklemlerin matematiksel olarak incelenmesi Geçen Asrın 60. yıllarında [8,9] makalelerinde başlanmıştır.Bu konu son 30 yılda daha çok incelenmiştir. Berezin-Minlos-Faddeyev teorisi denilen bu teori [10] monografisinde daha da derinden incelenmiştir.

Diğer yöntem ise sınırlı salınımlı fonksiyonların türevi olan potansiyeller için [11]-[13]'de verilmiştir.[14,15] 'da ise daha yüksek mertebeli öz eşlenik formdaki diferansiyel denklemler için bu yöntem kullanılarak incelenen operatörün tanım kümesi elde edilmiştir.

Öncelikle L_α ile l_α *[y]* diferansiyel denkleminin oluşturduğu operatörü gösterelim. İkinci yöntemi kullanarak (3.1) denkleminin x değişkenine göre her iki tarafının *[n-ε ,n+ε]* aralığında integrali alınır ve $\varepsilon \to 0$ iken limite geçilirse l_α *[y]* diferansiyel ifadesinin oluşturduğu L_α operatörüne denk olan aşağıdaki operatör elde edilir.

$$L_0 : y(x) \to -y''(x) + q(x)y(x) \ ,$$

Öyle ki, $y(x) \in H^{2,2}(R) \text{ n} / n \in Z) \ \cap H^{2,1}(R)$ ve $n \in Z$ için

$$y(n) = y(n+0) = y(n-0),$$

$$y'(n+0) - y'(n-0) = \alpha\, y(n)$$

Burada $H^{m,n}$ uygun Sobelev uzaylarıdır.[16]

Bölüm 4 alt bölümden oluşur. 1. altbölümden Floquet teorisinden yaralanmak (3.1) denkleminin kararlık ve karasızlık aralıkları belirlenerek ve bunları baz olarak L_α operatörünün spektrumu incelenecektir.

3.1 FLOQUET TEOREMİ

Bu kısımda spektrum aralıklarının belirlenmesinde önemli bir role sahip olan Floquet teorisini kullanacağız. Öncelikle x yerine x+1 alındığında (3.1) denklemi değişmediğinden, yani $\psi(x,\lambda)$, (3.1) denkleminin çözümü olduğunda, $\psi(x+1,\lambda)$ 'da bu denklemin çözümü olacaktır. Ancak , genel olarak bu çözümler birbirine eşit olmayabilir, yani öyle bir $\rho = \rho(x)$ sayısı bulunabilirki;

$$\psi(x+1,\lambda) = \rho\psi(x,\lambda), \quad \psi'(x+1,\lambda) - \alpha\psi(x+1,\lambda) = \rho\psi'(x,\lambda) \qquad (3.2)$$

yukarıdaki bölümlerde söylediğimiz gibi, bu sonuçlar ve ispatları Floquet teorisi olarak adlandırılır.

TEOREM 3.1.1:

Öyle bir $\rho = \rho$ (x) *sabiti ve (3.1)'in aşikar olmayan* $\psi(x)$ *çözümü varki, (3.2) özelliği sağlanır.*

İSPAT:

$\theta(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$ denkleminin

$$\theta(0,\lambda) = \psi'(0,\lambda) = 1, \theta'(0,\lambda) = \psi(0,\lambda) = 0$$

başlangıç şartlarını sağlayan iki lineer bağımsız çözümleri olsun Bu durumda genel çözüm c_1 ve c_2 sabit sayılar olmak üzere

$$\psi(x,\lambda) = c_1\theta(x.\lambda) + c_2\psi(x,\lambda) \tag{3.3}$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi (3.3) ifadesi (3.2) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$c_1\theta(x+1,\lambda) + c_2\psi(x+1,\lambda) = \rho(c_1\theta(x,\lambda) + c_2\psi(x,\lambda))$$
$$c_1\theta'(x+1,\lambda) + c_2\psi'(x+1,\lambda) - 2\alpha\lambda(c_1\theta(x+1,\lambda) + c_2\psi(x+1,\lambda))$$
$$= \rho c_1\theta'(x,\lambda) + c_2\psi'(x,\lambda)$$

Bu denklem sisteminin aşikar olmayan çözümünün olması için katsayı matrisinin determinantının sıfır olması gerektiğinden alınmış eşitlikte bazı düzenlemeler yapılırsa ve

$$W[\theta,\psi] = \theta(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \theta'(x,\lambda)\psi(x,\lambda) = 1 \tag{3.4}$$

eşitliği kullanılarak

$$\rho^2 - \left[\theta(1,\lambda) + \psi'(1,\lambda) - \alpha\psi(1,\lambda)\right]\rho + 1 = 0 \tag{3.5}$$

biçiminde ρ 'ya bağlı ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklem her zaman ρ köküne sahiptir ve $\rho \neq 0$ 'dır. Bu ise (3.1) denkleminin (3.2) koşulunu sağlayan, aşikar olmayan çözüme sahip olduğunu gösterir.

Şimdi λ parametreli F(λ) fonksiyonu

$$\mathrm{F}(\lambda) = \theta(1,\lambda) + \psi'(1,\lambda) - \alpha\psi(1,\lambda) \tag{3.6}$$

biçiminde tanımlanırsa (3.5) denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\rho^2 - \mathrm{F}(\lambda)\rho + 1 = 0 \tag{3.7}$$

Bu denklemin kökleri

$$\rho_{1,2}(\lambda) = \frac{\mathrm{F}(\lambda)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{F}(\lambda)}{2}\right)^2 - 1} \tag{3.8}$$

şeklindedir ve aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\rho_1(\lambda).\rho_2(\lambda) = 1 \tag{3.9}$$

Verilmiş bir λ değeri için $F^2(\lambda) \neq 4$ ise (3.7) denklemi iki farklı ρ_1 ve ρ_2 köklerine sahiptir ve dolayısıyla öyle iki aşikar olmayan $\psi_1(x,\lambda)$ ve $\psi_2(x,\lambda)$ çözümleri vardır ki; bu çözümler (3.2) eşitliğini sağlar. Buradan (3.2) eşitliklerini kullanarak

$$W\left[\psi_1(x+1,\lambda), \psi_2(x+1,\lambda)\right] = \rho_1\rho_2 = 1 \neq 0$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla böyle tanımlanmış $\psi_1(x,\lambda)$ ve $\psi_2(x,\lambda)$ çözümleri lineer bağımsızdır. ρ_1 ve ρ_2 sıfır olmadığından $\rho_1 = e^{m_1}$ ve $\rho_2 = e^{m_2}$ olacak biçimde $m_1 = m_1(\lambda)$ ve $m_2 = m_2(\lambda)$ sayıları tanımlanabilir ve buradan

$$\psi_1(x+1,\lambda) = e^{m_1}\psi_1(x,\lambda), \quad \psi_2(x+1,\lambda) = e^{m_2}\psi_2(x,\lambda)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi kabul edelim ki,

$$P_1(x,\lambda) = e^{-m_1 x}\psi_1(x,\lambda), \quad P_2(x,\lambda) = e^{-m_2 x}\psi_2(x,\lambda)$$

olsun. Bu durumda $P_1(x,\lambda)$ ve $P_2(x,\lambda)$ x değişkenine göre 1-periyotlu fonksiyonlardır. Böylece $F^2(\lambda) \neq 4$ olduğunda (3.1) ' in Floquet formundaki genel çözümü aşağıdaki biçimde olur:

$$y(x,\lambda) = c_1 e^{m_1 x}\, P_1(x,\lambda) + c_2 e^{m_2 x} P_2(x,\lambda)$$

Eğer $\lambda \in (-\infty,\infty)$ ise , $\alpha \in R$ ve q(x) fonksiyonu reel değerli olduğundan $\theta(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$, $\psi'(x,\lambda)$ fonksiyonları ve dolayısıyla F(λ) fonksiyonu reel değerli olacaktır. Şimdi F(λ) ’nın aşağıdaki durumlarını inceleyelim.

1- F(λ)>2 ise (3.8)’den ρ_1 ve ρ_2 reel, ayrık ve pozitif sayılardır. Dolayısıyla (3.9)’dan sıfırdan farklı reel bir m sayısı vardır, öyle ki

$$\rho_1 = e^{m} \ , \rho_2 = e^{-m}$$

yazılabilir. Böylece (3.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1 e^{mx}\, \rho_1(x,\lambda) + c_2 e^{-mx} \rho_2(x,\lambda)$$

biçiminde olur. Burada $\rho_1(x,\lambda)$ ve $\rho_2(x,\lambda)$, 1 periyotlu fonksiyonlardır.

2- F(λ)<-2 ise ρ_1 ve ρ_2 1. durumdan farklı olarak m yerine $m+i\pi$ olur. Böylece (3.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda)=c_1e^{(m+i\pi)x}P_1(x,\lambda)+c_2e^{-(m+2\pi)x}P_2(x,\lambda)$$

gibidir.

3- $\left|\mathrm{F}(\lambda)\right|<2$ ise ρ_1 ve ρ_2 ayrıktır ve birbirinin eşleniği olan iki karmaşık sayıdır. Buradan öyle bir γ sayısı vardır ki, 0<γ<π veya -π<γ<0 olmak üzere (3.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda)=c_1e^{i\gamma x}P_1(x,\lambda)+c_2e^{-i\gamma x}P_2(x,\lambda)$$

formundadır.

4- $\mathrm{F}^2(\lambda)$=4 ise bu durumda

$$\rho=\rho_1=\rho_2=\begin{cases}1 & ,\ \mathrm{F}(\lambda)=2\ \text{ise}\\ -1 & ,\ \mathrm{F}(\lambda)=-2\ \text{ise}\end{cases} \tag{3.10}$$

olur. Dolayısıyla (3.1) denkleminin (3.2) şartlarını sağlayacak en az bir aşikar olmayan $\psi_1(x,\lambda)$ çözümü bulunacaktır. $\psi_2(x,\lambda)$ (3.1)'in $\psi_1(x,\lambda)$ ile lineer bağımsız başka bir çözümü olsun. Bu durumda öyle bir d, sabiti vardır ki,

$$\psi_2(x+1,\lambda)=d_1\psi_1(x,\lambda)+\rho\psi_2(x,\lambda) \tag{3.11}$$

halini alır. Burada iki durum söz konusudur.

a-) $d_1 = 0$ ise (3.11) aşağıdaki biçimde olur,

$$\psi_2(x+1,\lambda) = \rho\psi_2(x,\lambda) \tag{3.12}$$

dolayısıyla (3.10) , (3.2) ve (3.12) dikkate alındığında (3.1) denkleminin tüm çözümleri F(λ)=2 iken periyodik, F(λ)=-2 iken anti-periyodiktir.

Kolayca gösterilebilir ki, $d_1 = 0$ eşitliği ancak ve ancak

$$\theta'(1,\lambda) = \alpha \ , \ \psi(1,\lambda) = 0 \tag{3.13}$$

olduğunda sağlanır.

b-) Kabul edelim ki, $d_1 \neq 0$ olsun, yani (3.13) eşitliklerinden en az biri sağlanmasın. Bu durumda (3.10)'dan

$$m = \begin{cases} 0 & , \ \text{F}(\lambda)\text{=2 ise} \\ \text{i}\pi & , \ \text{F}(\lambda)\text{=-2 ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmış bir m sayısı vardır, öyle ki, $\rho = e^m$ 'dir.

Şimdi

$$P_1(x,\lambda) = e^{-mx}\psi_1(x,\lambda), P_2(x,\lambda) = e^{-mx}\psi_2(x,\lambda) - \frac{d_1}{\rho}xP_1(x,\lambda)$$

diyelim. Kolayca görülebilir ki, $P_1(x+1,\lambda) = P_1(x,\lambda), P_2(x+1,\lambda) = P_2(x,\lambda)$ 'dir. Böylece (3.1) denkleminin temel çözümleri aşağıdaki biçimdedir:

$$\psi_1(x,\lambda) = e^{mx}P_1(x,\lambda), \psi_2(x,\lambda) = e^{mx}\left\{\frac{d_1}{\rho}xP_1(x,\lambda) + P_2(x,\lambda)\right\}$$

5) Şimdi λ'nın reel sayı olmadığı durumu inceleyelim. Burada iki alt durum vardır. $\mathrm{F}(\lambda)$ reel sayı değil ise , o zaman (3.8)'den ρ_1 ve ρ_2 farklı değerlere sahip olacaktır. Çünkü $\rho_1 = e^{i\gamma}, \gamma \in (-\infty, \infty)$ ise (3.9)'dan $\rho_2 = e^{-i\gamma}$ ve $\mathrm{F}(\lambda)=\rho_1 + \rho_2 = 2\cos\gamma$ olacak. Dolayısıyla $\mathrm{F}(\lambda)$ reel çıkacaktır ki, bu da yukarıdaki kabulle çelişecektir. Böylece $\operatorname{Re} m \neq 0$ koşulunu sağlayacak öyle m sayısı vardır ki,

$$\rho_1 = e^m, \rho_2 = e^{-m} \text{ 'dir}$$

ve (3.1) denkleminin aşağıdaki gibi lineer bağımsız iki çözümü bulunur:

$$\psi_1(x,\lambda) = e^{mx} P_1(x,\lambda), \psi_2(x,\lambda) = e^{-mx} P_2(x,\lambda)$$

Böylece,1. ve 2.'deki sonuçları baz alıp, yukarıda yaptığımız incelemelerden şu sonuca ulaşırız:

TEOREM 3.1.2:

$\lambda \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere $|\mathrm{F}(\lambda)| > 2$ ise *(3.1) denklemi kararsız, $|\mathrm{F}(\lambda)| < 2$ ise kararlıdır. $|\mathrm{F}(\lambda)| = 2$ ise bu durumda $\Phi'(1,\lambda) = \alpha, \psi(1,\lambda) = 0$ eşitliklerinin her ikisi sağlanıyor ise (3.1) denklemi kararlı, en az biri sağlanmıyorsa şartlı kararlı olup, kararlı olmayacaktır.*

3.2 t- PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİ

$0 \le x \le 1$ aralığında

$$y'' + \left[\lambda^2 - q(x)\right] y = 0 \tag{3.14}$$

denkleminin ve

$$y(1) = e^{it} y(0), y'(1) = e^{it}\left[y'(0) + \alpha y(0)\right] \qquad (3.15)$$

Sınır şartlarının oluşturduğu probleme t-periyodik sınır - değer problemi denir. Kabul edelim ki, $y(x) \neq 0$ ve $\mathrm{q(x)} \geq 0$ olsun

(3.1) denkleminin spektral özelliklerinin incelenmesi açısından (3.14),(3.15) sınır-değer probleminin bazı özelliklerini verelim.

Teorem 3.2.1:

F(λ), (3.6) *formülü ile tanımlanan fonksiyon olmak üzere (3.14) , (3.15) sınır-değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki denklemin sıfırlarıdır,*

$$\mathrm{F}(\lambda)\text{-}2\mathrm{cost}=0 \qquad (3.16)$$

İspat: (3.14) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1\theta(x,\lambda) + c_2\psi(x,\lambda)$$

biçimindedir. Bu çözüm (3.15) sınır şartlarında yerlerine yazılır ve

$$\theta(0,\lambda) = \psi'(0,\lambda) = 1, \theta'(0,\lambda) = \psi(0,\lambda) = 0$$

başlangıç şartları kullanılırsa aşağıdaki denklem sistemi bulunur.

$$\left(\theta(1,\lambda) - e^{it}\right)c_1 + \psi(1,\lambda)c_2 = 0$$
$$\left(\theta'(1,\lambda) - e^{it}.\alpha\right)c_1 + \left(\psi'(1,\lambda) - e^{it}\right)c_2 = 0$$

Bu sistemin aşikar olmayan çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{vmatrix} \theta(1,\lambda)-e^{it} & \psi(1,\lambda) \\ \theta'(1,\lambda)-e^{it}.\alpha & \psi'(1,\lambda)-e^{it} \end{vmatrix} =0$$

olmasıdır. Buradan

$$\theta(1,\lambda)+\psi'(1,\lambda)-\alpha\psi(1,\lambda)=e^{it}+e^{-it}=2\cos t$$

$\Rightarrow$ F(λ)=2cost

eşitliği bulunur.

Teorem 3.2.2:

(3.14), (3.15) *sınır- değer probleminin özdeğerleri reeldir ve sıfırdan farklıdır.*

İspat:

Varsayalım ki, λ - (3.14) , (3.15) sınır - değer probleminin özdeğeri ve $y(x)$ ' de bu özdeğere karşılık gelen ve (y,y)=1 şartını sağlayan öz fonksiyon olsun. Bu durumda (3.14) denkleminin her iki tarafına y(x) ile iç çarpım uygulanırsa

$$\lambda^2+\alpha\left|y(0)\right|^2-\int_0^1\left\{\left|y'(x)\right|^2+q(x)\left|y(x)\right|^2\right\}dx=0$$

Biçiminde λ 'ya bağlı 2.dereceden bir denklem elde edilir. Yukarıdaki şartlar dikkate alındığında bu denklemin köklerinin reel ve sıfırdan farklı olduğu ortaya çıkar.

Teorem 3.2.3

$t\neq m\pi$ $(m=0,\pm1,\pm2,...)$ *olduğunda* (3.14) , (3.15) *sınır-değer probleminin özdeğerleri tek katlıdır, yani her bir özdeğere bir tek özfonksiyon karşılık gelir.*

İspat:

Kabul edelim ki, $t \neq m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ olsun ve (3.14) , (3.15) sınır - değer probleminin λ özdeğerine iki lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ öz fonksiyonları karşılık gelsin bu durumda her bir λ değeri için (3.14) denkleminin y(x) çözümü $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ 'in kombinasyonu biçiminde yazılabilir ve aynı zamanda (3.15) sınır şartlarını sağlar. Özel olarak $\theta(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları bu şartları sağlayacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \theta(1,\lambda) + \psi'(1,\lambda) - \alpha\psi(1,\lambda) \\ &= e^{it}\theta(0,\lambda) + e^{it}\left[\psi'(0,\lambda) + \alpha\psi(0,\lambda)\right] - \alpha e^{it}\psi(0,\lambda) \\ &= 2e^{it} \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan, Teorem 3.2.1 gereği λ özdeğeri (3.16) eşitliğini sağladığından

$$\cos t = e^{it}$$

Elde edilir. Bu eşitlik ise ancak ve ancak $t = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ durumunda sağlanır ki, bu da yukarıdaki varsayımla çelişir.

$t = m\pi \ (m \in Z)$ olmak üzere m çift sayı ise (3.15) şartları

$$\begin{aligned} y(1) &= y(0) \\ y'(1) &= y'(0) + \alpha y(0) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Biçimini alır, m tek sayı olduğunda sınır şartları

$$\begin{aligned} y(1) &= -y(0) \\ y'(1) &= -y'(0) - \alpha y(0) \end{aligned} \tag{3.18}$$

gibi olur.

Teorem 3.2.1 gereğince (3.14) , (3.17) sınır-değer probleminin özdeğerleri F(λ)=2 denkleminin , (3.14) ve (3.18) sınır-değer probleminin özdeğerleride F(λ)=-2 denkleminin sıfırlarıdır ve bu özdeğerler iki katlı olabilir. (3.17) sınır-değer şartına (3.1) denkleminin periyodik, (3.18)'e ise anti-periyodik şartları denir.

Teorem 3.2.4:

(3.14) , (3.17) ve (3.14), (3.18) *sınır-değer problemlerinin λ özdeğerlerinin iki katlı olması için gerek ve yeter şart*

$$\theta'(1,\lambda)=\alpha, \psi(1,\lambda)=0 \tag{3.19}$$

olmasıdır.

İspat:

İspatı (3.14),(3.18) sınır - değer problemi için yapalım. (3.14) , (3.17) problemi için de aynı işlemler yapılabilir. Varsayalım ki, λ , (3.14) , (3.18) sınır - değer probleminin iki katlı özdeğerleridir. Bu durumda tanım gereği, aynı özdeğere iki lineer bağımsız y_1(x) ve y_2(x) özfonksiyonları karşılık gelir. Dolayısıyla bu özfonksiyonların lineer kombinasyonu (3.14) denklemini ve (3.18) şartlarını sağlar.

Özel olarak $y_1(\mathrm{x})=\theta(x,\lambda)$ ve $y_2(\mathrm{x})=\psi(x,\lambda)$ alınırsa $\theta(0,\lambda)=\psi'(0,\lambda)=1$, $\Phi'(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)=0$ şartından (3.19) eşitlikleri elde edilir. Aksini varsayalım ki, (3.14) , (3.18) sınır-değer probleminin λ özdeğeri için (3.19) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda λ'nın iki katlı özdeğer olduğunu gösterelim. Gerçekten (3.19) ve $W\left[\theta,\psi\right]=1$ özdeşliğinden

$$\theta(1,\lambda)\psi'(1,\lambda)=1$$

elde edilir. Buradan

$$\mathrm{F}^2(\lambda)=\left[\theta(1,\lambda)+\psi'(1,\lambda)-\alpha\psi(1,\lambda)\right]^2=4=4\theta(1,\lambda)\psi'(1,\lambda)$$

Olur ve (3.19)'dan

$$\left[\theta(1,\lambda)+\psi'(1,\lambda)\right]^2=4\theta(1,\lambda)\psi'(1,\lambda)$$
$$\Rightarrow \theta(1,\lambda)=\psi'(1,\lambda)$$

Eşitliği elde edilir. $\mathrm{F}(\lambda)$=-2 eşitliğinden

$$\theta(1,\lambda)=\psi'(1,\lambda)=1 \tag{3.20}$$

Sonucuna varılır. $\theta(0,\lambda)=\psi'(0,\lambda)=1$, $\theta'(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)=0$ şartından ve (3.19) , (3.20)'den (3.18) şartlarının sağlandığı görülür.

Şimdi (3.14) , (3.15) t-periyodik sınır-değer probleminin özdeğerlerinin varlığını gösterelim. [3]'deki formüller gereğince yeterince büyük $|\lambda|$ değerleri için aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur:

$$\theta(x,\lambda)=\cos\lambda+0\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|}}{|\lambda|}\right),\psi(x,\lambda)=\frac{\sin\lambda}{\lambda}+0\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|}}{|\lambda|^2}\right),\psi'(x,\lambda)=\cos\lambda+0\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|}}{\lambda}\right)$$

Bu formüller (3.6)'daki $\mathrm{F}(\lambda)$ 'nın ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\lambda)&=\theta(1,\lambda)+\psi'(1,\lambda)-2\alpha\lambda\psi(1,\lambda)\\ &=2\cos\lambda+0\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\lambda|}}{|\lambda|}\right)\end{aligned} \tag{3.21}$$

İfadesi elde edilir. (3.21) asimptotik formülünden Rouche Teoremi [17] gereğince $\mathrm{F}(\lambda)$=2cost denkleminin sayılabilir sayıda $\lambda_k(t)$ (k=$0,\pm1,\pm2,\ldots$) köklerine sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 'den bu $\lambda_k(t)$'ler reeldir, sıfıra eşit değildir ve aşağıdaki sıralamaya sahiptir:

$$...\leq \lambda_{-2}(t) \leq \lambda_{-1}(t) \leq \lambda_0(t) \leq \lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq ... \qquad (3.22)$$

Bu formüldeki her bir $\lambda_k(t)$ sayısı onun katına eşit sayıda tekrarlanabilir.

3.3 KARARLILIK VE KARARSIZLIK ARALIKLARI

Bu bölümde 3.1 kısmında elde edilen bilgilerden yararlanarak (3.1) denkleminin kararlılık ve kararsızlık aralıkları hakkında daha somut bilgiler edinmeye çalışacağız.Aynı zamanda bu bölümde kararlılık ve kararsızlık aralıklarının varlığı ispatlanacak ve bu aralıkların kesin tasviri verilecektir. Bütün bunlar $\mathrm{F}(\lambda)$ fonksiyonunun özellikleri araştırılarak yapılacaktır.

Teorem 3.3.1

Eğer $|\mathrm{F}(\lambda)|<2$ *ise* $\theta'(1,\lambda)+\alpha\theta(1,\lambda)\neq 0, \psi(1,\lambda)\neq 0$ ve $\theta'(1,\lambda)+\alpha\theta(1,\lambda)$ ile $\psi(1,\lambda)$ *ters işaretlidir.*

İspat:

$|\mathrm{F}(\lambda)|<2 \Rightarrow \mathrm{F}^2(\lambda)<4 \leq (\theta(1,\lambda)+\psi'(1,\lambda)-\alpha\psi(1,\lambda))^2<4$ buradan ve $W[\theta,\psi]=1$ dikkate alınırsa

$$\theta^2(1,\lambda)+2\theta(1,\lambda)(\psi'(1,\lambda)-\alpha\psi(1,\lambda))+(\psi'(1,\lambda)-\alpha\psi(1,\lambda))^2$$
$$<4(\theta(1,\lambda)\psi'(1,\lambda)-\theta'(1,\lambda).\psi(1,\lambda))$$
$$\Rightarrow \theta^2(1,\lambda)+2\theta(1,\lambda)(\psi'(1,\lambda)-\alpha\psi(1,\lambda))+(\psi'(1,\lambda)-\alpha\psi(1,\lambda))^2$$
$$<4(\theta(1,\lambda)(\psi'(1,\lambda)-\alpha\psi(1,\lambda))-4\psi(1,\lambda)(\theta'(1,\lambda)+\alpha\theta(1,\lambda))$$
$$\Rightarrow \left[\theta(1,\lambda)-\psi'(1,\lambda)-\alpha\psi(1,\lambda)\right]^2<-4\psi(1,\lambda)(\theta'(1,\lambda)+\alpha\theta(1,\lambda))$$

Eşitsizliğine ulaşılır ki bu da ispatı bitirir.

Teorem 3.3.2:

Eğer $\left|\mathrm{F}(\lambda)\right|<2$ *ise* $\dfrac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\neq 0'$*dır.*

İspat:

(3.14)'den elde edilen aşağıdaki diferansiyel denklemi düşünelim.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial x}\right)+\left[\lambda^2-g(x)\right]\left(\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial x}\right)=-2\lambda\theta(x,\lambda)$$

$$\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial x}=\frac{\partial\theta'(x,\lambda)}{\partial x}=0$$

Bu başlangıç değer probleminin çözümleri aşağıdaki biçimde olacaktır.

$$\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\{\theta(x,\lambda)\psi(\xi,\lambda)-\psi(\pi,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\theta(\xi,\lambda)d\xi,$$
$$\frac{\partial\psi(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\{\theta(x,\lambda)\psi(\xi,\lambda)-\psi(\pi,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\psi(\xi,\lambda)d\xi,$$
$$\frac{\partial\psi'(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\{\theta'(x,\lambda)\psi(\xi,\lambda)-\psi'(\pi,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\psi(\xi,\lambda)d\xi.$$

Bu değerler (3.6)'dan elde edilmiş olan

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda}=\frac{\partial \vartheta(1,\lambda)}{\partial \lambda}+\frac{\partial \psi'(1,\lambda)}{\partial \lambda}-\alpha\frac{\partial \psi(1,\lambda)}{\partial \lambda}$$

Denkleminde yazılır ve $\theta=\theta(1,\lambda),\theta'=\theta'(1,\lambda),\psi=\psi(1,\lambda),\psi'=\psi'(1,\lambda),$ kısaltmaları kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda}&=2\lambda\int_0^1\{\theta\psi(\xi,\lambda)-\psi\theta(\xi,\lambda)\}\,\theta(\xi,\lambda)d\xi\\&+2\lambda\int_0^1\{\theta'\psi(\xi,\lambda)-\psi'\theta(\xi,\lambda)\}\psi(\xi,\lambda)d\xi\\&-2\alpha\lambda\int_0^1\{\theta\psi(\xi,\lambda)-\psi\theta(\xi,\lambda)\}\psi(\xi,\lambda)d\xi\\&=-2\lambda\int_0^1\left\{\psi\theta^2(\xi,\lambda)+(\psi'-\alpha\psi-\theta)\theta(\xi,\lambda)\psi(\xi,\lambda)-(\theta'-\alpha\theta)\psi^2(\xi,\lambda)\right\}d\xi\end{aligned}\tag{3.23}$$

eşitliği elde edilir. Burada $|F(\lambda_0)|<2$ olduğundan $\exists t_0\in(-\infty,\infty)$ sayısı vardır ki, $F(\lambda_0)=2\cos\lambda_0$'dır. Bu eşitlik Teorem 3.2.1' e göre λ_0 ' ın (3.14), (3.15) t_0 -periyodik sınır-değer probleminin özdeğeri olduğunu gösterir.

Kabul edelim ki, $\psi(x)\neq 0$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Bu durumda

$$\psi''(x)+[\lambda_0-q(x)]\psi(x)=0 \tag{3.24}$$

$$\psi(1)=e^{it_0}\psi(0),\psi'(1)=e^{it_0}(\psi'(0)+\alpha\psi(0)) \tag{3.25}$$

yazılabilir. Burada ayrıca $\theta(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$, (3.1) denkleminin $\lambda=\lambda_0$ için temel çözümleri olduğundan

$$\psi(x)=\psi(0)\theta(x,\lambda_0)+\psi'(0)\psi(x,\lambda_0) \tag{3.26}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\left|\psi(x)^2\right| &= \left|\psi(0)^2\right|\theta^2(x,\lambda_0)+\left|\psi'(0)\right|^2\psi^2(x,\lambda_0)\\ &+\left[\psi(0)\overline{\psi'(0)}+\overline{\psi(0)}\psi'(0)\right]\theta(x,\lambda_0)\psi(x,\lambda_0)\end{aligned} \tag{3.27}$$

bulunur. (3.26)'da x=1 alınarak (3.25)'deki ilk eşitlik kullanılırsa

$$\psi'(0)=\frac{e^{it_0}-\theta(1,\lambda_0)}{\psi(1,\lambda_0)}\psi(0)$$

İfadesi elde edilir. Öte yandan

$$\theta(1,\lambda_0)+\psi'(1,\lambda_0)+\alpha\psi(1,\lambda_0)=2\cos t_0$$

eşitliğini de dikkate alırsak

$$\begin{aligned}\left|\psi'(0)\right|^2 &= \frac{e^{it_0}-\theta(1,\lambda_0)}{\psi(1,\lambda_0)}\psi(0)\frac{e^{-it_0}-\overline{\theta}(1,\lambda_0)}{\overline{\psi}(1,\lambda_0)}\overline{\psi}(0)\\ &=\frac{1-\theta(1,\lambda_0)2\cos t_0+\theta^2(1,\lambda_0)}{\psi^2(1,\lambda_0)}\left|\psi(0)\right|^2\\ &=\frac{\theta\psi'-\theta'\psi-\theta(\theta+\psi'+\alpha\psi)+\theta^2}{\psi^2}\left|\psi(0)\right|^2\\ &=-\frac{\theta'+\alpha\theta}{\psi}\left|\psi(0)\right|^2 \quad \text{ve}\end{aligned}$$

$$\psi(0)\overline{\psi'(0)}+\overline{\psi}(0)\psi'(0)=\frac{\psi'(1,\lambda_0)+\alpha\psi(1,\lambda_0)-\theta(1,\lambda_0)}{\psi(1,\lambda_0)}\left|\psi(0)\right|^2$$

bulunur. Bulunan bu iki eşitlik (3.27) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$\left|\psi(x)\right|^2=\left\{\psi\theta^2(x,\lambda_0)-(\theta'+\alpha\theta)\psi^2(x,\lambda_0)+(\psi'+\alpha\psi-\theta)\theta(x,\lambda_0)\psi(x,\lambda_0)\right\}\frac{\left|\psi(0)\right|^2}{\psi}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını λ_0 ile çarpıp x değişkenine göre 0'dan 1'e kadar integraller ve (3.23)'ü dikkate alırsak

$$\lambda_0 \int_0^1 |\psi(x)|^2 \, dx = \frac{|\psi(0)|^2}{\psi(1,\lambda_0)} \frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda}$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} \neq 0 \text{ olur.}$$

Teorem 3.3.3:

Eğer $|F(\lambda_0)| = 2$ ise $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ *olması için gerek ve yeter şart*

$$\theta'(1,\lambda_0) = \alpha, \psi(1,\lambda_0) = 0 \tag{3.28}$$

olmasıdır. Ayrıca

(1) Eğer $|F(\lambda_0)| = 2$, $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ ise $\dfrac{d^2F(\lambda_0)}{d\lambda^2} < 0$'dır.

(2) Eğer $|F(\lambda_0)| = -2$, $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ ise $\dfrac{d^2F(\lambda_0)}{d\lambda^2} > 0$'dır.

İspat:

$F(\lambda_0) = -2$ durumu için yapalım. $F(\lambda_0) = 2$ durumuda benzer biçimde kanıtlanabilir. Varsayalım ki, $F(\lambda_0) = -2$ ve (3.28) eşitliği sağlansın. $\dfrac{dF(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$ olduğunu gösterelim. (3.28)'deki değerler $W[\theta,\psi] = 1$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\theta(1,\lambda_0)\psi'(1,\lambda_0)=1 \tag{3.29}$$

elde edilir. Ayrıca $F(\lambda_0)=-2$ eşitliğinden $\psi'(1,\lambda_0)=-2-\theta(1,\lambda_0)+\alpha\psi(1,\lambda_0)$ bulunur. Bu değer (3.29)'da yerine yazılır $\psi(1,\lambda_0)=0$ dikkate alınırsa

$$\left[\theta(1,\lambda_0)+1\right]^2=0$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $\theta(1,\lambda_0)=-1$ ve (3.29)'dan $\psi'(1,\lambda_0)=-1$ bulunur. Sonuçta $F(\lambda_0)=-2$ ve (3.28) var ise $\theta(1,\lambda_0)=\psi'(1,\lambda_0)=-1$ elde edilir. Yukarıda elde edilen $\theta(1,\lambda_0)=-1,\psi'(1,\lambda_0)=-1,\psi(1,\lambda_0)=0$ ve $\theta'(1,\lambda_0)=\alpha$ değerleri (3.23)' de yerlerine yazılırsa $\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda}=0$ eşitliği hemen çıkar.

Şimdi tersine $F(\lambda_0)=-2$ ve $\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda}=0$ olduğunu varsayalım ve (3.28) eşitliklerinin doğruluğunu gösterelim. Eğer $\psi(1,\lambda_0)\neq 0$ kabul edip Teorem 3.3.2'nin ispatına benzer işlemler yapılırsa $\frac{dF(\lambda_0)}{d\lambda}\neq 0$ ($t_0=0$ olduğunda) olur ki, bu da yukarıdaki ile çelişir. Böylece $\psi(1,\lambda_0)=0$ elde edilir. Şimdi de $\theta'(1,\lambda_0)=\alpha$ olduğunu gösterelim. $W\left[\theta,\psi\right]=1$ eşitliğinde $\psi(1,\lambda_0)=0$ eşitliğini kullanır ve yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa $\theta(1,\lambda_0)=\psi'(1,\lambda_0)=-1$ bulunur. Elde edilen bu üç değer (3.23)'de yerlerine yazılırsa

$$2\lambda_0(\theta'-\alpha)\int_0^1\psi^2(\xi,\lambda)d\xi=0$$

elde edilir ve dolayısıyla $\theta'(1,\lambda_0)=\alpha$ olur.

Şimdi teoremin (1) kısmını ispatlayalım. (3.23)'ün her iki tarafını λ'ya göre diferansiyeller ve $\lambda=\lambda_0$ alırsak

$$\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial\lambda^2}=-2\lambda_0\int_0^1\left\{\frac{\partial\psi(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}\theta^2(\xi,\lambda)-\frac{\partial\theta'(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}+\alpha\frac{\partial\theta(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}\right\}\psi^2(\xi,\lambda)$$
$$+\left\{\frac{\partial\psi'(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}+\alpha\frac{\partial\psi(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}-\frac{\partial\theta(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}\theta(\xi,\lambda_0)\psi(\xi,\lambda_0)\right\}d\xi \tag{3.30}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\partial\theta(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\{\theta(x,\lambda)\psi(\xi,\lambda)-\psi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\theta(\xi,\lambda)d\xi,$$
$$\frac{\partial\psi(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\{\theta(x,\lambda)\psi(\xi,\lambda)-\psi(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\psi(\xi,\lambda)d\xi,$$
$$\frac{\partial\psi'(x,\lambda)}{\partial\lambda}=2\lambda\int_0^x\{\theta'(x,\lambda)\psi(\xi,\lambda)-\psi'(x,\lambda)\theta(\xi,\lambda)\}\psi(\xi,\lambda)d\xi,$$

Bağlantılarında x=1 alınıp, $\theta'(1,\lambda_0)=\alpha$, $\psi(1,\lambda_0)=0$, $\theta(1,\lambda_0)=\psi'(1,\lambda_0)=1$ değerleri yazılırsa aşağıdaki bağlantılar elde edilir.

$$\frac{\partial\theta(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}=2\int_0^1\psi(\xi,\lambda_0)\theta(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi,$$
$$\frac{\partial\theta'(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}=2\lambda_0\int_0^1\{-\alpha\psi(\xi,\lambda_0)\theta(\xi,\lambda_0)-\theta^2(\xi,\lambda_0)\}d\xi,$$
$$\frac{\partial\psi(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}=2\lambda_0\int_0^1\psi^2(\xi,\lambda_0)d\xi,$$
$$\frac{\partial\psi'(1,\lambda_0)}{\partial\lambda}=2\lambda_0\int_0^1\{-\alpha\psi^2(\xi,\lambda_0)-\theta(\xi,\lambda_0)\psi(\xi,\lambda_0)\}d\xi,$$

Bu değerler (3.30) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial \lambda^2} = -2\lambda_0 \int_0^1 \left\{ 2\int_0^1 \psi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi \right\} \theta^2(\xi,\lambda_0) + \left\{ 2\int_0^1 \theta^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi \right\}$$

$$\psi^2(\xi,\lambda_0) + \left\{ 2\int_0^1 -2\theta(\xi,\lambda_0)\psi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi \right\} (\theta(\xi,\lambda_0)\psi(\xi,\lambda_0)) d\xi, \qquad (3.31)$$

$$= 8\left[\left(\int_0^1 \theta(\xi,\lambda_0)\psi(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi \right) - \int_0^1 \psi^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi \int_0^1 \theta^2(\xi,\lambda_0)\lambda_0 d\xi \right]$$

ifadesi bulunur. Şimdi

$$f(x) = \psi(x,\lambda) + \gamma\theta(x,\lambda_0)$$

biçiminde bir fonksiyon tanımlayalım. $\lambda = \lambda_0$ olduğunda f(x) fonksiyonu (3.1) denkleminin çözümüdür. Bu durumda

$$\lambda_0 \int_0^1 f^2(x) dx \neq 0,$$

yani

$$\lambda_0 \int_0^1 \psi^2(x,\lambda) dx + 2\lambda_0 \gamma \int_0^1 \psi(x,\lambda)\theta(x,\lambda_0) dx + \lambda_0 \gamma^2 \int_0^1 \theta^2(x,\lambda_0) dx \neq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafı γ 'ya göre 2.dereceden üç terimli bir denklemdir ve bu denklemin reel kökü yoktur , yani diskirminantı sıfırdan kesin küçüktür. Böylece

$$\left(\lambda_0 \int_0^1 \psi(x,\lambda)\theta(x,\lambda_0) dx \right)^2 - \left(\lambda_0 \int_0^1 \psi^2(x,\lambda) dx \right) \left(\int_0^1 \theta^2(x,\lambda_0)\lambda_0 dx \right) < 0$$

olur ki, bu da $\frac{\partial^2 F(\lambda_0)}{\partial \lambda^2} < 0$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.3'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.4: $F(\lambda) \pm 2$ fonksiyonu, katı 2'den büyük sıfırlara sahip değildir.

Sonuç 3.3.5: $\lambda_0, F(\lambda) - 2$ fonksiyonunun 2 katlı sıfırıdır, ancak ve ancak $F(\lambda)$ bu noktada maksimuma sahiptir. $\lambda_0, F(\lambda) + 2$ fonksiyonunun iki katlı sıfırıdır, ancak ve ancak $F(\lambda)$ bu noktada minimuma sahiptir.

Bu bölümde elde edilen tüm sonuçların sonucu olarak $F(\lambda)$ fonksiyonun nasıl davrandığı ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.6:

1-*) (3.14), (3.17) genelleşmiş periyodik sınır-değer probleminin* α_{2k}^{+} $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ ve *(3.14),(3.18) genelleşmiş anti-periyodik sınır-değer probleminin* $\alpha_{2k+1}^{\pm}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ *özdeğerleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.*

$$...\alpha_{-2}^{-} \le \alpha_{-2}^{+} \le \alpha_{-1}^{-} \le \alpha_{-1}^{+} < \alpha_{0}^{-} \le \alpha_{0}^{+} \le \alpha_{1}^{-} \le \alpha_{1}^{+} \le \alpha_{2}^{-} \le \alpha_{2}^{+} < ...$$

2-) $[\alpha_{2k}^{+}, \alpha_{2k+1}^{-}]\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ *kapalı aralığınd* $F(\lambda)$, *+2 değerinden -2 değerine monoton azalan* , $[\alpha_{2k+1}^{+}\alpha_{2k+2}^{-}]\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ *kapalı aralığında ise -2 değerinden +2 değerine monoton artandır.*

3-) $(\alpha_{2k}^{+}\ \alpha_{2k}^{-})\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ *açık aralığında* $F(\lambda) > 2$, $(\alpha_{2k+1}^{-}\alpha_{2k+1}^{+})\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ *açık aralığında ise* $F(\lambda) < -2$ 'dir.

Böylece (3.1) denklemi için $(\alpha_{k-1}^{+},\alpha_{k}^{-})(k=0,\pm1,\pm2,...)$ aralıkları kararlılık , onların kapanışları olan $[\alpha_{k-1}^{+},\alpha_{k}^{-}](k=0,\pm1,\pm2,...)$ aralıkları şartlı kararlılık ve $(\alpha_{k}^{-},\alpha_{k}^{+})$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ aralıkları kararsızlık aralıkları olacaktır.

3.4 OPERATÖRÜN SPEKTRUMU

Bu bölümde σ ile göstereceğimiz L_α operatörünün spektrumunu araştıracağız. S ile (3.1) denkleminin tüm şartı kararlılık aralıklarının oluşturduğu kümeyi işaretleyelim.

Teorem 3.4.1

L_α operatörü sürekli spektruma sahiptir.

İspat:

Tersini kabul edelim . λ_0, L_α operatörünün özdeğeri ve $\psi(x)$ ' de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Bu durumda

$$L_\alpha \psi(x)=0$$

olur. Bu da $\psi(x)$ 'in (3.1) denkleminin $\lambda=\lambda_0$ olduğunda $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında aşikar olmayan bir çözüme sahip olması demektir. Halbuki 3.2 kısmın sonuçlarına göre (3.1) denklemi hiçbir λ kompleks değeri için $L_2(-\infty,\infty)$ 'da aşikar bir çözüme sahip değildir. Böylece L_α operatörü özdeğere sahip değildir.

Teorem 3.4.2:

σ ve S kümeleri eşittir.

İspat: Öncelikle $S \subset \sigma$ olduğunu ispatlayalım yani S'den alınan herhangi bir λ_0'ın aynı zamanda σ'da olduğunu gösterelim. Bunun için $\|f_n\| = 1$ ve $n \to \infty$ iken $\|L_\alpha f_n\| \to 0$ olacak biçimde en az bir $f_n(x) \in D$ dizisinin varlığını göstermek yeterlidir.

$\lambda_0 \in S$ ise 4.2 sonuçlarına göre (3.1) denkleminin $\lambda = \lambda_0$ olduğunda en az bir tane aşikar olmayan $\psi(x)$ çözümü vardır, öyle ki, bu çözümler

$$\begin{aligned} &\psi(x+1) = \rho\psi(x) \\ &\psi'(x+1) + \alpha\psi(x+1) = \rho\psi'(x) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Şartlarını sağlar. $\{f_n\}$ dizisini tanımlamak için [0,1] aralığında 2. mertebeden sürekli türeve sahip, aşağıdaki şartları sağlayan bir q(x) fonksiyonunu tanımlayalım:

$$q(0) = 0, q(1) = 1, q'(0) = q''(0) = q'(1) = q''(1), \quad (0 \le q(\mathrm{x}) \le 1)$$

Şimdi de $(-\infty, \infty)$ aralığında aşağıdaki biçimde verilmiş $f_n(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım,

$$f_n = b_n \psi(x) h_n(x),$$

burada

$$h_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & |x| < (\mathrm{n-1}) \\ q(n - |x|), & (\mathrm{n-1}) \le |x| \le n \\ 0, & |x| > n \end{array} \right\}$$

ve b_n , $\|f_n\| = 1$ şartını sağlayan normlaştırıcı katsayıdır.(-n,n) aralığı boyunca, her bir uçta uzunluğu 1 olan aralıklar hariç $h_n(x) = 1$ olduğundan

$$b_n \approx \left(2n \int_0^1 |\psi(x)|^2 \, dx \right)^{-\frac{1}{2}}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (3.32)'yi kullanılarak $n \to \infty$ iken $b_n \to 0$ olur.

Açıktır ki, $f_n(x) \in D$ ve

$$L_\alpha f_n(x) = b_n[2\psi'(x)h_n'(x) + \psi(x) + h_n''(x)]$$

Buradan

$$\|L_\alpha f_n(x)\| \le |b_n|\left[2\|\psi'(x)h_n'(x)\| + \|\psi(x)h_n''(x)\|\right] \le K|b_n|$$

elde edilir. Burada K negatif olmayan sabit sayıdır ve n ' ye bağlı değildir. Dolayısıyla $n \to \infty$ iken $\|L_\alpha f_n(x)\| \to 0$ olur. Böylece $\lambda_0 \in \sigma$'dır. Yani $S \subset \sigma$'dir.

Şimdi $\sigma \subset S$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\lambda_0 \notin S$ iken $\lambda_0 \notin \sigma$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Eğer $\lambda_0 \notin S$ ise o zaman aşağıdaki üç durumdan biri vardır:

(i) $\lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ ve $|\mathrm{F}(\lambda_0)| > 2$;

(ii) $\mathrm{Im}\,\lambda_0 \ne 0$ ve $\mathrm{F}(\lambda_0)$ reeldir;

(iii) $\mathrm{Im}\,\lambda_0 \ne 0$ ve $\mathrm{F}(\lambda_0)$ reel değildir.

Bu durumları ayrı-ayrı inceleyelim.

(i) $|\mathrm{F}(\lambda_0)| > 2 \Leftrightarrow (\mathrm{F}(\lambda_0)>2) \vee \mathrm{F}(\lambda_0)<-2$ burada $\mathrm{F}(\lambda_0)>2$ durumunu inceleyelim. Bu durumda (3.1) denkleminin , 3.2 sonuçlarına göre aşağıdaki gibi , iki lineer bağımsız çözüme sahiptir:

$$\psi_1(x) = e^{mx}p_1(x), \psi_2(x) = e^{-mx}p_2(x)$$

Burada $m \in (-\infty, \infty)$, $m \ne 0, p_k(x+1) = p_k(x)$ $(k = 1.2)'dir$. Şimdi

$$G(x,\xi,\lambda_0)=\frac{1}{W\{\psi_1,\psi_2\}}\begin{Bmatrix}\psi_1(x)\psi_2(\xi)\ ,\ \mathrm{x}\le\xi\\ \psi_1(\xi)\psi_2(x)\ ,\ \mathrm{x}\ge\xi\end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

Green fonksiyonunu ele alalım. Şimdi $L_2(-\infty,\infty)'da$ R integral operatörünü

$$Rf(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,\lambda_0)f(\xi)d\xi \tag{3.34}$$

Biçiminde tanımlayalım. R operatörünün $L_2(-\infty,\infty)\to L_2(-\infty,\infty)'da$ sınırlı olduğunu gösterelim. Gerçekten (3.34)'den (3.33)'ü kullanarak

$$\left|Rf(x)\right|\le\frac{M^2}{c}\{G_1(x)+G_2(x)\} \tag{3.35}$$

olduğu gösterilebilir. Burada

$$\mathrm{M}=\sup\begin{Bmatrix}\max\limits_{0\le x\le 1} & |\mathrm{P}_1(x)|, & \max\limits_{0\le x\le 1} & |\mathrm{P}_2(x)|,\end{Bmatrix}$$

ve

$$G_1(x)=e^{mx}\int_{-\infty}^{x}e^{m\xi}\left|f(\xi)\right|d\xi,G_2(x)=e^{mx}\int_{x}^{\infty}e^{-\xi x}\left|f(\xi)\right|d\xi,$$

Couchy-Bunyakowski eşitsizliğinden

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}G_1^{\,2}(x)dx\right)^{1/2}\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2dx\right)^{1/2}$$

Elde edilir. G_2 içinde benzer eşitsizlik gösterilebilir. Dolayısıyla (3.35) ' den $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında R integral operatörü sınırlıdır ve $R=(L_\alpha)^{-1}$ ' dir. Aşağıdakiler kolayca gösterilebilir,

$$L_\alpha Rf(x) = RL_\alpha f(x), \qquad \forall f(x) \in D \cap L_2(-\infty,\infty)$$

Böylece L_α öperatörü $L_2(-\infty,\infty)$ uzayında tanımlı terse sabittir ve $\{L_\alpha\}^{-1}$ = R'dir. Böylece λ_0, L_α için düzenli noktadır, yani $\lambda_0 \notin \sigma$'dır.

(ii) Burada $|\mathrm{F}(\lambda_0)| > 2$ olduğunu gösterelim. O zaman (i) durumundaki incelemeleri yapabiliriz. Gerçektende , eğer $\mathrm{F}(\lambda_0) \le 2$ ise $\exists \mathrm{t}_0 \in (-\infty,\infty)$ vardır, öyle ki,
$\mathrm{F}(\lambda_0)=2\cos \mathrm{t}_0$'dır. Bu ise λ_0'ın t-periyodik sınır-değer probleminin özdeğeri olduğunu gösterir.Ancak t_0-periyodik sınır-değer probleminin özdeğerleri reeldir. Bu da $\mathrm{Im}\,\lambda_0 \ne 0$ şartıyla çelişir.

(iii) Bu durumda 3.1 kısım 5.6' ya göre olduğunda (3.1) denklemi iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$$\psi_1(x) = e^{mx}\mathrm{P}_1(x), \psi_2(x) = e^{-mx}\mathrm{P}_2(x)$$

Burada $\mathrm{Re}\, m \ne 0, \mathrm{P}_1(x)$ ve $\mathrm{P}_2(x)$ x'e göre 1- periyotlu fonksiyonlardır. Dolayısıyla ispatın bundan sonrası 1. durumdakine benzer yolla yapılabilir. Böylece L_α operatörünün spektrumu için aşağıdaki sonuca varılır:

Sonuç 3.4.3 L_α operatörünün spektrumu süreklidir ve $[\alpha_{k-1}^{+}, \alpha_{k}^{-}]\,(k = 0, \pm1, \pm2, ...)$ kapalı aralıklar dizisinden oluşur. $(\alpha_k^{-}, \alpha_k^{+})$ ise spekturm boşluklarıdır. Burada $\{\alpha_{2k}^{\pm}\}$ genelleşmiş periyodik sınır-değer probleminin ve $\{\alpha_{2k+1}^{\pm}\}$ ise genelleşmiş anti-periyodik sınır-değer probleminin özdeğerleridir.

Bilindiği üzere [3] , periyodik, sürekli potansiyelli Sturm-Lioville operatörü için spektrum boşluklarının sayısı sonsuz ise , bu durumda spektrum boşlukları sonsuzluğa yaklaşırken bu boşlukların uzunlukları sıfıra yaklaşıyor. Bizim durumumuzda aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 3.4.4

L_α operatörünün spektrum boşluklarının sayısı sonsuzdur ve $n \to \infty$ iken bu boşlukların uzunlukları 2α 'ya yaklaşır.

İspat: İspat için $F(\lambda) \equiv \theta + \psi' + \alpha\psi = 2$ denklemini ele alalım. Bu denklemde [3] ' deki formüller kullanılarak

$$\Phi(\lambda) = F(\lambda) - 2 = -4\sin^2\frac{z}{2} + 0\left(\frac{e^j}{|k|}\right)$$

Elde edilir. Burada $Z = \sqrt{\lambda} = \sigma + ij$ Bu durumda $\Phi(\lambda)$ fonksiyonuna [3] ' deki incelemelere benzer uygulamalar yapılabilir, öyle ise

$$\sqrt{\lambda^+{}_{2n}} = 2\pi n + 0\left(\frac{1}{n}\right) ve \sqrt{\lambda^-{}_{2n}} = 2\pi n + 0\left(\frac{1}{n}\right) \text{ elde edilir.}$$

Bu sayıların daha sonraki terimlerini bulmak için F(λ_0)-2 fonksiyonunu aşağıdaki biçimde yazalım:

$$\Phi(x) = -4\sin^2\frac{z}{2} + \frac{\sin z}{z}\left(\int_0^1 q(y)dy + \alpha\right)$$
$$+\frac{1}{z^2}\int_0^1 q(y)dy\int_0^y \sin z(y-t)\sin z(1-y+t)q(t)dt$$
$$+\frac{1}{z^2}\int_0^1 \sin z(t-y)\sin zyq(y)dy + 0\left(\frac{1}{z^3}\right)$$

Bu formülde λ yerine $2\pi n + \sigma_n$ yazılır ve bazı dönüşümler yapılırsa , σ_n aşağıdaki denklemden bulunur:

$$\sin^2\frac{\sigma_n}{2}-\frac{\sin^2\frac{\sigma_n}{2}}{8\pi n}\left(a_0+2\alpha\right)+\frac{\left(a_0^{\ 2}-a_{2n}^{\ 2}-b_{2n}^{\ 2}\right)}{256\pi^2 n^2}$$
$$+\frac{1}{64n^2\pi^2}(a_0-a_{2n})=0\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Burada

$$a_n=2\int_0^1 q(y)\cos 2n\pi y dy,\quad b_n=2\int_0^1 q(y)\sin 2n\pi y dy$$

Dolayısıyla

$$\sigma_n=\frac{a_0+2\alpha}{8n\pi}\pm\frac{1}{8n\pi}\sqrt{4\alpha^2+b_{2n}^{\ 2}+a_{2n}^{\ 2}+4a_{2n}}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Buradan da

$$\lambda_{2n}^{\ +}(\lambda_{2n}^{\ -})=(2\pi n^2)+\frac{a_0+2\alpha}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+b_{2n}^{\ 2}+a_{2n}^{\ 2}+4a_{2n}}+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve $\int_0^1 q(x)dx<\infty$ olduğundan $\alpha^{+}{}_{2n}^{\ 2}-\alpha^{-}{}_{2n}^{\ 2}=2\alpha+0(1)$ elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Magnus , W. ve Winkler, S.”Hill’s Equation”, Dover Publications, New York, 127 s., (1966).

[2] Eastham, M.S.P. “The Spectral Theory of Periodic Differential Equations”, Scottish Academic Press, Edinburgh-London, 130 s., (1973).

[3] Titchmarsh, E.C. “ Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations I,II”, Clarendon Press, London, 203, 404, s., (1962).

[4] Hechtman, M.M. ve Stankevich, I.V. “ The Generalized Kronig-Penney Problem”, Functional Analysis and Its Applications, **11(1)** : 61-62, (1977).

[5] Guseinov, G.S. “On a Quadratic Pencil of Sturn-Liouville Operators with Periodic Coeffcients”, Vestnik Moskov. Univ., **1(3):** 14-21, (1984).

[6] Mikhailets, V.A. ve Sobolev, A.V.”Common Eigenvalue Problem and Periodic Schrödinger Operators”, Journal of Functional Analysis, **165(1):** 150-172, (1999).

[7] Manafov, M.D. “ Spectrum of Differential Operator with Periodic Generalized Potential”, Reports of NAS of Azerbaijan, **63(3):** 19-25, (2007).

[8] Berezin, F.A. ve Fadeev, L.D. “Remark on Schrödinger Equation with Singular Potential”, Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **137(5):** 1011-1014, (1961).

[9] Minlos, R.A ve Fadeev, L.D. “On the Pointh Interaction for a Threeparticle System in Quantum Mechanics”, Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **141(6):** 1335-1338, (1961).

[10] Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R. ve Holden, H. .” Solvable Models in Quantum Mechanics”, Springer-Verlag, New York, 412 s., (1998).

[11] Krein, M.G. “ On a Generalization of Stieltje’s Investigations”, Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **87(6):** 881-884, (1952).

[12] Kats, I.S. “ On the Existence of Spektral Functions of Singular Second-Order Differential Systems”, Doklad. Akad. Nauk. SSSR, **106(1):** 15-18, (1956).

[13] Atkinson, F.V. “Discrete and Continuous Boundary Problems”, Academic Press, New York, 537 s., (1964).

[14] Manafov, M.D “Description of the Domain of Domain of Ordinary Differential Operators with Generalized Potentials”, Differential Equations. **32(5):** 716-718, (1996).

[15] Monafov, M.Dzh. " On some Spektral Properties of an Ordinary Differential Operator with Generalized Protentials", Differential Equations, **38(5):** 749-751, (2002).

[16] Reed, M., Simon, B., Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier analysis, self-adjointness, Academic Press., New York (1975).

[17] Titchmarsh, E.C., The Theory of Functions-Oxford, (1939).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Harun TEKİN

Doğum Yeri: Malatya

Doğum Tarihi: 22/08/1977

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Adıyaman Anadolu Lisesi

Lisans: Erzincan Atatürk Üniv. Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü

Yüksek Lisans: Adıyaman Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Altınşehir İlköğretim Okulu (2000-2003), Adıyaman Lisesi (2003-2007), Adıyaman Üniversitesi (2007-20..)

Yayınları: