ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ GAMMA HALKALARI

Tuba ACET

DANIŞMAN
Yrd. Doç.Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

ADIYAMAN
2011

TEZ ONAYI

Tuba ACET tarafından hazırlanan "GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ GAMMA HALKALARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

Jüri Üyeleri:

Doç. Dr. Ramazan GÜRBÜZ
Adıyaman Üniversitesi, İlköğretim Matematik Eğitimi A. B. D.

Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK
Adıyaman Üniversitesi, Matematik A. B. D.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN
Adıyaman Üniversitesi, Matematik A. B. D.

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ GAMMA HALKALARI

Tuba ACET

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez konusu tanıtılmış ve bu konu ile ilgili çalışmalar hakkında kısa bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, bu tezi anlamada kolaylık sağlayacak genel bilgiler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde gamma halkalarında türev çeşitleri ve bu konudaki çalışmaların kısa bir özeti verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise asal gamma halkalarında $\theta-$türev ve $(\theta,\varphi)-$türev çalışılarak gamma halkasının yapısı hakkında bazı sonuçlar verilmiştir.

Temmuz 2011, 37+v sayfa

Anahtar Kelimeler: Halka, Asal halka, Türev, Gamma halkası, Asal gamma halkası, $\theta-$türev, $(\theta,\varphi)-$türev.

ABSTRACT

Master Thesis

GAMMA RINGS WITH GENERALIZED DERIVATIONS

Tuba ACET

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. M. Ali ÖZTÜRK

This thesis consists of three chapter. The first chapter of the thesis are introduced and given brief information about the studies on this subject.

In the second part of this thesis could assist in understanding the information given. Also in this section, gamma rings types of derivative are given a brief summary of studies on this issue until today.

In the third chapter by working in prime gamma rings $\theta -$derivation and $(\theta,\varphi) -$derivation, some results about the structure of gamma ring are given.

July 2011, 37+v pages

Key Words: Ring, Prime ring, Derivation, Gamma ring, Prime gamma ring, $\theta -$derivation, $(\theta,\varphi) -$derivation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yardımcı olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK'e teşekkür ederim. Çalışmamız süresince desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi Sayın Arş. Gör. Ebubekir İNAN'a şükranlarımı bir borç bilirim. Ayrıca benden manevi desteklerini esirgemeyen değerli eşim Arş. Gör. Bilal Eftal ACET'e teşekkür ederim.

Tuba ACET

Adıyaman, 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M	Asal $\Gamma-$halkası
Z	M asal $\Gamma-$halkasının merkezi
C_{Γ}	M asal $\Gamma-$halkasının genişletilmiş merkezi
CharM	M asal $\Gamma-$halkasının karakteristiği
d	$\Gamma-$türev
[,]	Lie çarpım

1. GİRİŞ

1964 yılında, halka kavramından daha genel olan gamma halka kavramı Nobusawa tarafından ortaya konulmuştur. Barnes (1966) yaptığı çalışmada, Nobusawa anlamında gamma halka kavramının tanımındaki koşulları biraz zayıflatmış ve gamma halka kavramını yeniden tanımlamıştır. Daha sonra Luh (1969), Kyuno (1978), Soytürk (1994), Öztürk ve Jun (2000) gibi birçok matematikçi gamma halkalarının ve asal gamma halkalarının yapısını incelemeye devam etmiş, halkalar teorisindeki sonuçlar ile ilgili bazı genelleştirmeler yapmışlardır.

Türevli halkalarda ilk çalışma 1957 yılında Posner tarafından yapılmıştır. Türev kavramından daha genel olan yarı-türev, zayıf $\alpha-$türev, $\alpha-$türev ve $(\sigma,\tau)-$türev gibi farklı türev tanımları Bergen (1983), Chang (1984), Hirano ve Tominaga (1985) tarafından verilmiş ve türevli asal (yarı-asal) halkalar için yapılan bazı çalışmalar, yukarıda ifade edilen türevler için genelleştirilmiştir.

Türevli gamma halkalarda ilk çalışma 1987 yılında Jing tarafından yapılmış ve bu çalışmadan sonra halkalarda türev çeşitleri ile ilgili yapılan çalışmalar gamma halkalarında yapılmıştır.

Bu tezin amacı, yukarıda ifade edilen çalışmalar, kaynaklar kısmında verilen diğer çalışmalar ve özellikle Uçkun ve Yenigül (1997), Öztürk, Jun ve Kim (2002) deki çalışmalar dikkate alınarak Barnes anlamında asal gamma halkalarda $\theta-$türev ve $(\theta,\varphi)-$türevlerle ilgili yeni sonuçlar elde etmektir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel tanımlar ile yapılacak ispatlarda çok sık kullanılacak olan gamma halkaların bazı özellikleri alındıkları kaynaklarla birlikte verilecektir.

2.1 Genel Bilgiler

Tanım 2.1.1 G boş olmayan bir küme olsun. G nin sıralı herhangi iki elemanına G nin bir tek elemanını karşılık getiren bir eşlemeye G de bir *ikili işlem* adı verilir ve

$$\begin{aligned} *: G \times G &\to G \\ (a,b) &\mapsto a*b \end{aligned}$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.2 G boş olmayan bir küme ve "$*$" da G de bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(G,*)$ cebirsel yapısına *grup* adı verilir:

i) Her $a,b,c \in G$ için, $(a*b)*c = a*(b*c)$ (*birleşme özelliği*),

ii) Her $a \in G$ için, $a*e = e*a = a$ olacak şekilde bir tek $e \in G$ vardır (*birim eleman özelliği*),

iii) Her $a \in G$ ye karşılık, $a*a' = a'*a = e$ olacak şekilde bir tek $a' \in G$ vardır. (*ters eleman özelliği*).

$(G,*)$ bir grup olsun. Her $a,b \in G$ için $a*b = b*a$ koşulunu da sağlayan $(G,*)$ ikilisine bir *değişmeli grup (komütatif grup)* adı verilir.
Eğer G "$+$"işlemine göre bir grup ve değişmeli ise G ye *toplamsal değişmeli grup* adı verilir ve $(G,+)$ ile gösterilir.

$(G,+)$ bir grup ve $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ ise

$$na = \begin{cases} a+a+\ldots+a & , \ n>0 \ ise \\ 0_G & , \ n=0 \ ise \\ (-a)+(-a)+\ldots+(-a) & , \ n<0 \ ise \end{cases}$$

Tanım 2.1.3 $(G,*)$ bir grup ve S de G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer S nin kendiside $"*"$ işlemine göre bir grup ise S ye G nin bir *alt grubu* denir ve $S \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 $(G,*)$ grubunun $(\{e\},*)$ ve $(G,*)$ alt gruplarına bu grubun *aşikâr alt grupları* denir. Bir $(G,*)$ grubunun aşikâr alt gruplarından farklı alt grupları varsa o zaman bu alt gruplara G nin *öz alt grupları* denir.

Tanım 2.1.5 R boş olmayan bir küme, $"+"$ ve $"\cdot"$ R de tanımlı ikili işlemler olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(R,+,\cdot)$ üçlüsüne bir *halka* adı verilir:

i) $(R,+)$ değişmeli bir gruptur,

ii) Her $a,b \in R$ için $(a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$,

iii) Her $a,b,c \in R$ için $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ ve $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Tanım 2.1.6 $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. Her $a,b \in R$ için $a\cdot b = b\cdot a$ ise R ye *değişmeli (komütatif) halka* denir. Her $a \in R$ için $a\cdot 1_R = 1_R \cdot a$ olacak şekilde $1_R \in R$ var ise R ye *birimli halka* denir.

Tanım 2.1.7 R bir halka ve $a,b \in R$ olsun. $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ iken $a\cdot b = 0$ $(b\cdot a = 0)$ oluyorsa a ya bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Eğer a hem sol hem de sağ sıfır bölen ise a ya *sıfır bölen* denir.

Tanım 2.1.8 R bir halka olsun. Eğer her $a,b \in R$ için $ab = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ ise o zaman R ye *sıfır bölensiz halka* denir.

Tanım 2.1.9 R birimli bir halka ve $a \in R$ olsun. $c\cdot a = 1_R$ ($a\cdot b = 1_R$) olacak biçimde $c \in R$ $(b \in R)$ varsa a ya *sol (sağ) tersinir eleman* denir. Eğer a elemanı hem sol hem de sağ tersinir ise a ya *tersinir eleman* denir.

Tanım 2.1.10 R ve S birer halka olsun. $f: R \to S$ fonksiyonu her $a,b \in R$ için $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ve $f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$ özelliklerini sağlıyorsa f ye *halka homomorfizması* denir.

f halka homomorfizması bire-bir ise f ye *monomorfizma*, örten ise f ye *epimorfizma*, bire-bir ve örten ise f ye *izomorfizma* denir $f : R \to R$ izomofizma ise f ye R nin *otomorfizması* denir.

Tanım 2.1.11 $f : R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda $Kerf = \{r \in R \mid f(r) = 0_S\}$ ve $\operatorname{Im} f = \{s \in S \mid f(r) = s, \exists r \in R\}$ kümelerine sırasıyla f nin *çekirdeği* ve *görüntüsü* denir.

Tanım 2.1.12 R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $na = 0_R$ olacak şekilde en küçük n pozitif tamsayısına R nin *karakteristiği* denir ve $charR = n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13 R bir halka ve $\varnothing \neq U \subseteq R$ olsun. Buna göre

i) Her $a, b \in U$ için $a - b \in U$,

ii) Her $a \in U$ ve her $r \in R$ için $a \cdot r \in U$ $(r \cdot a \in U)$ ise U ya R nın *sağ (sol) ideali* denir.

Ayrıca U, R nin hem sağ hem de sol ideali ise U ya R nin *ideali* denir.

Tanım 2.1.14 R halkasının R ve $\{0_R\}$ ideallerine *aşikâr (trivial)* idealler denir. U, R nin $U \neq (0_R)$ ve $U \neq R$ olacak şekilde bir ideali ise U ya *öz (proper) ideal* denir.

Tanım 2.1.15 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. R nin bir P ideali için $a \cdot b \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye R nin *asal ideali* denir.

Tanım 2.1.16 R bir halka ve $0_R \neq A_1, A_2, ..., A_n$ R nin idealleri olsun. Buna göre $A_1, A_2, ..., A_n$ ideallerinin toplamı

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \{a_1 + a_2 + ... + a_n \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n\}$$

ve $A_1, A_2, ..., A_n$ ideallerinin çarpımı

$$A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot a_{2j} \cdot ... \cdot a_{mj} \mid a_{ij} \in A_j, j = 1, 2, ..., m, i = 1, 2, ..., n \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Özel olarak $0_R \neq A$, B R nin iki ideali ise o zaman

$$A \cdot B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in Z^+ \right\}$$ biçiminde tanımlanır.

Eğer $A = \{a\}$ ise $A \cdot B = a \cdot B$ ve $B = \{b\}$ ise $A \cdot B = A \cdot b$ biçiminde gösterilir. Yani

$$a \cdot B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a \cdot b_i \mid b_i \in B, n \in Z^+ \right\} = \{ab_1 + ab_2 + ... + ab_n \mid b_i \in B\} = \{a(b_1 + b_2 + ... + b_n \mid b_i \in B\}$$
$$= \{ab \mid b \in B\}$$

ve $A \cdot b = \{ab \mid a \in A\}$ biçiminde olur. Bu durumda

$$A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_m \mid a_i \in A_i, 1 \le i \le n \right\}$$ dir. Her i için $A_i = A$ ise $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n = A^n$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.1 R bir halka ve P, R nin bir ideali olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) P asal idealdir.

ii) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

iii) $< a >, < b >$ R nin esas idealleri olmak üzere $< a >< b > \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

iv) U, V R nin sağ (sol) idealleri olmak üzere, $UV \subseteq P$ ise $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

Tanım 2.1.17 R halka olsun. Her $a, b \in R$ olmak üzere $aRb = 0_R$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R ye *asal halka* denir.

Tanım 2.1.18 V boş olmayan bir küme olsun. Buna göre F bir cisim olmak üzere

$$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : F \times V \to V$$
$$(u, v) \mapsto u + v \qquad (k, v) \mapsto kv$$

işlemleri tanımlansın. Bu durumda

i) $(V, +)$ değişmeli grup,

ii) $\forall u, v \in V$ ve $\forall k \in F$ için $k(u + v) = ku + kv$,

iii) $\forall u \in V$ ve $\forall k_1, k_2 \in F$ için $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$,

iv) $\forall u \in V$ ve $\forall k_1, k_2 \in F$ için $(k_1 k_2)u = k_1(k_2 u)$,

v) $\forall u \in V$ ve $1_F \in F$ için $1_F \cdot u = u$,

özellikleri sağlanırsa V ye F üzerinde bir *sol vektör uzayıdır* denir.

Tanım 2.1.19 R bir halka ve A toplamsal değişmeli grup olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa A ya bir *sol* $R-$*modül* denir ve ${}_R A$ ile gösterilir.

i) $\forall a, b \in A$ ve $\forall r \in R$ için $r(a+b) = ra + rb$,

ii) $\forall a \in A$ ve $\forall r, s \in R$ için $(r+s)a = ra + sa$,

iii) $\forall a \in A$ ve $\forall r, s \in R$ için $r(sa) = (rs)a$.

Ayrıca, eğer R birimli olduğunda

iv) $\forall a \in A$ için $1_R \cdot a = a$

özelliğini sağlarsa o zaman A ya *unitary* $R-$*modül* denir.

Burada $: R \times A \to R,\ (r, a) \mapsto ra$ biçiminde (skaler ile) çarpma işlemi tanımlanmış ve benzer olarak, $: A \times R \to A,\ (a, r) \mapsto ar$ biçiminde çarpma işlemini tanımlayarak yukarıdaki özelliklerin sağlandığı gösterilebilir. Bu durumda A ya bir *sağ* $R-$*modül* denir ve A_R ile gösterilir. A hem sağ hem de sol $R-$modül ise o zaman A ya $R-$*modül* denir ve ${}_R A_R$ ile gösterilir.

Uyarı 2.1.1 R bir değişmeli halka ve A bir sol $R-$modül ise A ya *sağ* $R-$*modül* yapısı vardır denir.

Lemma 2.1.1 R bir halka ve A bir $R-$modül olsun. Bu durumda R ve A nın toplamsal birimleri sırasıyla 0_R ve 0_A ise her $a \in A$ ve her $r \in R$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $r0_A = 0_A$,

ii) $0_R a = 0_A$,

iii) $(-r)a = -(ra)$,

iv) $n(ra) = r(na)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Tanım 2.1.20 R bir halka ve A bir $R-$modül ve B, A nın boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre

i) B, A nın toplamsal alt grubu,

ii) Her $r \in R$ ve her $b \in B$ için $rb \in B$ ise o zaman B ye A nın *alt modülü* denir.

R bir bölüm (division) halkası ise o zaman alt modüle *alt vektör uzayı* denir. Her modül kendisinin alt modülüdür. Ayrıca, birimli bir halka üzerindeki bir unitary modülün bir alt modülü de unitary modüldür.

Tanım 2.1.21 R bir halka ve A, B de $R-$modüller olsun. Buna göre $f: A \to B$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa f ye *$R-$modül homomorfizması* denir:

Her $a,b \in A$ ve her $r \in R$ için

i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

ii) $f(ra) = rf(a)$.

Eğer R bir bölüm (division) halkası ise f $R-$modül homomorfizmasına *lineer dönüşüm* denir. f bire-bir ise f ye *$R-$modül monomorfizması*, f örten ise f ye *$R-$modül epimorfizması*, f bire-bir ve örten ise f ye *$R-$modül izomorfizması* denir.

Uyarı 2.1.2 R bir halka ve A, B de $R-$modüller olmak üzere $f: A \to B$ $R-$modül homomorfizması olsun. Buna göre

i) f bir $R-$modül izomorfizmasıdır ancak ve ancak $gf = 1_A$ ve $fg = 1_B$ olacak biçimde bir $g: B \to A$ $R-$modül homomorfizması vardır.

ii) f bir $R-$modül monomorfizmasıdır ancak ve ancak $Kerf = \{0_R\}$ dır.

Tanım 2.1.22 R bir halka olsun. $x, y \in R$ için $[x,y] = xy - yx$ çarpımına *Lie çarpım* veya özel olarak x ile y nin *komütatörü* denir.

Komütatörün özellikleri:

i) $[x,yz] = y[x,z] + [x,y]z$,

ii) $[xy,z] = x[y,z] + [x,z]y$,

iii) $\left[x,\left[y,z\right]\right]+\left[y,\left[z,x\right]\right]+\left[z,\left[x,y\right]\right]=0$ (Jacobi özdeşliği).

Tanım 2.1.23 $\varnothing \neq A$, R halkasının bir alt kümesi olmak üzere

i) $\forall a,b \in A$ için $a-b \in A$

ii) $\forall a,b \in A$ için $\left[a,b\right]=ab-ba \in A$ ise A ya R nin *Lie alt halkası* denir.

Lemma 2.1.2 R bir asal halka olsun. Buna göre her $r \in R$ için $b\left[a,r\right]=0$ ise $b=0$ veya $a \in Z(R)$ dir.

İspat. Her $r \in R$ için $b\left[a,r\right]=0$ da r yerine ry yazılırsa her $r,y \in R$ için $b\left[a,ry\right]=0$ olur. Böylece $0=b\left[a,ry\right]=br\left[a,y\right]+b\left[a,r\right]y$ olur ve dolayısıyla her $r \in R$ için $br\left[a,y\right]=0$ elde edilir. Bu durumda $bR\left[a,y\right]=0$ dır. R asal halka olduğu için $b=0$ veya $\left[a,y\right]=0$ olur. Her $y \in R$ için $\left[a,y\right]=ay-ya=0$ ise her $y \in R$ için $ay=ya$ olacağından $a \in Z(R)$ dir.

Tanım 2.1.24 (Posner 1957) R bir halka ve $d:R \to R$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa d ye bir *türev* denir. Her $x,y \in R$ için

i) $d(x+y)=d(x)+d(y)$,

ii) $d(xy)=d(x)y+xd(y)$.

R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda $d_a : R \to R,\ d_a(x)=\left[a,x\right]=ax-xa$ biçimde tanımlanan dönüşüm, her $x,y \in R$ için

$$\begin{aligned} d_a\left(x+y\right)=\left[a,x+y\right]&=a(x+y)-(x+y)a \\ &=ax+ay-xa-ya \\ &=\left[a,x\right]+\left[a,y\right]=d_a(x)+d_a(y) \end{aligned}$$

ve

$$d_a(xy)=\left[a,xy\right]=\left[a,x\right]y+x\left[a,y\right]=d_a(x)y+xd_a(y)$$

olduğundan bir türevdir.

Tanım 2.1.25 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda $d_a : R \to R$, $d_a(x)=\left[a,x\right]=ax-xa$ biçimde tanımlanan türeve a ile belirlenen *iç türev* denir.

Tanım 2.1.26 (Bergen 1983) R bir halka ve f R nin bir toplamsal dönüşümü olsun. Her $x, y \in R$ için

i) $f(xy) = f(x)g(y) + xf(y) = f(x)y + g(x)f(y)$,

ii) $f(g(x)) = g(f(x))$

olacak biçimde R nin bir g dönüşümü varsa o zaman f ye R nin g ile *belirlenmiş yarı-türevi* denir.

Her türev bir yarı-türevdir, ama tersi daima doğru değildir. Çünkü I R nin özdeşlik dönüşümü ve $g(\neq I)$, R nin bir homomorfizması olmak üzere, $f = g - I$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu bir yarı-türev olmasına rağmen bir türev değildir.

Tanım 2.1.27 (Chang 1984) R bir halka ve σ R nin bir otomorfizması olmak üzere, $d: R \to R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)\sigma(y) + xd(y)$ şartını sağlarsa d ye R nin $\sigma -$ *türevi* denir.

Tanım 2.1.28 (Hirano ve Tominaga 1985) R bir halka ve σ ve τ da R nin birer halka otomorfizması olmak üzere, $d: R \to R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$ şartını sağlarsa d ye R nin $(\sigma, \tau) -$ *türevi* denir.

U, R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun U dan R içine olan tüm sol $R-$modül homomorfizmalarının kümesi M olsun.

$M = \{(U, f) \mid f: U \to R$ sol R-modül homomorfizması $\}$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan "$\sim$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

"$(U, f) \sim (V, g) :\Leftrightarrow R$ nin sıfırdan farklı bir $W \subseteq U \cap V$ ideali üzerinde $f = g$ dir."

M kümesinin bir (U, f) elemanının denklik sınıfı $\overline{(U, f)}$ ile gösterilsin. M kümesinin denklik sınıflarının kümesi $Q_l(R)$ ile gösterilsin. $Q_l(R)$ kümesi

$$\overline{(U, f)} + \overline{(V, g)} = \overline{(U \cap V, f + g)}$$
$$\overline{(U, f)}\ \overline{(V, g)} = \overline{(VU, fg)}$$

işlemleri ile R ($\lambda_a : R \to R,\ \lambda_a(x) = xa$ biçiminde tanımlanan R-modül homomorfizması yardımıyla R, $Q_l(R)$ içine gömülebilir) halkasını kapsayan bir asal halkadır.

Tanım 2.1.29 (Passman 1989) Yukarıda oluşturulan $Q_l(R)$ halkasına *sol Martindale kesirler halkası* denir. Benzer şekilde, sağ Martindale kesirler halkası $Q_r(R)$ de tanımlanabilir. $Q_r(R)$ ($Q_l(R)$) halkasının merkezine R asal halkasının genişletilmiş merkezi (extended centroid) denir ve C ile gösterilir. $Z(R) \subset C$ olduğu açıktır. Üstelik, bir R asal halkasının genişletilmiş merkezi bir cisimdir.

2.2 Gamma Halkaları

Modül endomorfizmalarının halkası matematiğin birkaç dalında çok önemli rol oynar. Modül endomorfizmalarının kümesi fonksiyonlardaki toplama ve bileşke işlemleri ile bir halkadır. Bu fikrin bir genelleştirilmesi gibi bir modülden başka bir modüle tanımlanan homomorfizmaların kümesi toplama işlemine göre kapalıdır. Fakat bir halkadaki gibi çarpma işlemi tanımlı olmadığından bu küme halka olamaz. Gerçekten; A ve B birer $R-$modül olmak üzere

$$M = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{A,B}) = \{\ f \mid f : A \to B \text{ bir } R-\text{modül homomorfizması}\}$$

$$N = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{A,B}) = \{\ g \mid g : B \to A \quad \text{bir } R-\text{modül homomorfizması}\}$$

kümeleri tanımlansın. Böylece

$$\begin{aligned} &+ : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M} \\ &(f, g) \mapsto f + g : A \to B \\ &\qquad\qquad\qquad \mathrm{a} \mapsto (f+g)(a) = f(a) + g(a) \end{aligned}$$

işlemi tanımlanır, fakat

$$\begin{aligned} &\cdot : M \times M \to M \\ &(f, g) \mapsto f \cdot g : A \to B \\ &\qquad\qquad\qquad a \mapsto (f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a) \end{aligned}$$

işlemi tanımlanamaz.

Bu işlemin tanımlanabilmesi için fonksiyonlardaki bileşke işlemini kullanmalıyız. Dolayısıyla M nin elemanları f_1, f_2, f_3 ve N nin elemanları g_1, g_2 olmak üzere

$$\cdot : M \times N \times M \to M$$
$$(f_1, g, f_2) \mapsto f_1 g f_2 : A \to B$$
$$a \mapsto (f_1 g f_2)(a) = f_1(g(f_2(a)))$$

işlemi iyi tanımlı olur ve buradan

$(f_1 g_1 f_2) g_2 f_3 = f_1 g_1 (f_2 g_2 f_3) = f_1 (g_1 f_2 g_2) f_3$ yazılabilir.

Tanım 2.2.1 (Nobusawa 1964) Elemanları $a, b, c, ...$ olan M toplamsal grup ve elemanları $\alpha, \beta, \gamma, ...$ olan başka bir Γ toplamsal grup verilsin. Buna göre

$$\cdot : M \times \Gamma \times M \to M \qquad \text{ve} \qquad \cdot : \Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma$$
$$(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b \qquad\qquad (\gamma, a, \beta) \mapsto \gamma a \beta$$

işlemleri ile aşağıdaki özellikler sağlanırsa o zaman M ye $\Gamma-$*halkası* denir.
Her $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in M$ ve her $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için

i) $(a_1 + a_2)\gamma b = a_1 \gamma b + a_2 \gamma b$,

$a(\gamma_1 + \gamma_2)b = a\gamma_1 b + a\gamma_2 b$,

$a\gamma(b_1 + b_2) = a\gamma b_1 + a\gamma b_2$,

ii) $(a\gamma b)\beta c = a\gamma(b\beta c) = a(\gamma b \beta)c$,

iii) $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ iken $a\gamma b = 0$ ise $\gamma = 0$ dır.

Tanım 2.2.2 M bir $\Gamma-$halkası olsun. M nin sıfırdan farklı a elemanı için $a\gamma a \neq 0$ olacak biçimde bir sıfırdan farklı $\gamma \in \Gamma$ varsa o zaman M ye *yarı basit* denir. M nin sıfırdan farklı a ve b elemanı için $a\gamma b \neq 0$ olacak biçimde bir sıfırdan farklı $\gamma \in \Gamma$ varsa M ye *basit* denir.

Örnek 2.2.1 D bir bölüm halkası olsun. Buna göre;

$$D_{n,m} = \left\{ \left[a_{ij} \right]_{n \times m} \mid a_{ij} \in D \right\}, \quad D_{m,n} = \left\{ \left[a_{ij} \right]_{m \times n} \mid a_{ij} \in D \right\} \quad \text{ve} \quad M = D_{n,m}, \quad \Gamma = D_{m,n}$$

olmak üzere M aşağıdaki işlemler ile bir $\Gamma-$halkasıdır.

$$+ : M \times M \to M$$

$$\left(\left[a_{ij}\right],\left[b_{ij}\right]\right) \mapsto \left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$$

$$+ : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$$

$$\left(\left[\gamma_{ij}\right],\left[\beta_{ij}\right]\right) \mapsto \left[\gamma_{ij}\right]+\left[\beta_{ij}\right]=\left[\gamma_{ij}+\beta_{ij}\right]$$

$$\cdot : M \times \Gamma \times M \to M$$

$$\left(\left[a_{ij}\right],\left[\gamma_{ij}\right],\left[b_{ij}\right]\right) \mapsto \left[a_{ij}\right]\cdot\left[\gamma_{ij}\right]\cdot\left[b_{ij}\right]$$

$$\cdot : \Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma$$

$$\left(\left[\gamma_{ij}\right],\left[a_{ij}\right],\left[\beta_{ij}\right]\right) \mapsto \left[\gamma_{ij}\right]\cdot\left[a_{ij}\right]\cdot\left[\beta_{ij}\right]$$

Çözüm. Öncelikle işlemler ile M ve Γ değişmeli gruplar olduğunu gösterelim.

- Her $\left[a_{ij}\right],\left[b_{ij}\right] \in M$ $\left[a_{ij}+b_{ij}\right] \in M$ olduğundan kapalılık özelliği sağlanır.
- Her $\left[a_{ij}\right],\left[b_{ij}\right],\left[c_{ij}\right] \in M$ $\left(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right)+\left[c_{ij}\right]=\left[a_{ij}\right]+\left(\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right]\right)$ midir?

$$\begin{aligned}\left(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right)+\left[c_{ij}\right] &= \left(\left[a_{ij}+b_{ij}\right]\right)+\left[c_{ij}\right]\\ &= \left[\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij}\right]\\ &= \left[a_{ij}+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)\right]\\ &= \left[a_{ij}\right]+\left[\left(b_{ij}+c_{ij}\right)\right]\\ &= \left[a_{ij}\right]+\left(\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right]\right)\end{aligned}$$

olur ve birleşme özelliği sağlanır.

- Her $\left[a_{ij}\right] \in M$, $\exists \theta = \left[0_{ij}\right] \in M$ vardır öyleki

$\left[a_{ij}\right]+\theta=\theta+\left[a_{ij}\right]=\left[a_{ij}\right]$ dır. Gerçekten

$$\left[a_{ij}\right]+\left[0_{ij}\right]=\left[a_{ij}+0_{ij}\right]=\left[a_{ij}\right]$$

olduğu açıktır.

- Her $\left[a_{ij}\right] \in M$ $\exists -\left[a_{ij}\right] \in M$ vardır öyleki

$$\left[a_{ij}\right]+\left(-\left[a_{ij}\right]\right)=-\left[a_{ij}\right]+\left[a_{ij}\right]=\theta \text{ dır.}$$

❖ Her $\left[a_{ij}\right],\left[b_{ij}\right]\in M$ $\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]=\left[b_{ij}+a_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]+\left[a_{ij}\right]$

olduğundan $\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]+\left[a_{ij}\right]$ olur. Böylece $(M,+)$ değişmeli gruptur.

Benzer biçimde $(\Gamma,+)$ cebirsel yapısı da değişmeli grup olduğu gösterilebilir.

Şimdi de M nin $\Gamma-$halkası olduğunu gösterelim.

$A=\left[a_{ij}\right],B=\left[b_{ij}\right],C=\left[c_{ij}\right],\gamma=\left[\gamma_{ij}\right],\beta=\left[\beta_{ij}\right]$ olmak üzere $A,B,C\in M$, $\gamma,\beta\in\Gamma$ olarak alalım.

1) $(A+B)\gamma C=A\gamma C+B\gamma C$ midir?

$$\begin{aligned}
(A+B)\gamma C &= \left(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right)\left[\gamma_{ij}\right]\left[c_{ij}\right]\\
&= \left[a_{ij}+b_{ij}\right]\left[\gamma_{ij}\right]\left[c_{ij}\right]\\
&= \left[\sum_k (a_{ik}+b_{ik})\gamma_{kj}\right]\left[c_{ij}\right]\\
&= \left[\sum_l\left(\sum_k a_{ik}\gamma_{kl}+b_{ik}\gamma_{kl}\right)c_{ij}\right]\\
&= \left[\sum_l\left(\sum_k ((a_{ik}\gamma_{kl})c_{ij}+(b_{ik}\gamma_{kl})c_{ij}\right)\right]\\
&= \left[\sum_l\left(\sum_k\left((a_{ik}\gamma_{kl})c_{lj}\right)+\sum_k\left((b_{ik}\gamma_{kl})c_{lj}\right)\right)\right]\\
&= \left[\sum_l\left(\sum_k\left((a_{ik}\gamma_{kl})c_{lj}\right)\right)+\sum_l\left(\sum_k\left((b_{ik}\gamma_{kl})c_{lj}\right)\right)\right]\\
&= \left[\sum_l\left(\sum_k\left((a_{ik}\gamma_{kl})c_{lj}\right)\right)\right]+\left[\sum_l\left(\sum_k\left((b_{ik}\gamma_{kl})c_{lj}\right)\right)\right]\\
&= A\gamma C+B\gamma C
\end{aligned}$$

2) $(A\gamma B)\beta C=A\gamma(B\beta C)$ midir?

$$\begin{aligned}
(A\gamma B)\beta C &= \left(\left[a_{ij}\right]\left[\gamma_{ij}\right]\left[b_{ij}\right]\right)\left[\beta_{ij}\right]\left[c_{ij}\right]\\
&= \left[\sum_l\left(\sum_k (a_{ik}\gamma_{kl})b_{lj}\right)\right]\left[\beta_{ij}\right]\left[c_{ij}\right]\\
&= \left[\sum_t\left(\sum_l\left(\sum_k\left((a_{ik}\gamma_{kl})b_{lt}\right)\beta_{tj}\right)\right)\right]\left[c_{ij}\right]
\end{aligned}$$

$$=\left[\sum_p\left(\sum_t\left(\sum_l\left(\sum_k\left(\left(\left(a_{ik}\gamma_{kl}\right)b_{lt}\right)\beta_{tp}\right)c_{pj}\right)\right)\right)\right]$$

$$=\left[\sum_p\left(\sum_t\left(\sum_l\left(\sum_k\left(\left(a_{ik}\left(\gamma_{kl}b_{lt}\right)\beta_{tp}\right)c_{pj}\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$=\left[\sum_p\left(\sum_t\left(\sum_l\left(\sum_k\left(\left(a_{ik}\gamma_{kl}\left(b_{lt}\beta_{tp}\right)c_{pj}\right)\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$=\left[\sum_p\left(\sum_t\left(\sum_l\left(\sum_k\left(\left(a_{ik}\gamma_{kl}\left(b_{lt}\beta_{tp}c_{pj}\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$= A\gamma(B\beta C)$$

$(A\gamma B)\beta C = A(\gamma B\beta)C$ midir?

$$(A\gamma B)\beta C=\left(\left[a_{ij}\right]\left[\gamma_{ij}\right]\left[b_{ij}\right]\right)\left[\beta_{ij}\right]\left[c_{ij}\right]$$

$$=\left[\sum_l\left(\sum_k\left(a_{ik}\gamma_{kl}\right)b_{lj}\right)\right]\left[\beta_{ij}\right]\left[c_{ij}\right]$$

$$=\left[\sum_t\left(\sum_l\left(\sum_k\left(\left(a_{ik}\gamma_{kl}\right)b_{lt}\right)\beta_{tj}\right)\right)\right]\left[c_{ij}\right]$$

$$=\left[\sum_p\left(\sum_t\left(\sum_l\left(\sum_k\left(\left(\left(a_{ik}\gamma_{kl}\right)b_{lt}\right)\beta_{tp}\right)c_{pj}\right)\right)\right)\right]$$

$$=\left[\sum_p\left(\sum_t\left(\sum_l\left(\sum_k\left(\left(a_{ik}\left(\gamma_{kl}b_{lt}\right)\beta_{tp}\right)c_{pj}\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$=\left[\sum_p\left(\sum_t\left(\sum_l\left(\sum_k\left(\left(a_{ik}\left(\gamma_{kl}b_{lt}\beta_{tp}\right)c_{pj}\right)\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$= A(\gamma B\beta)C$$

3) Her sıfırdan farklı $A,B\in M$ alalım ve $\gamma\in\Gamma$ olsun. $A\gamma B=\theta$ ise $\gamma=\theta$ mıdır?

$$A\gamma B=\left[a_{ij}\right]\left[\gamma_{ij}\right]\left[b_{ij}\right]$$

$$=\left[\sum\left(\sum\left(a_{ik}\left(\gamma_{kl}b_{lj}\right)\right)\right)\right]$$

$$=\left[0_{ij}\right] \text{ dır.}$$

Matrislerin eşitliğinden $\left(\sum\left(a_{ik}\left(\gamma_{kl}b_{lj}\right)\right)\right)=0_{ij}$ olur. Bu durumda

$$\left(\sum\left(a_{ik}\left(\gamma_{kl}b_{lj}\right)\right)\right)=0_{ij}$$

$$\Rightarrow a_{ij}\gamma_{kl}b_{lj}=0_{ij}\,(a_{ij}\neq 0)$$

$$\Rightarrow \gamma_{kl}b_{lj}=0_{ij}\,(b_{ij}\neq 0)$$

$$\Rightarrow \gamma_{ij}=0_{ij}$$

olup, dolayısıyla $\gamma=\left[\gamma_{ij}\right]=0$ dır.

Tanım 2.2.3 (Barnes 1966) Eğer $M=\{a,b,c,...\}$ ve $\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma,...\}$ toplamsal gruplar olmak üzere, her $a,b,c\in M$ ve her $\alpha,\beta\in\Gamma$ için aşağıdaki koşullar sağlanırsa o zaman M ye $\Gamma-$*halkası* denir.

i) $a\alpha b\in M$ dir.

ii) $(a+b)\alpha c=a\alpha c+b\alpha c$,

$a(\alpha+\beta)b=a\alpha b+a\beta b$,

$a\alpha(b+c)=a\alpha b+a\alpha c$,

iii) $(a\alpha b)\beta c=a\alpha(b\beta c)$.

M bir $\Gamma-$halkası ise her $a,b\in M$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için Tanım 2.2.3 ten $0\alpha b=a0b=a\alpha 0=0_M$ dır. Çünkü $0_M\alpha b=(0_M+0_M)\alpha b=0_M\alpha b+0_M\alpha b$ yazılabilir ve $0_M\alpha b\in M$ olduğundan $-0_M\alpha b\in M$ olacak şekilde her elemanın toplamsal tersi vardır. Dolayısıyla

$$-0_M\alpha b+0_M\alpha b=-0_M\alpha b+0_M\alpha b+0_M\alpha b$$

$$0_M=0_M+0_M\alpha b$$

$$0_M=0_M\alpha b$$

olur.

Barnes, Nobusawa'ya göre $\Gamma-$halkasında bulunan koşulları azaltarak daha kullanışlı hale getirmiştir.

Bundan sonra, aksi belirtilmedikçe M $\Gamma-$halkası Barnes anlamında $\Gamma-$halkası olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.2.4 U, M $\Gamma-$halkasının bir toplamsal alt grubu olmak üzere $U\Gamma M\subseteq U$ $(M\Gamma U\subseteq U)$ koşulu sağlanırsa o zaman U ya M nin *sağ (sol) ideali* denir. U hem sağ hem de sol ideal ise o zaman U ya M nin *ideali* denir.

Tanım 2.2.5 M $\Gamma-$halkasının bir a elemanı için a yı içeren M nin bütün ideallerin arakesitine a tarafından üretilen esas ideal denir ve $<a>$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6 U ve V M nin herhangi iki ideali olmak üzere $U\Gamma V\subseteq P$ olduğunda $U\subseteq P$ veya $V\subseteq P$ ise P idealine M $\Gamma-$halkasının *asal ideali* denir. Sıfır ideali asal olan M $\Gamma-$halkasına *asaldır* denir.

Tanım 2.2.7 M_1 ve M_2 birer $\Gamma-$halkası olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa θ ya M_1 $\Gamma-$halkasından M_2 $\Gamma-$halkasına bir $\Gamma-$*homomorfizma* denir.

i) θ, M_1 den M_2 içine grup homomorfizması,

ii) Her $x,y\in M_1$ ve her $\gamma\in\Gamma$ için $\theta(x\gamma y)=\theta(x)\gamma\theta(y)$.

Tanım 2.2.8 M ve N birer $\Gamma-$halkaları ve θ bir $\Gamma-$homomorfizma olsun. Buna göre $K=\{x\in M\mid\theta(x)=0_N\}$ şeklinde tanımlanan kümeye $\Gamma-$homomorfizmasının *çekirdeği* denir.

Tanım 2.2.9 M bir $\Gamma-$halkası ve A toplamsal değişmeli grup olsun. $M\times\Gamma\times A\to A$, $(m,\gamma,a)\mapsto m\gamma a$ çarpma işlemi tanımlansın. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa A ya bir *sol* $M-$*modül* denir.

i) $\forall m\in M$, $\forall a,b\in A$ ve $\forall\gamma\in\Gamma$ için $m\gamma(a+b)=m\gamma a+m\gamma b$,

ii) $\forall m_1,m_2\in M$, $\forall a\in A$ ve $\forall\gamma\in\Gamma$ için $(m_1+m_2)\gamma a=m_1\gamma a+m_2\gamma a$,

iii) $\forall m_1,m_2\in M$, $\forall a\in A$ ve $\forall\beta,\gamma\in\Gamma$ için $m_1\gamma(m_2\beta a)=(m_1\gamma m_2)\beta a$.

Benzer biçimde *sağ* $M-$*modül* tanımlanabilir.

Tanım 2.2.10 M bir $\Gamma-$halkası, A ve B $M-$modüller olsun. $f:A\to B$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa f ye *sol* $M-$*modül homomorfizması* denir. Her $a_1,a_2\in A$, her $m\in M$ ve her $\gamma\in\Gamma$ için

i) $f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2)$,

ii) $f(m\gamma a_1)=m\gamma f(a_1)$.

Benzer şekilde *sağ* $M-$*modül homomorfizmi* de tanımlanabilir.

Teorem 2.2.1 M bir $\Gamma-$halkası olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) M bir asal $\Gamma-$halkasıdır.

ii) Eğer $a,b\in M$ ve $a\Gamma M\Gamma b=<0>$ ise o zaman $a=0$ ya da $b=0$ dır.

iii) $<a>\Gamma<b>=0$ olacak şekilde M nin esas idealleri $<a>$ ve $<b>$ ise o zaman $a=0$ ya da $b=0$ dır.

iv) $U\Gamma V=(0)$ olacak şekilde M nin sağ (sol) idealleri U ve V ise o zaman $U=<0>$ ya da $V=<0>$ dır.

Tanım 2.2.11 (Jing 1987) M bir $\Gamma-$halkası ve $d:M\rightarrow M$ bir fonksiyon olsun. Buna göre d aşağıdaki koşulları sağlarsa o zaman d ye M $\Gamma-$halkası üzerinde bir $\Gamma-$*türev* denir.

i) Her $x,y\in M$ için $d(x+y)=d(x)+d(y)$,

ii) Her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $d(x\gamma y)=d(x)\gamma y+x\gamma d(y)$.

Lemma 2.2.1 (Soytürk 1994) M bir asal $\Gamma-$halkası, U M nin sıfırdan farklı bir ideali ve d M nin $\Gamma-$türevi olsun. Eğer her $a\in M$ için $a\Gamma d(U)=<0>$ $(d(U)\Gamma a=<0>)$ ise o zaman $a=0$ veya $d=0$ dır.

Teorem 2.2.2 (Soytürk 1994) M bir asal $\Gamma-$halkası ve M nin merkezi Z olsun.

i) Eğer $a,b,c\in M$ ve $\beta,\gamma\in\Gamma$ ise o zaman $[a,b]_\gamma=a\gamma b-b\gamma a$ olmak üzere

$[a\gamma b,c]_\beta=a\gamma[b,c]_\beta+[a,c]_\beta\gamma b+a\gamma(c\beta b)-a\beta(c\gamma b)$ dır.

ii) Eğer $a,b,c\in M$ ve $\beta,\gamma\in\Gamma$ için $a\in Z$ ise o zaman $[a,b]_\gamma=a\gamma b-b\gamma a$ olmak üzere

$[a\gamma b,c]_\beta=a\gamma[b,c]_\beta$ dır.

Lemma 2.2.2 (Soytürk 1994) M bir asal $\Gamma-$halkası, U M nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a\in M$ olsun. Eğer $U\Gamma a=(0)$ $(a\Gamma U=(0))$ ise o zaman $a=0$ dır.

Tanım 2.2.12 M bir asal $\Gamma-$halkası ve θ, φ da R nin bir halka otomorfizması olmak üzere, $d: R \to R$ toplamsal dönüşümü her $x, y \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x\gamma y) = d(x)\gamma\theta(y) + \varphi(x)\gamma d(y)$$

şartını sağlayan bir dönüşüm ise d ye M nin $(\theta,\varphi)-$*türevi* denir.

M bir asal $\Gamma-$halkası ve $M\Gamma M \neq M$ olmak üzere,

$\mathcal{M} = \{(U,f) \mid U(\neq <0>)$ M nin ideali ve $f: U \to M$ sağ $M-$modül homomorfizma $\}$

kümesi tanımlansın. $\mathcal{M}$ üzerinde "$\sim$" bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

"$(U,f) \sim (V,g)$ *dır* $\Leftrightarrow \exists W(\neq <0>) \subset U \cap V$ vardır öyle ki W de $f = g$ *dir.*"

M bir asal $\Gamma-$halkası olduğundan "$\sim$" bağıntısı $\mathcal{M}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Böylece $\mathcal{M}$ denklik sınıflarına ayrılır.

$\hat{f} = \{g: V \to M \mid (U,f) \sim (V,g)\}$ olmak üzere denklik sınıfları $(U,f) = \hat{f}$ ile, bütün denklik sınıflarının kümesini de Q ile gösterilsin.

Q üzerinde "$+$" işlemi, $f + g: U \cap V \to M$ bir sağ $M-$modül homomorfizması olmak üzere

$$\hat{f} + \hat{g} := Cl(U,f) + Cl(V,g) = Cl(U \cap V, f+g)$$

biçiminde tanımlansın. Bu işlem ile Q bir toplamsal değişmeli gruptur. $M\Gamma M \neq M$ ve bir asal $\Gamma-$halkası olduğundan $(<0> \neq) M\Gamma M$, M nin idealidir. $1_{M\Gamma}: M\Gamma M \to M$ birimsel $M-$modül homomorfizmi alınsın. Bu durumda her $0 \neq \beta \in \Gamma$ için $M\beta M \neq <0>$ dır. Böylece $1_{M\beta}: M\beta M \to M$ sıfırda farklı $M-$modül homomorfizmadır.

$\mathcal{N} = \{(M\beta M, 1_{M\beta}) \mid 0 \neq \beta \in \Gamma\}$ kümesi üzerinde "$\approx$" bağıntısı aşağıdaki biçimde tanımlansın.

"$(M\beta M, 1_{M\beta}) \approx (M\gamma M, 1_{M\gamma}) dır. \Leftrightarrow \exists W := M\alpha M(\neq <0>) \subset M\beta M \cap M\gamma M$ vardır öyle ki W de $1_{MP} = 1_{M\gamma}$ *dır.*"

"$\approx$", $\mathcal{N}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Böylece "$\approx$", $\mathcal{N}$ yi denklik sınıflarına ayırır. $(M\beta M, 1_{M\beta})$ nın denklik sınıfını $Cl(M\beta M, 1_{M\beta}) = \hat{\beta}$ ve "$\approx$" ya göre $\mathcal{N}$ deki bütün denklik sınıflarının kümesi $\hat{\Gamma}$ ile gösterilsin.

$$\hat{\beta} := \left\{1_{M\gamma} : M\gamma M \to M \,\middle|\, (M\beta M, 1_{M\beta}) \approx (M\gamma M, 1_{M\gamma})\right\} \quad \text{ve}$$

$$\hat{\Gamma} := \left\{\hat{\beta} \,\middle|\, 0 \neq \beta \in \Gamma\right\} \cup \left\{\hat{0}\right\} \text{ dır.}$$

Burada $0 : M\Gamma M \to M$, $x \mapsto 0$ dönüşümü olmak üzere $\hat{0} : Cl(M\Gamma M, 0)$ şeklindeki denklik sınıfıdır.

$\hat{\Gamma}$ üzerinde "+" işlemi, her $0 \neq \beta$, $0 \neq \gamma \in \Gamma$ için;

$$\hat{\beta} + \hat{\gamma} := Cl(M\beta M, 1_{M\beta}) + Cl(M\gamma M, 1_{M\gamma}) = Cl(M\beta M \cap \gamma M, 1_{M\beta} + 1_{M\gamma})$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\hat{\Gamma}, +)$ toplamsal değişmeli gruptur.

Şimdi, $V\Gamma M\beta M\Gamma U = \left\{\sum v_i\gamma_i m_i\beta n_i\alpha_i u_i \,\middle|\, v_i \in V, u_i \in U, m_i, n_i \in M \ ve \ \alpha_i, \gamma_i \in \Gamma\right\}$ M nin bir ideali ve

$$f1_{M\beta}g : V\Gamma M\beta M\Gamma U \to M \ , \ (f1_{M\beta}g)\left(\sum v_i\gamma_i m_i\beta n_i\alpha_i u_i\right) = f\left(\sum g(v_i)\gamma_i m_i\beta n_i\alpha_i u_i\right)$$

dönüşümü bir sağ $M-$modül homomorfizması olmak üzere:

$$(-,-,-) : Q \times \Gamma \times Q \to Q$$

$$(\hat{f}, \hat{\beta}, \hat{g}) \mapsto \hat{f}\hat{\beta}\hat{g} = Cl(U, f)Cl(M\beta M, 1_{M\beta})Cl(V, g)$$

$$= Cl(V\Gamma M\beta M\Gamma U, f1_{M\beta}g)$$

dönüşümü tamamlansın. Bu işlemle Q birimli bir $\hat{\Gamma}-$halkasıdır.

Her $0 \neq \beta \in \Gamma$ için $\varphi(\beta) = \hat{\beta}$ ile tanımlı $\varphi : \Gamma \to \hat{\Gamma}$ dönüşümü bir izomorfizmdir. Böylece Q $\hat{\Gamma}-$halkası bir $\Gamma-$halkasıdır. M nin sabit bir a elemanı ve herhangi $\gamma \in \Gamma$ için $\lambda_{a\gamma} : M \to M$, $\lambda_{a\gamma}(x) = a\gamma x$ dönüşümünü alınsın. Bu durumda $\lambda_{a\gamma}$ bir sağ $M-$modül homomorfizmidir. Yani, $\lambda_{a\gamma} \in Q$ dur. Böylece $\Psi : M \to Q$, $\Psi(a) = \hat{a} = Cl(M, \lambda a\gamma)$ dönüşümü tanımlanılır. Ψ bir monomorfizmadır. O halde, M Q nun bir alt halkasıdır. Q ya M nin *kesirler* $\Gamma-$*halkası* denir. Kolaylık sağlamak için $\hat{q} \in Q$ yerine q kullanacağız.

Lemma 2.2.3 (Öztürk ve Jun 2000) M bir asal $\Gamma-$halkası olsun. Her bir $0 \neq q \in Q$ için $q(U) \subset M$ olacak şekilde M nin $< 0 > \neq U$ ideali vardır.

Lemma 2.2.4 (Öztürk ve Jun 2000) M bir asal $\Gamma-$halkası olsun. Bu durumda M nin Q kesirler $\Gamma-$halkası asal $\Gamma-$halkasıdır.

Tanım 2.2.13 (Öztürk ve Jun 2000) M $\Gamma-$halkası ve Q, M nin kesirler $\Gamma-$halkası olsun. Buna göre $C_{\Gamma} := \{ g \in Q \mid g\gamma f = f\gamma g, \forall f \in Q, \gamma \in \Gamma \}$ kümesine M $\Gamma-$*halkasının genişletilmiş merkezi* denir.

Lemma 2.2.5 (Öztürk ve Jun 2000) M $\Gamma-$halkası ve C_{Γ}, M nin genişletilmiş merkezi olsun. Bu durumda $0 \neq a_i$, $0 \neq b_i \in M$ için $\sum a_i \gamma_i x \beta_i b_i = 0$, her $x \in M$ ve her $\beta_i, \gamma_i \in \Gamma$ ise o zaman a_i ler (b_i ler) C_{Γ} üzerinde lineer bağımlıdır.

Sonuç 2.2.1 (Öztürk ve Jun 2000) M $\Gamma-$halkası ve C_{Γ}, M nin genişletilmiş merkezi olsun. Buna göre $a, b \in M$ için $a\gamma x\beta b = b\gamma x\beta a$, her $x \in M$ ve her $\beta, \gamma \in \Gamma$ ise o zaman $b = \lambda\alpha a$, her $\alpha \in \Gamma$ olacak biçimde bir $\lambda \in C_{\Gamma}$ vardır.

Teorem 2.2.3 (Öztürk ve Jun 2004) M $\Gamma-$halkası ve Q, M nin kesirler $\Gamma-$halkası olsun. Buna göre Q $\Gamma-$halkası aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) Herhangi bir $q \in Q$ için $\mathrm{q}(\mathrm{U}_{\mathrm{q}}) \subseteq M$ (veya $q\gamma U_q \subseteq M, \forall \gamma \in \Gamma$) olacak şekilde $U_q \in F$ ideali vardır.

ii) Herhangi bir $U \in F$ ve $q \in Q$ için $q(U) = (0)$ (veya $\forall \gamma \in \Gamma$ ve bir $U \in F$ için $q\gamma U_q = (0)$) ise o zaman $q = 0$ dır.

iii) Eğer ve $\Psi : U \to M$ sağ $M-$modül homomorfizması ise o zaman her $u \in U$ için $\Psi(u) = q(u)$ (veya $\Psi(u) = q\gamma u, \forall \in U\ ve\ \gamma \in \Gamma$) olacak şekilde bir $q \in Q$ vardır.

iv) $\Psi : W \to Q$ bir sağ $M-$modül homomorfizması ve W, Q nun bir alt modülü (bir (M, M) alt bi-modül) olsun. Bu durumda W, $\Psi(u) \subseteq M$ olacak şekilde M $\Gamma-$halkasının bir U idealini kapsar ve $AnnU = Ann_r W$ ise o zaman herhangi bir $a \in Ann_r W\ için\ q(a) = 0$ (veya herhangi bir $a \in Ann_r W$ ve $\gamma \in \Gamma q\gamma a$) ve herhangi bir $b \in W$ için $\Psi(b) = q(b)$ (veya herhangi bir $b \in W$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\Psi(b) = q\gamma b$) olacak şekilde $q \in Q$ elemanı vardır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ GAMMA HALKALARI

Bu bölümde $M\Gamma M \neq M$ olacak biçimde M bir asal $\Gamma-$halkası, Z M nin merkezi, C_Γ M nin genişletilmiş merkezi ve her $a,b \in M$, her $\beta \in \Gamma$ için $[a,b]_\beta = a\beta b - b\beta a$ olarak alınacaktır.

3.1 Asal Gamma Halkalarında $\theta-$Türev

Lemma 3.1.1 M karakteristiği 2 olan bir asal $\Gamma-$halkası, $\theta : M \to M$ bir örten $\Gamma-$halka homomorfizması ve d_1 ile d_2 de $d_i\theta = \theta d_i$ ($i=1,2$) olacak şekilde M nin sıfırdan farklı türevleri olsun. Her $x \in M$ için

$$d_1 d_2(x) = 0 \qquad (3.1)$$

ise o zaman her $x \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $d_2(x) = \lambda\alpha d_1(x)$ olacak şekilde bir $\lambda \in C_\Gamma$ vardır.

İspat: $x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ alınsın. (3.1) de x yerine $x\gamma y$ yazılırsa her $x, y \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
0 &= d_1(d_2(x\gamma y)) \\
&= d_1(d_2(x)\gamma\theta(y) + x\gamma d_2(y)) \\
&= d_1(d_2(x)\gamma\theta(y)) + d_1(x\gamma d_2(y)) \\
&= d_1(d_2(x)\gamma\theta^2(y)) + d_2(x)\gamma d_1(\theta(y)) + d_1(x)\gamma\theta(d_2(y)) + x\gamma d_1(d_2(y))
\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki son eşitlikte (3.1) kullanılırsa her $x, y \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$0 = d_2(x)\gamma d_1(\theta(y)) + d_1(x)\gamma d_2(\theta(y))$$

olur. $d_2\theta = \theta d_2$ ve $charM = 2$ olduğundan her $x, y \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d_2(x)\gamma d_1(\theta(y)) = d_1(x)\gamma\theta(d_2(y)) \qquad (3.2)$$

elde edilir. (3.2) denkleminde x yerine $x\beta z$ yazılırsa her $x, y \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d_2(x\beta z)\gamma d_1(\theta(y)) = d_1(x\beta z)\gamma\theta(d_2(y))$$

$$d_2(x)\beta\theta(z)\gamma d_1(\theta(y)) + x\beta d_2(z)\gamma d_1(\theta(y)) = d_1(x)\beta\theta(z)\gamma d_2(\theta(y)) + x\beta d_1(z)\gamma d_2(\theta(y))$$

bulunur. (3.2) denklemi yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa

$$d_2(x)\beta\theta(z)\gamma d_1(\theta(y)) = d_1(x)\beta\theta(z)\gamma d_2(\theta(y)) \tag{3.3}$$

dir. θ örten $\Gamma-$homomorfizması olduğundan her $x, y \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d_2(x)\beta m\gamma d_1(w) = d_1(x)\beta m\gamma d_2(w) \tag{3.4}$$

olur. (3.4) denkleminde w yerine x yazılırsa

$$d_2(x)\beta m\gamma d_1(x) = d_1(x)\beta m\gamma d_2(x) \tag{3.5}$$

elde edilir. $d_1(x) \neq 0$ ise o zaman Sonuç 2.2.1 den her $x \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $d_2(x) = \lambda(x)\alpha d_1(x)$ olacak şekilde $\lambda(x) \in C_\Gamma$ vardır. Böylece $d_1(x) \neq 0 \neq d_1(y)$ ise

$$(\lambda(y) - \lambda(x))\alpha d_1(x)\beta z\gamma d_1(y) = 0 \tag{3.6}$$

dır. M bir asal $\Gamma-$halkası ve $d_1(y) \neq 0$ olduğundan $(\lambda(y) - \lambda(x))\alpha d_1(x) = 0$ elde edilir. Lemma 2.2.1 kullanılırsa her $x, y \in M$ için $\lambda(y) = \lambda(x)$ elde edilir. Buradan λ, M nin elemanlarına bağlı değildir. O halde $d_1(x) \neq 0$ ile her $x \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $d_2(x) = \lambda\alpha d_1(x)$ olacak şekilde $\lambda \in C_\Gamma$ vardır. Diğer taraftan $d_1(x) = 0$ ise o zamanda $d_2(x) = 0$ dır. Bu nedenle her $x \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $d_2(x) = \lambda\alpha d_1(x)$ dır.

Önerme 3.1.1 M karakteristiği 2 olan bir asal $\Gamma-$halkası, $\theta : M \to M$ bir örten $\Gamma-$halka homomorfizması ve d de $d\theta = \theta d$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı türevi olsun. Bu durumda her $x \in M$ için

$$d(x) \in Z \tag{3.7}$$

ise o zaman her $m, z \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $d(m) = \lambda(m)\alpha d(z)$ olacak şekilde $\lambda(m) \in C_\Gamma$ vardır veya M değişmelidir.

İspat: (3.7) eşitliğinden $d(x) \in Z$, her $x, y \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$[d(x), y]_\beta = 0 \tag{3.8}$$

dır. (3.8) denkleminde x yerine $x\gamma z$ yazılırsa

$$\begin{aligned} [d(x\gamma z), y]_\beta &= d(x\gamma z)\beta y - y\beta d(x\gamma z) \\ &= d(x)\gamma\theta(z)\beta y + x\gamma d(z)\beta y - y\beta d(x)\gamma\theta(z) - y\beta x\gamma d(z) \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. θ örten $\Gamma-$halka homomorfizması olduğundan

$$0 = d(x)\gamma(m\beta y - y\beta m) + d(z)\gamma(x\beta y - y\beta x)$$

$$= d(x)\gamma[m,y]_\beta + d(z)\gamma[x,y]_\beta \qquad (3.10)$$

olur. (3.10) denkleminde x yerine $d(x)$ yazılırsa

$$0 = d^2(x)\gamma[m,y]_\beta + d(z)\gamma[d(x),y]_\beta \qquad (3.11)$$

dır. (3.11) denkleminde (3.8) eşitliği kullanılırsa

$$d^2(x)\gamma[m,y]_\beta = 0 \qquad (3.12)$$

elde edilir. (3.12) eşitliğinde m yerine $m\alpha z$ yazılırsa

$$0 = d^2(x\alpha z)\gamma[m\alpha z, y]_\beta$$

$$= d^2(x)\gamma m\alpha[z,y]_\beta + d^2(x)\gamma[m,y]_\beta\alpha z$$

olur ve dolayısıyla (3.12) den

$$0 = d^2(x)\gamma m\alpha[z,y]_\beta \qquad (3.13)$$

elde edilir. M asal $\Gamma-$halkası olduğundan her $x,y,z,m \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$d^2(x) = 0 \text{ veya } [z,y]_\beta = 0 \qquad (3.14)$$

olur. (3.14) denkleminden her $x \in M$ için $d^2(x) = 0$ ise x yerine $x\gamma z$ yazılırsa her $x,z,m \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$0 = d^2(x\gamma z)$$

$$= d(d(x\gamma z))$$

$$= d(d(x)\gamma\theta(z) + x\gamma d(z))$$

$$= d^2(x)\gamma\theta^2(z) + d(x)\gamma d(\theta(z)) + d(x)\gamma\theta(d(z)) + x\gamma d^2(z)$$

olur ve dolayısıyla (3.14) ten

$$0 = d(x)\gamma d(\theta(z)) + d(x)\gamma\theta(d(z))$$

elde edilir. Hipotezden her $x,m \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma d(m) = d(m)\gamma d(x) \qquad (3.15)$$

dır. (3.15) de x yerine $x\alpha n$ yazılırsa her $x,m,n \in M$ ve her $\alpha,\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x\alpha n)\gamma d(m) = d(m)\gamma d(x\alpha n)$$

$$d(x)\alpha\theta(n)\gamma d(m) + x\alpha d(n)\gamma d(m) = d(m)\gamma d(x)\alpha\theta(n) + d(m)\gamma x\alpha d(n)$$

olur ve dolayısıyla $d(m) \in Z$ olduğundan (3.15) den

$$d(x)\alpha\theta(n)\gamma d(m) = d(m)\gamma(d(x)\alpha\theta(n)) \tag{3.16}$$

elde edilir. Burada tekrar $d(m) \in Z$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} d(x)\alpha\theta(n)\gamma d(m) &= (d(x)\alpha\theta(n))\gamma d(m) \\ &= d(x)\alpha(\theta(n)\gamma d(m)) \\ &= d(x)\alpha(d(m)\gamma\theta(n)) \\ &= d(m)\alpha(d(x)\gamma\theta(n)) \\ &= d(m)\alpha\theta(n)\gamma d(x) \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla θ örten olduğundan her $x, y, m \in M$ ve her $\alpha, \gamma \in \Gamma$ için

$$d(x)\alpha y\gamma d(m) = d(m)\alpha y\gamma d(x)$$

elde edilir. Eğer $d(x) \neq 0$ ise Sonuç 2.2.1 den $d(m) = \lambda(m)\alpha d(x)$ olacak şekilde $\lambda(m) \in C_\Gamma$ vardır. Diğer taraftan (3.14) ten her $y, m \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$0 = [m, y]_\beta$$

$$0 = m\beta y - y\beta m$$

$$m\beta y = y\beta m$$

olur. Bu eşitlik ise M nin değişmeli olduğu gösterilir.

Önerme 3.1.2 M karakteristiği 2 olan asal $\Gamma-$halkası, $\theta : M \to M$ bir örten $\Gamma-$halka homomorfizması ve d_1 ile d_2 de $d_i\theta = \theta d_i$ $(i = 1,2)$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı türevleri olsun. Bu durumda U , $\theta(U) \subseteq U$ olacak biçimde M nin sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere her $u \in U$ için

$$d_1(d_2(u)) = 0 \tag{3.17}$$

ise her $x \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $d_2(x) = \lambda\alpha d_1(x)$ olacak şekilde bir $\lambda \in C_\Gamma$ vardır.

İspat: $\gamma \in \Gamma$ ve $u, v \in U$ olsun. (3.17) de u yerine $d_2(u)\gamma v$ yazarsak her $u, v \in U$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d_1(d_2(d_2(u)\gamma v)) \\ &= d_1(d_2(d_2(u))\gamma\theta(v) + d_2(u)\gamma d_2(v)) \\ &= d_1(d_2^2(u))\gamma\theta(v)) + d_1(d_2(u)\gamma d_2(v)) \\ &= d_1(d_2^2(u))\gamma\theta^2(v) + d_2^2(u)\gamma d_1(\theta(v)) + d_1(d_2(u))\gamma\theta(d_2(v)) + d_2(u)\gamma d_1(d_2(v)) \end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden her $u, w \in U$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d_2^2(u)\gamma d_1(w)=0 \tag{3.18}$$

dır. $d_1 \neq 0$ olduğu için Lemma 2.2.1 den $u \in U$ için $d_2^2(u)=0$ dir. (3.17) eşitliğinde u yerine $u\gamma x$ yazılırsa her $u \in U$, her $x \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}0 &= d_1(d_2(u\gamma x))\\ &= d_1(d_2(u)\gamma\theta(x)+u\gamma d_2(x))\\ &= d_1(d_2(u)\gamma\theta(x))+d_1(u\gamma d_2(x))\\ &= d_1(d_2(u))\gamma\theta^2(x)+d_2(u)\gamma d_1(\theta(x))+d_1(u)\gamma\theta(d_2(x))+u\gamma d_1(d_2(x))\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden

$$d_2(u)\gamma d_1(\theta(x))+d_1(u)\gamma\theta(d_2(x))+u\gamma d_1(d_2(x))=0 \tag{3.19}$$

dır. (3.19) denkleminde u yerine $d_2(u)$ yazılırsa

$$d_2^2(u)\gamma d_1(\theta(x))+d_1(d_2(u))\gamma\theta(d_2(x))+d_2(u)\gamma d_1(d_2(x))=0$$

olur. Yukarıdaki denklemde hipotez şartları ve (3.18) eşitliği kullanılırsa

$$d_2(u)\gamma d_1(d_2(x))=0$$

dır. $d_2 \neq 0$ olduğu için Lemma 2.2.1 ile her $x \in M$ için $d_1(d_2(x))=0$ dır. Buradan, Lemma 3.1.1 ile her $\alpha \in \Gamma$ için $d_2=\lambda\alpha d_1$ olacak şekilde $\lambda \in C_\Gamma$ vardır.

Önerme 3.1.3 M karakteristiği 2 olan asal $\Gamma-$halkası, $\theta : M \to M$ bir örten $\Gamma-$halka homomorfizması ve d de $d^2 \neq 0$ ve $d\theta=\theta d$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı türevi olsun. Bu durumda U , $\theta(U) \subseteq U$ olacak biçimde M nin sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere her $u \in U$ için

$$d(u) \in Z \tag{3.20}$$

ise o zaman M değişmelidir.

İspat: (3.20) den her $u, v \in U$ her $x \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$[d(u), x]_\beta = 0 \tag{3.21}$$

dir. (3.21) eşitliğinde u yerine $u\gamma v$ yazılırsa her $u, v \in U$, her $x \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}[d(u\gamma v), x]_\beta &= [d(u)\gamma\theta(v), x]_\beta + [u\gamma d(v), x]_\beta\\ &= [d(u), x]_\beta\gamma\theta(v)+d(u)\gamma[\theta(v), x]_\beta + [u, x]_\beta\gamma d(v)+u\gamma[d(v), x]_\beta\end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla (3.21) den

$$0 = d(u)\gamma[\theta(v), x]_\beta + [u, x]_\beta \gamma d(v) \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) de u yerine $d(u)$ yazılırsa (3.21) den

$$0 = d^2(u)\gamma[\theta(v), x]_\beta \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) eşitliğinde x yerine $y\alpha x$ yazılırsa

$$0 = d^2(u)\gamma[\theta(v), y\alpha x]_\beta$$

$$= d^2(u)\gamma y\alpha[\theta(v), x]_\beta + d^2(u)\gamma[\theta(v), y]_\beta \alpha x$$

olur ve dolayısıyla (3.23) ten

$$d^2(u)\gamma y\alpha[\theta(v), x]_\beta = 0$$

elde edilir. M asal $\Gamma-$halkası, θ örten homomorfizma ve $d^2 \neq 0$ olduğundan her $x \in M$, her $v \in U$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$[v, x]_\beta = 0 \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.22) de v yerine $v\gamma y$ yazılırsa her $x, y \in M$, her $v \in U$ ve her $\beta, \gamma \in \Gamma$ için

$$0 = [v\gamma y, x]_\beta = v\gamma[y, x]_\beta + [v, x]_\beta \gamma y$$

olur ve dolayısıyla (3.24) ten her $x, y \in M$, her $v \in U$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $v\gamma[y, x]_\beta = 0$ elde edilir. M asal $\Gamma-$halkası olduğundan her $x, y \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $[y, x]_\beta = 0$ olur ve böylece M değişmelidir.

3.2 Asal Gamma Halkalarında $(\theta,\varphi)-$Türev

Lemma 3.2.1 M karakteristiği 2 olan bir asal $\Gamma-$halkası $\theta: M \to M$ ve $\varphi: M \to M$ bir örten $\Gamma-$halka homomorfizması ve d de $d_i\theta = \theta d_i$ ve $d_i\varphi = \varphi d_i$ $(i = 1,2)$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı türevi olsun. Bu durumda her $x \in M$ için

$$d_1 d_2(x) = 0 \quad (3.25)$$

ise her $x\in M$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için $d_2(x)=\lambda\alpha d_1(x)$ olacak şekilde bir $\lambda\in C_\Gamma$ vardır.

İspat: $x,y\in M$ ve $\alpha\in\Gamma$ alınsın. (3.25) de x yerine $x\gamma y$ yazılırsa her $x,y\in M$ ve $\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}0&=d_1(d_2(x\gamma y))\\&=d_1(d_2(x)\gamma\theta(y)+\varphi(x)\gamma d_2(y))\\&=d_1(d_2(x)\gamma\theta(y))+d_1(\varphi(x)\gamma d_2(y))\\&=d_1(d_2(x))\gamma\theta^2(y)+\varphi(d_2(x))\gamma d_1(\theta(y))+d_1(\varphi(x))\gamma\theta(d_2(y))+\varphi^2(x)\gamma d_1(d_2(y))\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikte (3.25) kullanılırsa her $x,y\in M$ ve her $\gamma\in\Gamma$ için

$$\varphi(d_2(x))\gamma d_1(\theta(y))+d_1(\varphi(x))\gamma\theta(d_2(y))=0$$

olur. $d_i\theta=\theta d_i$, $d_i\varphi=\varphi d_i$ ve $charM=2$ olduğundan her $x,y\in M$ ve her $\gamma\in\Gamma$ için

$$d_2(\varphi(x))\gamma d_1(\theta(y))=d_1(\varphi(x))\gamma d_2(\theta(y)) \tag{3.26}$$

dir. $\varphi-$örten $\Gamma-$halka homomorfizması olduğundan her $m,n\in M$ ve her $\gamma\in\Gamma$ için

$$d_2(m)\gamma d_1(n)=d_1(m)\gamma d_2(n) \tag{3.27}$$

bulunur. (3.27) denkleminde m yerine $m\beta z$ yazılırsa her $m,n,z\in M$ ve her $\beta,\gamma\in\Gamma$ için

$$d_2(m\beta z)\gamma d_1(\theta(y))=d_1(m\beta z)\gamma\theta(d_2(y))$$

$$d_2(m)\beta\theta(z)\gamma d_1(n)+\varphi(m)\beta d_2(z)\gamma d_1(n)=d_1(m)\beta\theta(z)\gamma d_2(n)+\varphi(m)\beta d_1(z)\gamma d_2(n)$$

elde edilir. (3.27) denklemi yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa her $m,n,z\in M$ ve her $\beta,\gamma\in\Gamma$ için

$$d_2(m)\beta\theta(z)\gamma d_1(n)=d_1(m)\beta\theta(z)\gamma d_2(n) \tag{3.28}$$

olur. $\theta-$örten $\Gamma-$homomorfizması olduğundan her $m,n,k\in M$ ve her $\beta,\gamma\in\Gamma$ için

$$d_2(m)\beta k\gamma d_1(n)=d_1(m)\beta k\gamma d_2(n) \tag{3.29}$$

dır. (3.29) denkleminde n yerine m alınırsa

$$d_2(m)\beta k\gamma d_1(n)=d_1(m)\beta k\gamma d_2(n) \tag{3.30}$$

elde edilir. $d_1(m)\neq 0$ ise Sonuç 2.2.1 den her $m\in M$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için $d_2(m)=\lambda(m)\alpha d_1(m)$ olacak şekilde $\lambda(m)\in C_\Gamma$ vardır. Böylece $d_1(m)\neq 0\neq d_1(n)$ ise

$$(\lambda(n)-\lambda(m))\alpha d_1(m)\beta z\gamma d_1(k)=0 \tag{3.31}$$

dır. M bir asal $\Gamma-$halkası olduğundan $(\lambda(n)-\lambda(m))\alpha d_1(m)=0$ olur. Lemma 2.2.1 kullanılırsa her $m,n\in M$ için $\lambda(n)=\lambda(m)$ elde edilir. Buradan $d_1(m)\neq 0$ ile her $x\in M$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için $d_2(m)=\lambda\alpha d_1(m)$ olacak şekilde $\lambda\in C_\Gamma$ vardır. Diğer taraftan $d_1(m)=0$ ise o zamanda $d_2(m)=0$ dır. Dolayısıyla her $m\in M$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için $d_2(m)=\lambda\alpha d_1(m)$ dır.

Önerme 3.2.1 M karakteristiği 2 olan bir asal $\Gamma-$halkası $\theta: M\to M$ ve $\varphi: M\to M$ örten $\Gamma-$halka homomorfizması, d de $d_i\theta=\theta d_i$ ve $d_i\varphi=\varphi d_i$ $(i=1,2)$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı türevi olsun. Bu durumda her $x\in M$ için

$$d(x)\in Z \tag{3.32}$$

ise her $m,z\in M$ ve her $\alpha\in\Gamma$ için $d(m)=\lambda(m)\alpha d(z)$ olacak şekilde $\lambda(m)\in C_\Gamma$ vardır veya M değişmelidir.

İspat. (3.32) eşitliğinden $d(x)\in Z$, her $x,y\in M$ ve her $\beta\in\Gamma$ için

$$[d(x),y]_\beta=0 \tag{3.33}$$

dır. (3.33) denkleminde x yerine $x\gamma z$ yazılırsa

$$\begin{aligned}[d(x\gamma z),y]_\beta &= d(x\gamma z)\beta y-y\beta d(x\gamma z)\\ &= d(x)\gamma\theta(z)\beta y+\varphi(x)\gamma d(z)\beta y-y\beta d(x)\gamma\theta(z)-y\beta\varphi(x)\gamma d(z)\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir. $\theta-$örten $\Gamma-$halka homomorfizması olduğundan

$$d(x)\gamma(m\beta y-y\beta m)+d(z)\gamma(\varphi(x)\beta y-y\beta\varphi(x))=0$$

$$d(x)\gamma[m,y]_\beta+d(z)\gamma[\varphi(x),y]_\beta=0 \tag{3.35}$$

bulunur. (3.35) denkleminde x yerine $d(x)$ yazılırsa

$$0=d^2(x)\gamma[m,y]_\beta+d(z)\gamma[\varphi(d(x)),y]_\beta \tag{3.36}$$

dır. $\varphi-$örten $\Gamma-$halka homomorfizması olduğundan her $x,y,m,n,z\in M$ ve her $\beta,\gamma\in\Gamma$ için

$$0=d^2(x)\gamma[m,y]_\beta+d(z)\gamma[d(n),y]_\beta \tag{3.37}$$

olur. (3.37) denkleminde (3.33) eşitliği kullanılırsa

$$d^2(x)\gamma[m,y]_\beta = 0 \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.38) eşitliğinde m yerine $m\alpha z$ yazılırsa her $x,y,z,m \in M$ ve her $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d^2(x)\gamma[m\alpha z, y]_\beta \\ &= d^2(x)\gamma[m,y]_\beta \alpha z + d^2(x)\gamma m\alpha[z,y]_\beta \end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki son eşitlikte (3.37) denklemi kullanılırsa

$$d^2(x)\gamma m\alpha[z,y]_\beta = 0 \tag{3.39}$$

bulunur. M asal $\Gamma-$halkası olduğundan her $x,y,z \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$d^2(x) = 0 \text{ veya } [z,y]_\beta = 0 \tag{3.40}$$

olur. (3.40) denkleminden her $x \in M$ için $d^2(x) = 0$ ise x yerine $x\gamma z$ yazılırsa her $x,z,m \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} 0 &= d^2(x\gamma z) \\ &= d(d(x\gamma z)) \\ &= d(d(x)\gamma\theta(z) + \varphi(x)\gamma d(z)) \\ &= d^2(x)\gamma\theta^2(z) + \varphi(d(x))\gamma d(\theta(z)) + d(\varphi(x))\gamma\theta(d(z)) + \varphi^2(x)\gamma d^2(z) \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki son eşitlikte $d^2(x) = 0$ kullanılırsa

$$d(x)\gamma d(\theta(z)) + d(x)\gamma\theta(d(z)) = 0 \tag{3.41}$$

bulunur. Hipotezden her $x,m \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x)\gamma d(m) = d(x)\gamma d(m) \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.42) de x yerine $x\alpha n$ yazılırsa her $x,m,n \in M$ ve her $\alpha,\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x\alpha n)\gamma d(m) = d(x\alpha n)\gamma d(m)$$

$$d(x)\alpha\theta(n)\gamma d(m) + \varphi(x)\alpha d(n)\gamma d(m) = d(x)\alpha\theta(n)\gamma d(m) + \varphi(x)\alpha d(n)\gamma d(m) \tag{3.43}$$

olur. (3.43) eşitliğinde $charM = 2$ olduğu kullanılırsa

$$d(x)\alpha\theta(n)\gamma d(m) = d(m)\gamma d(x)\alpha\theta(n) \tag{3.44}$$

dir. θ örten $\Gamma-$halka homomorfizması olduğundan her $x,m,k \in M$ ve her $\alpha,\gamma \in \Gamma$ için

$$d(x)\alpha k\gamma d(m) = d(m)\gamma\alpha k d(x)$$

bulunur. Eğer $d(x) \neq 0$ ise Sonuç 2.2.1 den $d(m) = \lambda(m)\alpha d(x)$ olacak şekilde $\lambda(m) \in C_\Gamma$ vardır. Diğer taraftan (3.40) dan her $y, m \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$0 = [m, y]_\beta$$

$$0 = m\beta y - y\beta m$$

$$m\beta y = y\beta m$$

olur. Bu eşitlik ise M nin değişmeli olduğunu gösterir.

Önerme 3.2.2 M karakteristiği 2 olan bir asal $\Gamma-$halkası $\theta : M \to M$ ve $\varphi : M \to M$ örten $\Gamma-$halka homomorfizması, d de $d\theta = \theta d$ ve $d\varphi = \varphi d$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı türevi olsun. Eğer $u \in U$ için

$$d_1(d_2(u)) = 0 \qquad (3.45)$$

ise o zaman her $x \in M$ ve her $\alpha \in \Gamma$ için $d_2(x) = \lambda\alpha d_1(x)$ olacak şekilde bir $\lambda \in C_\Gamma$ vardır.

İspat. $\gamma \in \Gamma$ ve $u, v \in U$ olsun. (3.45) de u yerine $d_2(u)\gamma v$ yazılırsa her $u, v \in U$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
0 &= d_1(d_2(d_2(u)\gamma v)) \\
&= d_1(d_2(d_2(u))\gamma\theta(v) + \varphi(d_2(u))\gamma d_2(v)) \\
&= d_1(d_2^2(u))\gamma\theta(v)) + d_1(\varphi(d_2(u))\gamma d_2(v)) \\
&= d_1(d_2^2(u))\gamma\theta^2(v) + \varphi(d_2^2(u))\gamma d_1(\theta(v)) \\
&\quad + d_1(\varphi(d_2(u)))\gamma\theta(d_2(v)) + \varphi(d_2(u))\gamma d_1(d_2(v))
\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezdeki şartlardan her $u, v \in U$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\varphi(d_2^2(u))\gamma d_1(\theta(v)) = 0 \qquad (3.46)$$

elde edilir. θ ve φ örten $\Gamma-$halka homomorfizması olduğundan her $w, z \in U$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d_2^2(w)\gamma d_1(z) = 0 \qquad (3.47)$$

dir. $d_1 \neq 0$ olduğu için Lemma 2.2.1 den $w \in U$ için $d_2^2(w) = 0$ dir. (3.45) eşitliğinde u yerine $u\gamma x$ yazılırsa her $u \in U$, her $x \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
0 &= d_1(d_2(u\gamma x)) \\
&= d_1(d_2(u)\gamma\theta(x) + \varphi(u)\gamma d_2(x)) \\
&= d_1(d_2(u)\gamma\theta(x)) + d_1(\varphi(u)\gamma d_2(x)) \\
&= d_1(d_2(u))\gamma\theta^2(x) + \varphi(d_2(u))\gamma d_1(\theta(x)) + d_1(\varphi(u))\gamma\theta(d_2(x)) + \varphi^2(u)\gamma d_1(d_2(x))
\end{aligned}
$$

olur. Hipotezden

$$d_2(u)\gamma d_1(\theta(x)) + d_1(u)\gamma\theta(d_2(x)) + u\gamma d_1(d_2(x)) = 0 \qquad (3.48)$$

bulunur. (3.48) denkleminde u yerine $d_2(u)$ yazılırsa

$$0 = d_2{}^2(u)\gamma d_1(\theta(x)) + d_1(d_2(u))\gamma\theta(d_2(x)) + d_2(u)\gamma d_1(d_2(x))$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde hipotez şartları ve (3.47) eşitliği kullanılırsa

$$d_2(u)\gamma d_1(d_2(x)) = 0$$

dır. $d_2 \neq 0$ olduğu için Lemma 2.2.1 ile her $x \in M$ için $d_1(d_2(x)) = 0$ dır. Buradan, Lemma 3.2.1 ile her $\alpha \in \Gamma$ için $d_2 = \lambda\alpha d_1$ olacak şekilde $\lambda \in C_\Gamma$ vardır.

Önerme 3.2.3 M karakteristiği 2 olan asal $\Gamma-$halkası $\theta : M \to M$ ve $\varphi : M \to M$ örten $\Gamma-$halka homomorfizmaları, d de $d^2 \neq 0$, $d\theta = \theta d$ ve $d\varphi = \varphi d$ olacak şekilde M nin sıfırdan farklı türevi olsun. Bu durumda U, $\theta(U) \subseteq U$ olacak biçimde M nin sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere her $u \in U$ için

$$d(u) \in Z \qquad (3.49)$$

ise o zaman M değişmelidir.

İspat: (3.49) dan her $u, v \in U$ her $x \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için;

$$[d(u), x]_\beta = 0 \qquad (3.50)$$

dir. (3.50) eşitliğinde u yerine $u\gamma v$ yazılırsa her $u, v \in U$ her $x \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$
\begin{aligned}
[d(u\gamma v), x]_\beta &= [d(u)\gamma\theta(v), x]_\beta + [\varphi(u)\gamma d(v), x]_\beta \\
&= [d(u), x]_\beta \gamma\theta(v) + d(u)\gamma[\theta(v), x]_\beta + [\varphi(u), x]_\beta \gamma d(v) + \varphi(u)\gamma[d(v), x]_\beta
\end{aligned}
$$

olur ve dolayısıyla (3.50) den

$$0 = d(u)\gamma[\theta(v), x]_\beta + [u, x]_\beta \gamma d(v) \qquad (3.51)$$

elde edilir. (3.51) de u yerine $d(u)$ yazılırsa

$$0 = d^2(u)\gamma[\theta(v),x]_\beta + [\varphi(d(u)),x]_\beta \gamma d(v)$$

olur. $\varphi d = d\varphi$ olduğundan (3.50) den

$$0 = d^2(u)\gamma[\theta(v),x]_\beta \tag{3.52}$$

elde edilir. (3.52) eşitliğinde x yerine $y\alpha x$ yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d^2(u)\gamma[\theta(v),y\alpha x]_\beta \\ &= d^2(u)\gamma y\alpha[\theta(v),x]_\beta + d^2(u)\gamma[\theta(v),y]_\beta \alpha x \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla (3.52) den

$$d^2(u)\gamma y\alpha[\theta(v),x]_\beta = 0$$

elde edilir. M asal $\Gamma-$halkası, θ örten homomorfizma ve $d^2 \neq 0$ olduğundan her $x \in M$, her $v \in U$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$[v,x]_\beta = 0 \tag{3.53}$$

elde edilir. (3.53) de v yerine $v\gamma y$ yazılırsa her $y \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$0 = [v\gamma y,x]_\beta = v\gamma[y,x]_\beta + [v,x]_\beta \gamma y$$

olur ve dolayısıyla (3.53) den her $x, y \in M$, her $v \in U$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $v\gamma[y,x]_\beta = 0$ elde edilir. M asal $\Gamma-$halkası olduğundan her $x, y \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $[y,x]_\beta = 0$ olur ve böylece M değişmelidir.

Lemma 3.2.2: $U \neq 0$, M $\Gamma-$halkasının bir ideali θ ve φ U üzerinde otomorfizma olsun. O zaman aşağıdaki şartlar birbirine denktir.

i) $d(U) \subseteq L$ (yani $d(U)\Gamma U = 0$),

ii) $d(U)\Gamma d(U) = 0$,

iii) Bazı $(0 \neq)$ $a \in M$ için $d(U)\Gamma a = 0$.

İspat. $i \Rightarrow ii$: $d(U) \subseteq L$ olsun. Bu durumda her $v, w \in U$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d(u)\gamma v = 0 \tag{3.54}$$

dır. U, M nin bir ideali olduğundan $w \in U$ için (3.54) te u yerine $u\beta d(w)$ alınırsa

$$0 = d(u\beta d(w))\gamma v$$

$$= du\beta\theta(d(w))\gamma v + \varphi(u)\beta d^2(w)\gamma v$$

olur.

$\theta-$ örten $\Gamma-$ homomorfizması olduğundan (3.54) eşitliğinden yukarıdaki denklem

$$\varphi(u)\beta d^2(w)\gamma v = 0 \qquad (3.55)$$

haline dönüşür. $\varphi(u)$ M nin bir ideali olduğundan $m \in M$ için (3.55) te $\varphi(u)$ yerine $\varphi(u)\alpha m$ yazılırsa her $u, v \in U$ ve her $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ için

$$\varphi(u)\alpha m\beta d^2(w)\gamma v = 0$$

elde edilir ve M nin asallığından her $u \in U$ için $\varphi(u) = 0$ veya her $v, w \in U$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $d^2(w)\gamma v = 0$ dır. $\varphi(u) \neq 0$ olduğundan her $v, w \in U$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$d^2(w)\gamma v = 0 \qquad (3.56)$$

olur. Diğer taraftan $d(U)\Gamma U = 0$ olduğundan her $u, v \in U$ için

$$d(d(u))\gamma v = 0$$

bulunur. Böylece

$$0 = d(d(u))\gamma v$$

$$= d^2(u)\gamma\theta(v) + \varphi(d(u))\gamma d(v)$$

elde edilir. (3.56) eşitliğinden her $u, v \in U$ için

$$\varphi(d(u))\gamma d(v) = 0 \qquad (3.57)$$

elde edilir. (3.57) de v yerine $\varphi(v)$ alınırsa

$$\varphi(d(u))\gamma d(\varphi(v)) = 0$$

dır. $\varphi-$ örten $\Gamma-$ homomorfizması olduğundan

$$\varphi(d(u))\gamma\varphi(d(v)) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\varphi(d(u)\gamma d(v)) = 0$$

elde edilir ve φ, M nin bir otomorfizması olduğundan her $u, v \in U$ için

$$d(u)\gamma d(v) = 0$$

dır.

$ii \Rightarrow iii$: $d(U)\Gamma d(U) = 0$ olsun. O zaman her $u, v \in U$ için

$$d(u)\gamma d(v)=0 \tag{3.58}$$

dır. $U\neq 0$ ve $d\neq 0$ olduğundan $d(U)\neq 0$ dır. Bu nedenle her $v\in U$ için $d(v)=a$ olacak biçimde M nin sıfırdan farklı bir a elemanı vardır. (3.58) denkleminden $d(u)\gamma a=0$ dır.

$iii\Rightarrow i$: $0\neq a$ M nin sabit bir elemanı için, $d(u)\gamma a=0$ olsun. O zaman her $u\in U$ için

$$d(u)\gamma a=0 \tag{3.59}$$

dır. (3.59) da u yerine $u\beta v$ alınırsa her $u,v\in U$ ve her $\beta,\gamma\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned}0&=d(u\beta v)\gamma a\\&=d(u)\beta\theta(v)\gamma a+\varphi(u)\beta d(v)\gamma a\end{aligned}$$

olur. (3.59) eşitliği yukarıda kullanılırsa her $u,v\in U$ ve her $\beta,\gamma\in\Gamma$ için

$$d(u)\beta\theta(v)\gamma a=0 \tag{3.60}$$

dır. θ, U üzerinde örten olduğundan her $u,w\in U$ ve her $\beta,\gamma\in\Gamma$ için

$$d(u)\beta w\gamma a=0 \tag{3.61}$$

elde edilir. U, M nin bir ideali olduğu için $m\in M$ için (3.61) de w yerine $w\alpha m$ alınırsa

$$d(u)\beta w\alpha m\gamma a=0$$

olur ve M bir asal $\Gamma-$halkası olduğundan

$d(u)\beta w=0$ veya $a=0$ dır. $a\neq 0$ olduğundan her $u,v\in U$ için

$$d(u)\beta w=0$$

olur ki bu da $d(U)\subseteq L$ demektir.

KAYNAKLAR

[1] Barnes, W. E., *On the* $\Gamma-$*rings of Nobusawa*, Pacific J. of Math., 18(3), 411-422, 1966.

[2] Bergen, J., *Derivations in Prime Rings*, Canad. Math. Bull., 26(3), 267-270 1983.

[3] Bresar, M., *Semiderivations of Prime Rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 108, 859-860, 1990.

[4] Chang, J. C., *On Semi-Derivations of Prime Rings*, Chinese J. Math., 12, 255-262, 1984.

[5] Chang, J. C., *α-Derivations with Invertible Values*, Bull. Institute of Math. Acad. Sinica Vol., 13(4), 323-333, 1985.

[6] Jing, F. J., *On derivations of* $\Gamma-$*rings,* Qufu Shifin Daxue Xuebeo Ziran Kexue Ban., 13(4), 159-161, 1987.

[7] Hirano, Y. and Tominaga, H., *Some Commutativity Theorems for Prime Rings with Derivations and Differentially Semiprime Rings*, Math. J. of Okayama Univ., 26, 101-108, 1984.

[8] Kaya, K., *Prime Rings with α-Derivations*, Hacettepe Bull. of Natural Science and Engineering, 16-17, 63-71, 1987-1988.

[9] Kaya, K., *(σ, τ)-türevli asal halkalar üzerine*, Doğa TU Mat. D. C., 12(2), 42-45, 1988.

[10] Kaya, K., *Zayıf-α-türevli asal halkalar üzerine*, Doğa TU Mat. D. C., 12(2), 46-51 1988.

[11] Kyuno, S., *On prime gamma-rings,* Pacific J. of Math., 75(1), 185-190, 1978.

[12] Luh, J., *On the theory of simple gamma-rings,* Michigan Math. J., 16, 65-75, 1969.

[13] McCoy, N. H., *The Theory of Rings*, The Macmillan Company, New York, 1964.

[14] Nobusawa, N., *On a generalization of the ring theory,* Osaka J. Math., 1, 81-89, 1964.

[15] Öztürk, M. A. and Jun, Y. B., *On the centroid of the prime gamma rings*, Commun. Korean Math. Soc., 15(3), 469-479, 2000.

[16] Öztürk, M. A. and Jun, Y. B., *On the centroid of the prime gamma rings II*, Turk J. Math., 25(3), 367-377, 2001.

[17] Öztürk, M. A., Jun, Y. B. and Kim, K. H., *On derivations of prime gamma rings*, Turk J. Math., 26(3), 317-327, 2002.

[18] Öztürk, M. A. and Jun, Y. B., *Regularity of the generalized centroid of semi-prime gamma rings*, Commun. Korean Math. Soc., 19(2), 233-242, 2004.

[19] Öztürk, M. A. and Çeven, Y., *On (σ, τ)-gamma-derivations in gamma-near-rings*, Advances in Algebra, 1(1), 1-10, 2008.

[20] Passman, D., *Infinite crossed products*, Accademic Pres, San Diego, 1989.

[21] Posner, E. C., *Derivations in prime rings,* Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1093-1100, 1957.

[22] Sapancı, M. and Öztürk M. A., *A note on gamma rings*, Atatürk Üni. 40. Kuruluş Yıldönümü Mat. Semp. Özel Sayısı, 48-52, 20 -22 Mayıs 1998.

[23] Soytürk, M., *The commutativity in prime gamma rings with derivation*, Tr. J. of Math., 18(4), 149-155, 1994.

[24] Uçkun, M., Öztürk, M. A. and Jun, Y. B., *On prime gamma-near-rings with derivations*, Commun. Korean Math. Soc., 19(3), 427-433, 2004.

[25] Uçkun, M. and Yenigül, M. Ş., *One-sided ideals and prime rings with (σ, τ)-derivations*, Sarımsaklı'da Matematik Günleri Sempozyumu, 05-08 Haziran 1997.

ÖZGEÇMİŞ

Tuba ACET 1985 yılında Şanlıurfa'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Şanlıurfa'da tamamladı. 2003 yılında İnönü Üniversitesi Matematik bölümünü kazandı. 2007 yılında aynı bölümden mezun oldu. 2008 yılında Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı.