ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SOFT KÜMELER VE BAZI SOFT CEBİRSEL YAPILAR

Ebubekir İNAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

ADIYAMAN
2011

TEZ ONAYI

Ebubekir İNAN tarafından hazırlanan "SOFT KÜMELER VE BAZI SOFT CEBİRSEL YAPILAR" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

Jüri Üyeleri :

Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Adıyaman Üniversitesi, Matematik A.B.D.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Adıyaman Üniversitesi, Matematik A.B.D.

Yrd. Doç. Dr. Tayfun SERVİ
Adıyaman Üniversitesi, İlköğretim Matematik Eğitimi A.B.D.

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SOFT KÜMELER VE BAZI SOFT CEBİRSEL YAPILAR

Ebubekir İNAN

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, Γ-halkaları ve fuzzy kümeler ile ilgili diğer bölümlere öncülük eden kavramlar özetlenmiştir.
Üçüncü bölümde, soft kümeler ve temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca, soft küme ve fuzzy küme kavramları karşılaştırılmıştır.
Dördüncü ve beşinci bölümlerde, soft gruplar, soft alt gruplar, normal soft alt gruplar, soft grupların homomorfizmaları, soft halkalar, soft alt halkalar, soft idealler, idealistik soft halkalar, soft halkaların homomorfizmaları ve temel özellikleri incelenmiştir.
Son olarak altıncı bölümde, bilinen soft cebirsel yapıların özellikleri Γ-halkalarına genelleştirilmiştir. Bu bölümde, soft Γ-halkaları, soft alt-Γ-halkaları, soft idealler, idealistik soft Γ-halkaları, soft Γ-halkalarının homomorfizmaları kavramları verilmiş ve bazı temel özellikler elde edilmiştir.

Haziran 2011, 51+v sayfa

Anahtar Kelimeler: Soft Küme, Soft Grup, Soft Halka, Soft Gamma Halkası

ABSTRACT

Master Thesis

SOFT SETS AND SOME SOFT ALGEBRAIC STRUCTURES

Ebubekir İNAN

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

The thesis consists of six chapters. The first chapter has been reserved for the introduction.
In the second chapter, preliminaries have been summarized mainly about the Γ-rings and fuzzy sets.
In the third chapter, soft sets and their basic properties have been given. In additional, concepts of soft set and fuzzy set have been compared.
In the fourth and fifth chapters, soft groups, soft subgroups, normal soft subgroups, homomorphisms of soft groups, soft rings, soft subrings, soft ideals, idealistic soft rings, homomorphisms of soft rings and their basic properties have been investigated.
Finally, in the sixth chapter, the properties of some known soft algebraic structures have been generalized to Γ-rings. In this chapter, soft Γ-rings, soft sub-Γ-rings, soft ideals, idealistic soft Γ-rings, homomorphisms of soft Γ-rings have been given and some of their basic properties have been obtained.

June 2011, 51+v pages

Key Words: Soft Set, Soft Group, Soft Ring, Soft Gamma Ring

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana destek olan ve her aşamasında bilgilerini, tecrübesini ve yakın ilgisini esirgemeyen danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK'e, çalışmalarım sırasında tezime maddi katkı sağlayan Adıyaman Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (ADYÜBAP) birimine, yapıcı tavsiyelerinden dolayı değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN'a teşekkürlerimi borç bilirim.

Ayrıca, benden manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve değerli eşime de sonsuz teşekkür ediyorum.

Ebubekir İNAN

Adıyaman, 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
2. ÖN BİLGİLER 3
2.1. Gamma Halkaları 3
2.2. Fuzzy Kümeler 5
3. SOFT KÜMELER 7
3.1. Soft Kümeler ve Özellikleri 7
3.2. Soft Küme Teorisinde De Morgan Kuralları 15
3.3. Fuzzy Küme ile Soft Küme Arasındaki İlişki 17
4. SOFT GRUPLAR 18
4.1. Soft Gruplar ve Özellikleri 18
4.2. Soft Alt Gruplar 21
4.3. Normal Soft Alt Gruplar 24
5. SOFT HALKALAR 26
5.1. Soft Halkalar ve Özellikleri 26
5.2. Soft ideal ve İdealistik Soft Halkalar 29
6. SOFT Γ-HALKALARI ve İDEALİSTİK SOFT Γ-HALKALARI 40
6.1. Soft Γ-Halkaları 40
6.2. İdealistik Soft Γ-Halkalar 46
KAYNAKLAR 50
ÖZGEÇMİŞ 51

SİMGELER DİZİNİ

D	Bölüm halkası
$D_{m,n}$	$m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$\wp(U)$	U nun kuvvet kümesi
μ_A	A da bir fuzzy küme
μ_t	μ nün seviye alt kümesi
(F,A)	Soft küme
$(F,A)^C$	(F,A) soft kümesinin tümleyeni
$(F,A)^r$	(F,A) soft kümesinin relatif tümleyeni
$Supp(F,A)$	(F,A) soft kümesinin destekleyeni
$\neg e$	e parametresinin değili
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\tilde{\wedge}$	AND operatörü
$\tilde{\vee}$	OR operatörü
$\tilde{\cap}$	Soft kümelerin arakesiti
$\tilde{\cup}$	Soft kümelerin birleşimi
$\tilde{\sqcap}$	Soft kümelerin bi-arakesiti
$\smile_{\Re}$	Kısıtlanmış fark
$\sqcap_{\varepsilon}$	Genişletilmiş arakesit
$\Cap$	Kısıtlanmış arakesit
$\cup_{\Re}$	Kısıtlanmış birleşim

1.GİRİŞ

Bilim adamları yüzyıllar boyunca mutlak tutarlı ve sınırları kesin bilimsel yöntem ve yaklaşım kavramlarından kurtulamamışlardır. Ancak bilim ve teknolojinin gelişimi ve doğanın bilimsel olarak tasarlanmasındaki zorluklar, bu tutarlılık ve kesinlik ilkelerini yetersiz kılarak matematik ve mantıkta krizlere sebep olmuştur. Belirsizliğin modellenmesi yani; matematiksel olarak ifade edilmesi klasik mantık yaklaşımıyla mümkün değildir. Tıpkı doğadaki gibi sürekli değişen, çevresinden etkilenen ve denge halinde olmayan sistemlerin modellenebilmesi ancak tutarsız bulguların toparlanıp bunlardan sonuç çıkarılmasıyla mümkündür.

Bu doğrultuda, 17. yüzyıl başlarında Pascal ve Fermat olasılık kuramını ortaya atarak ilk olarak belirsiz bir durumu matematiksel olarak incelemişlerdir. 19. yüzyıl başlarında ise birçok bilim adamı tarafından belirsizlik üzerine çalışmalar yapılmıştır. Ancak ilk olarak 1920 lerde Heisenberg belirsizlik kavramını açıklayarak, çok değerliliğe kapı açmıştır. 1930 ların başında ise Lukaisewicz ilk üç değerli mantık sistemini ve aynı tarihlerde kuantum filozofu olan Black de ilk sürekli değerlere sahip mantığı tanımlamıştır. 1965 te, karmaşık olayların modern anlamda modellenmesine imkan tanıyan, teknolojide dönüm noktası diyebileceğimiz bulanık (Fuzzy) küme teorisi Zadeh tarafından tanımlanmıştır. Bu alandaki diğer bir teori olan yaklaşımlı (Rough) küme teorisi de 1982 de Pawlack tarafından tanımlanmıştır.

Bu tarihten sonra, belirsizlik durumlarını incelemek için yeni bir matematiksel araç olan esnek (Soft) kümeler kavramı 1999 da Molodtsov tarafından geliştirilmiştir. Son zamanlarda, Soft kümeler teorisi üzerindeki çalışmalar hızla ilerlemektedir. Bilgisayar uygulamaları açısından son derece önemli olan karar verme problemleri için ilk uygulama, Soft kümeler teorisi kullanılarak; Maji tarafından verilmiştir.

Soft küme teorisinin cebirsel yapıları son yıllarda yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Aktaş ve Çağman soft kümelerin temel özelliklerini bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerle ilişkilendirerek incelemişlerdir. Aktaş ve Çağman soft grupları tanımlayarak gruplarla ilgili bazı temel özelliklerin üzerinde durmuşlardır. Feng, Jun ve Zhao soft küme teorisini kullanarak soft yarı halka, soft yarı halka üzerinde soft ideal ve idealistik soft yarı halka kavramlarını vermişlerdir. Daha sonra, Acar, Koyuncu ve Tanay soft halka kavramını tanımlamışlardır. Bunun yanı sıra, Jun soft BCK/BCI cebirlerini ve soft alt cebirler kavramlarını, Jun ve Park BCK/BCI cebirlerinin cebirsel yapılarını, Park, Jun ve Öztürk soft WS-cebirlerini ve ayrıca Sun, Zhang ve Liu soft modül teorisinin temel kavramlarını tanımlamışlardır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin anlaşılabilirliğini kolaylaştıran ve diğer bölümlerde vereceğimiz tanım ve teoremlere öncülük eden temel kavramlar verilecektir.

2.1. Gamma Halkaları

Modül endomorfizmalarının halkası matematiğin birçok alanında önemli rol oynar. Bir modülden başka bir modüle tanımlanan modül homomorfizmalarının kümesi fonksiyonlar için bilinen toplama işlemine göre kapalı olduğu halde, fonksiyonların bileşke işlemine göre kapalı değildir. Bir A modülünden B modülüne tanımlanan tüm homomorfizmaların toplamsal grubu M, B modülünden A modülüne tanımlanan tüm homomorfizmaların toplamsal grubu N olsun. $f_1, f_2 \in M$ ve $g \in N$ olmak üzere; $f_1 g f_2$ ile tanımlanan homomorfizma M grubunun elemanı olur ve dolayısıyla N grubunu kullanarak yeni bir çarpma işlemi tanımlanabilir. Bu düşünceden hareketle Nobusawa 1964 yılında yayınladığı makalesinde Γ- halkası tanımını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 2.1.1. [N. Nobusawa 1964] Elemanları $a, b, c, \ldots$ olan M toplamsal grup ve elemanları $\gamma, \beta, \alpha, \ldots$ olan başka bir Γ toplamsal grup verilsin. Buna göre;

$$\begin{array}{c} \cdot : M \times \Gamma \times M \to M \\ (a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{c} \cdot : \Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma \\ (\gamma, a, \beta) \mapsto \gamma a \beta \end{array}$$

işlemleri ile aşağıdaki özellikler sağlanırsa o zaman M *ye* Γ -halkası denir.

$\forall a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in M$ ve $\forall \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$

(i) $(a_1 + a_2)\gamma b = a_1 \gamma b + a_2 \gamma b$

$a(\gamma_1 + \gamma_2)b = a\gamma_1 b + a\gamma_2 b$

$a\gamma(b_1 + b_2) = a\gamma b_1 + a\gamma b_2$

(ii) $(a\gamma b)\beta c = a\gamma(b\beta c) = a(\gamma b \beta)c$

(iii) $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ iken $a\gamma b = 0$ ise $\gamma = 0$ dır.

Tanım 2.1.2. M bir Γ-halkası olsun. M nin sıfırdan farklı a elemanı için $a\gamma a \neq 0$ olacak biçimde bir sıfırdan farklı Γ nın elemanı olan γ varsa o zaman M ye yarı basit Γ-halkası denir. M nin sıfırdan farklı a ve b elemanı için $a\gamma b \neq 0$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir Γ nın elemanı olan γ varsa M ye basit denir.

Örnek 2.1.1. D bir bölüm halkası olsun. Buna göre;

$$D_{n,m} = \left\{ \left[a_{ij} \right]_{n\times m} \mid a_{ij} \in D \right\},\ D_{m,n} = \left\{ \left[a_{ij} \right]_{m\times n} \mid a_{ij} \in D \right\} \text{ ve } M = D_{n,m},\ \Gamma = D_{m,n}$$

olarak alalım. Bu durumda aşağıdaki işlemler ile M bir Γ-halkasıdır.

$$+ : M \times M \to M$$
$$\left(\left[a_{ij} \right], \left[b_{ij} \right] \right) \mapsto \left[a_{ij} \right] + \left[b_{ij} \right] = \left[a_{ij} + b_{ij} \right]$$

$$+ : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$$
$$\left(\left[\gamma_{ij} \right], \left[\beta_{ij} \right] \right) \mapsto \left[\gamma_{ij} \right] + \left[\beta_{ij} \right] = \left[\gamma_{ij} + \beta_{ij} \right]$$

$$\cdot : M \times \Gamma \times M \to M$$
$$\left(\left[a_{ij} \right], \left[\gamma_{ij} \right] \left[b_{ij} \right] \right) \mapsto \left[a_{ij} \right] \cdot \left[\gamma_{ij} \right] \cdot \left[b_{ij} \right]$$

$$\cdot : \Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma$$
$$\left(\left[\gamma_{ij} \right], \left[a_{ij} \right], \left[\beta_{ij} \right] \right) \mapsto \left[\gamma_{ij} \right] \cdot \left[a_{ij} \right] \cdot \left[\beta_{ij} \right]$$

N. Nobusawa'nın tanımladığı Γ-halkası kavramını, W. E. Barnes aşağıdaki gibi yeniden tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.3. [Barnes 1966] Eğer $M = \{a, b, c, ...\}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ toplamsal grupları olmak üzere; a, b, c M nin α, β Γ'nın elemanları olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa o zaman M ye Γ-halkası denir.

(i) $a\alpha b \in M$ dir.

(ii) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$,

$a(\alpha+\beta)b = a\alpha b + a\beta b$,

$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$,

(iii) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$.

Barnes, Nobusawa'ya göre Γ -halkasında bulunan koşulları azaltarak daha kullanışlı hale getirmiştir.

M bir Γ -halkası ise her $\alpha, b \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için Tanım 2.1.3. den;

$0\alpha b = a0b = a\alpha 0$ dır.

Çünkü; $0_M \alpha b = (0_M + 0_M)\alpha b = 0_M \alpha b + 0_M \alpha b$,

$0_M \alpha b \in M$ olduğundan en az bir $-0_M \alpha b \in M$ olacak şekilde her elemanın tersi vardır.

Dolayısıyla $-0_M \alpha b + 0_M \alpha b = -0_M \alpha b + 0_M \alpha b + 0_M \alpha b$

$$0_M = 0_M + 0_M \alpha b$$

$$0_M = 0_M \alpha b$$

olur.

Tanım 2.1.4. M bir Γ -halkası, A M nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. A, M nin toplamsal alt grubu ve $A\Gamma M = \{a\alpha c \mid a \in A, \alpha \in \Gamma, c \in M\}$, $\left((M\Gamma A) \subseteq A\right)$ ise o zaman A ya M nin sağ (sol) ideali denir.

2.2. Fuzzy Kümeler

Bu kısımda, 1965 te Zadeh tarafından geliştirilen Fuzzy küme tanımını vererek; klasik küme kavramı ile ilişkisini ele alacağız.

Tanım 2.3.1. [Zadeh 1965] X boştan farklı bir küme ve $I = [0,1] \subset R$ olsun.

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

fonksiyonu tarafından karakterize edilen, $A = \left\{\left(x, \mu_A(x)\right) \middle| x \in X\right\} \subset X \times I$ kümesine X de bir fuzzy küme denir.

Her $x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x in A ya ait olma derecesi denir. $\mu_A(x)$ in 1 e yaklaşması x in A ya daha fazla ait olması anlamına gelmektedir.

Klasik küme teorisinde X boştan farklı bir küme ve $B \subset X$ ise üyelik fonksiyonu,

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

şeklindedir.

$\mu_X : X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_X(x) = 1$ olarak tanımlanırsa X kümesi,

$$X = \{(x,1) | x \in X\}$$

fuzzy kümesi olarak yazılabilir.

$\mu_\varnothing : X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_B(x) = 0$ olarak tanımlanırsa X kümesi,

$$\varnothing = \{(x,0) | x \in X\}$$

fuzzy kümesi olarak yazılabilir.

Sonuç olarak, her klasik küme bir fuzzy küme olarak dikkate alınabilir ancak tersi doğru değildir.

Tanım 2.3.2. [Malik ve Mordeson 1991] X boş olmayan bir küme ve μ, X in bir fuzzy alt kümesi olsun. $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$$

kümesine μ nün bir seviye alt kümesi denir.

Örnek 2.3.1. $A = \{a,b,c\}$ olmak üzere A nın bir μ fuzzy alt kümesi,

$\mu(a) = 0.3$, $\mu(b) = 0.1$ ve $\mu(c) = 0.4$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$0 \leq t \leq 0.1$ için $\mu_t = \{a,b,c\} = A$,

$0.1 \leq t \leq 0.3$ için $\mu_t = \{a,c\}$,

$0.3 \leq t \leq 0.4$ için $\mu_t = \{c\}$ ve

$0.4 \leq t \leq 1$ için $\mu_t = \varnothing$ olur.

3. SOFT KÜMELER

3.1. Soft Kümeler ve Özellikleri

Tanım 3.1.1. [Molodtsov 1999] İlk evrensel küme U ve $\wp(U)$; U nun kuvvet kümesi olsun. Buna göre;

$$\eta : A \to \wp(U)$$

küme değerli fonksiyon olmak üzere (η, A) ikilisine U üzerinde bir soft küme denir.

Diğer bir ifade ile, U üzerinde soft küme, U evrensel kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir.

$\varepsilon \in A$ için, $\eta(\varepsilon)$ yı (η, A) soft kümesinin ε-yaklaşımlı elemanlarının kümesi olarak dikkate alınabilir. Açıkça, bir soft küme klasik anlamda bir küme değildir. Molodtsov [1999] çalışmasında bazı örnekler vermiştir. Benzer örnekleri Maji vd. [2003], Aktaş ve Çağman [2007] da çalışmalarında vermişlerdir.

Örnek 3.1.1. [Molodtsov 1999, Maji vd. 2003] U kümesi evlerin kümesi olarak ve E kümesi de parametrelerin kümesi olarak dikkate alınsın. Her bir parametre bir kelime veya bir cümle olarak verilebilir. $E = \{pahalı; güzel; ahşap; ucuz; bahçeli\}$ olsun. Bu durumda tanımlanacak soft kümenin anlamı; pahalı olan evler, güzel olan evler şeklinde olur. (F, E) soft kümesi, bay X'in alacağı ev için "evlerin cazipliği" ni tarif eden bir kümedir.

Şimdi bu örneği daha detaylı olarak inceleyelim:

U evrensel kümesi $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ olacak şekilde altı tane evden oluşsun ve parametre kümesi, e_1 parametresi 'pahalı', e_2 parametresi 'güzel', e_3 parametresi 'ahşap', e_4 parametresi 'ucuz', e_5 parametresi 'bahçeli' olmak üzere $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olsun.

$F(e_1)=\{h_2,h_4\}$,
$F(e_2)=\{h_1,h_3\}$,
$F(e_3)=\{h_3,h_4,h_5\}$,
$F(e_4)=\{h_1,h_3,h_5\}$ ve
$F(e_5)=\{h_1\}$

olduğu kabul edilsin. (F,E) soft kümesi, U kümesinin altkümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Böylece $F(e_1)$ in anlamı e_1 parametresini sağlayan evlerin kümesidir. Dolayısıyla (F,E) soft kümesi,

$(F,E)=\{(e_1,\{h_2,h_4\}),(e_2,\{h_1,h_3\}),(e_3,\{h_3,h_4,h_5\}),(e_4,\{h_1,h_3,h_5\}),(e_5,\{h_1\})\}$ şeklinde yazılabilir. Burada her bir yaklaşım iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısım parametre, ikinci kısım ise değer kümesidir.

Bir soft küme bilgisayar ortamında tablo yardımı ile de gösterilebilir. (Tablo 2.1.1.)

U	‘Pahalı’	‘Güzel’	‘Ahşap’	‘Ucuz’	‘Bahçeli’
h_1	0	1	0	1	1
h_2	1	0	0	0	0
h_3	0	1	1	1	0
h_4	1	0	1	0	0
h_5	0	0	1	1	0
h_6	0	0	0	0	0

Tablo 2.1.1.

Tanım 3.1.2. [Maji vd. 2003] (F,E) soft kümesinin tüm değer kümelerinin sınıfı, soft kümenin değer sınıfı olarak adlandırılır ve $C_{(F,E)}$ ile gösterilir. Açıkça $C_{(F,E)}\subseteq \wp(U)$ olur.

Örnek 2.1.1. için $C_{(F,E)}=\{\{h_2,h_4\},\{h_1,h_3\},\{h_3,h_4,h_5\},\{h_1,h_3,h_5\},\{h_1\}\}\subseteq \wp(U)$ dur.

Tanım 3.1.3. [Maji vd. 2003] (η, A) ve (γ, B) aynı U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olsun. Buna göre, aşağıdaki koşullar varsa (η, A); (γ, B) nin bir soft alt kümesidir denir ve $(\eta, A) \tilde{\subset} (\gamma, B)$ ile gösterilir.

(i) $A \subset B$,

(ii) $\forall e \in A$ için $\eta(e)$ ve $\gamma(e)$ aynı yaklaşıma sahiptirler.

Örnek 3.1.2. [Maji vd. 2003] $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ olsun. Açıkça $A \subset B$ dir. (F, A) ve (G, B) aynı $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel kümesi üzerindeki iki soft küme

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(e_1) &= \{h_2, h_4\} \\ \mathrm{F}(e_3) &= \{h_3, h_4, h_5\} \\ \mathrm{F}(e_5) &= \{h_1\} \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \mathrm{G}(e_1) &= \{h_2, h_4\} \\ \mathrm{G}(e_2) &= \{h_1, h_3\} \\ \mathrm{G}(e_3) &= \{h_3, h_4, h_5\} \\ \mathrm{G}(e_5) &= \{h_1\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece $(\eta, A) \tilde{\subset} (\gamma, B)$ dir.

Tanım 3.1.4. [Maji vd. 2003] (η, A) ve (γ, B) aynı U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olsun. Bu durumda (η, A); (γ, B) nin soft altkümesi ve (γ, B); (η, A) nın soft alt kümesi ise (η, A) ve (γ, B) soft kümeleri eşittir denir.

Tanım 3.1.5. [Maji vd. 2003] $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ parametrelerin kümesi olmak üzere $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, ..., \neg e_n\}$ kümesine parametre kümesinin değili denir. Burada $\neg e_i$ nin anlamı, her i için e_i parametresinin değilidir.

Aşağıdaki önermelerin doğruluğu açıktır.

Önerme 3.1.1.[Maji vd. 2003] E parametrelerin kümesi ve $A, B \in E$ olsun. Bu durumda

(1) $\neg(\neg A) = A$,

(2) $\neg(A \cup B) = (\neg A \cup \neg B)$ ve

(3) $\neg(A \cap B) = (\neg A \cap \neg B)$ dır.

Örnek 3.1.3. [Maji vd. 2003] Örnek 2.1.1. dikkate alınsın. Bu durumda $\neg E$ kümesi $\neg E = \{ pahalı\ değil; güzel\ değil; ahşap\ değil; ucuz\ değil; bahçeli\ değil \}$ şeklindedir.

Tanım 3.1.6. [Maji vd. 2003] (F, A), U evrensel kümesi üzerinde soft küme olsun. Bu durumda (F, A) soft kümesinin tümleyeni,

$$F^C : \neg A \to \mathrm{P}(U), F^C(\alpha) = U - F(\neg\alpha), \forall \alpha \in \neg A$$

olmak üzere, $(F, A)^C = (F^C, \neg A)$ ile tanımlıdır.

F^C, F küme değerli fonksiyonunun soft tümleyenidir. Açıkça, $(F^C)^C = F$ ve $((F, A)^C)^C = (F, A)$ dır.

Örnek 3.1.4. [Maji vd. 2003] Örnek 2.1.1. dikkate alınırsa, $(F, A)^C$ kümesi

$(F, A)^C = \{ (pahalı\ değil, \{h_1, h_3, h_5, h_6\}), (güzel\ değil, \{h_2, h_4, h_5, h_6\}),$
$(ahşap\ değil, \{h_1, h_2, h_6\}), (ucuz\ değil, \{h_2, h_4, h_6\}), (bahçeli\ değil, \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}) \}$

şeklindedir.

Tanım 3.1.7. [Maji vd. 2003] (F, A), U evrensel kümesi üzerinde soft küme olsun. Bu durumda $\forall e \in A, F(e) = \phi$ ise (F, A) ya boş (null) soft küme denir ve Φ ile gösterilir.

Örnek 3.1.5. [Maji vd. 2003] U evrensel kümesi ahşap evlerden oluşan küme olarak dikkate alınsın. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve $A = \{tuğla, kerpiç, çelik, taş\}$ olsun. Bu durumda $(F, A) = \{ (tuğla\ evler, \phi), (kerpiç\ evler, \phi), (çelik\ evler, \phi), (taş\ evler, \phi) \}$ soft kümesi boş (null) soft kümedir.

Tanım 3.1.8. [Maji vd. 2003] (F, A), U evrensel kümesi üzerinde soft küme olsun. Bu durumda $\forall e \in A, F(e) = U$ ise (F, A) ya mutlak (absolute) soft küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.5. [Maji vd. 2003] U evrensel kümesi ahşap evlerden oluşan küme olarak dikkate alınsın. $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ ve

$B=\{tuğla\ değil, kerpiç\ değil, çelik\ değil, taş\ değil\}$ olsun. Bu durumda

$(G,A)=\{(tuğla\ olmayan\ evler, U),(kerpiç\ olmayan\ evler, U),$
$(çelik\ olmayan\ evler, U),(taş\ olmayan\ evler, U)\}$

soft kümesi mutlak (absolute) soft kümedir.

Maji [Maji vd. 2003] soft kümeler için AND, OR, arakesit ve birleşim gibi bazı ikili işlemleri de tanımlamıştır.

Tanım 3.1.9. [Maji vd. 2003] (F,A) ve (G,B) aynı U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olsun. Bu durumda "$(F,A)\ AND\ (G,B)$" işlemi $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ ile gösterilir ve $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$, $\forall(a,b)\in A\times B$ için $H(a,b)=F(a)\cap G(b)$ şeklinde tanımlıdır.

Örnek 3.1.6. [Maji vd. 2003] Evlerin maliyetini ve evlerin cazipliğini belirleyen, aynı U evrensel küme üzerinde iki soft küme (F,A) ve (G,B) olsun. $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6,h_7,h_8,h_9,h_{10}\}$, $A=\{çok\ maliyetli, maliyetli, ucuz\}$ ve

$B=\{güzel, bahçeli, ucuz\}$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{array}{lcl} F(çok\ maliyetli)=\{h_2,h_4,h_7,h_8\} & & G(güzel)=\{h_2,h_3,h_7\} \\ F(maliyetli)=\{h_1,h_3,h_5\} & \text{ve} & G(bahçeli)=\{h_5,h_6,h_8\} \\ F(ucuz)=\{h_6,h_9,h_{10}\} & & G(ucuz)=\{h_6,h_9,h_{10}\} \end{array}$$

olarak alınırsa,

$H(çok\ maliyetli, güzel)=\{h_2,h_7\}$, $H(çok\ maliyetli, bahçeli)=\{h_8\}$,
$H(çok\ maliyetli, ucuz)=\phi$, $H(maliyetli, güzel)=\{h_3\}$,
$H(maliyetli, bahçeli)=\{h_5\}$, $H(maliyetli, ucuz)=\phi$,
$H(ucuz, güzel)=\phi$, $H(ucuz, bahçeli)=\{h_6\}$,
$H(ucuz, ucuz)=\{h_6,h_9,h_{10}\}$

olur ve dolayısıyla $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$ elde edilir.

Tanım 3.1.10. [Maji vd. 2003] (F,A) ve (G,B) aynı U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olsun. Bu durumda "$(F,A)\,OR\,(G,B)$" işlemi $(F,A)\tilde{\vee}(G,B)$ ile gösterilir ve $(F,A)\tilde{\vee}(G,B)=(O,A\times B)$, $\forall(a,b)\in A\times B$ için $O(a,b)=F(a)\cup G(b)$ şeklinde tanımlıdır.

Örnek 3.1.7. [Maji vd. 2003] Örnek 2.1.6. dikkate alınırsa,

$\mathrm{O}(\text{çok maliyetli}, \text{güzel})=\{h_2,h_3,h_4,h_7,h_8\}$, $\mathrm{O}(\text{çok maliyetli}, \text{bahçeli})=\{h_2,h_4,h_5,h_6,h_7,h_8\}$,
$\mathrm{O}(\text{çok maliyetli}, \text{ucuz})=\{h_2,h_4,h_6,h_7,h_8,h_9,h_{10}\}$, $\mathrm{O}(\text{maliyetli}, \text{güzel})=\{h_1,h_2,h_3,h_5,h_7\}$,
$\mathrm{O}(\text{maliyetli}, \text{bahçeli})=\{h_1,h_3,h_5,h_6,h_7\}$, $\mathrm{O}(\text{maliyetli}, \text{ucuz})=\{h_1,h_3,h_5,h_6,h_9,h_{10}\}$,
$\mathrm{O}(\text{ucuz}, \text{güzel})=\{h_2,h_3,h_6,h_7,h_9,h_{10}\}$, $\mathrm{O}(\text{ucuz}, \text{bahçeli})=\{h_5,h_6,h_8,h_9,h_{10}\}$,
$\mathrm{O}(\text{ucuz}, \text{ucuz})=\{h_6,h_9,h_{10}\}$
olmak üzere, $(F,A)\tilde{\vee}(G,B)=(O,A\times B)$ dir.

Tanım 3.1.11. [Maji vd. 2003] (η,A) ve (γ,B) aynı U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olsun. Buna göre;

(i) $C=A\cap B$,

(ii) $\forall\varepsilon\in C$ için $\nu(e)=\eta(e)$ veya $\gamma(e)$, (ikisi de aynı küme)

olmak üzere; (ν,C) soft kümesine (η,A) ve (γ,B) soft kümelerinin arakesiti denir ve $(\eta,A)\tilde{\cap}(\gamma,B)=(\nu,C)$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.8. [Maji vd. 2003] Örnek 2.1.6. dikkate alınsın. Bu durumda (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin arakesiti $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,C)$ olmak üzere $C=A\cap B=\{ucuz\}$ ve $H(ucuz)=\{h_6,h_9,h_{10}\}$ dir.

Tanım 3.1.12. [Maji vd. 2003] (η,A) ve (γ,B) aynı U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olsun. Buna göre;

(i) $C=A\cup B$,

(ii) $\nu(e)=\begin{cases}\eta(e), & e\in A-B\ ise\\ \gamma(e), & e\in B-A\ ise\\ \eta(e)\cup\gamma(e), & e\in A\cap B\ ise\end{cases}$, $\forall e\in C$

olmak üzere; (ν, C) soft kümesine (η, A)ve (γ, B) soft kümelerinin birleşimi denir ve $(\eta, A)\tilde{\cup}(\gamma, B) = (\nu, C)$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.9. [Maji vd. 2003] Örnek 2.1.6. dikkate alınırsa, (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin birleşimi $(F, A)\tilde{\cup}(G, B) = (H, C)$ olmak üzere

$C = A \cup B = \{çok\ maliyetli, maliyetli, ucuz, güzel, bahçeli\}$ ve

$H(çok\ maliyetli) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\}$, $H(maliyetli) = \{h_1, h_3, h_5\}$,
$H(ucuz) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$, $H(güzel) = \{h_2, h_3, h_7\}$,
$H(bahçeli) = \{h_5, h_6, h_8\}$ dir.

Aşağıdaki önermenin doğruluğu açıktır.

Önerme 3.1.2. [Maji vd. 2003]
(1) $(F, A)\tilde{\cup}(F, A) = (F, A)$,
(2) $(F, A)\tilde{\cap}(F, A) = (F, A)$ dır.

Arakesit tanımına alternatif olarak iki soft küme arasında tanımlanan bi-arakesit ikili işlemini verelim.

Tanım 3.1.13. [Feng vd. 2008] (α, A) ve (β, B) aynı U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olsun. Buna göre; $C = A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $\gamma(x) = \alpha(x) \cap \beta(x)$ ile tanımlı

$$\gamma : C \to \wp(U)$$

dönüşümü ile verilen ve aynı U evrensel kümesi üzerinde soft küme olan (γ, C), (α, A) ve (β, B) soft kümelerinin bi-arakesiti olarak adlandırılır ve $(\alpha, A)\tilde{\sqcap}(\beta, B) = (\gamma, C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.14. [M. Irfan vd. 2009] (F, A) ve (G, B) aynı U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olsun. Buna göre;

(i) $C = A \cup B$,

$$\text{(ii) } H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A - B \ ise \\ G(e), & e \in B - A \ ise \\ F(e) \cap G(e), & e \in A \cap B \ ise \end{cases} \quad , \forall e \in C$$

olmak üzere, (H,C) soft kümesine (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin genişletilmiş arakesiti denir ve $(F,A) \sqcap_{\varepsilon} (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.15. [M. Irfan vd. 2009] (F,A) ve (G,B), $A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere aynı U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Buna göre $C = A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ olmak üzere; (H,C) soft kümesine (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin kısıtlanmış arakesiti denir ve $(F,A) \Cap (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

Bu tanım bi-arakesit tanımı olarak da dikkate alınabilir.

Tanım 3.1.16. [M. Irfan vd. 2009] (F,A) ve (G,B), $A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere aynı U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Buna göre;

(i) $C = A \cap B$,
(ii) $H(e) = F(e) - G(e)$, $\forall e \in C$

olmak üzere, (H,C) soft kümesine (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin kısıtlanmış farkı denir ve $(F,A) \smile_{\mathfrak{R}} (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.17. [M. Irfan vd. 2009] U ilk evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $A \subset E$ olsun. Bu durumda

(i) Her $e \in A$ için $F(e) = \phi$ ise (F,A) soft kümesine relatif boş soft küme denir ve Φ_A ile gösterilir.

(ii) Her $e \in A$ için $G(e) = U$ ise (G,A) soft kümesine relatif tam (whole) soft küme denir ve $\mathfrak{U}_A$ ile gösterilir.

Relatif tam (whole) soft küme $\mathfrak{U}_A$, E evrensel parametre kümesi ile dikkate alınırsa (G,A) soft kümesine U üzerinde mutlak (absolute) soft küme denir.

Tanım 3.1.18. [M. Irfan vd. 2009] (F,A), U evrensel kümesi üzerinde soft küme olsun. Bu durumda (F,A) soft kümesinin relatif tümleyeni,

$$F^r : A \to \wp(U),\ F^r(\alpha) = U - F(\alpha),\ \forall \alpha \in A$$

olmak üzere, $(F,A)^r = (F^r, A)$ ile tanımlıdır.

Açıkça, $(F,A)^r = \mathfrak{U}_E \smile_{\mathfrak{R}} (F,A)$ ve $\left((F,A)^r\right)^r = (F,A)$ dır.

Burada soft kümenin tümleyeni kavramındaki $\neg A$ parametre kümesi yerine A parametre kümesi dikkate alınmıştır. Bu farkı vurgulamak için Tanım 2.1.6. daki soft kümenin tümleyeni kavramına soft kümenin yarı tümleyeni diyeceğiz.

Tanım 3.1.19. [M. Irfan vd. 2009] (F,A) ve (G,B), $A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere aynı U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Buna göre;

(i) $C = A \cap B$,
(ii) $H(e) = F(e) \cup G(e)$, $\forall e \in C$

olmak üzere, (H,C) soft kümesine (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin kısıtlanmış birleşimi denir ve $(F,A) \cup_{\mathfrak{R}} (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

3.2. Soft Küme Teorisinde De Morgan Kuralları

Bu kısımda M. Irfan ve arkadaşları tarafından tanımlanan relatif tümleyen, kısıtlanmış birleşim ve kısıtlanmış arakesit tanımları kullanılarak De Morgan kuralları verilecektir.

Teorem 3.2.1. [M. Irfan vd. 2009] (F,A) ve (G,B), $A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere aynı U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda,

(1) $\left((F,A) \cup_{\mathfrak{R}} (G,B)\right)^r = (F,A)^r \Cap (G,B)^r$,

(2) $\left((F,A) \Cap (G,B)\right)^r = (F,A)^r \cup_{\mathfrak{R}} (G,B)^r$ dir.

İspat. (1) Her $c \in C = A \cap B \neq \emptyset$ için $H(c) = F(c) \bigcup G(c)$ olmak üzere, $(F, A) \bigcup_{\Re} (G, B) = (H, C)$ olsun. Tanım 3.1.18. den, $\left((F, A) \bigcup_{\Re} (G, B)\right)^r = (H, C)^r$ ve her $c \in C$ için $H^r(c) = U - \left[F(c) \bigcup G(c)\right] = \left[U - F(c)\right] \bigcap \left[U - G(c)\right]$ dir. Bu durumda $C = A \cap B$ olmak üzere $\left((F, A) \Cap (G, B)\right)^r = \left(F^r, A\right) \Cap \left(G^r, B\right) = (K, C)$ olur. Tanım 3.1.15. ve Tanım 3.1.18. den; her $c \in C$ için,

$K(c) = F^r(c) \bigcap G^r(c) = \left(U - F(c)\right) \bigcap \left(U - G(c)\right) = H^r(c)$ dir. Böylece

$\left((F, A) \bigcup_{\Re} (G, B)\right)^r = (F, A)^r \Cap (G, B)^r$ bulunur.

(2) Her $c \in C = A \cap B \neq \emptyset$ için $H(c) = F(c) \bigcap G(c)$ olmak üzere, $(F, A) \Cap (G, B) = (H, C)$ olsun. Tanım 3.1.15. ve Tanım 3.1.18. den,

$\left((F, A) \Cap (G, B)\right)^r = (H, C)^r$ ve her $c \in C$ için

$H^r(c) = U - \left[F(c) \bigcap G(c)\right] = \left[U - F(c)\right] \bigcup \left[U - G(c)\right]$ dir. Bununla birlikte

$C = A \cap B$ olmak üzere $(F, A)^r \bigcup_{\Re} (G, B)^r = \left(F^r, A\right) \bigcup_{\Re} \left(G^r, B\right) = (K, C)$ olur. Tanım 3.1.18. ve Tanım 3.1.19. dan; her $c \in C$ için,

$K(c) = F^r(c) \bigcup G^r(c) = \left(U - F(c)\right) \bigcup \left(U - G(c)\right) = H^r(c)$ dir. Böylece

$\left((F, A) \Cap (G, B)\right)^r = (F, A)^r \bigcup_{\Re} (G, B)^r$ bulunur.

Teorem 3.2.2. [M. Irfan vd. 2009] (F, A) ve (G, B) aynı U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda,

(1) $\left((F, A) \tilde{\bigcup} (G, B)\right)^C = (F, A)^C \sqcap_{\varepsilon} (G, B)^C$,

(2) $\left((F, A) \sqcap_{\varepsilon} (G, B)\right)^C = (F, A)^C \tilde{\bigcup} (G, B)^C$ dir.

İspat. (1) Tanım 3.1.14. kullanılırsa ispat kolayca yapılabilir.

(2) $(F, A) \sqcap_{\varepsilon} (G, B) = (H, A \bigcup B)$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda her $\neg e \in \neg A \bigcup \neg B$ için $H^c(\neg e) = U - H(e)$ olmak üzere,

$\left((F,A)\sqcap_{\varepsilon}(G,B)\right)^{C}=(H,A\bigcup B)^{C}=\left(H^{C},\neg(A\bigcup B)\right)=\left(H^{C},\neg A\bigcup\neg B\right)$ dir.

Tanım 3.1.14. den,

$$H(e)=\begin{cases}F(e), & e\in A-B \text{ ise},\\ G(e), & e\in B-A \text{ ise},\\ F(e)\cap G(e), & e\in A\cap B \text{ ise}.\end{cases}$$

olur. Böylece

$$H^{C}(\neg e)=\begin{cases}U-F(e)=F^{C}(\neg e), & \neg e\in\neg A-\neg B \text{ ise},\\ U-G(e)=G^{C}(\neg e), & \neg e\in\neg B-\neg A \text{ ise},\\ U-\left(F(e)\cap G(e)\right)=F^{C}(\neg e)\cup G^{C}(\neg e)\cup, & \neg e\in\neg A\cap\neg B \text{ ise}.\end{cases}$$

bulunur.

Bundan başka, $(F,A)^{C}\tilde{\bigcup}(G,B)^{C}=\left(F^{C},\neg A\right)\tilde{\bigcup}\left(G^{C},\neg B\right)=\left(K,\neg A\bigcup\neg B\right)$ olsun.

Bu durumda

$$K(\neg e)=\begin{cases}F^{C}(\neg e), & \neg e\in\neg A-\neg B \text{ ise},\\ G^{C}(\neg e), & \neg e\in\neg B-\neg A \text{ ise},\\ F^{C}(\neg e)\cup G^{C}(\neg e)\cup, & \neg e\in\neg A\cap\neg B \text{ ise}.\end{cases}$$

olur.

Sonuç olarak H^{c} ve K aynı küme değerli fonksiyonlar olduğundan,

$\left((F,A)\sqcap_{\varepsilon}(G,B)\right)^{C}=(F,A)^{C}\tilde{\bigcup}(G,B)^{C}$ elde edilir.

3.3. Fuzzy Küme ile Soft Küme Arasındaki İlişki

Önerme 3.3.2. [Aktaş ve Çağman 2007] Her Fuzzy küme bir soft küme olarak dikkate alınabilir.

İspat. F bir fuzzy küme ve U evrensel kümesinden $[0,1]$ e

$\mu_F(x)=\sup\{\alpha \mid x\in F(\alpha)\}$ ile tanımlı μ_F, F fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu olsun. μ_F fonksiyonu için $F(\alpha)$ α-seyiye kümelerinin ailesi dikkate alınsın. Bu durumda F ailesi bilinirse $\mu_F(x)$ fonksiyonları $\mu_F(x)=\sup\{\alpha \mid x\in F(\alpha)\}$ eşitliği ile bulunabilir. Böylece her F fuzzy kümesi, aynı zamanda $(F,[0,1])$ şeklinde bir soft küme olarak dikkate alınabilir.

Fuzzy kümeler ile soft kümeler arasındaki bu ilişkiyi daha iyi anlamak için bunu bir örnek üzerinden inceleyelim.

Örnek 3.3.1. [Aktaş ve Çağman 2007] U evrensel kümesi $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ olacak şekilde altı tane evden ve parametre kümesi, sadece evlerin cazipliğini değerlendiren sözel değişken "evlerin kalitesi" parametresinden oluşsun. Bu sözel değişken parametre için değişken terimlerin kümesi $T(kalite)=\{en\,iyi, iyi, orta, kötü\}$ şeklinde tanımlanabilir. Her bir değişken terim kendi fuzzy kümesi ile ilgilidir. Bunlardan ikisi;

$$F_{en\ iyi}=\{(h_1,0.2),(h_2,0.7),(h_5,0.9),(h_6,1.0)\},$$
$$F_{kötü}=\{(h_1,0.9),(h_2,0.3),(h_3,1.0),(h_4,1.0),(h_5,0.2)\}$$

şeklinde düşünülebilir. $F_{kötü}$ fuzzy kümesinin $\alpha-$seviye kümeleri

$$F_{kötü}(0.2)=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\},$$
$$F_{kötü}(0.3)=\{h_1,h_2,h_3,h_4\},$$
$$F_{kötü}(0.9)=\{h_1,h_3,h_4\} \text{ ve}$$
$$F_{kötü}(1.0)=\{h_3,h_4\} \text{ dir.}$$

$A=\{0.2,0.3,0.9,1.0\}\subset[0,1]$ parametrelerin kümesi ve her $\alpha\in A$ için $F_{kötü}(\alpha)$ ile tanımlı

$$F_{kötü}:A\to\wp(U)$$

küme değerli dönüşümü dikkate alınsın. Böylece

$$(F_{kötü},[0,1])=\{(0.2,\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}),(0.3,\{h_1,h_2,h_3,h_4\}),(0.9,\{h_1,h_3,h_4\}),(1.0,\{h_3,h_4\})\}$$

bir soft kümedir.

4. SOFT GRUPLAR

Bu kısımda Aktaş ve Çağman [2007] tarafından tanımlanan soft grup kavramı ve bazı temel özellikleri verilecektir. Bu bölüm boyunca, G bir grup ve A boştan farklı bir küme; R, A ile G nin elemanları arasında bir bağıntı ve $F(x)=\{y\in G \mid (x,y)\in R, x\in A \text{ ve } y\in G\}$ ile tanımlı $F:A\to\wp(G)$ küme değerli fonksiyon olarak alınacaktır. Bu durumda (F,A), G üzerinde bir soft kümedir.

4.1. Soft Gruplar ve Özellikleri

Tanım 4.1.1. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,A), G üzerinde bir soft küme olsun. Her $x\in A$ için $F(x)<G$ ise bu durumda (F,A) ya G üzerinde bir soft grup denir.

Örnek 4.1.1. [Aktaş ve Çağman 2007] $G = A = S_3 = \{e,(12),(13),(23),(123),(132)\}$ ve $F(x) = \{\, y\in G \mid xRy \Leftrightarrow y = x^n, n\in\mathbb{N} \,\}$ küme değerli fonksiyonu dikkate alınsın. Bu durumda (F,A) soft grubu, G nin alt gruplarının koleksiyonu olan $\{F(x) \mid x\in \mathrm{A}\}$ ailesidir. Böylece $F:A\to\wp(U)$ küme değerli fonksiyonu,

$F(e)=\{e\}$,
$F(12)=\{e,(12)\}$,
$F(13)=\{e,(13)\}$,
$F(23)=\{e,(23)\}$ ve
$F(123)=F(132)=\{e,(123),(132)\}$

şeklinde olur. Buradan her $x\in \mathrm{A}$ için $F(x)$, G nin alt grupları olduğundan (F,A), G üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 4.1.1. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,A) ve (H,A), G üzerinde iki soft grup olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\cap}(H,A)$, G üzerinde bir soft gruptur.

İspat. Tanım 3.1.11. den, $C = A\cap A = A$ olmak üzere $(F,A)\tilde{\cap}(H,A)=(U,C)$ ve her $x\in C$ için $U(x)=F(x)$ veya $U(x)=H(x)$ dir. Burada U, $U:A\to\wp(G)$ şeklinde bir fonksiyondur. Böylece (U,A), G üzerinde bir soft kümedir. (F,A) ve (H,A), G üzerinde iki soft grup olduğundan, her $x \in A$ için $U(x)=F(x)<G$ veya $U(x)=H(x)<G$ dir. Böylece $(F,A)\tilde{\cap}(H,A)$, G üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 4.1.2. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,A) ve (H,B), G üzerinde iki soft grup olsun. $A \cap B = \varnothing$ ise $(F,A)\tilde{\cup}(H,B)$, G üzerinde bir soft gruptur.

İspat. Tanım 3.1.12. den, $(F,A)\tilde{\cup}(H,B)=(U,C)$ yazılabilir. $A \cap B = \varnothing$ olduğundan her $x \in C$ için $x \in A-B$ veya $x \in B-A$ dır. $x \in A-B$ ise $U(x)=F(x)<G$ veya $x \in B-A$ ise $U(x)=H(x)<G$ dir. Böylece $(F,A)\tilde{\cup}(H,B)$, G üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 4.1.3. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,A) ve (H,B), G üzerinde iki soft grup olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\wedge}(H,B)$, G üzerinde bir soft gruptur.

İspat. Tanım 3.1.9. dan, $(F,A)\tilde{\wedge}(H,B)=(U,A\times B)$ yazılabilir. $F(\alpha)$ ve $H(\beta)$, G nin alt grupları olduğundan $F(\alpha)\cap H(\beta)$, G nin bir alt grubudur. Bu durumda her $(\alpha,\beta)\in A\times B$ için $U(\alpha,\beta)$ G nin bir alt grubudur. Böylece $(F,A)\tilde{\wedge}(H,B)$, G üzerinde bir soft gruptur.

Tanım 4.1.2. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,A), G üzerinde bir soft küme olsun. Bu durumda

(i) e, G nin birim elemanı olmak üzere, her $x \in A$ için $F(x)=\{e\}$ ise (F,A) ya G üzerinde birim soft grup denir.

(ii) Her $x \in A$ için $F(x)=G$ ise (F,A) ya G üzerinde tam (absolute) soft grup denir.

Teorem 4.1.4. [Aktaş ve Çağman 2007]

(1) (F,A), G üzerinde bir soft küme ve f, G den K ya bir homomorfizma olsun. Her $x \in A$ için $F(x)=Ker f$ ise $(f(F),A)$, K üzerinde birim soft gruptur.

(2) (F,A), G üzerinde tam (absolute) soft grup ve f, G den K üzerine bir homomorfizma olsun. Bu durumda $(f(F),A)$, K üzerinde tam (absolute) soft gruptur.

İspat.

(1) e_K , K nın birim elemanı olmak üzere, her $x \in A$ için $f(F(x)) = e_K$ dır. Tanım 4.1.2. den, $(f(F),A)$ K üzerinde birim soft gruptur.

(2) (F,A), G üzerinde tam (absolute) soft grup olduğundan, her $x \in A$ için $F(x) = G$ dir. Bu durumda her $x \in A$ için $f(F(x)) = f(G) = K$ elde edilir. Böylece Tanım 4.1.2. den, $(f(F),A)$, K üzerinde tam (absolute) soft gruptur.

4.2. Soft Alt Gruplar

Tanım 4.2.1. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,A) ve (H,K), G üzerinde iki soft grup olsun. Bu durumda

(i) $K \subset A$ ve

(ii) Her $x \in K$ için $H(x) < F(x)$

ise (H,K) ya (F,A) nın soft alt grubu denir ve $(H,K) \tilde{<} (F,A)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.2. de verilen birim ve tam (absolute) soft gruplar aşikâr soft alt gruplardır.

Örnek 4.2.1. [Aktaş ve Çağman 2007] $G = S_3$, $A = S_3$ ve $K = A_3$ olsun. $F(x) = \{ y \in S_3 \mid xRy \Leftrightarrow y = x^n, n \in \mathbb{N} \}$ ve $H(x) = \{ y \in A_3 \mid xRy \Leftrightarrow y \in \langle x \rangle \}$ şeklinde tanımlanırsa $A_3 < S_3$ ve her $x \in A_3$ için $H(x) < F(x)$ olduğundan $(H,K) \tilde{<} (F,A)$ dır.

Soft alt grup kavramı kullanılarak, klasik alt grupların özelliklerine benzer olan soft alt grupların bazı özelliklerinden bahsedilebilir. Bu özelliklerin ispatları kolayca görülebilir.

Teorem 4.2.1. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,A) ve (H,A), G üzerinde iki soft grup olsun. Bu durumda

(1) Her $x \in A$ için $F(x) \subseteq H(x)$ ise (F,A), (H,A) nın soft alt grubudur,

(2) $E=\{e\}$ ve (F,E), (F,G) G üzerinde soft alt gruplar ise $(F,E) \tilde{<} (F,G)$ dir.

Sonuç 4.2.1. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,G), G üzerinde soft grup ise, bu durumda $E=\{e\}$ olmak üzere (F,G) ve (F,E), (F,G) nin soft alt gruplarıdır.

İspat. Tanım 4.2.1. den ispatı açıktır.

Teorem 4.2.2. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,A), G üzerinde soft grup ve I indis kümesi olmak üzere $\{(H_i,K_i) \mid i \in I\}$, (F,A) nın soft alt gruplarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda

(1) $\bigcap_{i \in I}(H_i,K_i)$, (F,A) nın soft alt grubu,

(2) $\tilde{\bigwedge}_{i \in I}(H_i,K_i)$, $\tilde{\bigwedge}_{i \in I}(F,A)$ nın soft alt grubu ve

İspat. (1) Açıkça, $\bigcap_{i \in I} K_i \subset A$ dır. Her $i \in I$ için $(H_i,K_i) \tilde{<} (F,A)$ olduğundan $\bigcap_{i \in I}(H_i,K_i)$, (F,A) nın soft alt grubudur.

(2) Tanım 3.1.9. dikkate alınarak $B=\prod_{i \in I} K_i$ ve her $e=(e_i)_{i \in I} \in B$ için $\beta(e)=\bigcap_{i \in I} H_i(e_i)$ olmak üzere $\tilde{\bigwedge}_{i \in I}(H_i,K_i)=(\beta,B)$ yazılabilir. $\{(H_i,K_i) \mid i \in I\}$, (F,A) nın soft alt gruplarının boştan farklı bir ailesi olduğundan, her $i \in I$ için (H_i,K_i), (F,A) nın soft alt gruplarıdır. Yani her $i \in I$ için $K_i \subset A$ ve $H_i(e_i) < F(e_i)$ dir. Her $i \in I$ için $K_i \subset A$ ve $H_i(e_i) < F(e_i)$ olduğundan $B=\prod_{i \in I} K_i \subset \prod_{i \in I} A = A \times A \times ... \times A \times ...$ ve $\beta(e)=\bigcap_{i \in I} H_i(e_i) < \bigcap_{i \in I} F(e_i)$ olur. Böylece Tanım 4.2.1. den $\tilde{\bigwedge}_{i \in I}(H_i,K_i)$, $\tilde{\bigwedge}_{i \in I}(F,A)$ nın bir soft alt grubudur.

Teorem 4.2.3. [Aktaş ve Çağman 2007] (F,A) ve (H,B), G üzerinde iki soft grup ve (F,A), (H,B) nin soft alt grubu olsun. f, G den K ya bir homomorfizm ise

$\left(f\left(F\right),A\right)$ ve $\left(f\left(H\right),B\right)$ K üzerinde soft alt gruplardır ve $\left(f\left(F\right),A\right)$, $\left(f\left(H\right),B\right)$ nin soft alt grubudur.

İspat. f, G den K ya homomorfizm olduğundan, her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $f\left(F\left(x\right)\right)$ ve $f\left(H\left(y\right)\right)$ K nın alt gruplarıdır. Böylece $\left(f\left(F\right),A\right)$ ve $\left(f\left(H\right),B\right)$ K üzerinde soft gruplardır. $\left(F,A\right)$, $\left(H,B\right)$ nin soft alt grubu ise her $x \in A$ için $F\left(x\right)$, $H\left(x\right)$ in alt grubudur ve $f\left(F\left(x\right)\right)$, $f\left(H\left(x\right)\right)$ in alt grubudur. Tanım 4.2.1. den $\left(f\left(F\right),A\right) \tilde{<} \left(f\left(H\right),B\right)$ elde edilir.

Tanım 4.2.2. [Aktaş ve Çağman 2007] $\left(F,\mathrm{A}\right)$ ve $\left(H,B\right)$, sırasıyla G ve K üzerinde iki soft grup ve $f : G \to K$ ve $g : A \to B$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanırsa $\left(f,g\right)$ ye soft homomorfizm ve $\left(F,A\right)$, $\left(H,B\right)$ ye soft homomorfiktir denir.

(i) f, G den K üzerine homomorfizma,

(ii) g, A dan B üzerine bir dönüşüm ve

(iii) Her $x \in A$ için $f\left(F\left(x\right)\right) = H\left(g\left(x\right)\right)$. $\left(F,A\right)$, $\left(H,B\right)$ ye soft homomorfik ise $\left(F,A\right) \sim \left(H,B\right)$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.2. de f; G den K ya izomorfizm ve g; A dan B üzerine birebir bir dönüşüm ise bu durumda $\left(f,g\right)$ ye soft izomorfizm ve $\left(F,A\right)$, $\left(H,B\right)$ ye soft izomorfiktir denir. $\left(F,A\right)$, $\left(H,B\right)$ ye soft izomorfik ise $\left(F,A\right) \simeq \left(H,B\right)$ ile gösterilir.

Örnek 4.2.2. [Aktaş ve Çağman 2007] $\left(\mathbb{Z},+\right)$ ve $\left(\mathbb{Z}_m,\oplus\right)$ grupları dikkate alınsın. $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}_m$ üzerine, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f\left(k\right) = \overline{k}$ şeklinde bir homomorfizm ve $\mathbb{Z}^+$ dan $\mathbb{Z}_m$ üzerine, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $g\left(k\right) = \overline{k}$ şeklinde bir dönüşüm, $F : \mathbb{Z}^+ \to P\left(\mathbb{Z}\right)$, $F\left(x\right) = \left\{y \in \mathbb{Z} : y = 5kx,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ve $F : \mathbb{Z}_m \to P\left(\mathbb{Z}_m\right), H\left(u\right) = \left\{\overline{y} \in \mathbb{Z}_m : y = uk,\, k \in 5\mathbb{Z}\right\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F\left(x\right) = 5x\mathbb{Z}$ ve $H\left(u\right) = \left\{\overline{ku} : k \in 5\mathbb{Z}\right\}$ elde edilir. Açıkça $\left(F,\mathbb{Z}^+\right)$ ve $\left(H,\mathbb{Z}_m\right)$, sırasıyla

$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}_m$ üzerinde soft gruplardır.

$f\left(F\left(x\right)\right)=\left\{\overline{5xk}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ ve $H\left(g\left(x\right)\right)=\left\{\overline{xs}\mid s\in 5\mathbb{Z}\right\}$ olduğundan $f\left(F\left(x\right)\right)=H\left(g\left(x\right)\right)$ olduğu görülür. Böylece $\left(f,g\right)$ bir soft homomorfizmdir ve $\left(F,\mathbb{Z}^{+}\right)$, $\left(H,\mathbb{Z}_m\right)$ ye soft homomorfiktir.

4.3. Normal Soft Alt Gruplar

Tanım 4.3.1. [Aktaş ve Çağman 2007] $\left(F,A\right)$, G üzerinde bir soft grup ve $\left(H,B\right)$, $\left(F,A\right)$ nın soft alt grubu olsun. Her $x\in B$ için $H\left(x\right)$, $F\left(x\right)$ in normal alt grubu ise $\left(H,B\right)$ ye $\left(F,A\right)$ nın normal soft alt grubu denir ve $\left(H,B\right)\tilde{\triangleleft}\left(F,A\right)$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.1. [Aktaş ve Çağman 2007] $\left(F,A\right)$, G üzerinde soft grup ve I indis kümesi olmak üzere $\left\{\left(H_i,K_i\right)\mid i\in I\right\}$, $\left(F,A\right)$ nın normal soft alt gruplarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda

(1) $\bigcap_{i\in I}\left(H_i,K_i\right)$, $\left(F,A\right)$ nın normal soft alt grubudur.

(2) $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}\left(H_i,K_i\right)$, $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}\left(F,A\right)$ nın normal soft alt grubudur.

İspat. (1) Açıkça, $\bigcap_{i\in I}K_i\subset A$ dır. Her $i\in I$ için $\left(H_i,K_i\right)\tilde{\triangleleft}\left(F,A\right)$ olduğundan $\bigcap_{i\in I}\left(H_i,K_i\right)$, $\left(F,A\right)$ nın normal soft alt grubudur.

(2) Tanım 3.1.9. dikkate alınarak $B=\prod_{i\in I}K_i$ ve her $e=\left(e_i\right)_{i\in I}\in B$ için $\beta\left(e\right)=\bigcap_{i\in I}H_i\left(e_i\right)$ olmak üzere $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}\left(H_i,K_i\right)=\left(\beta,B\right)$ yazılabilir. $\left\{\left(H_i,K_i\right)\mid i\in I\right\}$, $\left(F,A\right)$ nın normal soft alt gruplarının boştan farklı bir ailesi olduğundan, her $i\in I$ için $\left(H_i,K_i\right)$, $\left(F,A\right)$ nın normal soft alt gruplarıdır. Yani her $i\in I$ için $K_i\subset A$ ve $H_i\left(e_i\right)\tilde{\triangleleft}F\left(e_i\right)$ dir. Her $i\in I$ için $K_i\subset A$ ve $H_i\left(e_i\right)\tilde{\triangleleft}F\left(e_i\right)$ olduğundan

$B=\prod_{i\in I}K_i\subset\prod_{i\in I}A=A\times A\times\ldots\times A\times\ldots$ ve $\beta(e)=\bigcap_{i\in I}H_i(e_i)\trianglelefteq\bigcap_{i\in I}F(e_i)$ olur. Böylece Tanım 4.2.1. den $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}(H_i,K_i)$, $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}(F,A)$ nın bir normal soft alt grubudur.

5. SOFT HALKALAR

Bu bölüm boyunca, R bir halka ve A boştan farklı bir küme; $\Re$, A ile R nin elemanları arasında bir bağıntı ve $\alpha(x)=\{y\in R\mid (x,y)\in\Re\}$ ile tanımlı $\alpha:A\to\wp(R)$, küme değerli fonksiyon olarak alınacaktır. Bu durumda (α,A), R üzerinde bir soft kümedir.

5.1. Soft Halkalar ve Özellikleri

Tanım 5.1.1. [Acar vd. 2010] (α,A), U üzerinde bir soft küme olsun. $Supp(\alpha,A)=\{x\in A\mid \alpha(x)\neq\varnothing\}$ kümesine, (α,A) soft kümesinin destekleyeni denir.

Destekleyeni boş kümeye eşit olmayan soft kümeye boş olmayan soft küme denir.

Tanım 5.1.2. [Acar vd. 2010] (α,A), R üzerinde boştan farklı bir soft küme olsun. Her $x\in A$ için $\alpha(x)$, R nin alt halkası ise bu durumda (α,A) R üzerinde bir soft halkadır.

Örnek 5.1.1. $R=A=Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ ve $\alpha(x)=\{y\in Z_6\mid x\Re y\Leftrightarrow xy\in\{0,2,4\}\}$ küme değerli fonksiyonu dikkate alınsın. Bu durumda

$\alpha(0)=\{0,1,2,3,4,5\},\alpha(1)=\{0,2,4\}$,
$\alpha(2)=\{0,1,2,3,4,5\},\alpha(3)=\{0,2,4\}$,
$\alpha(4)=\{0,1,2,3,4,5\},\alpha(5)=\{0,2,4\}$ dır.

Burada her $x\in A$ için $\alpha(x)$, R nin alt halkalarıdır. Dolayısıyla (α,A), R üzerinde bir soft halkadır.

Teorem 5.1.1. [Acar vd. 2010] (α,A) ve (β,B), R üzerinde iki soft halka olsun. Bu durumda $(\alpha,A)\tilde{\wedge}(\beta,B)$, R üzerinde bir soft halkadır.

İspat. Tanım 3.1.9. dan, her $(x,\mathrm{y}) \in A \times B$ için $\gamma(x,\mathrm{y}) = \alpha(x) \cap \beta(y)$ olmak üzere $(\alpha, A) \tilde{\wedge} (\beta, B) = (\gamma, A \times B)$ yazılabilir. $\alpha(x)$ ve $\beta(y)$, R nin alt halkaları olduğundan, $\alpha(x) \cap \beta(y)$ de R nin alt halkasıdır. Bu durumda her $(x,\mathrm{y}) \in A \times B$ için $\gamma(x,\mathrm{y}) = \alpha(x) \cap \beta(y)$, R nin alt halkasıdır. Böylece $(\alpha, A) \tilde{\wedge} (\beta, B)$, R üzerinde bir soft halkadır.

Teorem 5.1.2.[Acar vd. 2010] (α, A) ve (β, B), R üzerinde iki soft halka olsun. Bu durumda $(\alpha, A) \tilde{\sqcap} (\beta, B)$ bi-arakesiti, R üzerinde bir soft halkadır.

İspat. Tanım 3.1.13. den, bazı $x \in C = A \cap B$ için $\gamma(x) = \alpha(x) \cap \beta(x) \neq \emptyset$ olmak üzere $(\alpha, A) \tilde{\sqcap} (\beta, B) = (\gamma, C)$ yazılabilir. $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, R nin alt halkaları olduğundan, $\gamma(x) = \alpha(x) \cap \beta(x)$ de R nin alt halkasıdır. Sonuç olarak $(\gamma, C) = (\alpha, A) \tilde{\sqcap} (\beta, B)$ bi-arakesiti, R üzerinde bir soft halkadır.

Tanım 5.1.3. [Acar vd. 2010] (α, A) ve (β, B), R üzerinde iki soft halka olsun. Bu durumda
(i) $B \subset A$ ve
(ii) Her $x \in Supp(\beta, B)$ için $\beta(x)$, $\alpha(x)$ in alt halkası
ise (β, B) ye (α, A)nın soft alt halkası denir.

Örnek 5.1.3. [Acar vd. 2010] $R = A = 2\mathbb{Z}$ ve $B = 6\mathbb{Z} \subset A$ olsun. $\alpha(x) = \{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ve $\beta(x) = \{5nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlı

$$\alpha : A \rightarrow P(R) \quad \text{ve} \quad \beta : B \rightarrow P(R)$$

küme değerli fonksiyonları dikkate alınsın. Kolayca görülür ki her $x \in B$ için $\beta(x) = 5x\mathbb{Z}$, $x\mathbb{Z} = \alpha(x)$ in alt halkasıdır. Böylece (β, B), (α, A) nın soft alt halkasıdır.

Teorem 5.1.2. [Acar vd. 2010] (α, A) ve (β, B), R üzerinde iki soft halka olsun. Bu durumda;

(1) Her $x \in B \subset A$ için $\alpha(x) \subset \beta(x)$ ise, (β, B), (α, A) nın bir soft alt halkasıdır.

(2) (α, A) ve (β, B) boştan farklı ise, $(\alpha, A) \tilde{\sqcap} (\beta, B)$ bi-arakesiti, (α, A) nın bir soft alt halkasıdır.

İspat. (1) Doğruluğu açıktır.

(2) $(\alpha, A) \tilde{\sqcap} (\beta, B) = (\gamma, C)$ olsun. $A \cap B \subset A$ ve $\gamma(x) = \alpha(x) \cap \beta(x)$, $\alpha(x)$ in alt halkası olduğundan (γ, C), (α, A) nın soft alt halkasıdır. Benzer olarak (β, B) nin de (α, A) nın soft alt halkası olduğu görülebilir.

Örnek 5.1.2. [Acar vd. 2010] $R = \mathbb{Z}$, $A = 2\mathbb{Z}$ ve $B = 3\mathbb{Z}$ olsun. $\alpha(x) = \{2nx \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2x\mathbb{Z}$ ve $\beta(x) = \{3nx \mid n \in \mathbb{Z}\} = 3x\mathbb{Z}$ şeklinde tanımlı

$$\alpha : A \to P(R) \quad \text{ve} \quad \beta : B \to P(R)$$

küme değerli fonksiyonları dikkate alınsın. $C = A \cap B = 6\mathbb{Z}$ olmak üzere $(\alpha, A) \tilde{\sqcap} (\beta, B) = (\gamma, C)$ olsun. Her $x \in C$ için $\gamma(x) = \alpha(x) \cap \beta(x) = 6x\mathbb{Z}$, $\alpha(x) = 2x\mathbb{Z}$ ve $\beta(x) = 3x\mathbb{Z}$ halkalarının alt halkalarıdır. Sonuç olarak $(\alpha, A) \tilde{\sqcap} (\beta, B)$ bi-arakesiti, (α, A) ve (β, B) nin bir soft alt halkasıdır.

Teorem 5.1.3. [Acar vd. 2010] (α, A), R üzerinde soft halka ve I indis kümesi olmak üzere $\{(\alpha_i, A_i) \mid i \in I\}$, (α, A) nın soft alt halkalarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda

(1) $\tilde{\bigwedge}_{i \in I} (\alpha_i, A_i)$, R üzerinde bir soft halkadır.

(2) $\tilde{\sqcap}_{i \in I} (\alpha_i, A_i)$, R üzerinde bir soft halkadır.

(3) Her $i, j \in I$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ ise $\tilde{\bigcup}_{i \in I} (\alpha_i, A_i)$, R üzerinde bir soft halkadır.

İspat. Teorem 4.2.2. İspat (1) ve (2) ye benzer olarak ispat kolayca görülebilir.

5.2. Soft ideal ve İdealistik Soft Halkalar

Cebir teorisinde ideal kavramı oldukça önemlidir. Bu nedenle, soft halkalar için soft ideal kavramı U. Acar vd. [2010] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 5.2.1. [Acar vd. 2010] (α, A), R üzerinde bir soft halka olsun. Bu durumda

(i) $I \subset A$ ve

(ii) Her $x \in Supp(\gamma, I)$ için $\gamma(x)$, $\alpha(x)$ in ideali

ise (γ, I) ya R üzerinde (α, A) nın bir soft ideali denir ve $(\gamma, I) \tilde{\triangleleft} (\alpha, A)$ ile gösterilir.

Örnek 5.2.1. $A = \mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ ve her $x \in A$ için $\alpha(x) = \{y \in \mathbb{Z}_6 \mid x\Re y \Leftrightarrow xy \in \{0,2,4\}\}$ şeklinde tanımlı

$$\alpha : A \to \wp(\mathbb{Z}_6)$$

küme değerli fonksiyon olmak üzere (α, A), R üzerinde bir soft küme olsun.

$\alpha(0) = \mathbb{Z}_6, \alpha(1) = \{0,2,4\}, \alpha(2) = \mathbb{Z}_6,$
$\alpha(3) = \{0,2,4\}, \alpha(4) = \mathbb{Z}_6 \ \ ve \ \ \alpha(5) = \{0,2,4\}$

kümeleri $\mathbb{Z}_6$ nın alt halkalarıdır. Böylece (α, A), R üzerinde bir soft halkadır. $I = \{0,1,2\}$ ve her $x \in I$ için $\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Z}_6 \mid x\Re y \Leftrightarrow xy = 0\}$ şeklinde tanımlı

$$\gamma : I \to \wp(\mathbb{Z}_6)$$

küme değerli fonksiyon olmak üzere (γ, I), $\mathbb{Z}_6$ üzerinde bir soft küme olsun. Bu durumda

$\gamma(0)=\mathbb{Z}_6 \lhd \mathbb{Z}_6=\alpha(0)$,
$\gamma(1)=\{0\} \lhd \{0,2,4\}=\alpha(1)$ *ve*
$\gamma(2)=\{0,3\} \lhd \mathbb{Z}_6=\alpha(2)$ dir.

Dolayısıyla (γ,I), $(\alpha,\mathbb{Z}_6)$ nın bir soft idealidir.

Teorem 5.2.1. [Acar vd. 2010] (α,A) R üzerinde soft halka, (γ_1,I_1) ve (γ_2,I_2) de (α,A) nın soft idealleri olsun. Bu durumda $(\gamma_1,I_1)\tilde{\sqcap}(\gamma_2,I_2)$, (α,A) nın bir soft idealidir.

İspat. Teorem 5.1.2. (2) den ispat açıktır.

Teorem 5.2.2. [Acar vd. 2010] (α,A) ve (β,B) R üzerinde soft halka, (γ_1,I_1) ve (γ_2,I_2) de sırasıyla (α,A) ve (β,B) soft halkalarının idealleri olsun. Bu durumda $(\gamma_1,I_1)\tilde{\sqcap}(\gamma_2,I_2)$, $(\alpha,A)\tilde{\sqcap}(\beta,B)$ nin bir soft idealidir.

İspat. Tanım 3.1.13. den, her $x\in I$ için $I=I_1\cap I_2$ ve $\gamma(x)=\gamma_1(x)\cap\gamma_2(x)$ olmak üzere $(\gamma_1,I_1)\tilde{\sqcap}(\gamma_2,I_2)=(\gamma,I)$ yazılabilir. Benzer olarak, her $x\in C$ için $\chi(x)=\alpha(x)\cap\beta(x)$ ve $C=A\cap B$ olmak üzere $(\alpha,A)\tilde{\sqcap}(\beta,B)=(\chi,C)$ dir. $I_1\cap I_2$ boştan farklı olduğundan, $\gamma(x)=\gamma_1(x)\cap\gamma_2(x)\neq\varnothing$ olacak şekilde bir $x\in Supp(\gamma,I)$ vardır. $I_1\cap I_2\subset A\cap B$ olduğundan, her $x\in Supp(\gamma,I)$ için $\gamma(x)$ in, $\chi(x)$ halkasının bir ideali olduğu gösterilmelidir. $\gamma_1(x)\subset\alpha(x)$ ve $\gamma_2(x)\subset\beta(x)$ olduğundan, $\gamma_1(x)\cap\lambda_2(x)\subseteq\alpha(x)\cap\beta(x)$ olduğu görülür. Böylece $\gamma(x)$, R nin bir alt halkasıdır. Son olarak; her $r\in\chi(x)$ ve her $a\in\gamma(x)$ için $ra\in\gamma(x)$ olduğu gösterilmelidir. $\gamma_1(x)$, $\alpha(x)$ in bir ideali olduğundan $r\in\chi(x)=\alpha(x)\cap\beta(x)$ ve $a\in\gamma(x)=\gamma_1(x)\cap\gamma_2(x)$ için $ra\in\gamma_1(x)$ ve $ra\in\gamma_2(x)$ olduğu görülür. Böylece, $ra\in\gamma(x)$ elde edilir. Yani $(\gamma_1,I_1)\tilde{\sqcap}(\gamma_2,I_2)$, $(\alpha,A)\tilde{\sqcap}(\beta,B)$ nin bir soft idealidir.

Örnek 5.2.2. [Acar vd. 2010] $R = M_2(\mathbb{Z})$, yani tam sayılar üzerindeki 2×2 tipindeki matrislerin halkası, $A = 3\mathbb{Z}$, $B = 5\mathbb{Z}$, $I_1 = 6\mathbb{Z}$ ve $I_2 = 10\mathbb{Z}$ olsun.

$$\alpha(x) = \left\{ \begin{bmatrix} nx & 0 \\ 0 & nx \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \text{ve} \qquad \beta(x) = \left\{ \begin{bmatrix} nx & nx \\ 0 & nx \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha : A \to \wp(R) \quad \text{ve} \quad \beta : B \to \wp(R)$$

fonksiyonları dikkate alınsın. Açıkça $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, R nin alt halkalarıdır. Böylece (α, A) ve (β, B), R üzerinde soft halkalardır.

$$\gamma_1(x) = \left\{ \begin{bmatrix} nx & nx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \text{ve} \qquad \gamma_2(x) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & nx \\ 0 & nx \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklinde tanımlanan

$$\gamma_1 : I_1 \to \wp(R) \text{ ve } \gamma_2 : I_2 \to \wp(R)$$

küme değerli fonksiyonları dikkate alınırsa, $\gamma_1(x)$ ve $\gamma_2(x)$, sırasıyla $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ in idealleri olur. Her $x \in I_1 \cap I_2$ için

$$\gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & nx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \lhd \alpha(x) \cap \beta(x) = \left\{ \begin{bmatrix} nx & 0 \\ 0 & nx \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

elde edilir. Bu durumda $(\gamma_1, I_1) \tilde{\sqcap} (\gamma_2, I_2)$, $(\alpha, A) \tilde{\sqcap} (\beta, B)$ nin bir soft idealidir.

Teorem 5.2.3. [Acar vd. 2010] (α, A), R üzerinde bir soft halka, (γ_1, I_1) ve (γ_2, I_2) (α, A) nın soft idealleri olsun. I_1 ve I_2 ayrık ise bu durumda $(\gamma_1, I_1) \tilde{\cup} (\gamma_2, I_2)$, (α, A) nın soft idealidir.

İspat. Tanım 3.1.12. den, $I = I_1 \cup I_2$ ve

$$\beta(x)=\begin{cases}\gamma_1(x), & x\in I_1-I_2 \ ise\\ \gamma_2(x), & x\in I_2-I_1 \ ise\\ \gamma_1(x)\cup\gamma_2(x), & x\in I_1\cap I_2 \ ise\end{cases} \quad ,\forall x\in I$$

olmak üzere; $(\gamma_1,I_1)\tilde{\cup}(\gamma_2,I_2)=(\beta,I)$ yazılabilir. $(\gamma_1,I_1)\tilde{\triangleleft}(\alpha,A)$ ve $(\gamma_2,I_2)\tilde{\triangleleft}(\alpha,A)$ olduğundan $I\subset A$ olduğu görülür. Her $x\in Supp(\beta,I)$ için, I_1 ve I_2 ayrık olduğundan $x\in I_1-I_2$ ya da $x\in I_2-I_1$ dir. $x\in I_1-I_2$ ise $(\gamma_1,I_1)\tilde{\triangleleft}(\alpha,A)$ olduğundan $\beta(x)=I_1(x)\neq\emptyset$, $\alpha(x)$ in idealidir. Benzer olarak $x\in I_2-I_1$ ise $(\gamma_2,I_2)\tilde{\triangleleft}(\alpha,A)$ olduğundan $\beta(x)=I_2(x)\neq\emptyset$, $\alpha(x)$ in idealidir. Böylece her $x\in Supp(\beta,I)$ için, $\beta(x)\triangleleft\alpha(x)$ dir. Bu durumda (β,I), (α,A) nın soft idealidir.

Teorem 5.2.3. de I_1 ve I_2 ayrık olmasaydı, Örnek 5.2.3. de de görüldüğü gibi $(\gamma_1,I_1)\tilde{\cup}(\gamma_2,I_2)$, (α,A) nın soft ideali olamazdı.

Örnek 5.2.3. $A=\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ ve her $x\in A$ için $\alpha(x)=\{y\in\mathbb{Z}_6 \mid x\Re y\Leftrightarrow xy\in\{0,2,4\}\}$ şeklinde tanımlı

$$\alpha:A\to\wp(\mathbb{Z}_6)$$

küme değerli fonksiyon olmak üzere (α,A), R üzerinde bir soft küme olsun. Örnek 5.2.1. den (α,A) nın R üzerinde bir soft halka olduğunu biliniyor. $I=\{2,3,4,5\}$ ve her $x\in I$ için $A(x)=\{y\in\mathbb{Z}_6 \mid x\Re y\Leftrightarrow xy=0\}$ şeklinde tanımlı

$$A:I\to\wp(\mathbb{Z}_6)$$

küme değerli fonksiyon olmak üzere (A,I), $\mathbb{Z}_6$ üzerinde bir soft küme olsun. Bu durumda

$A(2)=\{0,3\}\triangleleft\mathbb{Z}_6=\alpha(2)$,
$A(3)=\{0,2,4\}\triangleleft\{0,2,4\}=\alpha(3)$,
$A(4)=\{0,3\}\triangleleft\mathbb{Z}_6=\alpha(4)$ ve
$A(5)=\{0\}\triangleleft\{0,2,4\}=\alpha(5)$ dir.

Dolayısıyla (A,I), $(\alpha,\mathbb{Z}_6)$ nın bir soft idealidir. Bununla birlikte, $J=\{4\}$ ve her $x\in J$ için $B(x)=\{0\}\cup\{y\in\mathbb{Z}_6 \mid x+y\in\{0,2\}\}$ şeklinde tanımlı

$$B:J\to\wp(\mathbb{Z}_6)$$

küme değerli fonksiyon olmak üzere (B,J), $\mathbb{Z}_6$ üzerinde bir soft küme olsun. $B(4)=\{0,2,4\}\lhd\mathbb{Z}_6=\alpha(4)$ olduğundan (B,J) de $(\alpha,\mathbb{Z}_6)$ nın bir soft idealidir. Bu durumda $3+4=1\notin C(4)$ ve $C(4)=A(4)\cup B(4)=\{0,2,3,4\}$, $\alpha(4)$ ün bir ideali olmadığından $(C,U)=(A,I)\tilde{\cup}(B,J)$, (α,A) nın bir ideali değildir.

Teorem 5.2.4. [Acar vd. 2010] (α,A), R üzerinde bir soft halka ve $(\gamma_k,I_k)_{k\in K}$, (α,A) nın soft ideallerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda

(1) $\tilde{\sqcap}_{k\in I}(\gamma_k,I_k)$, (α,A) nın üzerinde bir soft idealdir.

(2) $\tilde{\bigwedge\limits_{k\in I}}(\gamma_k,I_k)$, $\tilde{\bigwedge\limits_{k\in I}}(\alpha,A)$ nın üzerinde bir soft idealdir.

İspat. Teorem 4.2.2. İspat (1) ve (2) ye benzer olarak ispat kolayca görülebilir.

Tanım 5.2.2. [Acar vd. 2010] (α,A), R üzerinde boştan farklı bir soft küme olsun. Her $x\in Supp(\alpha,A)$ için $\alpha(x)$, R nin ideali ise bu durumda (α,A), R üzerinde bir idealistik soft halkadır.

Örnek 5.2.4. [Acar vd. 2010] Örnek 5.2.1. deki (α,A), her $x\in Supp(\alpha,A)$ için $\alpha(x)$ R nin ideali olduğundan, R üzerinde bir idealistik soft halkadır.

Örnek 5.2.5. R bir halka ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $S=R\times\mathbb{Z}$ halkası dikkate alınsın. Her $(y,n)\in R\times\mathbb{Z}$ için

$$\alpha(y,n)=\begin{cases} R\times n\mathbb{Z} & n\in\mathbb{N}\ ise, \\ \{(0,0)\} & n\notin\mathbb{N}\ ise, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı

$$\alpha : S \rightarrow \wp(S)$$

küme değerli fonksiyon olmak üzere (α, S), S üzerinde bir idealistik soft halkadır.

Bir halkanın her ideali aynı zamanda bir alt halka olduğundan, R üzerindeki her idealistik soft halka, R üzerinde bir soft halkadır. Ancak, tersi her zaman doğru değildir. Bu durumu bir örnekle görelim.

Örnek 5.2.6.

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

ve

$\bullet$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
c	0	a	b	c

işlemleri ile birlikte $R = \{0, a, b, c\}$ halkasını dikkate alalım. $A = R$ ve $x^n = xx...x$ olmak üzere her $x \in R$ için $\alpha(x) = \{ y \in R \mid x\Re y \Leftrightarrow y = x^n, n \in \mathbb{N} \}$ şeklinde tanımlı

$$\alpha : A \rightarrow \wp(R)$$

küme değerli fonksiyonu için $\alpha(0) = \{0\}, \alpha(a) = \{0, a\}, \alpha(b) = \{0, b\}$ ve $\alpha(c) = \{0, c\}$ R nin alt halkaları olduğundan (α, A), R üzerinde bir soft halkadır. Ancak $cb = b \notin \alpha(c)$ olduğundan $\alpha(c) = \{0, c\}$, R nin bir ideali değildir. Böylece (α, A), R üzerinde bir idealistik soft halka değildir.

Önerme 5.2.1. [Acar vd. 2010] (α, A), R üzerinde boştan farklı bir soft küme ve $B \subset A$ olsun. (α, A) R üzerinde bir idealistik soft halka ise (α, B) de R üzerinde bir idealistik soft halkadır.

Teorem 5.2.6. [Acar vd. 2010]) (α,A) ve (β,B), R üzerinde idealistik soft halkalar olsun. Bu durumda (α,A) ve (β,B) boştan farklı ise, $(\alpha,A)\tilde{\sqcap}(\beta,B)$ bi-arakesiti R üzerinde bir idealistik soft halkadır.

İspat. Tanım 3.1.13. den, her $x\in C=A\cap B$ için $\gamma(x)=\alpha(x)\cap\beta(x)\neq\varnothing$ olmak üzere $(\alpha,A)\tilde{\sqcap}(\beta,B)=(\gamma,C)$ yazılabilir. $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, R nin idealleri ve bir halkanın ideallerinin boştan farklı ailesi yine bir ideal olduğundan, her $x\in Supp(\gamma,C)$ için $\gamma(x)=\alpha(x)\cap\beta(x)\neq\varnothing$ de R nin bir idealidir. Sonuç olarak $(\gamma,C)=(\alpha,A)\tilde{\sqcap}(\beta,B)$ bi-arakesiti, R üzerinde bir idealistik soft halkadır.

Teorem 5.2.7. [Acar vd. 2010] (α,A) ve (β,B), R üzerinde idealistik soft halkalar olsun. A ve B ayrık ise $(\alpha,A)\tilde{\bigcup}(\beta,B)$, R üzerinde bir idealistik soft halkadır.

İspat. Tanım 3.1.12. den, $C=A\bigcup B$ ve

$$\gamma(x)=\begin{cases}\alpha(x), & x\in A-B\ ise\\ \beta(x), & x\in B-A\ ise\\ \alpha(x)\cup\beta(x), & x\in A\cap B\ ise\end{cases},\forall x\in C$$

olmak üzere; $(\alpha,A)\tilde{\bigcup}(\beta,B)=(\gamma,C)$ yazılabilir. A ve B ayrık ise $A\cap B=\varnothing$ dir. Böylece her $x\in Supp(\gamma,C)$ için, $x\in A-B$ ya da $x\in B-A$ dır. $x\in A-B$ ise, (α,A) R üzerinde idealistik soft halka olduğundan, $\gamma(x)=\alpha(x)$ R nin bir idealidir. Benzer olarak $x\in B-A$ ise, (β,B) R üzerinde idealistik soft halka olduğundan, $\gamma(x)=\beta(x)$ R nin bir idealidir. Böylece her $x\in Supp(\gamma,C)$ için, $\gamma(x)$ R nin bir ideali olur ve dolayısıyla $(\alpha,A)\tilde{\bigcup}(\beta,B)=(\gamma,C)$, R üzerinde bir idealistik soft halkadır.

R halkasının iki farklı idealinin birleşimi her zaman R nin ideali olamayacağından, Teorem 5.2.7. de A ve B ayrık olmasaydı, $(\alpha,A)\tilde{\bigcup}(\beta,B)$ R üzerinde bir idealistik soft halka olamazdı. Bu durumu bir örnekle inceleyelim.

Örnek 5.2.7. [Acar vd. 2010] $R=\mathbb{Z}_{10}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{0,4\}$ ve $B=\{4\}$ olsun. $\alpha(x)=\{y\in R \mid x.y=0\}$ ile tanımlı

$$\alpha : A \to \wp(R)$$

küme değerli fonksiyonu dikkate alınsın. Bu durumda $\alpha(0)=R \lhd R$ ve $\alpha(4)=\{0,5\}\lhd R$ dir. Böylece (α, A), R üzerinde bir idealistik soft halkadır. $\beta(x)=\{0\}\cup\{y\in R \mid x+y\in\{0,2,4,6,8\}\}$ ile tanımlı

$$\beta : B \to \wp(R)$$

küme değerli fonksiyonu dikkate alınırsa $\beta(4)=\{0,2,4,6,8\}\lhd R$ olduğu görülür. Böylece (β,B), R üzerinde bir idealistik soft halkadır. $\alpha(4)\cup\beta(4)=\{0,2,4,6,8\}$, R nin ideali olmadığından $(\alpha,A)\tilde{\cup}(\beta,B)$ R üzerinde idealistik soft halka değildir.

Teorem 5.2.8. [Acar vd. 2010] (α,A) ve (β,B), R üzerinde idealistik soft halkalar olsun. Bu durumda $(\alpha,A)\tilde{\wedge}(\beta,B)$, R üzerinde idealistik soft halkadır.

İspat. Tanım 3.1.9. dan, her $(x,\mathrm{y})\in A\times B=C$ için $\gamma(x,\mathrm{y})=\alpha(x)\cap\beta(y)$ olmak üzere $(\alpha,A)\tilde{\wedge}(\beta,B)=(\gamma,C)$ yazılabilir. (γ,C) nin boştan farklı olsun. $(x,y)\in Supp(\gamma,C)$ ise, bu durumda $\gamma(x,y)=\alpha(x)\cap\beta(y)\neq\varnothing$ dir. (α,A) ve (β,B), R üzerinde idealistik soft halkalar olduğundan, $\alpha(x)$ ve $\beta(y)$ boştan farklı kümeleri R nin idealleridir. Böylece iki idealin arakesiti ideal olduğundan, her $(x,y)\in Supp(\gamma,C)$ için $\gamma(x,\mathrm{y})$, R nin bir idealidir. Sonuç olarak, $(\alpha,A)\tilde{\wedge}(\beta,B)=(\gamma,C)$, R üzerinde idealistik soft halkadır.

Örnek 5.2.8. [Acar vd. 2010] $R=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{Z}\right\}$, $A=6\mathbb{Z}$ ve $B=10\mathbb{Z}$ olsun. $\alpha(x)=\left\{\begin{bmatrix} nx & nx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ ve $\beta(x)=\left\{\begin{bmatrix} 0 & nx \\ 0 & nx \end{bmatrix} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ ile tanımlı

$$\alpha : A \to \wp(R) \quad \text{ve} \quad \beta : B \to \wp(R)$$

fonksiyonları dikkate alınsın. (α, A) ve (β, B), R üzerinde idealistik soft halkalardır. $C = A \times B$ olmak üzere $(\alpha, A)\tilde{\wedge}(\beta, B) = (\gamma, C)$ olsun. Bu durumda t, x ve y nin en küçük ortak katı olmak üzere, her $(x, y) \in C$ için $\gamma(x, y) = \alpha(x) \cap \beta(y) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & tn \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \triangleleft R$ dir. Böylece $(\alpha, A)\tilde{\wedge}(\beta, B)$, R üzerinde idealistik soft halkadır.

Tanım 5.2.3. [Acar vd. 2010] (α, A), R üzerinde idealistik soft halka olsun. Bu durumda;

(i) Her $x \in A$ için $\alpha(x) = \{0\}$ ise (α, A) ya aşikâr idealistik soft halka denir.

(ii) Her $x \in A$ için $\alpha(x) = R$ ise (α, A) ya tam (absolute) idealistik soft halka denir.

Örnek 5.2.9.

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

ve

$\bullet$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	b
b	0	0	0	0
c	0	b	0	a

işlemleri ile birlikte $R = \{0, a, b, c\}$ halkasını dikkate alınsın. $A = R$ olmak üzere her $x \in R$ için $\alpha(x) = \{ y \in R \mid x\Re y \Leftrightarrow xy \in \{0, a, b\} \}$ şeklinde tanımlı

$$\alpha : A \to \wp(R)$$

küme değerli fonksiyonu verilsin. Bu durumda her $x \in A$ için $\alpha(x) = R$ olduğundan (α, A) tam (absolute) idealistik soft halkadır.

Örnek 5.2.10. [Acar vd. 2010] p bir asal tam sayı olmak üzere, $R = \mathbb{Z}_p$ ve $A = \mathbb{Z}_p - \{0\}$ olsun. $\alpha(x) = \left\{ y \in R \mid (x.y)^{p-1} = 1 \right\} \cup \{0\}$ ile tanımlı

$$\alpha : A \to \wp(R)$$

küme değerli fonksiyonu dikkate alınsın. Bu durumda her $x \in A$ için $\alpha(x) = R \lhd R$ dir. Böylece (α, A), R üzerinde tam (absolute) idealistik soft halkadır. $\beta(x) = \{y \in R \mid x.y = 0\}$ ile tanımlı

$$\beta : B \to \wp(R)$$

fonksiyonu dikkate alınırsa her $x \in A$ için $\beta(x) = \{0\} \lhd R$ dir. Böylece (β, B), R üzerinde aşikâr idealistik soft halkadır.

(α, A), R üzerinde bir soft küme ve $f : R \to R'$ halkalar arasında tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in A$ için $f(\alpha)(x) = f(\alpha(x))$ şeklinde tanımlı $f(\alpha) : A \to \wp(R')$ fonksiyonu dikkate alınırsa, R' üzerinde $(f(\alpha), A)$ soft kümesini tanımlayabiliriz. Tanım 5.1.1. den, $Supp(f(\alpha), A) = Supp(\alpha, A)$ olduğu görülür.

Önerme 5.2.2. [Acar vd. 2010] $f : R \to R'$ bir halka epimorfizması olsun. (α, A), R üzerinde bir idealistik soft halka ise $(f(\alpha), A)$, R' üzerinde bir idealistik soft halkadır.

İspat. Tanım 5.2.2. den, (α, A) boştan farklı bir soft küme ve (α, A), R üzerinde idealistik soft halka olduğundan $(f(\alpha), A)$, R' üzerinde boştan farklı bir soft kümedir. Her $x \in Supp(f(\alpha), A)$ için $f(\alpha)(x) = f(\alpha(x)) \neq \emptyset$ dir. Boştan farklı $\alpha(x)$ kümesi R nin ideali ve f bir epimorfizma olduğundan $f(\alpha(x))$, R' nün bir idealidir. Böylece her $x \in Supp(f(\alpha), A)$ için $f(\alpha(x))$, R' nün bir idealidir. Sonuç olarak, $(f(\alpha), A)$, R' üzerinde bir idealistik soft halkadır.

Teorem 5.2.9. [Acar vd. 2010] (α, A), R üzerinde idealistik soft halka ve $f : R \to R'$ bir halka epimorfizması olsun.

(1) Her $x \in A$ için $\alpha(x) = \ker(f)$ ise $(f(\alpha), A)$, R' üzerinde aşikâr idealistik soft halkadır.

(2) (α, A) tam (absolute) ise $(f(\alpha), A)$, R' üzerinde tam idealistik soft halkadır.

İspat. (1) Her $x \in A$ için $\alpha(x) = \ker(f)$ olsun. Bu durumda her $x \in A$ için $f(\alpha)(x) = f(\alpha(x)) = \{0_{R'}\}$ yazılabilir. Böylece Tanım 5.2.3. ve Önerme 5.2.2. den $(f(\alpha), A)$, R' üzerinde aşikâr idealistik soft halkadır.

(2) (α, A) nın tam (absolute) olsun. Bu durumda her $x \in A$ için $\alpha(x) = R$ dir. Böylece her $x \in A$ için $f(\alpha)(x) = f(\alpha(x)) = f(R) = R'$ olur. Sonuç olarak, Tanım 5.2.3. ve Önerme 5.2.2. den $(f(\alpha), A)$, R' üzerinde tam (absolute) idealistik soft halkadır.

Tanım 5.2.4. [Acar vd. 2010] (α, A) ve (β, B) sırasıyla R ve R' üzerinde soft halkalar olsun. $f : R \to R'$ ve $g : A \to B$ dönüşümlerini dikkate alalım. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (f, g) ikilisine bir soft halka homomorfizması denir.

(i) f bir halka epimorfizması,

(ii) g, bire bir dönüşüm ve

(iii) Her $x \in A$ için $f(\alpha(x)) = \beta(g(x))$.

(α, A) ve (β, B) arasında bir soft halka homomorfizması varsa, (α, A), (β, B) ye soft homomorfiktir denir ve $(\alpha, A) \sim (\beta, B)$ ile gösterilir. Ayrıca, f bir halka izomorfizması ve g bire bir ve örten bir dönüşüm ise, (f, g) soft halka izomorfizmasıdır. Bu durumda (α, A), (β, B) ye soft izomorfiktir denir ve $(\alpha, A) \simeq (\beta, B)$ ile gösterilir.

Örnek 5.2.12. [Acar vd. 2010] $R = \mathbb{Z}$ ve $R' = \{0\}$ halkalarını göz önüne alınsın. $A = 2\mathbb{Z}$ ve $B = \{0\} \times 6\mathbb{Z}$ olsun. (α, A) nın R üzerinde ve (β, B) nin R' üzerinde soft halka oldukları kolayca görülebilir. $\alpha(x) = x18\mathbb{Z}$ ve $\beta((0, y)) = \{0\} \times 6y\mathbb{Z}$ şeklinde tanımlı

$$\alpha : A \to \wp(R) \quad \text{ve} \quad \beta : B \to \wp(R')$$

küme değerli fonksiyonları verilsin. Bu durumda $f(x) = (0, x)$ ile tanımlı $f : R \to R'$

fonksiyonu bir halka izomorfizmidir. Diğer taraftan $g(y)=(0,3y)$ ile tanımlı $f:A\to B$ fonksiyonu bire bir ve örten bir dönüşümdür. Her $x\in A$ için $f(\alpha)(x)=f(18x\mathbb{Z})=\{0\}\times 18x\mathbb{Z}$ ve $\beta(g(x))=\beta(\{0\}\times 6x\mathbb{Z})=\{0\}\times 18x\mathbb{Z}$ elde edilir. Sonuç olarak (f,g) soft halka izomorfizmasıdır ve $(\alpha,A)\simeq(\beta,B)$ ile gösterilir.

6. SOFT GAMMA HALKALARI ve İDEALİSTİK SOFT GAMMA HALKALARI

Bu bölüm boyunca, $M\neq\varnothing$ bir Γ -halkası ve $\Re$; M , Γ ve M nin elemanları arasında tanımlı bir bağıntı, yani $\Re$, $M\times\Gamma\times M$ nin bir alt kümesi olarak dikkate alınacaktır. Her $a\in N$ için $H(a)=\{b\in M \mid \Re(a,\alpha,b), \forall\alpha\in\Gamma\}$ ile tanımlı $H:N\to\wp(M)$ küme değerli fonksiyon olmak üzere, (H,N) M üzerinde bir soft kümedir.

6.1. Soft Gamma Halkaları

Tanım 6.1.1. (H,N), M Γ -halkası üzerinde boştan farklı bir soft küme olsun. Her $a\in N\subset M$ için $H(a)$, M nin alt Γ -halkası ise (H,N) ye M üzerinde bir soft Γ -halkası denir.

Örnek 6.1.1. $M=\left\{\begin{bmatrix}\overline{0} & \overline{0} & \overline{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{0} & \overline{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{1} & \overline{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{0} & \overline{1} & \overline{0}\end{bmatrix}\right\}\subset(\mathbb{Z}_2)_{1\times 3}$ ve $\Gamma=\left\{\begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{0}\\ \overline{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}\right\}\subset(\mathbb{Z}_2)_{3\times 1}$ toplamsal değişimli grupları dikkate alınsın.

$$\begin{aligned}\cdot: M\times\Gamma\times M &\to M\\ (a,\alpha,b)&\mapsto a\alpha b\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda her $a,b,c\in M$ ve her $\alpha,\beta\in\Gamma$ için,

(i) $a\alpha b\in M$,

(ii) $(a+b)\alpha c=a\alpha c+b\alpha c$, $a(\alpha+\beta)b=a\alpha b+a\beta b$, $a\alpha(b+c)=a\alpha b+a\alpha c$,

(iii) $(a\alpha b)\beta c=a\alpha(b\beta c)$ koşulları sağlandığından M bir Γ -halkasıdır.

$N=\{[\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}],[\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]\}\subset M$ ve her $a\in N$ için

$H(a)=\{b\in M \mid \Re(a,\alpha,b)\Leftrightarrow a\alpha b\in\{[\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}],[\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}],[\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]\}, \forall\alpha\in\Gamma\}$

ile tanımlı

$$H:N\to\wp(M)$$

küme değerli fonksiyon olsun. Açıkça, $H=([\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}])=\{[\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}]\}$ ve

$H=([\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}])=\{[\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}],[\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}],[\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]\}$ kümeleri M nin alt Γ-halkalarıdır. Böylece (H,N), M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkasıdır.

Teorem 6.1.1. (F,A) ve (G,B), M Γ-halkası üzerinde soft Γ-halkaları olsun. Bu durumda $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$, M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkasıdır.

İspat. Tanım 3.1.9. dan, her $(x,y)\in A\times B$ için $H(x,y)=F(x)\cap G(y)$ olmak üzere $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$ yazabiliriz. $F(x)$ ve $G(y)$, M Γ-halkasının alt Γ-halkaları olduğundan, $F(x)\cap G(y)$de M Γ-halkasının alt Γ-halkasıdır. Bu durumda her $(x,y)\in A\times B$ için $H(x,y)=F(x)\cap G(y)$, M Γ-halkasının bir alt Γ-halkasıdır. Böylece $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$, M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkasıdır.

Tanım 6.1.2. (F,A) ve (G,B), M Γ-halkası üzerinde soft Γ-halkaları olsun. Bu durumda

(i) $B\subset A$ ve

(ii) Her $x\in B$ için $G(x), F(x)$ in alt Γ-halkası

ise (G,B) ye (F,A) nın soft alt Γ-halkası denir ve $(F,A)<_{\Gamma}(G,B)$ ile gösterilir.

Önerme 6.1.1. (F,A) ve (G,B), M Γ-halkası üzerinde soft Γ-halkaları olsun. Bu durumda;

(1) $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)$, M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkasıdır.

(2) Her $x \in A$ için $F(x) \subset G(x)$ ise, bu durumda (F,A), (G,B) nin bir soft alt Γ -halkasıdır.

İspat. (1) Tanım 3.1.11. den, her $x \in A$ için $H(x)=F(x)$ veya $G(x)$ olmak üzere $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)=(H,A)$ yazılabilir. (F,A) ve (G,B), M Γ -halkası üzerinde soft Γ -halkaları olduğundan, her $x \in A$ için $F(x)$ ve $G(x)$ M nin alt Γ -halkalarıdır. Böylece, her $x \in A$ için $H(x)$ M nin alt Γ -halkasıdır. Sonuç olarak $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)=(H,A)$, M Γ -halkası üzerinde bir soft Γ -halkasıdır. (2) Her $x \in A$ için $F(x) \subset G(x)$ olduğundan, $A \subset B$ ve her $x \in B$ için $F(x), G(x)$ in alt Γ -halkasıdır. Sonuç olarak, Tanım 6.1.2. den (F,A) nın (G,B) nin bir soft alt Γ -halkası olduğu görülür.

Tanım 6.1.3. $(F_i, A_i)_{i\in I}$, M Γ -halkası üzerinde soft Γ -halkaları olsun. Bu durumda,

(i) $B = \bigcap_{i\in I} A_i$,

(ii) Her $e \in B$ için $G(e) = F_{i_0}(e)$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır.

koşulları sağlanıyorsa, (G,B) soft Γ -halkasına $(F_i, A_i)_{i\in I}$ soft Γ -halkalarının arakesiti denir ve $\bigcap_{i\in I}(F_i, A_i) = (G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 6.1.4. $(F_i, A_i)_{i\in I}$, M Γ -halkası üzerinde soft Γ -halkaları olsun. Bu durumda,

(i) $B = \prod_{i\in I} A_i$ ve her $e = (e_i)_{i\in I} \in B$ için $G(e) = \bigcap_{i\in I} F_i(e_i)$ olmak üzere

$(G,B) = \tilde{\bigwedge}_{i\in I}(F_i, A_i)$ bir soft Γ -halkasıdır.

(ii) $C = \prod_{i\in I} A_i$ ve her $e = (e_i)_{i\in I} \in C$ için $G(e) = \bigcup_{i\in I} F_i(e_i)$ olmak üzere

$(G,C) = \tilde{\bigvee}_{i\in I}(F_i, A_i)$ bir soft Γ -halkasıdır.

Teorem 6.1.2. (F,A), M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkası olsun. I indis kümesi olmak üzere $\{(F_i,A_i) | i\in I\}$, (F,A) nın soft alt Γ-halkalarının boştan farklı bir ailesi ise, bu durumda,

(1) $\bigcap_{i\in I}(F_i,A_i)$, (F,A) nın bir soft alt Γ-halkasıdır.

(2) $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}(F_i,A_i)$, $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}(F,A)$ nın bir soft alt Γ-halkasıdır.

İspat. (1) Tanım 6.1.3. den ve her $i\in I$ için (F_i,A_i), (F,A) nın bir soft alt Γ-halkası olduğundan, her $x\in\bigcap_{i\in I}A_i\subset A$ ve her $i\in I$ için $G(x)=F_i(x)$ ile tanımlı $G:B\to\wp(M)$ fonksiyonu yazılabilir. Bu durumda, her $x\in B=\bigcap_{i\in I}A_i\subset A$ ve her $i\in I$ için $F_i(x)$, M Γ-halkasının bir alt Γ-halkası ve dolayısıyla $\bigcap_{i\in I}F_i(x)$, M Γ-halkasının bir alt Γ-halkasıdır. Böylece, (G,B) M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkasıdır. Sonuç olarak Tanım 6.1.3. den $(G,B)=\bigcap_{i\in I}(F_i,A_i)$, (F,A) nın bir soft alt Γ-halkasıdır.

(2) Tanım 3.1.9. dikkate alınarak $B=\prod_{i\in I}K_i$ ve her $e=(e_i)_{i\in I}\in B$ için $\beta(e)=\bigcap_{i\in I}H_i(e_i)$ olmak üzere $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}(H_i,K_i)=(\beta,B)$ yazılabilir. $\{(H_i,K_i) \mid i\in I\}$, (F,A) nın soft alt Γ-halkalarının boştan farklı bir ailesi olduğundan, her $i\in I$ için (H_i,K_i), (F,A) nın soft alt Γ-halkalarıdır. Yani her $i\in I$ için $K_i\subset A$ ve $H_i(e_i)<_\Gamma F(e_i)$ dir. Her $i\in I$ için $K_i\subset A$ ve $H_i(e_i)<_\Gamma F(e_i)$ olduğundan $B=\prod_{i\in I}K_i\subset\prod_{i\in I}A=A\times A\times\ldots\times A\times\ldots$ ve $\beta(e)=\bigcap_{i\in I}H_i(e_i)<_\Gamma\bigcap_{i\in I}F(e_i)$ olur. Böylece Tanım 4.2.1. den $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}(H_i,K_i)$, $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}(F,A)$ nın bir soft alt Γ-halkasıdır.

Tanım 6.1.5. (F,N), M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkası olsun.

(i) $U\subset N$ ve

(ii) Her $x \in U$ için $F(x)\Gamma G(x)$ $\left(F(x)\Gamma G(x)\right)$, $G(x)$ in alt kümesi

ise M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkası olan (G,U) ya (F,N) nin sol (sağ) soft ideali denir ve $(\gamma,I)\,\tilde{\lhd}_\Gamma\,(\alpha,A)$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.2. $M=\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right\}\subset(\mathbb{Z}_2)_{1\times 3}$ ve

$\Gamma=\left\{\begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{1}\\ \bar{0}\end{bmatrix}\right\}\subset(\mathbb{Z}_2)_{3\times 1}$ toplamsal değişimli grupları dikkate alınsın

$$\begin{gathered}\cdot : M\times\Gamma\times M\to M,\\ (a,\alpha,b)\mapsto a\alpha b\end{gathered}$$

olsun. Bu durumda M bir Γ-halkası olur. $N=\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right\}\subset M$

ve her $a\in N$ için

$F(a)=\left\{b\in M \,\middle|\, \Re(a,\alpha,b)\Leftrightarrow a\alpha b\in\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right\},\forall\alpha\in\Gamma\right\}$

ile tanımlı

$$F: N\to\wp(M)$$

küme değerli fonksiyon olmak üzere, Örnek 6.1.1. den, (F,N), M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkasıdır. $U=\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right\}\subset N$ ve her $a\in U$ için

$G(a)=\left\{b\in N \,\middle|\, \Re(a,\alpha,b)\Leftrightarrow a\alpha b\in\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right\},\forall\alpha\in\Gamma\right\}$ şeklinde tanımlı

$$G: U\to\wp(N)$$

küme değerli fonksiyonu dikkate alınırsa $G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)=N$ ve $G\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)=N$

olduğu görülür. Böylece; (i) $U\subset N$ ve

(ii) $F\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\Gamma G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$, $G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\Gamma F\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$ kümeleri

$G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)=N$ nin alt kümeleri ve $F\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\Gamma G\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$,

$G\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)\Gamma F\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$ kümeleri de $G\left(\begin{bmatrix}\bar{1} & \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)=N$ nin alt kümeleridir.

Sonuç olarak, M Γ-halkası üzerinde soft küme olan (G,U), (F,N) nin bir soft idealidir ve $(G,U)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,N)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 6.1.3. (F,A), M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkası olsun. $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ olmak üzere M Γ-halkası üzerinde herhangi (G_1,U_1) ve (G_2,U_2) soft kümeleri için, $(G_1,U_1)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$, $(G_2,U_2)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ ise $(G_1,U_1)\tilde{\cap}(G_2,U_2)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ dır.

İspat. Tanım 3.1.11. den, her $x \in U$ için $G(x)=G_1(x)$ veya $G_2(x)$ ve $U=U_1 \cap U_2$ olmak üzere $(G_1,U_1)\tilde{\cap}(G_2,U_2)=(G,U)$ yazılabilir. Açıkça $U \subset A$ ve $G:U \to \wp(M)$ bir dönüşümdür. Böylece (G,U), M Γ-halkası üzerinde bir soft kümedir. $(G_1,U_1)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ ve $(G_2,U_2)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ olduğundan her $x \in U$ için $G(x)=G_1(x)$, $F(x)$ in ideali veya $G(x)=G_2(x)$, $F(x)$ in idealidir. Sonuç olarak $(G_1,U_1)\tilde{\cap}(G_2,U_2)=(G,U)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ elde edilir.

Teorem 6.1.4. (F,A), M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkası olsun. I ve J ayrık olmak üzere; M Γ-halkası üzerinde herhangi iki soft küme (G,I) ve (H,J) olsun. Bu durumda $(G,I)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$, $(H,J)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ ise $(G,I)\tilde{\cup}(H,J)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ dır.

İspat. $(G,I)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ ve $(H,J)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ olsun. Tanım 3.1.12. den $U=I \cap J$ ve her $x \in U$ için

$$\zeta(x)=\begin{cases} G(x), & x \in I-J \ ise \\ H(x), & x \in J-I \ ise \\ G(x) \cup H(x), & x \in I \cap J \ ise \end{cases}$$

olmak üzere $(G,I)\tilde{\cup}(H,J)=(\zeta,U)$ yazılabilir. $I \cap J=\varnothing$ olduğundan, her $x \in U$ için ya $x \in I-J$ yada $x \in J-I$ dır. $x \in I-J$ ise $(G,I)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$ olduğundan $\zeta(x)=G(x)$, $F(x)$ in idealidir. Benzer olarak, $x \in J-I$ ise $(H,J)\,\tilde{\triangleleft}_\Gamma\,(F,A)$

olduğundan $\zeta(x)=H(x)$, $F(x)$ in idealidir. Böylece her $x\in U$ için $\zeta(x)$, $F(x)$ in idealidir. Sonuç olarak $(G,I)\tilde{\cup}(H,J)=(\zeta,U)\tilde{\lhd}_{\Gamma}(F,A)$ elde edilir.

Teorem 6.1.5. (F,A), M Γ-halkası üzerinde bir soft Γ-halkası olsun. J indis kümesi olmak üzere $\{(F_j,A_j)|j\in J\}$, (F,A) nın soft ideallerinin boştan farklı bir ailesi ise,

(1) $\bigcap_{j\in J}(F_j,I_j)\tilde{\lhd}_{\Gamma}(F,A)$ dır.

(2) $\tilde{\bigwedge}_{j\in J}(F_j,I_j)\tilde{\lhd}_{\Gamma}\tilde{\bigwedge}_{j\in J}(F,A)$ dır.

İspat. (1) Tanım 6.1.3. den ve her $j\in J$ için (F_j,I_j), (F,A) nın bir soft idealleri olduğundan, her $x\in C=\bigcap_{j\in J}I_j\subset A$ ve her $j\in J$ için $H(x)=F_j(x)$ ile tanımlı $H:C\to\wp(M)$ fonksiyonu yazılabilir. Bu durumda (H,C), M Γ-halkası üzerinde bir soft küme ve aynı zamanda her $x\in C$ ve her $j\in J$ için $F_j(x)$, $F(x)$ in bir ideali olduğundan her $x\in C$ için $\bigcap_{j\in J}(F_j,I_j)$, $F(x)$ in bir idealidir. Sonuç olarak Tanım 6.1.3. den $\bigcap_{j\in J}(F_j,I_j)=(H,C)\tilde{\lhd}_{\Gamma}(F,A)$ dır.

(2) Tanım 3.1.9. dikkate alınarak $B=\prod_{j\in I}K_j$ ve her $e=(e_j)_{j\in J}\in B$ için $\beta(e)=\bigcap_{j\in J}H_j(e_j)$ olmak üzere $\tilde{\bigwedge}_{j\in J}(H_j,K_j)=(\beta,B)$ yazılabilir. $\{(H_j,K_j)\mid j\in J\}$, (F,A) nın soft ideallerinin boştan farklı bir ailesi olduğundan, her $j\in J$ için (H_j,K_j), (F,A) nın soft idealleridir. Yani her $j\in J$ için $K_j\subset A$ ve $H_j(e_j)\tilde{\lhd}_{\Gamma}F(e_j)$ dir. Her $j\in J$ için $K_j\subset A$ ve $H_j(e_j)\tilde{\lhd}_{\Gamma}F(e_j)$ olduğundan $B=\prod_{j\in J}K_j\subset\prod_{j\in J}A=A\times A\times\ldots\times A\times\ldots$ ve $\beta(e)=\bigcap_{j\in J}H_j(e_j)\tilde{\lhd}_{\Gamma}\bigcap_{j\in J}F(e_j)$ olur. Böylece Tanım 4.2.1. den $\tilde{\bigwedge}_{j\in J}(H_j,K_j)$, $\tilde{\bigwedge}_{j\in J}(F,A)$ nın bir soft idealidir.

6.2. İdealistik Soft Γ -Halkalar

Tanım 6.2.1. (F,A), M Γ -halkası üzerinde bir soft Γ -halkası olsun. Her $x \in A$ için $F(x)$, M Γ -halkasının bir ideali ise (F,A) ya M Γ -halkası üzerinde bir idealistik soft Γ -halkası denir.

Bir Γ -halkasının her ideali bir alt Γ -halkası olduğundan, M Γ -halkası üzerindeki her idealistik soft Γ -halkası M Γ -halkası üzerinde bir soft Γ -halkasıdır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Önerme 6.2.1. $B \subseteq A \subseteq M$ olmak üzere, (F,A) ve (F,B) M Γ -halkası üzerinde soft kümeler olsun. Bu durumda (F,A) M Γ -halkası üzerinde bir idealistik soft Γ -halkası ise (F,B) de M Γ -halkası üzerinde bir idealistik soft Γ -halkasıdır.

Teorem 6.2.1. (F,A) ve (G,B), M Γ -halkası üzerinde idealistik soft Γ -halkaları olsun. $A \cap B \neq \varnothing$ ise $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$ M Γ -halkası üzerinde bir idealistik soft Γ -halkasıdır.

İspat. Tanım 3.1.11. den, her $x \in C = A \cap B$ için $H(x) = F(x)$ veya $G(x)$ olmak üzere $(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C)$ yazılabilir. $H : C \to \wp(M)$ bir dönüşüm olduğundan (H,C) M Γ -halkası üzerinde bir soft kümedir. (F,A) ve (G,B), M Γ -halkası üzerinde idealistik soft Γ -halkaları olduğundan, her $x \in C$ için $H(x) = F(x)$ ve $H(x) = G(x)$ M Γ -halkasının idealleridir. Böylece, her $x \in C$ için $H(x)$ M Γ -halkasının idealidir. Sonuç olarak $(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C)$, M Γ -halkası üzerinde bir idealistik soft Γ -halkasıdır.

Teorem 6.2.2. (F,A) ve (G,B), M Γ-halkası üzerinde idealistik soft Γ-halkaları olsun. $A\cap B=\varnothing$ ise $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$ M Γ-halkası üzerinde bir idealistik soft Γ-halkasıdır.

İspat. Tanım 3.1.12. den, $C=A\cup B$ ve her $e\in C$ için,

$$H(e)=\begin{cases} F(e), & e\in A-B \; ise \\ G(e), & e\in B-A \; ise \\ F(e)\cup G(e), & e\in A\cap B \; ise \end{cases},$$

olmak üzere; $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ yazılabilir. $A\cap B=\varnothing$ olduğundan her $x\in C$ için, $x\in A-B$ ya da $x\in B-A$ dır. $x\in A-B$ ise, (F,A) M Γ-halkası üzerinde idealistik soft Γ-halkası olduğundan, $H(x)=F(x)$ M Γ-halkasının bir idealidir. Benzer olarak $x\in B-A$ ise, (G,B) M Γ-halkası üzerinde idealistik soft Γ-halkası olduğundan, $H(x)=G(x)$ M Γ-halkasının bir idealidir. Böylece her $x\in C$ için $H(x)$, M Γ-halkasının bir idealidir. Bu durumda $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ M Γ-halkası üzerinde bir idealistik soft Γ-halkasıdır.

Teorem 6.2.3. (F,A) ve (G,B), M Γ-halkası üzerinde iki idealistik soft Γ-halkaları ise $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$, M Γ-halkası üzerinde bir idealistik soft Γ-halkasıdır.

İspat. Tanım 3.1.9 dan, her $(x,y)\in A\times B$ için $H(x,y)=F(x)\cap G(y)$ olmak üzere $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$ yazılabilir. $F(x)$ ve $G(y)$, M Γ-halkasının idealleri olduğundan, her $(x,y)\in A\times B$ için $F(x)\cap G(y)$ de M Γ-halkasının idealidir. Bu durumda her $(x,y)\in A\times B$ için $H(x,y)=F(x)\cap G(y)$, M Γ-halkasının bir ideali olur. Böylece $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$, M Γ-halkası üzerinde bir idealistik soft Γ-halkasıdır.

Tanım 6.2.2. (F,A), M Γ-halkası üzerinde idealistik soft Γ-halkası olsun.
(i) Her $x \in A$ için $F(x)=\{0\}$ ise (F,A) ya aşikâr idealistik soft Γ-halkası denir.
(ii) Her $x \in A$ için $F(x)=M$ ise (F,A) ya tam (absolute) idealistik soft Γ-halkası denir.

Lemma 6.2.1. $f: M \to N$, Γ-halkalarının bir epimorfizması olsun. (F,A), M Γ-halkası üzerinde idealistik soft Γ-halkası ise $(f(x),A)$, N Γ-halkası üzerinde idealistik soft Γ-halkasıdır.

İspat. Her $x \in A$ için, $F(x)$ M Γ-halkasının ideali ve f örten bir homomorfizma olduğundan $f(F(x))$, N Γ-halkasının bir idealidir. Dolayısıyla $f(F)(x)=f(F(x))$ N Γ-halkasının bir idealidir. Sonuç olarak $(f(x),A)$, N Γ-halkası üzerinde idealistik soft Γ-halkasıdır.

Teorem 6.2.4. $f: M \to N$, Γ-halkalarının bir epimorfizması ve (F,A), M Γ-halkası üzerinde idealistik soft Γ-halkası olsun.
(1) Her $x \in A$ için $F(x)=\ker(f)$ ise $(f(F),A)$, N Γ-halkası üzerinde bir aşikâr idealistik soft Γ-halkasıdır.
(2) (F,A) tam (absolute) ise $(f(F),A)$, N Γ-halkası üzerinde bir tam (absolute) idealistik soft Γ-halkasıdır.

İspat. (1) Her $x \in A$ için $F(x)=\ker(f)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $x \in A$ için $f(F)(x)=f(F(x))=\{0_N\}$ dir. Böylece Lemma 6.2.1. ve Tanım 6.2.2. den $(f(F),A)$, N Γ-halkası üzerinde bir aşikâr idealistik soft Γ-halkasıdır.
(2) (F,A) nın tam (absolute) olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $x \in A$ için $F(x)=M$ ve dolayısıyla her $x \in A$ için $f(F)(x)=f(F(x))=f(M)=N$ elde edilir. Böylece Lemma 6.2.1. ve Tanım 6.2.2. den $(f(F),A)$, N Γ-halkası üzerinde bir tam (absolute) idealistik soft Γ-halkasıdır.

Tanım 6.2.3. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M ve N Γ-halkaları üzerinde iki soft Γ-halkaları olsun. $f:M\to N$ ve $g:A\to B$ dönüşümleri dikkate alınsın. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa (f,g) ikilisine bir soft Γ-halka homomorfizması denir.

(i) f bir halka epimorfizması,

(ii) g, örten dönüşüm ve

(iii) Her $x\in A$ için $f\left(F\left(x\right)\right)=G\left(g\left(x\right)\right)$.

(F,A) ve (G,B) arasında bir soft Γ-halka homomorfizması varsa, (F,A), (G,B) ye soft homomorfiktir denir ve $(F,A)\sim_{\Gamma}(G,B)$ ile gösterilir. Ayrıca, f bir halka izomorfizması ise, (f,g) soft Γ-halka izomorfizmasıdır. Bu durumda (F,A), (G,B) ye soft izomorfiktir denir ve $(F,A)\simeq_{\Gamma}(G,B)$ ile gösterilir.

KAYNAKLAR

[1] C.H. Park, Y.B. Jun, M.A. Öztürk, Soft WS-algebras, Communications of Korean Mathematical Society. 23 (3) (2008), 313-324.

[2] D. Chen, E. C. C. Tsang, D. S. Yeung and X. Wang, The parametrization reduction of soft sets and its applications, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 757-763.

[3] D.S. Malik, and J. M. Mordeson, Fuzzy relations on rings and groups, Fuzzy Sets and Systems 43 (1991), 117-123.

[4] D. Molodtsov, Soft set theory- First results, Comput. Math. Appl. 37 (1999), 19-31.

[5] F. Feng, Y. B. Jun, X. Zhao, Soft semirings, Comput. Math. Appl. 56 (2008), 2621-2628.

[6] H. Aktaş and N. Çağman, Soft sets and soft groups, Inform. Sci. 177 (2007), 2726-2735.

[7] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. Control 8 (1965), 338-353.

[8] N. Nobusawa, On a generalization of the ring theory, Osaka J. Math. 1 (1964), 81-89.

[9] P. K. Maji, R. Biswas and A. R. Roy, Soft set theory, Comput. Math. Appl. 45 (2003), 555-562.

[10] P. K. Maji, A. R. Roy and R. Biswas, An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl. 44 (2002), 1077-1083.

[11] Qiu-Mei Sun, Zi-Long Zhang and Jing Liu, Soft Sets and Soft Modules, Coollage of Maths and Infor. Sci. 5009 (2008), 403-409.

[12] U. Acar, F. Koyuncu and B. Tanay, Soft sets and soft rings, Comput. Math. Appl. 59 (2010), 3458-3463.

[13] W. E. Barnes, On the Γ-rings of Nobusawa, Pacific J. Math. 18(1966), 411-422.

[14] Y.B. Jun, Soft BCK/BCI-algebra, Comput. Math. Appl. 56 (2008), 1408 1413.

[15] Y.B. Jun, C.H. Park, Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-Algebras, Information Sciences 178 (2008), 2466-2475.

[16] Baykal, N. , Beyan, T. , Bulanık Mantık İlke ve Temelleri, Aydan Ofset, Ankara, 2004.

[17] Ergun, N. , Kümeler Teorisine Giriş, Nobel Basımevi, Ankara, 2006.

[18] Hungerford, T. W. , Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.

[19] Herstein, I. H. , Rings with involution, Univ. of Chicago Pres, Chicago, 1976.

[20] Herstein, I. H. , Topics in ring theory, Univ. of Chicago Pres, Chicago, 1969.

ÖZGEÇMİŞ

Ebubekir İNAN 1987 yılında Malatya'da doğdu. İlköğrenimini ve Orta Öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2009 yılında aynı bölümden mezun oldu. 2009 yılında Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandı. Aynı yıl Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.