ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LACUNARY İNVARİANT ZWEIER YAKINSAK DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aliye SAPSIZOĞLU

ADIYAMAN
Mart 2013

Aliye SAPSIZOĞLU tarafından hazırlanan "*Lacunary İnvariant Zweier Yakınsak Dizi Uzayları ve İstatistiksel Yakınsaklık*" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç.Dr. Ayhan ESİ

Jüri Üyeleri :

Doç.Dr. Ayhan ESİ		___________
(Adıyaman Üniv.)	Matematik A.B.D.	
Yrd.Doç.Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ		___________
(Adıyaman Üniv.)	Matematik A.B.D.	
Yrd.Doç.Dr. Tayfun SERVİ		___________
(Adıyaman Üniv.)	Matematik A.B.D.	

Yukarıdaki sonucu onaylarım. /03/2013

Doç.Dr. Mustafa ÖZDEN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LACUNARY İNVARİANT ZWEIER YAKINSAK DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Aliye SAPSIZOĞLU

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

19+iv sayfa

2013

Danışman: Doç.Dr. Ayhan ESİ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında kuvvetli invariant lacunary zweier yakınsak dizi uzayları ve $\left[S_{\sigma}^{\theta}\right]_{Z}$ −istatistiksel yakınsak dizi uzayı tanımlanmış ve bu dizi uzaylarının sağladığı bazı özellikler incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lacunary dizisi, Zweier uzayı, istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON SOME LACUNARY INVARIANT ZWEIER CONVERGENT SEQUENCE AND STATISTICAL CONVERGENCE

Aliye SAPSIZOĞLU

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

19+iv pages

2013

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Ayhan ESİ

In this master thesis we introduce strongly lacunary invariant zweier convergent sequence spaces and $\left[S_{\sigma}^{\theta}\right]_{Z}-$statistical convergence and examine some properties of these sequence spaces.

KEY WORDS: Lacunary sequence, Zweier space, statistical convergence.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca yardımlarını benden esirgemeyen hocam Sayın Doç.Dr. Ayhan Esi'ye ve teknik yardımlarından dolayı Yrd.Doç.Dr. M. Kemal Özdemir'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi,
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi,
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi,
ℓ_∞	:	Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı,
c	:	Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı,
c_0	:	Kompleks terimli sıfır diziler uzayı,
V_σ	:	σ- ortalamaları eşit olan sınırlı dizilerin cümlesi,
S	:	İstatistiksel yakınsak dizilerin cümleri,
S^θ	:	Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı.

1. GİRİŞ

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanacağımız temel tanımlar verilecektir.

Tanım 1.0.1 (Lineer Uzay). *$X \neq \varnothing$ ve F reel veya kompleks sayıların cismi olsun.*

$$+ \ : \ X \ \times \ X \to X \qquad ve \qquad \bullet \ : \ F \ \times \ X \to X$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir.

$\forall\ x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in F$ olmak üzere

($L1$) $x + y \in X$,

($L2$) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

($L3$) $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ vardır,

($L4$) $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir tek $-x \in X$ vardır,

($L5$) $x + y = y + x$,

($L6$) $\lambda x \in X$,

($L7$) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

($L8$) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

($L9$) $(\lambda \cdot \mu)x = \lambda \cdot (\mu x)$,

($L10$) $1 \cdot x = x$ (Burada 1, F'nın birim elemanıdır.)

Tanım 1.0.2 (Dizi Uzayı).

$$\omega = \{x = (x_k) | x : \mathbb{N} \to F,\ k \to x_k = x(k)\}$$

cümlesi $((x_k), (y_k)) \to (x_k + y_k)$ ve $(\lambda, (x_k)) \to (\lambda \cdot x_k)$ ile tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte F üzerinde bir lineer uzaydır. ω lineer uzayı ve ω'nın herbir lineer alt uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.0.3 (Normlu Uzay). *X, $\mathbb{R}$cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X'den $\mathbb{R}$ içine olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $x \to \|x\|$ fonksiyonuna bir norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir: $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için*

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$

b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|,$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Tanım 1.0.4 (Cauchy Dizisi). *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_0$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy Dizisi denir.*

Tanım 1.0.5 (Banach Uzayı). *X normlu uzayındaki her (x_n) Cauchy dizisi X üzerinde tanımlı norm metriğine göre yakınsak ve yakınsadığı nokta X'in elemanı ise, yani $x_n \to x \in X$ ise $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tamdır denir. Tam normlu uzaylara da Banach Uzayı denir.*

Tanım 1.0.6 (K Uzayı). *Her $i \in \mathbb{N}$ için $p_i(x) = (x_i)$ dönüşümü $p_i : X \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu ile tanımlanırsa, bu lineer topoloji ile X dizi uzayına K uzayı denir.*

Tanım 1.0.7 (BK Uzayı). *X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve*

$$\Pi_k : X \to \mathbb{C}, \;\; \Pi_k(x) = x_k, (k = 1, 2, ...)$$

dönüşümü sürekli ise X uzayına BK Uzayı denir.

Tanım 1.0.8 (Matris Dönüşümü). *$X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing, \omega$ uzayının herhangi iki alt cümlesi ve $A = (a_{nk})$; $(n.k = 1, 2, ...)$ kompleks sayılardan oluşan bir sonsuz matris olsun. Bir $x = (x_k) \in X$ dizisinin Ax dönüşüm dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

yakınsak dizisi ile verilen $(A_n(x)) \in Y$ dizisidir.

Tanım 1.0.9 (Lineer İzomorfizm). *V ve U bir F cismi üzerinde lineer uzayı ve $f : V \to U$ bir fonksiyon olsun. Her $v_1, v_2 \in V$ ve $a \in F$ için*

$$(1) \qquad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

$$(2) \qquad f(av_1) = af(v_1)$$

f ye V den U ya doğrusal dönüşüm (lineer dönüşüm, lineer uzay homomorfizması veya lineer transformasyon) denir. f homomorfizması birebir örten bir fonksiyon ise f ye izomorfizma denir.

Tanım 1.0.10 (Cesaro Toplanabilme Metodu).

$$c_{nk} = \{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n+1}, & k \leq n \\ 0 & , k > n \end{array}$$

elemanları ile tanımlı alt üçgensel sonsuz matrise Cesaro Matrisi denir ve $(C, 1)$ ile gösterilir. $\sum_n a_n$, (S_n) kısmi toplamlar dizisi ile verilen sonsuz bir seri olsun.

$$a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} S_v$$

ile tanımlanan diziden diziye dönüşüme, (S_n) dizisinin Cesaro ortalaması denir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu yüksek lisans tez çalışmasının temeli Zweier yakınsak dizi uzayları hakkında çalışmalar Şengönül [3] ile Karababa ve Esi [17] kaynağında verilmektedir. İnvariant yakınsaklık hakkında çalışmalara Shaefer [11], Savaş [9], Boss [5], ve kaynaklarında ulaşılabilir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı adi anlamda (Cauchy anlamında) yakınsaklığın bir genelleştirmesi olarak Fast [2], Cannor [4], Shoenberg [6], Fridy [7], Murseleen [8, 12], Fridy ve Orhan [14], Esi [10], Fredman, Sember ve Raphael [13] ve Salat [15] çalışmalarından faydalanılmıştır.

3. ZWEIER YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

ℓ_∞, c ve c_0 ile sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak reel yada kompleks terimli diziler uzayını gösterelim. ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birlikte Banach uzaylarıdır.

Schaefer[11], $\sigma-$yakınsaklık kavramını aşağıdaki gibi tanımlamıştır. σ pozitif tamsayılar cümlesi üzerinde birebir ve örten bir fonksiyon ve $m = 1, 2, 3, ...$ için cümle

$$\sigma^m(n) = \sigma\left(\sigma^{m-1}(n)\right)$$

olsun.

ℓ_∞ üzerinde sürekli bir lineer fonksiyon olan ϕ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona $\sigma-$ortalama denir.

(*i*) $\phi(x) \geq 0$, $x = (x_k)$ dizisinde her k için $x_k \geq 0$'dır,

(*ii*) $\phi(e) = 1$, $e = (1, 1, 1, ...)$ için,

(*iii*) $\phi\left(\left\{x_{\sigma(k)}\right\}\right) = \phi(\{x_k\})$, her $x = (x_k) \in \ell_\infty$.

Açıkca $x = (x_n) \in c$ için $\phi(x) = \lim x$ cümlesi, tüm yakınsak dizilerin cümlesi olan c uzayı üzerindeki limit fonksiyonunun genişlemesidir. Sonuç olarak $c \subset V_\sigma$ için, V_σ tüm $\sigma-$ortalamaları eşit olan sınırlı dizilerin cümlesidir. Mursaleen [8], $[V_\sigma]$ ile tüm kuvvetli $\sigma-$yakınsak dizilerin uzayını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

$$[V_\sigma] = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \lim_m \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \left|x_{\sigma^k(n)} - L\right| = 0,\ n\text{'ye göre düzgün olarak} \right\}$$

Kuvvetli $\sigma-$yakınsaklık, kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramının genellemesidir ve $\sigma(n) = n+1$ için $[V_\sigma] = [\hat{c}]$ kuvvetli hemen hemen yakınsak yakınsak diziler uzayı elde edilir. Böylece $[V_\sigma] \subset V_\sigma \subset \ell_\infty$ elde edilir.

Pozitif sayıların $\theta = (k_r)$ dizisine, eğer $k_0 = 0$, $r \to \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ şartları sağlanıyorsa bir lacunary dizisi denir. θ tarafından belirlenen aralıklar

$I_r = (k_{r-1}, k_r]$ şeklinde gösterilir ve $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r ile ifade edilir. N_θ lacunary kuvvetli yakınsak dizi uzayı Freedman ve arkadaşları [13] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0, \text{bazı } L \text{ sayıları için} \right\}$$

dir. N_θ uzayı

$$\|x\|_\theta = \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k|$$

normu ile birlikte bir BK uzayıdır.

Şimdi Savaş [16] tarafından tanımlanan aşağıdaki dizi uzaylarını verelim:

$$\left[V_\sigma^\theta\right]^0 = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \left|x_{\sigma^k(n)}\right| = 0, n \text{ sayısına göre düzgün olarak} \right\}$$

$$\left[V_\sigma^\theta\right] = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \left|x_{\sigma^k(n)} - L\right| = 0, n \text{ sayısına göre düzgün olarak} \right.$$
$$\left. \text{ve bazı } L \text{ sayıları için} \right\}$$

ve

$$\left[V_\sigma^\theta\right]^\infty = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \sup_{r,n} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \left|x_{\sigma^k(n)}\right| < \infty \right\}$$

dır. Kolayca görüleceği gibi $\left[V_\sigma^\theta\right]$ uzayı

$$\|x\|_\theta = \sup_{r,n} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \left|x_{\sigma^k(n)}\right|$$

normu ile bir BK uzayıdır.

Kolayca görüleceği gibi eğer $\theta = (2^r)$ ise $\left[V_\sigma^\theta\right]$ dizi uzayı $[V_\sigma]$ dizi uzayına indirgenir.

4. KUVVETLİ LACUNARY INVARIANT ZWEIER YAKINSAKLIK

Bu yüksek lisans tez çalışmasının bu bölümünde dizi uzaylarının yeni sınıflarını tanımlayacağız ve bu dizi uzayları arasındaki bazı bağıntıları vereceğiz. Ayrıca bir sonraki bölümde $\left[S_\sigma^\theta\right]$ −istatistiksel yakınsaklık kavramını ve bu yeni dizi uzayları ile olan ilişkilerini ortaya koyacağız.

Tez boyunca sık sık kullanacağımız bir $y = (y_k)$ dizisini $x = (x_k)$ dizisinin

$$y_k^n = \frac{1}{2}\left(x_{\sigma^k(n)} + x_{\sigma^{k-1}(n)}\right) (n, k \in \mathbb{N}) \tag{4.0.1}$$

olacak şekilde Z dönüşümünü tanımlayalım ve $\left[V_\sigma^\theta\right]^o$, $\left[V_\sigma^\theta\right]$ ve $\left[V_\sigma^\theta\right]^\infty$ dizi uzaylarının $Z-$dönüşümü altında görüntüleri olan $\left[V_\sigma^\theta\right]_Z^0$, $\left[V_\sigma^\theta\right]_Z$ ve $\left[V_\sigma^\theta\right]_Z^\infty$ yeni dizi uzaylarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\left[V_\sigma^\theta\right]_z^0 = \left\{x = (x_k) : \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |y_k^n| = 0,\ n\text{'ye göre düzgün olarak}\right\}$$

$$\left[V_\sigma^\theta\right]_z = \left\{x = (x_k) : \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |y_k^n - L| = 0,\ n\text{'ye göre düzgün olarak}\right.$$
$$\left.\text{ve bazı } L \text{ sayıları için}\right\}$$

ve

$$\left[V_\sigma^\theta\right]_z^\infty = \left\{x = (x_k) : \sup_{r,n} \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |y_k^n| < \infty\right\}$$

Teorem 4.0.11. *$\left[V_\sigma^\theta\right]_z^0$, $\left[V_\sigma^\theta\right]_z$ ve $\left[V_\sigma^\theta\right]_z^\infty$ dizi uzayları $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzaylardır. Bu dizi uzayları*

$$\|x\|_{\left[V_\sigma^\theta\right]_z^0} = \|x\|_{\left[V_\sigma^\theta\right]_z} = \|x\|_{\left[V_\sigma^\theta\right]_z^\infty} = \|Zx\|_{\left[V_\sigma^\theta\right]} \tag{4.0.2}$$

normu ile birlikte BK uzaylarıdır.

İspat. Teoremin ilk kısmı kolayca gösterilebilir. Şimdi $\left[V_\sigma^\theta\right]_z^0$, $\left[V_\sigma^\theta\right]_z$ ve $\left[V_\sigma^\theta\right]_z^\infty$dizi uzaylarını (3.0.2) ile tanımlanan norm ile birlikte BK-uzayları olduğunu gösterelim. $Z = (z_{nk})_{n,k=0}^\infty$ matrisi normaldir, yani her $n, k \in \mathbb{N}$ için ve $0 \le k \le n$ ise $z_{nk} \neq 0$ ve $k > n$ için $z_{nk} = 0$ dır. Dolayısıyla Wilansky[1] teorem 4.3.2 den $\left[V_\sigma^\theta\right]_z^0$, $\left[V_\sigma^\theta\right]_z$ ve $\left[V_\sigma^\theta\right]_z^\infty$ dizi uzaylarının BK uzayları olduğu kolayca görülür. □

Teorem 4.0.12. *$\left[V_\sigma^\theta\right]_z$, $\left[V_\sigma^\theta\right]_z^0$ ve $\left[V_\sigma^\theta\right]_z^\infty$ dizi uzayları sırasıyla $\left[V_\sigma^\theta\right]$, $\left[V_\sigma^\theta\right]^0$ ve $\left[V_\sigma^\theta\right]^\infty$ dizi uzayları ile lineer izomorfiktirler.*

İspat. Biz sadece $\left[V_\sigma^\theta\right]_z^0$ ile $\left[V_\sigma^\theta\right]^0$ uzaylarını göz önüne alalım. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir.

$$Z : \left[V_\sigma^\theta\right]^0 \to \left[V_\sigma^\theta\right]_z^0$$

$$x \to Zx = y$$

dönüşümünü $y = (y_k)$dizisi (3.0.1) ile verdiğimiz şekilde tanımlayalım. Z dönüşümünün lineerliği kolayca elde edilir. Ayrıca $x = 0$ iken $Zx = 0$ olduğundan Z injektiftir. Şimdi $y = (y_k^n) \in \left[V_\sigma^\theta\right]^0$ olsun ve $x = (x_k)$ dizisini

$$x_{\sigma^k(n)} = 2\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i-k} y_i^n \quad (i, n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece

$$\|x\|_{\left[V_\sigma^\theta\right]_z^0} = \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{1}{2}\left(2\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i-k} y_i^n + 2\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i-k+1} y_i^n\right)\right|$$
$$= \lim_r \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|y_k^n|$$

bulunur. Buradan $x = (x_k) \in \left[V_\sigma^\theta\right]_Z^0$ elde edilir.

O halde Z surjektiftir. Dolayısı ile Z lineer bijeksiyondur.Sonuç olarak $\left[V_\sigma^\theta\right]_Z^0$ ve $\left[V_\sigma^\theta\right]^0$ dizi uzaylarının lineer izomorfik olduğu ortaya çıkar. □

Şimdi kolaylıkla görülebilir ki, $\left[V_\sigma^\theta\right]$ dizi uzayı ile Mursaleen [8] tarafından tanımlanan kuvvetli invariant Cesaro toplanabilen dizilerin

$$[V_\sigma] = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \ \lim_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left| x_{\sigma^k(n)} - L \right| = 0, n\text{'ye göre düzgün ve } \exists\ L \in \mathbb{C} \text{ için} \right\}$$

dizi uzayları arasında bir ilişki vardır. Buradan açıkca, $\theta = (2^r)$ alınırsa $\left[V_\sigma^\theta\right] = [V_\sigma]$ olduğu görülür. Aynı zamanda söyleyebiliriz ki $\left[V_\sigma^\theta\right]_Z$ dizi uzayı ile

$$[w_\sigma]_Z = \left\{ x = (x_k) : \ \lim_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |y_k^n - L| = 0, n\text{'ye göre düzgün olarak} \right. \\ \left. \text{ve } \exists\ L \in \mathbb{C} \right\}$$

dizi uzayı arasında kuvvetli bir ilişki vardır. Özel durumda $\theta = (2^r)$ ise $\left[V_\sigma^\theta\right]_Z = [w_\sigma]_Z$ elde edilir.

Teorem 4.0.13. *$\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu taktirde* $\liminf_r q_r > 1$ *ise* $[w_\sigma]_Z \subset \left[V_\sigma^\theta\right]_Z$ *dır.*

İspat. $x = (x_k) \in [w_\sigma]_Z$ ve $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu taktirde yeteri kadar büyük r sayıları için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. O halde $h_r \geq \frac{\delta}{\delta+1}$ yazabiliriz. Dolayısıyla $x = (x_k) \in [w_\sigma]_Z$ ve yeterince büyük r'ler için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} \sum_{k=1}^{k_r} |y_k^n - L| &\geq \frac{1}{k_r} \sum_{k \in I_r} |y_k^n - L| \\ &\geq \frac{\delta}{\delta + 1} . \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |y_k^n - L| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 4.0.14. *$\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu taktirde* $\limsup_r q_r < \infty$ *ise* $\left[V_\sigma^\theta\right]_Z \subset [w_\sigma]_Z$ *dır.*

İspat. Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu taktirde $\forall r \geq 1$ için $q_r < B$ olacak şekilde $B > 0$ vardır. $x = (x_k) \in \left[V_\sigma^\theta\right]_Z$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Buradan $\forall\ j \geq R$

için

$$A_j = \frac{1}{h_j}\sum_{k\in I_j} |y_k^n - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde $R > 0$ sayısı vardır. O halde her $j = 1, 2, 3, ...$ için $A_j < K$ olacak şekilde $K > 0$ bulunabilir. Şimdi m sayısını $r \geq R$ olmak üzere $k_{r-1} < m < k_r$ şartını sağlayacak şekilde alalım. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} |y_k^n - L| &\leq \frac{1}{k_{r-1}}\sum_{k=1}^{k_r} |y_k^n - L| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}}\sum_{k\in I_1} |y_k^n - L| + \frac{1}{k_{r-1}}\sum_{k\in I_2} |y_k^n - L| \\
&\quad +... + \frac{1}{k_{r-1}}\sum_{k\in I_r} |y_k^n - L| \\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}k_1}\sum_{k\in I_1} |y_k^n - L| + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}(k_2 - k_1)}\sum_{k\in I_2} |y_k^n - L| \\
&\quad +... + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}\left(k_R - k_{R-1}\right)}\sum_{k\in I_R} |y_k^n - L| \\
&\quad +... + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}\left(k_r - k_{r-1}\right)}\sum_{k\in I_r} |y_k^n - L| \\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}}A_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}}A_2 + ... + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}}A_R + ... + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}}A_r \\
&\leq \left\{\sup_{j\geq 1} A_j\right\}\frac{k_R}{k_{r-1}} + \left\{\sup_{j\geq R} A_j\right\}\frac{k_r - k_R}{k_{r-1}} \\
&\leq K \cdot \frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon B.
\end{aligned}$$

elde edilir. $m \to \infty$ iken $k_r \to \infty$ olduğundan n'ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} |y_k^n - L| \to 0$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. □

Sonuç 4.0.15. *$\theta = (k_r)$, bir lacunary dizisi ve $1 \leq \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu taktirde $\left[V_\sigma^\theta\right]_Z = [w_\sigma]_Z$.*

İspat. İspat Teorem 4.0.13 ve 4.0.14 ile birlikte düşünülürse sonuç elde edilir. □

5. $\left[S_\sigma^\theta\right]_Z$ −İSTATİSTİKSEL ZWEIER YAKINSAKLIK

Bu bölümde $\left[S_\sigma^\theta\right]_Z$ −istatistiksel yakınsaklık kavramını ortaya koyacağız ve $\left[V_\sigma^\theta\right]$ uzayı ile ilgili bazı ilişkilerini vereceğiz.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast[2] ve Schoenberg[6] tarafından birbirinden bağımsız olarak verilmiştir. O zamandan beri istatistiksel yakınsaklık farklı adlar altında Fourier Analiz, Ergodik Teori ve Sayılar Teorisi'nde kullanılmıştır. Her iki araştırmacı tarafından sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesaro toplanabilir olduğu ifade edilmiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Fridy[7], Salat[15], Connor[4], Mursaleen[12], Fridy ve Orhan[14], Savaş[9], Esi[10], Karababa ve Esi[17] gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Tanım 5.0.16. *Bir $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısı için istatistiksel yakınsaktır denir, öyleki her $\varepsilon > 0$ için*

$$\lim_m \frac{1}{m} \left|\{k \leq m : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

dır. Bu durumda $S - \lim x = L$ veya $x_k \to L\,(S)$ ile gösterilir ve

$$S = \{x = (x_k) : S - \lim x = L,\ \exists L \text{ için}\}$$

şeklinde ifade edebilir.

Tanım 5.0.17. *Bir $x = (x_k)$ dizisine L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Öyle ki her $\varepsilon > 0$ için*

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

dır. Buradan $S^\theta - \lim x = L$ veya $x_k \to L\,\left(S^\theta\right)$ ile gösterilir ve

$$S^\theta = \left\{x = (x_k) : S^\theta - \lim x = L, \exists L \text{ için}\right\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 5.0.18. *Bir $x=(x_k)$ dizisine L sayısına $S_\sigma^\theta-$istatistiksel yakınsaktır denir, öyle ki her $\varepsilon>0$ için*

$$\lim_r \frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \left|x_{\sigma^k(n)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0, (n\text{'ye göre düzgün olarak})$$

dir. Bu taktirde $S_\sigma^\theta-\lim x=L$ veya $x_k\to L\left(S_\sigma^\theta\right)$ ile gösterilir ve

$$S_\sigma^\theta=\left\{x=(x_k) : S_\sigma^\theta-\lim x=L, \exists L \text{ için}\right\}$$

dir.

Tanım 5.0.19. *Bir $x=(x_k)$ dizisi L sayısına $[S_\sigma]_Z-$istatistiksel yakınsaktır, öyleki her $\varepsilon>0$ için*

$$\lim_m \frac{1}{m}\left|\{k\leq m : |y_k^n-L|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

dır. Bu taktirde $[S_\sigma]_Z-\lim x=L$ veya $x_k\to L\left([S_\sigma]_Z\right)$ ile gösterilir ve

$$[S_\sigma]_Z=\{x=(x_k) : [S_\sigma]_Z-\lim x=L,\ \exists L \text{ için}\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 5.0.20. *Eğer $\forall\varepsilon>0$ için*

$$\lim_r \frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r : |y_k^n-L|\geq\varepsilon\}\right|=0, n\text{'ye göre düzgün olarak}$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına $\left[S_\sigma^\theta\right]_Z-$istatistiksel yakınsak olarak adlandıralım. Bu taktirde $\left[S_\sigma^\theta\right]_Z-\lim x=L$ veya $x_k\to L\left(\left[S_\sigma^\theta\right]_Z\right)$ ve

$$\left[S_\sigma^\theta\right]_Z=\left\{x=(x_k) : \left[S_\sigma^\theta\right]_Z-\lim x=L,\ \exists L \text{ için}\right\}$$

yazalım.

Eğer $\theta=(2^r)$ için $\left[S_\sigma^\theta\right]_Z$ yerine $[S_\sigma]_Z$ ve $\theta=(2^r)$, $\sigma(n)=n+1$ ise $\left[S_\sigma^\theta\right]_Z$ yerine $[S]_Z$ yazılır. Buradan

$$[S]_Z=\left\{x=(x_k) : \lim\frac{1}{m}\left|\{k\leq m : |y_k^n-L|\geq\varepsilon\}\right|=0\right\}$$

Teorem 5.0.21. *$\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. O halde $\left[V_\sigma^\theta\right]_Z^0 \subset \left[S_\sigma^\theta\right]_Z^0$ dir.*

İspat. $x=(x_k)\in\left[V_\sigma^\theta\right]_Z^0$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|y_k^n|$$

$$=\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |y_k^n|\geq\varepsilon}}|y_k^n|$$

$$+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |y_k^n|<\varepsilon}}|y_k^n|$$

$$\geq\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |y_k^n|\geq\varepsilon}}|y_k^n|$$

$$\geq\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\varepsilon\geq\frac{\varepsilon}{h_r}\left|\{k\in I_r:|y_k^n|\geq\varepsilon\}\right|$$

Buradan $x_k\to L\left(\left[S_\sigma^\theta\right]_Z^0\right)$ olur, yani $x=(x_k)\in\left[S_\sigma^\theta\right]_Z^0$'dır. O halde ispat tamamlanmış olunur. □

Teorem 5.0.22. *$\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $x=(x_k)\in l_\infty$ ve $x_k\to L\left(\left[V_\sigma^\theta\right]_Z\right)$ ise $x_k\to L\left(\left[S_\sigma^\theta\right]_Z\right)$.*

İspat. $x=(x_k)\in l_\infty$ ve $x_k\in\left(\left[V_\sigma^\theta\right]_Z^0\right)$ olduğunu varsayalım. $\sup\limits_{k,n}|y_k^n|<\infty$ olduğundan $\forall k,n\in\mathbb{N}$ için $|y_k^n|<A$ olacak şekilde bir $A>0$ sabiti vardır. O halde $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|y_k^n|$$

$$=\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |y_k^n|\geq\varepsilon}}|y_k^n|$$

$$+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |y_k^n|<\varepsilon}}|y_k^n|$$

$$\leq \frac{A}{h_r}\left|\{k \in I_r : |y_k^n| \geq \varepsilon\}\right| + \frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}\varepsilon$$

$$= \frac{A}{h_r}\left|\{k \in I_r : |y_k^n| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon.$$

O halde $\varepsilon \to 0$ yapılarak sonuç elde edilir. □

Sonuç 5.0.23. *$\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. O halde $l_\infty \cap \left[V_\sigma^\theta\right]_Z = l_\infty \cap \left[S_\sigma^\theta\right]_Z$ dır.*

İspat. Teorem 5.0.21 ve teorem 5.0.22'den ispatı açıkça görülür. □

Teorem 5.0.24. *$\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. O halde $[S_\sigma]_Z \subset \left[S_\sigma^\theta\right]_Z$ dır.*

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde

$$\{k \leq m : |y_k^n - L| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_r : |y_k^n - L| \geq \varepsilon\}$$

dır. Bu yüzden

$$\frac{1}{m}\left|\{k \leq m : |y_k^n - L| \geq \varepsilon\}\right|$$
$$\geq \frac{1}{m}\left|\{k \in I_r : |y_k^n - L| \geq \varepsilon\}\right|$$
$$= \frac{h_r}{m} \cdot \frac{1}{h_r}\left|\{k \in I_r : |y_k^n - L| \geq \varepsilon\}\right|.$$

m $\to \infty$ için limit alırsak ,n sayısına göre düzgün olarak $x_k \to L\left([S_\sigma]_Z\right)$ iken $x_k \to L\left(\left[S_\sigma^\theta\right]_Z\right)$ elde edilir. Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur. □

6. TARTIŞMA

Bu yüksek lisans tez çalışmasında elde edilen bulgular ile Zweier yakınsak dizi uzayları ve istatistik yakınsaklığın genelleştirilmiş şekli elde edilmiştir ve verilen yeni tanım ve teoremlerde uzayların yapısını oluşturan fonksiyonların özel seçimleri ile önceden tanımlanmış yapıları elde etmek mümkün olacaktır.

7. SONUÇ

Bu yüksek lisans çalışması ile genelleştirilmiş Zweier yakınsak-sınırlı dizi uzaylarının ilgili tanımları verilmiş ve literatürde verilen temel teoremler genelleştirilerek ispatları yapılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Wilansky, A. 1984. Summability through functional Analysis, North-Holland Mathematics Studies 85, Amsterdam - New York - Oxford.

[2] Fast, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 139-150.

[3] Şengönül, M. 2007. On the Zweier space, Demonstratio Mathematica, XL(1), 181-196.

[4] Connor, I.S. 1988. The statistical and strongly p-Cesaro convergence of sequences, Analysis,8, 47-63.

[5] Boss, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summahility, Oxford University Press.

[6] Shoenberg, I.J. 1959. The integrahility of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

[7] Fridy, J.A. 1985. On statistically convergent sequences, Analysis, 5, 301-313.

[8] Mursaleen, M. 1993. Matrix transformations between some new sequence spaces, Houston J. Math., 9, 505-509.

[9] Savaş, E. 2000.Strongly almost convergence and almost convergence and almost statistical convergence, Hokkaido Math, J., 29, 531-536.

[10] Esi, A. 2009. Strongly generalized difference $\left[V^{\lambda}, \Delta^{m}, p\right]$ $-$summable sequence spaces by a sequence of moduli, Nihonkai Math, J. 20, 99-108

[11] Schaefer, P. 1972. İnfinite matrices and invariant means, Proc. Amer. Math. Soc.,36, 104-110.

[12] Mursaleen, M. 2000. $\lambda-$statistical convergence, Math. Slovaca, 139-150

[13] Freedman, A.R., Sember, I.J. and Raphael, M. 1978. Some Cesaro-type summability spaces, Proc. Lond. Math. Soc., 37, 508-520.

[14] Fridy, J. ve Orhan, C. 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., 160(1), 43-51.

[15] Salat, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30, 139-150.

[16] Savaş, E. 1990. On lacunary strong $\sigma-$convergence, Indian J. Pure App. Math., 21, 359-365.

[17] Karababa, Y. F. ve Esi, A. 2012, On some strong zweier convergent sequence spaces, Acta Universitatis Apulensis, 29 , 9-15.

ÖZGEÇMİŞ

Aliye Sapsızoğlu 18.09.1983 tarihinde Kahramanmaraş'da doğdu. 2001 yılında Anadolu Tekstil Meslek Lisesi'ni bitirdikten sonra İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek öğrenmine başladı ve 2006 yılında bu bölümden mezun olup aynı yıl, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Tezsiz Yüksek Lisans programına kayıt yaptırdı. Ocak 2008'de Tezsiz Yüksek Lisans programını tamamlayarak mezun oldu. 2009 yılında Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl Malatya Park Alışveriş ve Yaşam Merkezi Yönetim Departmanı'nda Pazarlama uzmanı ünvanı ile başladığı iş hayatına devam etmektedir. Temel ilgi alanları Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, tiyatro ve danstır.