T.C
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ETKİLEŞİM NOKTALI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜĞÜM NOKTALARINA GÖRE TERS PROBLEMLER ÜZERİNE

Muhammed ÇUBUK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETKİLEŞİM NOKTALI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜĞÜM NOKTALARINA GÖRE TERS PROBLEMLER ÜZERİNE

Muhammed ÇUBUK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 13/09/2013 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Manaf MANAFLI
BAŞKAN (DANIŞMAN)

Yrd.Doç.Dr. Gülsen KILINÇ
ÜYE

Yrd.Doç.Dr. İ.Halil GÜMÜŞ
ÜYE

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEN
Enstitü Müdürü

Bu çalışma Adıyaman Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.
Proje No: - - -

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ETKİLEŞİM NOKTALI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜĞÜM NOKTALARINA GÖRE TERS PROBLEMLER ÜZERİNE

Muhammed ÇUBUK

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Yıl:2013, Sayfa sayısı:

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
: Yrd. Doç. Dr. Gülsen KILINÇ
: Yrd. Doç. Dr. İ. Halil GÜMÜŞ

Bu tezin birinci bölümünde, diferansiyel operatörler ve Sturm-Liouville Operatörü ile ilgili eski çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Sturm-Liouville operatörü için genel bilgiler, regüler ve singüler Sturm-Liouville problemi, özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, ters nodal problem ve Yeni Ters Nodal problem ile ilgili açıklamalar ve teoremler verilmiştir.

Tezin son bölümünde, Etkileşim noktalı Sturm-Liouville operatörü için düğüm noktalarına göre ters problemler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville operatörü, özdeğer, özfonksiyon, nodal nokta, ters nodal problem, etkileşim noktası.

ABSTRACT

Msc Thesis

ON SOME INVERSE PROBLEMS AS TO NODAL POINTS OF STURM LIOUVILLE OPERATORS WITH INTERACTION POINT

Muhammed ÇUBUK

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Year:2013, Number of Pages:

Jury : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
: Asst. Prof. Dr. Gülsen KILINÇ
: Asst. Prof. Dr. İ. Halil GÜMÜŞ

In the first chapter of this thesis, Informations about old studies of Differential operators and Sturm-Liouville operatör are given.

In the second chapter, Some fundamental definitions and theorems that use of often in Spectral theory of Differential operators are given.

In the third chapter, General informations of Sturm-Liouville operators, regular and singular Sturm-Liouville operators, asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions are examined.

In the fourth chapter, Inverse nodal problem and new inverse nodal problem are given.

In the last chapter, Some inverse problems as to nodal points of sturm liouville operators with interaction point are examined.

Key words: Sturm -Liouville operator, eigenvalues, eigenfunctions, nodal point, inverse problem, nodal inverse problem, interaction point.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda bilgi ve tecrübeleri ile her konuda bana yardımcı olan ve çalışmayla ilgili kaynak temini için imkânlarını sunan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Manaf MANAFLI 'ya, maddi ve manevî desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed ÇUBUK

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

H	: Hilbert uzayı
$L^2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
L	: Lineer operatör
L^*	: L operatörünün adjointi
λ	: Özdeğer
$y(x,\lambda)$	: Özfonksiyon
α	: Normlaştırıcı Sayılar
$W(J,g)$	: Wronskian determinantı
$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$	: Özdeğerlerin cümlesi
l_n^k	: Nodal uzunluk

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi, matematik, fizik ve mekaniğin pek çok alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları aynı zamanda lineer cebir ve titreşim teorisinin problemleridir. Lineer cebir problemleri ve titreşim problemleri arasındaki benzerliklerin tanımlanması çok eskilere dayanmaktadır. Integral denklemler teorisiyle ilgili yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden yararlanan ilk bilim adamı Hilbert olmuştur.

Özellikle l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra Hilbert uzayında lineer self adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır ve özellikle XIX-XX. asırlarda bu konularda çalışan birçok matematikçi tarafından söz konusu teori oldukça geliştirilerek üst seviyelere ulaşmıştır. Bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle veriler yardımıyla asımptotik formüller bulunmuştur, Ayrıca spektral teori için önemli yere sahip olan açılım teoremleri ispatlanmıştır.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış , bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz nokta olan diferensiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferensiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G.D.Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektrumuna sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerinin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde oldukça önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F.Riesz, J.Von Neumann, K.O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self adjoint operatörlerin genel spektral teorisi elde edilmiştir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E.C.Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan veya artan potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu *q(x)* potansiyeli Schrödinger operatörü de denir. Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B.M.Levitan tarafından yapılmıştır. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, fonksiyonların asimptotikliğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R.Courant, T.Carleman, M.S.Birman, M.Z.Salamyak, V.P.Maslov, M.V.Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Diferansiyel operatörler için ters problem şöyle tanımlanır;

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak mümkündür.

2. Spektral verilere göre operatör birebir olarak tanımlanmaktadır.

3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması yöntemlerinin bulunmasıdır. Ters problemlerle ilgili ilk sonuç V.A. Ambarstsumyan tarafından elde edilmiştir.

Bu çalışmada Sturm-Liouville operatörleri için ters probleme ilişkin aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 1: $q(x),[0,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_n, \ldots$

$$y'' + \left(\lambda - q(x)\right) y = 0, \quad 0 \le x \le \qquad (1)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \qquad (2)$$

Probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2 (n=0,1,\ldots)$ ise $q(x)=0$ dır. Bu sonucu ilk İsveç matematikçi G. Borg bulmuştur. Borg, genel durumda Sturm - Liouville operatörünün tek spektrumla tanımlandığını göstermiştir. Ayrıca farklı sınır şartları sağlanacak şekilde iki spektruma göre Sturm-Liouville operatörünün birebir olarak tanımlandığını göstermiş ve aşağıdaki teoremi ispatlamıştır,

Teorem 2: $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ (1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) = hy'(0) = 0 \qquad (3)$$

$$y'(\pi) + Hy'(\pi) = 0 \qquad (4)$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_n, \ldots$ ise (1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y'(0) = 0 \quad ,(\ h \neq h_1) \qquad (5)$$

$$y'(\pi) + Hy'(\pi) = 0$$

sınır koşullan ile verilen problemin özdeğerleri olsunlar. O halde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$,

(n= 0,1,...) dizileri *q(x)* fonksiyonunu ve sonlu *h, h_1* ve H sayılarını tek olarak belirtir.

Daha sonra potansiyelinin *q(x) = q(M-x)* koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N.L.Levinson ispatlamıştır. Ayrıca negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının potansiyelini birebir olarak tanımladığı gösterilmiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biride ters problemin çözümünde önemli bir etken olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisi L.Delsarte, J.Lions ve B.M.Levitan tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A.V.Povzner kendi çalışmalarında göstermiştir.

Bu çalışmalardan sonra ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemleriyle ilgili en önemli çalışmalar A.R.Tichknof ve V.A.Marchenko tarafından yapılmıştır, Marchenko'da çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (1) diferensiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 0, \quad \varphi'(0,\lambda) = h \qquad (6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu takdirde

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \varphi_n^2(x, \lambda_n)\, dx$$

verilen operatörün normlaştırıcı sayıları

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere Marchenko yukarıda belirtilen çalışmasında Borg'un ispatladığı teoremi $p(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla verilmiştir. Ayrıca söz konusu çalışmada $p(\lambda)$ fonksiyonunun, Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. Marchenko'nun çalışmaları ile eş zamanda M.G.Krein çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferensiyel operatörü $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, (n= 0, l,...) dizilerine göre belirtmek için oldukça etkili bir yöntem vermiştir. Ancak bu çalışmalarda verilen gerek ve yeter koşul, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerden kurulan yardıma fonksiyonlar kullanılarak verilmiştir.

Spektral analizin ters problemler teorisinde temel çalışma L.M. Gelfand ve B.M.Levitan tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada $\rho\{\lambda\}$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyon olması için gerek yeter koşul tanımlanmış olup Sturm-Liouville operatörünün tanımlanması için önemli bir yöntem verilmiştir.

Sturm-Liouville operatörleri için ters probleminin iki spektruma göre tam çözümü 1964 yılında B.M.Levitan ve M.G.Gasımov tarafından yapılan bir çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerek ve yeter koşullar tanımlanmıştır.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemler artmıştır. Örneğin 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçileri ve matematikçileri G.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M. Miura ve P.Lax tarafından bulunan bazı kısmî türevli nonlineer evalusyon denklemler ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde hem Matematikçiler hem de Fizikçiler tarafından çalışılmaktadır.

Spektral veriler olarak özfonksiyonların sıfırları yani nodal noktalar ele alınarak, Sturm-Liouville operatörü ve diğer diferansiyel operatörler için spektral teorinin bazı problemleri son 20 yılda yoğun bir şekilde incelenmektedir.

Nodallara göre Sturm-Liouville operatörü için ters problem ilk olarak O.R Hald, J.R.McLaughlin, P.J.Browne, B.D. Sleeman tarafından farklı yöntemlerle incelenmiştir.

Daha sonra bir grup Yang, Shien, Law, Cheng Çin matematikçileri vektörel Sturm-Liouville denklemi için Dirichlet, Neumann ve diğer sınır şartları sağlanacak şekilde teklik teoremleri, nodal noktaların ve nodal uzunluğun asimptotiği ile ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır.

Dirac ve Laplace operatörleri için nodallara ait problemler ise C.Bor tarafından yapılmıştır. Ayrıca singüler Sturm-Liouville operatörleri için nodal noktalara göre teklik teoremleri E.Penahov ve H.Koyunbakan tarafından ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1. (İç Çarpım Uzayı, Hilbert Uzayı) C kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanmış bir *H* lineer vektör uzayını göz önüne alalım. *H* deki bir vektör çiftine bir sayı karşı getiren bir $<,>: H \times H \rightarrow C$ fonksiyoneli aşağıdaki kuralları sağladığı takdirde bir iç çarpım adım alır.

i) Her u,v $\in$H için $<u,v> = \overline{<u,v>}$

ii) Her u,v $\in H$ ve α$\in C$ için < αu, v >= α$<u,v>$

iii) Her n, v, w $\in$H için < u+ v, w >= < u, w > + < v, w >

iv) Her $u \in$ H, $u \neq 0$ için < u, v > >0

Bu iç çarpımla donatılmış bir lineer vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{<u-v, u-v>}$$

metriğine göre tam bir iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. [21]

Tanım 2.2 $a<t<b$ olmak üzere $L^2[a,b]$ uzayı

$$L^2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b \left[x(t) \right]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde tanımlanır [26].

Tanım 2.3. (Operatör) Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.4 (Lineer Operatör) E_x ve E_y herhangi iki vektör uzayı olsun.

$A : E_x \rightarrow E_y$ operatör dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa:

i) $x_1, x_2 \in E_x, \quad A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = Ax_1 + Ax_2$

ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax, \lambda \in R$

A operatörüne lineerdir denir. [26]

Tanım2.5(Sürekli Operatör) $A : S(x,\delta) \to S(Ax, \varepsilon)$ olsun.

$$|x - x_0| < \delta \text{ için } |Ax - Ax_0| < \varepsilon$$

ise A operatörüne süreklidir denir. [26]

Tanım 2.6 X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ bir L operatörünün tanım cümlesi olsun. Eğer,

$$\|L(x)\| \le c\|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir ve eşitsizliği sağlayan c sayılarının alt sınırına ise L operatörünün normu denir.

Tanım 2.7 (Adjoint Operatör) H_l ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L: H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer, $L^* : H_2 \to H_1$ operatörü $< Lx, y > = < x, L^*y >$ şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin adjointi denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne self adjoint operatör denir. [26]

Tanım 2.8. L, $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayışma L operatörünün özdeğeri $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 2.9. $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ *ler* bu

özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olacak şekilde

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x, \lambda_n)\,dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir,

Tanım 2.10. L-λl operatörünün sınırlı $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir. [24]

Tanım 2.11 Herhangi λ için L-λI operatörünün tersi mevcut olacak biçimde

$R_\lambda = (L - \lambda I)^{-l}$ operatörüne

$$Lx\text{-}\lambda x=y \quad \text{veya} \quad (L\text{-}\lambda I)x= y$$

denkleminin rezolvent operatörü denir.

Tanım 2.12 (Dönüşüm Operatörü) E lineer topolojik uzay, A ve B operatörleri $A:E\rightarrow E$, $B: E\rightarrow E$ aklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2 ise E lineer uzayın kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörüne,

i) X ve X^{-1}operatörleri E uzayında süreklidir

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanıyor, şartlarını sağlıyorsa A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir.

Tanım 2.13 $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebiliyor ise $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitikdir denir. [25]

Tanım 2.14 $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$' ye tam fonksiyon denir.

Tanım 2.15 Bir $f(z)$ fonksiyonuna karşılık A ve a pozitif sayılan bulunabiliyorsa, öyle ki $r=|z|\rightarrow\infty$ iken

$$|f(z)| < Ae^{r^a}$$

ise $f(z)$ fonksiyonu sonlu mertebeden bir tam fonksiyondur, a sayıların en küçüğü olan r ye ise tam fonksiyonun mertebesi denir.

Tanım 2.16. $x\rightarrow 0$ (veya $x\rightarrow\infty$) iken eğer $\dfrac{f(x)}{g(x)}\rightarrow 0$ $f(x) = o(g(x))$ ve $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ sınırlı ise $f(x)$ = O(g(x)) olarak gösterilir.

Teorem 2.l (Rouche) Γ - kapalı düzeltilebilir Jordan eğrisi üzerinde ve Γ 'nın iç noktalarında $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ analitik fonksiyonlar ve $z\in\Gamma$ için $|f_1(z)| > |f_2(z)|$ olsun.

Bu takdirde Γ 'nın içinde $f_1(z)+f_2(z)$ ve $f_1(z)$ fonksiyonlarının sıfırlarının sayısı aynıdır. [27]

3. STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ

3.1 Sturm-Liouville Operatörü için Genel Bilgiler

L herhangi elemanlar cümlesinde tanımlı lineer bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere $Ly=\lambda y$ eşitliğini sağlayan y fonksiyonuna L operatörünün özfonksiyonu λ'ya ise özdeğeri denir.

Operatörlerin spektral teorisinde sık sık göz önüne alınan Sturm-Liouville operatörü

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada *q(x),* [a¸b] aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyondur.

L operatörü için sınır şartları genellikle aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. tür sınır şartı: Bunlara ayrık sınır şartları denir ve

$$y(a)cosa+y'(a)sin\alpha = 0$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)sin\beta = 0$$

şeklinde tanımlanır.

2. tür sınır şartı: Bunlar periyodik ve antiperiyodik sınır şartlan olarak bilinir ve sırası ile

$$\begin{matrix} y(a) = y(b) & & y(a) = -y(b) \\ & \text{ve} & \\ y'(a) = y'(b) & & y'(a) = -y'(b) \end{matrix}$$

şeklinde yazılır.

3.tür sınır şart. Bunlar uçlan bağlı sınır şartlan olarak bilinir ve

$$y(a) - y(b)=0 \quad \text{veya} \quad y'(a) = y'(b)= 0$$

şeklinde tanımlanır.

$$Ly(x) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \tag{3.1.1}$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0$$
$$y(a)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \qquad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlanan (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir.

*p(x), l(x)*ve *r(x)* fonksiyonları reel ve sonlu [a,b] aralığında sürekli olmak üzere Sturm-Liouville operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarını inceleyelim. *p(x)* ve *r(x)* , [a,b] aralığında pozitif fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denkleminin genel

$$L = -\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\} + l(x)y = \lambda r(x)y \quad a \le x \le b \qquad (3.1.3)$$

ifadesini göz önüne alalım. *p(x)* birinci mertebeden ve *p(x).r(x)* ikinci mertebeden sürekli **türeve** sahip olacak şekilde

$$z = \frac{1}{c}\int_a^x \left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{1/2} dx, \quad u\left(r(x)\,p(x)\right)^{1/4}, \qquad \mu = c\lambda$$

dönüşümlerini yaparsak *(3.13)* denklemi

$$c = \frac{1}{\pi}\int_a^b \left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{1/2} dx$$

$$q(z) = \frac{Q''(z)}{Q(z)} - c^2\frac{l(x)}{r(x)}$$

$$Q(z) = \left(r(x)\,p(x)\right)^{1/4}$$

olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

şeklinde yazılır.

Herhangi λ_1 için göz önüne alınan sınır değer probleminin $y(x,\lambda_1) \neq O$ aşîkar olmayan çözüme sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda bu bölümün başlangıcında verilen tanımda (3,1.l)-(3.1.2) sınır değer probleminin özdeğeri λ_1 ve buna karşılık gelen özfonksiyonu da $y(x, \lambda_1)$ olarak tanımlanır.

Lemma 3.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ farklı özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_i)$ ve $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir. Yani

$$\int_a^\pi y(x,\lambda_1)\,y(x,\lambda_2)\,dx = 0 \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

dir.

İspat. f(x) ve g(x) sürekli ve iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$$Lf = f''(x) - q(x)\,f(x)$$

alalım.

$$W_x\{f,g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

olmak üzere bu ifadeyi iki kez parçalı integrallersek

$$\int_0^\pi Lf.g(x)\,dx = W_\pi\{f,g\} - W_0\{f,g\} + \int_0^\pi f(x).Lg\,dx \qquad (3.1.4)$$

denkliğini elde ederiz. $f(x) = y(x,\lambda_1)$ ve $g(x) = y(x, \lambda_2)$ olsun. (3.1.2) sınır şartlarından $W_0\{f,g\} = W_\pi\{f,g\} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Bundan dolayı (3.1.4) denkleminden

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi y(x,\lambda_1)\,y(x,\lambda_2)\,dx = 0$$

dolayısıyla $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olur. Böylece Lemma ispatlanmış oldu.

Lemma 3.1.2. (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. $\lambda_1 = u + iv$ kompleks bir özdeğer olsun. *q(x) reel* bir fonksiyon α ve β sayıları reel olduğundan dolayı $\bar{y}(x,\lambda_1)$ özfonksiyonu $\lambda_2 = \overline{\lambda_2} = u - iv$ sayısına sahip bir özdeğer olur. Bu takdirde bir önceki Lemmadan

$$\int_0^\pi |y(x,\lambda_1)|^2\,dx = 0$$

elde ederiz ki buradan da $y(x,\lambda_1) = 0$ olduğu bulunur.

Teorem 3.l.1, Eğer *q(x)*, [a,b] aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve

$$\varphi(\alpha,\lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi'_x(\alpha,\lambda)=\cos\alpha$$

başlangıç şartlan sağlanırsa (3.1.1.) denkleminin $a\le x\le b$ aralığında her a için bir tek $\varphi(x,\lambda)$ çözümü vardır. Her $x\in[a,b]$ sabiti için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre bir tam fonksiyondur.

İspat $\varphi(x,\lambda)$ = sinα- *(x - a)* cos *a* alalım ve n>0 için

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\varphi_{n-1}(t,\lambda)(x-t)\,dt$$

olsun. q sürekli bir fonksiyon olduğundan $a\le x\le b$ için *q(x)* <M elde ederiz. $|\lambda|\le N$ olsun. O zaman $a\le x\le b$ için $|\varphi_0(x,\lambda)|\le K$ olur. Bundan dolayı

n=l için,

$$\varphi_1(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_a\{q(t)-\lambda\}\varphi_0(t,\lambda),(x-t)dt$$

$$\varphi_1(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)=\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\varphi_0(t,\lambda),(x-t)dt$$

$$|\varphi_1(x,\lambda)-\varphi_0(x,\lambda)|\le\int_a^x|q(t)-\lambda|.|\varphi_0(t,\lambda)|.|x-t|dt$$

$$\le\int_a^x\{|q(t)|+|\lambda|\}|\varphi_0(t,\lambda)|.|x-t|\,dt$$

$$\le\int_a^x(M+N)K.(x-t)\,dt=\frac{1}{2}K.(M+N).(x-a^2)$$

n=2 için,

$$\varphi_1(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\varphi_1(t,\lambda),(x-t)dt$$

$$\varphi_1(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\varphi_0(t,\lambda),(x-t)dt$$

ifadelerini taraf tarafa çıkarırsak.

$$\varphi_2(x,\lambda)=\varphi_1(x,\lambda)=\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\{\varphi_1(t,\lambda)-\varphi_0(t,\lambda)\}(x-t)dt$$

elde ederiz. Bundan da $n \geq 2$ için

$$\varphi_n(x,\lambda)=\varphi_{n-1}(x,\lambda)=\int_a^x\{q(t)-\lambda\}.\{\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)\}(x-t)dt$$

$$\left|\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)\right|\leq(M+N)(b-a)\int_a^x\left|\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)\right|dt$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$\left|\varphi_2(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)\right|\leq\int_a^b\{|q(t)|+|\lambda|\}\{\varphi_1(t,\lambda)-\varphi_0(t,\lambda)\}|x-t|dt$$

$$\leq\int_a^b(M+N)\frac{1}{2}.K(M+N)(t-a)^2(x-t)dx$$

$$=\frac{1}{2}K(M+N)^2(b-a)\int_a^x(t-a)^2dx$$

$$=\frac{K(M+N)^2(b-a)(x-a)^3}{3!}$$

ve genel olarak

$$\left|\varphi_n(x,\lambda)=\varphi_{n-1}(x,\lambda)\right|\leq\frac{K(M+N)^n(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)\} \qquad (3.1.5)$$

$a\leq x\leq b$ için x'e göre düzgün ve $|\lambda|\leq N$ için λ ya göre düzgün yakınsak bir seridir.

n> 2 için

$$\varphi_n'(x,\lambda)=\varphi_0'(x,\lambda)+\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\varphi_{n-1}(t,\lambda)dt$$

$$\varphi_{n-1}'(x,\lambda)=\varphi_0'(x,\lambda)+\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\varphi_{n-2}(t,\lambda)dt$$

olduğundan, bu ifadeleri taraf tarafa çıkarırsak

$$\varphi_n'(x,\lambda)=\varphi_{n-1}'(x,\lambda)=\int_a^x\{q(t)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)\}dt$$

olur.

$$\varphi_n''(x,\lambda)=\{q(x)-\lambda\}\varphi_{n-1}(x,\lambda)$$
$$\varphi_{n-1}''(x,\lambda)=\{q(x)-\lambda\}\varphi_{n-2}(x,\lambda)$$

ifadelerini taraf tarafa çıkarırsak

$$\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)=\{q(x)-\lambda\}\varphi_{n-1}(x,\lambda)\varphi_{n-2}(x,\lambda)$$

elde ederiz. (3.1.5) serisini bir veya iki kez diferansiyellersek

$$\begin{aligned}\varphi_n''(x,\lambda)&=\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)\}\\&=\varphi_1''(x,\lambda)-\varphi_0''(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)\}\\&=(q(x)-\lambda)\left(\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{n=2}^{\infty}\{\varphi_{n-1}''(x,\lambda)-\varphi_{n-2}''(x,\lambda)\}\right)\\&=\{q(x)-\lambda\}\varphi(x,\lambda)\end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla $\varphi(x,\lambda)$, (3.1.1.) denklemini sağlar. Ayrıca $\varphi_n(x,\lambda)$ fonksiyonunun yapısı ve *(3.1.5)* serisinin düzgün yakınsak olmasından dolayı $\varphi(x,\lambda)$ λ değişkenine göre tam fonksiyondur.

3.2.Regüler ve Süngüler Stıırm-Liouville Problemi

Sturm-Liouville problemi için

$$Ly=\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=\lambda y$$
$$y(a)\cos\alpha+y'(a)\sin\alpha=0$$
$$y(a)\cos\beta+y'(b)\sin\beta=0$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada sin a ≠ 0 ve sin $\beta\neq 0$ olmak üzere (3.1.2) sınır şartlarını sırası ile sinα ve sinβ ifadelerin bölersek

$$\begin{aligned}y(a)\cot\alpha+y'(a)&=0\\y(b)\cot\beta+y'(b)&=0\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

elde ederiz. cotα=-h ve cotβ=H ile gösterilirse

$$
\begin{aligned}
y'(a)-hy(a)&=0 \\
y'(b)+Hy(b)&=0
\end{aligned} \tag{3.2.2}
$$

yazılır. Böylece (3.1.1)-(3.2.2) probleminde eğer *q(x)* sürekli reel değerli bir fonksiyon, h ve H reel sayılan da sonlu ise bu probleme "Regüler Sturm-Liouville Problemi" denir. Bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda bu probleme “Singüler Sturm-Liouville Problemi” denir.

3.3 Özdeğerler ve Özfonksiyonlar için Asimptotik Formüller

1. q(x), [0,π] aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki Sturm-Liouville Problemini

$$
-y'+q(x)y=\lambda y \qquad x\in[0,\pi] \tag{3.3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
y'(0)-hy(0)&=0 \\
y'(\pi)-Hy(\pi)&=0
\end{aligned} \tag{3.3.2}
$$

göz önüne alalım,(3.3.1) denkleminin

$$
\varphi(0,\lambda)=1 \qquad , \qquad \varphi'(0,\lambda)=h \tag{3.3.3}
$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\varphi(x,\lambda)$ ile gösterelim. Aynı denklemin

$$
\psi(x,\lambda)=0 \qquad , \qquad \psi'(0,\lambda)=1 \tag{3.3.4}
$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü de $\psi(x,\lambda)$ ile gösterelim

Lemma 3.3.1. $\lambda=s^2$ olsun. Bu takdirde

$$
\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(t)\varphi(\tau,\lambda)d\tau \tag{3.3.5}
$$

$$
\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+\frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(t)\psi(\tau,\lambda)d\tau \tag{3.3.6}
$$

şeklindedir.

İspat Öncelikle (3.3.5) eşitliğini ispatlayacağız. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) denklemini sağladığı için

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(t)\varphi(\tau,\lambda)d\tau=\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau+s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

Daha sonra sağdaki integrali iki kez parçalı integralleyelim ve (3.3.3) şartlarını göz önüne alalım. Bu takdirde

$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau$ integralini hesaplayalım.

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau$$

$$=\varphi'(x,\lambda)\sin\{s(x-x)\}-\varphi'(0,\lambda)\sin\{s(x-0)\}+s\int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}\varphi'(\tau,\lambda)d\tau$$

$$=-h\sin sx+s\int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}\varphi'(\tau,\lambda)d\tau$$

$$=-h\sin sx+s\left\{\varphi(x,\lambda)\cos\{s(x-x)\}-\varphi(0,\lambda).\cos\{s(x-0)\}-s\int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right\}$$

$$=-h\sin sx+s\left\{\varphi(x,\lambda)\cos sx-s\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right\}$$

buluruz. Böylece

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau,\lambda)\varphi(\tau,\lambda)d\tau=\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau+s^2\int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$=-h\sin sx+s\{\varphi(x,\lambda)\cos sx\}-s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau+s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$=-h\sin sx+s\{\varphi(x,\lambda)-s\cos sx\}$$

elde ederiz. (3.3,6) bağıntısının ispatı da benzer şekilde yapılır.

Lemma 3.3.2. $\sigma+it$ olsun. Bu durumda öyle $s_0>0$ vardır ki $|s|>s_0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\varphi(x,\lambda)=\mathrm{O}\left(e^{|t|x}\right)\quad,\quad\psi(x,\lambda)=\mathrm{O}\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right)\tag{3.3.7}$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\mathrm{O}\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right)\tag{3.3.8}$$

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+\mathrm{O}\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^{-1}}\right) \tag{3.3.9}$$

$0 \le x \le \pi$ için x in aldığı tüm değerlerde bu ifadeler sağlanır.

2. Şimdi özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formülleri hesaplayalım, (3.3.1)-(3.3.2) Sturm-Liouville Problemini göz önüne alalım, Lemma 3.3.1 ve Lemma 3.3.2 den dolayı

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(t)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\mathrm{O}\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right)$$

dır.

$h\neq\infty$ ve $H\neq\infty$ olsun. $\varphi(x,\lambda)$, (3.3.1) denkleminin (3.3.2) sınır şartlarını sağlayan bir çözümü olduğundan bu fonksiyonun π noktasındaki değerini (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinde yazdığımızda özdeğerleri buluruz. Lemma (3.3.2) den dolayı özdeğerler reeldir. Negatif özdeğerlerin sayısı sonludur, *X* pozitif sayısı için Ims=0 dır. Bu sebeple (3.3.8) formülünden

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.3.10}$$

yazarız. Daha sonra (3.3.5) ifadesinin *x'* e göre diferansiyelini alıp ve (3.3.10) bağıntısını da kullanırsak

$$\varphi'(x,\lambda)=-\sin sx+h\cos+h\cos sx+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.3.11}$$

ifadesini elde ederiz. (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinde (3.3.8) ve (3.3.11) ifadelerini yerlerine yazarsak özdeğerleri bulmak için aşağıdaki

$$-s\sin s\pi+(h+H)\cos s\pi+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)=0 \tag{3.3.12}$$

denklemini elde ederiz.

s'nin büyük değerleri için (3.3.12) denkleminin tam doğal sayıların komşuluğunda kökleri olmak üzere çözümlerin varlığı açıktır. Buradan özdeğerlerin sonsuz bir cümlesinin var olduğunu elde ederiz. Herhangi yeteri kadar büyük tam n den başlayarak her n'nin komşuluğunda (3.3.12) denkleminin sadece bir kökünün bulunduğunu gösterelim. Bu amaçla (3.3.12) denkleminin sol kısmının s ye göre diferansiyeli alınırsa

$$-\pi s\cos s\pi - \sin s\pi - \pi\left(h+H\right)\sin s\pi + \mathrm{O}\left(1\right) = 0$$

elde edilir. Sol taraftaki ifadenin s nin büyük tam değerlerin komşuluğunda sıfıra eşit olmadığını göstermek mümkündür.

s_n ile (3.3.12) denkleminin n.kökünü gösterelim. Sturm'un osilasyon teoreminden ve (3.3.8) formülünden s_n için, s nin sıfırları yalnız tam n lerin komşuluğunda elde ederiz. Bu iddianın Sturm'un teoremine bağlı kalmadan başka bir ifadesini de söyleyebiliriz.

$\lambda = s^2$ olsun. Bu takdirde özdeğerler

$$\varphi\left(\pi,\lambda\right) + H\varphi'\left(\pi,\lambda\right) \equiv \omega\left(\lambda\right) = 0$$

denkleminin kökleri olduğu için $\omega\left(\lambda\right) = \omega_1\left(s\right)$ dır. (3.3.5) ifadesinden dolayı $\omega_1\left(s\right)$, s ye göre tam fonksiyondur. Buna ilaveten (3.3.10) ve (3.3.11) formüllerinden $\sin s \neq 0$ için $\omega\left(\lambda\right) = \omega_1\left(s\right)$ ifadesinden

$$\omega_1\left(s\right) = -Hs\sin s\pi\left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|}\right)\right\} \tag{3.3.13}$$

elde edilir.

s düzleminde $R = N + \dfrac{1}{2}$ yarıçaplı ve merkezi orijinde olan D_R dairesini göz önüne alalım, Rouche teoreminden ve (3.3.13) asimptotik formülünden D_R dairesinin içinde $\omega_1\left(s\right)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısına eşit olup bu sayı 2n+2 dir, $\omega_1\left(s\right)$ fonksiyonu çift olduğundan onun sadece pozitif sıfırlarını göz önüne almak yeterlidir. $\omega_1\left(s\right)$ nin her pozitif sıfırına bir özdeğer karşılık gelir, yani *N +1* den küçük olan s_k özdeğerinin sayısı N+l olacaktır, s_n için asimptotik formül aşağıdaki gibi olur.

$$s_n = n + \mathrm{O}\left(1\right) \tag{3.3.14}$$

$s_n = n + \delta_n$ olsun, O zaman (3.3.12) denklemini

$$n\sin\delta_n\pi+\mathrm{O}(1)=0$$

şeklinde olur. Buradan $\sin\delta_n\pi=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ yani $\delta_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ olun Buna göre (3.3.12) denkleminin köklerini büyük n'ler için

$$s_n=n+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde ederiz.

Eğer (3.1.1) denkleminde *q(x)* fonksiyonu sınırlı türeve sahipse (3.3.15) formülü yeteri kadar düzgün sayılır. Şayet (3.3.5) eşitliğinin *x*'e göre türevini alıp daha sonra $\varphi(x,\lambda)$ $ve\varphi'(x,\lambda)$ ifadelerinin (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinde kullanıp birkaç dönüşüm yaparsak

$$A=h+H+\int_0^{\pi}\left\{\cos t+\frac{H}{s}\sin s\tau\right\}q(t)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$
$$B=\frac{hH}{s}+\int_0^{\pi}\left\{\sin st+\frac{H}{s}\sin s\tau\right\}q(t)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

olacak şekilde

$$(-\mathrm{s}+B)\sin s\pi+A\cos s\pi=0 \tag{3.3.16}$$

ifadesini elde ederiz.(3.3 10) ifadesinden dolayı A ve B için

$$A=h+H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\cos 2s\tau d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)$$
$$B=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\sin 2s\tau d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Hipotezimizden dolayı *q(x)* potansiyel fonksiyonu sınırlı türeve sahip olduğu için kısmi integral alınırsa

$$\int_0^{\pi}q(t)\cos 2s\tau d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\qquad,\qquad\int_0^{\pi}q(t)\sin 2s\tau d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Dolayısıyla A ve B ifadeleri için

$$A = h + H + h_1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right) \qquad , \qquad h_1 = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,d\tau$$

$$B = \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)$$

elde edilir. Bu sebeple (3.3.16) denklemini

$$\tan s\pi = \frac{h + H + h_1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)}{s + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Tekrar s_n = n + δ_n alınırsa

$$\delta_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)$$

olmak üzere

$$\tan \pi\delta_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz ve

$$c = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,d\tau\right)$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (3.3.17)$$

elde ederiz. $q(x) \in C^2(0,\pi)$ olduğunu kabul edersek daha yaklaşık bir asimptotik formül buluruz, c_1 sabit olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c}{n^3} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad (3.3.18)$$

olur.

Şimdi (3.3.17) formülünden faydalanarak $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ özfonksiyonları için asimptotik formül bulalım. Bunun için (3.3.5) eşitliğinde $\varphi(x,\lambda)$ yerine (3.3.10) ifadesini yazarsak

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\cos s\tau . q(\tau)\,d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$
$$=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(\tau)\,d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

elde edilir. (3.3.17) formülünde s için her yerde s_n alınırsa

$$\beta(x)=-cx+h+\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau$$

olmak üzere

$$\varphi(x,\lambda_n)=\varphi(x)=\cos nx-\frac{cx}{n}\sin x+\frac{h}{n}nx+\frac{\sin nx}{2n}\int_0^x q(\tau)\,d(\tau)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz.

$\varphi(x)$ normlaştırılmış özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini bulmak için

$$a_n^2=\int_0^\pi \varphi_n^2(x)\,dx=\int_0^\pi \cos^2 nxdx+\frac{1}{n}\int_0^\pi \beta(x)\sin 2nxdx+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

integralini göz önüne atalım. *fi(x)* fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan

$$\int_0^\pi \beta(x)\sin 2nxdx=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

dır. Bundan dolayı $a_n^2=\frac{\pi}{2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dolayısıyla

$$\frac{1}{a_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur. Böylece normlu özfonksiyonlar için asimptotik formül

$$v_n(x)=\frac{1}{a_n}\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right\}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (3.3.19)$$

şeklinde olur.

3. Şimdi h=∞, $H \neq \infty$ olduğu durumu inceleyelim, (3.3.2) sınır şartlarının birincisinde

$$y(0)=0 \qquad (3.3.20)$$

olduğunu kabul edelim. $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.3.20) şartını sağlar. Bundan dolayı araştırdığımız durum için (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinde $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonunu yazarak özdeğerlerini araştırabiliriz. (3.3.6) ifadesinin *x*'e göre diferansiyelini alırsak

$$\psi'(x,\lambda) = \cos sx + \int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau$$

elde ederiz. Bundan dolayı (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinden

$$\begin{aligned} &\cos s\pi + \int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}q(\lambda)\psi(\tau,\lambda)d\tau \\ &+H\left\{\frac{\sin s\pi}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\pi \sin\{s(\pi-\tau)\}q(\tau,\lambda)d\tau\right\} = \end{aligned} \qquad (3.3.21)$$

elde ederiz.(3.3.9) ifadesinden dolayı (3.3.21) den

$$\cos s\pi + \frac{1}{s}\int_0^x \cos\{s(\pi-\tau)\}q(\lambda)\sin s\tau d\tau + \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \qquad (3.3.22)$$

buluruz. *q(x)* sınırlı türeve sahip olduğundan

$$\int_0^\pi q(\tau)\cos\{s(\pi-\tau)\}\sin s\tau d\tau = \cos s\pi\int_0^\pi q(t)\cos s\tau.\sin s\tau d\tau + \sin s\pi\int_0^\pi q(t)\sin^2 s\tau d\tau$$

$$= \frac{\sin s\pi}{2}\int_0^\pi q(\tau)dt + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Bundan dolayı (3.3.22) eşitliğinden

$$\cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s}\left\{H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau\right\} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \cos s\pi + H_1\frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \qquad (3.3.23)$$

olur.

$s_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n$ olsun. O zaman (3.3.23) ifadesinden

$$\delta_n = \frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\cot\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi = -\tan\delta_n\pi = -\frac{H_1}{n+\frac{1}{2}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur ve

$$H_1 = H + \frac{1}{2}\int_0^1 q(t)\,dt$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz.

Şimdi (3.3.6) da s_n değerini yerleştirirsek özfonksiyonlar için aşağıdaki asimptotik formülü

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz. α_n^{-1} normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı bu durum için $v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\psi_n(x)$ normlu özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.3.24}$$

şeklînde olur.

4 Son olarak $h=\infty$ ve $H=\infty$ durumunu araştıralım. (3.3.2) sınır şartlarında *y(0)=y(π)=0* olduğunu söyleyebiliriz ve bundan dolayı $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu özel olarak $\psi(\pi,\lambda)=0$ şartını sağlamalıdır. (3.3.6) ifadesinden

$$\sin s\pi+\int_0^\pi \sin\{s(\pi-t)\}q(t)\psi(\tau,\lambda)d\tau=0$$

yada

$$\sin s\pi\left\{1+\int_0^\pi \cos\tau q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau\right\}-\cos s\pi\int_0^\pi \sin s\tau.q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau=0$$

dır. (3.3.9) ifadesinden dolayı *q(x)* ‘in sınırlı türeve sahip olduğunu kabul ederiz.

$$\sin s\pi-\frac{1}{2s}\cos s\pi\int_0^\pi q(\tau)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s^2}\right)=\sin s\pi-\frac{\alpha}{s}\cos s\pi+\mathrm{O}\left(\frac{1}{s^2}\right)=0 \qquad (3.3.25)$$

elde ederiz. Bu denklem (2.3.12) denklemi ile aynıdır. Bundan dolayı (3.3.25) denkleminin s_n kökleri $\alpha_1=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_0^\pi q(\tau)d\tau$ olmak üzere

$$s_n=n+\frac{\alpha_1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (3.\ 3.26)$$

şeklindedir.

(3.3.6) da s_n in değerini yerine yazarsak $\psi(x,\lambda_n)=\psi_n(x)$ özfonksiyonları için

$$\psi_n(x)=\frac{\sin nx}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik formülünü elde ederiz. Normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.n\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı $v_n(x)=\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\psi_n(x)$ normalleştirilmiş özfoksiyonları:

$$v_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.3.27}$$

olur.

3.4 Özfonksiyonların Sıfırları (Nodal Noktalar)

$$y''+\lambda y=0 \quad , \quad y'(0)=y'(\pi)=0$$

basit sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada

$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=\cos x,\ \varphi_2(x)=\cos 2x,...,$ özfonksiyonlardır.

Bunlara karşılık gelen özdeğerler ise $\lambda_0=0,\ \lambda_1=1^2,\ \lambda_2=2^2,...,\lambda_n=n^2,...,$ şeklindedir.

Özfonksiyonların sıfırlarının aşağıdaki iki özelliğe sahip olduğu açıktır.

1) *n*. özfonksiyon $(0,\pi)$ aralığında n tam sıfıra sahiptir,

2) (n+1) inci özfonksiyonun sıfırı n. özfonksiyonun herhangi iki sıfırı arasındadır.

Teorem 3.4. l.

$$u''+g(x)u=0 \tag{3. 4.1}$$

$$v''+h(x)v=0 \tag{3.4.2}$$

şeklinde iki denklemi göz önüne alalım. Eğer tüm [a,b] aralığında $g(x)<h(x)$ ise bu durumda birinci denklemin sıfır olmayan çözümünün iki ardışık sıfırı arasında ikinci denklemin her çözümünün en az bir sıfırı bulunacaktır.

İspat. (3.4.1) denklemini v ile (3.4.2) denklemini u ile çarpar ve birbirlerinden çıkarırsak

$$u''v-v''u=\frac{d}{dx}\{u'v-v'u\}=\{h(x)-g(x)\}uv \tag{3.4.3}$$

elde ederiz. x_1 ve x_2 nin u'nun iki sıfırı arasında olduğunu gösterelim, x_1 den x_2 ye kadar (3.4.3) eşitliğini integrallersek

$$\{u'v-v'u\}_{x_1}^{x_2}=u'(x_2)v(x_2)-u'(x_1)v(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}\{h(x)-g(x)\}u(x)v(x)dx$$

elde ederiz.

(x_l,x_2) aralığında v'nin her yerde sıfıra eşit olmadığını varsayalım, (x_1, x_2) aralığında genelliği bozmadan $u > 0$ ve $v > 0$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla denklemin sağ tarafı pozitiftir, $u \geq 0$ varsayımından dolayı x_1 noktasında u fonksiyonu artandır.

Dolayısıyla $u'(x_1) > 0$ dır. Benzer şekilde $u'(x_2) < 0$ dır. Bundan dolayı

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) \leq 0$$

olur ve bu bir çelişkidir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç.

$$y'' + g(x)y = 0 \qquad\qquad (-\infty \leq a \leq x \leq b \leq \infty)$$

denkleminin çözümü $g(x) < -m^2 < 0$ olmak üzere birden fazla sıfıra sahip değildir.

Teorem 3.4.2. (Karşılaştırma- Mukayese Kriteri) (3.4.1) ve (3.4.2) denklemlerinin $(a) = \sin\alpha,\ u'(a) = -\cos\alpha$ ve $v(a) = \sin\alpha,\ v'(a) = -\cos\alpha$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri sırasıyla u(x) ve v(x) olsun. Ayrıca tüm [a,b] aralığında g(x)<h(x) olsun. Eğer a< $x \leq$ b aralığında u(x) fonksiyonu m tane sıfıra sahipse bu taktirde aynı aralıkta v(x) in m den az olmayacak şekilde sıfırları mevcut olup v(x) in k. sıfırı u(x) in k. sıfırından küçüktür.

Lemma 3.4.1. Eğer x_0 $(a<x_0<b)$ $\varphi(x,\lambda_o)$ fonksiyonunun sıfırı ise bu durumda herhangi yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısına $\exists\delta > 0$ sayısı karşılık gelir ve $|\lambda - \lambda_o| < \delta$ olacak şekilde $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun $|x - x_o| < \varepsilon$ aralığında sadece bir sıfırı vardır.

Teorem 3.4.3 (Osilasyon Teoremi). (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer probleminin sınırsız artan $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3, ...$ özdeğerlerinin sınırsız bir dizisi var olsun. Bu durumda λ_m özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonun tam a<x<b aralığında m tane sıfırı vardır.

İspat (3.4.5) u(a) = $\sin\alpha$, $u'(a) = -\cos\alpha$ başlangıç şartlarını sağlayan (3.1.1) denkleminin çözümü $\varphi(x,\lambda)$ olsun, Teorem (3.4.2) den dolayı λ artarken $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı azalmıyor. $a \leq x \leq b$ için $|q(x)| < c$ olsun. (3.1.1) denklemini

$$y'' + (\lambda + c)y = 0$$

denklemi ile mukayese edelim.

Bu denklemin (3.4.5) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü

$$y = \sin\alpha.\cos\alpha\left\{(-\lambda - c)^{1/2}(x-a)\right\} - \frac{\cos\alpha}{(-\lambda - c)^{1/2}}\sinh\left\{(-\lambda - c)^{1/2}(x-a)\right\}$$

şeklindedir.

λ nın negatif değerleri ile mutlak değerlerinin yeterince büyük değerleri için bu fonksiyonun sıfır noktalarının olmadığı açıktır.(a < x < b aralığında) Bu sebeple tekrar Teorem 3.4.2 den faydalanırsak λ nın negatif değerlerinin yeterince büyük mutlak değerleri için $\varphi(x,\lambda)$ sıfırlarının mevcut olmadığı kanaatine varırız.

Mukayese için

$$y'' + (\lambda - c)y = 0$$

denklemini seçersek pozitif ve sınırsız artan λ lar için $\varphi(x,\lambda)$ çözümünün sıfırlarının sayısının [a,b] aralığında sınırsız olarak arttığını görürüz.

$\varphi(x,\lambda)$ *=0* denklemini göz önüne alalım.

Lemma 3.4.l. den dolayı bu denklemin kökleri *k* ya bağımlı sürekli fonksiyonlardır. Diğer bir yandan Teorem 3.4.2 den dolayı λ artarken $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun her sıfırı sola kaymış olur. Sıfırların sayısı azalmadığı için a noktasından dışarı sıfır çıkamaz. Lemma 3.4.1 in sonucundan dolayı yeni sıfırlar b noktasından içeri girer. $\varphi(b,\lambda)$ =0 olacak şekilde μ_0, λ parametresinin birinci değeri olsun. Böyle değerin bulunacağı aşikardır. $\varphi(b,\lambda)$=0 olacak şekilde μ_1, λ parametresinin ikinci değeri olsun. $\varphi(b,\mu_m)$ *=0* olmak üzere $\varphi(x,\mu_m)$ fonksiyonu (a,b) aralığının içinde m tane sıfıra sahip olacak şekilde $\mu_0, \mu_1, \ldots$ sayı dizisi bu özelliklere sahiptir. Eğer sinβ=0 ise bu takdirde (3.1.2) sınır şartlarından ikincisi sağlanıyor ve dolayısıyla μ_m sayıları özdeğerlerdir. ($\varphi(x,\lambda)$ (3.4.5) başlangıç koşulları sağladığı için (3.1.2) sınır koşullanma birincisini de sağlar.) Bu durumda teorem ispatlanmıştır.

Şimdi sinβ ≠ 0, u(x) ve v(x) ise Teorem 3.4.2 de göz önüne alınan fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$\frac{d}{dx}\left\{u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)\right\}=2uu'\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)+u^2\left(\frac{u''}{u}-\frac{v''}{v}\right)-u^2\left(\frac{u'^2}{u^2}-\frac{v'^2}{v^2}\right) \qquad (3.4.6)$$

$$=\frac{\left(u'v-v'u\right)^2}{v^2}+u^2\left\{h(x)-g(x)\right\}>0$$

olur. Bu sebeple v'nin sıfır olmadığı her aralıkta $u^2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)$ fonksiyonu monoton artandır. u(x) ve v(x) in (a,b) aralığının içinde eşit sayıda sıfırlara sahip olduğunu varsayalım.

x ile u(x) fonksiyonunun b noktasına en yakın sıfırını gösterelim $x_v \le x \le b$ aralığında v(x) fonksiyonunun sıfırlarının olmadığını gösterelim. Gerçekten Teorem 3.4.2 den dolayı a ve x_v arasında v(x) fonksiyonunun en az v sayıda sıfırları bulunur. Eğer $v(x)$, $x_y \le x \le b$ aralığında sıfıra sahip olursa bu takdirde (a,b) aralığının tamamında v(x) fonksiyonunun bizim varsayımımıza rağmen u(x) fonksiyonundan daha fazla sıfıra sahip olur.

(3.4.6) bağıntısını x ve b arasında integrallersek

$$u^2(b)\left\{\frac{u'(b)}{u(b)}-\frac{v'(b)}{v(b)}\right\}>u^2(x_v)\left\{\frac{u'(x_y)}{u(x_y)}-\frac{v'(x_v)}{v(x_v)}\right\}=0$$

bu itibarla

$$\frac{u'(b)}{u(b)}>\frac{v'(b)}{v(b)} \qquad (3.4.7)$$

elde ederiz. $\mu_m<\lambda'<\lambda''<\mu_{m+1}$ olmak üzere u(x) için $\varphi(x,\lambda')$ ve v(x) için $\varphi(x,\lambda'')$ ele alalım. (3.4.7) eşitsizliğine göre $\frac{\varphi'(b,\lambda)}{\varphi(b,\lambda)}$ fonksiyonu (μ_m,μ_{m+1}) aralığında monoton azalır. $\varphi(b,\mu_m)=\varphi(b,\mu_{m+1})$ olduğu için + ∞ dan -∞'a kadar azalması gerekir. Bu sebeple

$$\frac{\varphi'(b,\lambda_{m+1})}{\varphi(b,\lambda_{m+1})} = -\cot\beta$$

olmak üzere $(\lambda_m, \lambda_{m+1})$ aralığının içinde bir tane λ_{m+1} noktası bulunur yani (3.1.2) şartlarının ikincisi ağlanıyor. Demek ki λ_{m+1} özdeğerdîr ve $\varphi(x,\lambda_{m+1})$ ise (a,b) aralığının içinde $\varphi(x,\lambda_{m+1})$ fonksiyonunun sahip olduğu kadar sıfırı vardır yani m+1 tanedir.

4.TERS NODAL PROBLEMLER ÜZERİNE

4.1.Ters Nodal Problemlerin Çözümleri

Ters nodal problemler ilk olarak J.McLaughlin [18] tarafından incelenmişdir. Bu çalışmada sadece $\{x_n^k\}$ nodal noktalar cümlesinden faydalanarak *q{x)* potansiyeli ve sınır koşullan (α ve β sayıları) tanımlanır. Daha sonra nodal noktalar cümlesini kullanarak farklı yöntemlerle *(q,α,β)* üçlüsünün tanımlanması [4,6,12,13] çalışmalarında yapılmıştır.

$q \in L^1(0,1)$ *ve* $\alpha, \beta \in [0,\pi]$ olmak üzere

$$-\phi'' + q(x)\phi = \lambda\phi$$

$$\begin{cases} \phi(0)\cos\alpha + \phi'(0)\sin\alpha = 0 \\ \phi(1)\cos\beta + \phi'(1)\sin\beta = 0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Sturm-Liouville problemini *göz* önüne alalım. Bu problemin

$$\lambda_1(q,\alpha,\beta) < \lambda_2(q,\alpha,\beta) < \ldots \lambda_n(q,\alpha,\beta) < \ldots \to \infty$$

özdeğerleri basit ve reeldir.

$$0 < x_n^1(q,\alpha,\beta) < x_n^2(q,\alpha,\beta) < \ldots < x_n^{n-1}(q,\alpha,\beta) < 1$$

olmak üzere her bir özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar $n \geq 2$ için (n-1) tane nodal noktaya sahiptir. Tüm nodallar basittir ([2]) $s_n = \sqrt{\lambda_n}$ *ve* $l_n^k = x_n^{k+1} - x_n^k$ nodal uzunluk olsun. Bu takdirde aşağıdaki problem söz konusudur.

Teorem 4.1.1 ([20] ve [22])

Verilen nodal cümleden faydalanarak (q,α,β) nın tanımlanması için aşağıdaki formüller bulunur.

(a) (i) α = 0 veya k/n sıfıra yaklaşırken,

$$\cot = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n\pi^2\left(k-\frac{1}{2}-nx_n^k\right), \ \beta \neq 0 \ ise \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi^2\left(k-\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)x_n^k\right), \ \beta = 0 \ ise \end{cases} \tag{4.1.2}$$

(ii) β=0 veya k/n sıfıra yaklaşırken,

$$\cot = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n\pi^2\left(n-\frac{1}{2}-nx_n^{n-k}\right) \qquad , \qquad \alpha \neq 0 \ ise \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi^2\left(n-k-\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)x_n^{n-k}\right), \ \alpha = 0 \ ise \end{cases}$$

(b) (i) *(a,β)* ∈ durum(I)[22, Teorem 1. 2] ise, o zaman hemen hemen her $x\in(0,1)$ için x_n^k, x e yakınsar,

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} n^2\pi^2\left\{nl_n^{k-1} + \frac{l_n^k}{n\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 q - s\cot + s\cot\beta\right)\right\} \tag{4.1.3}$$

(ii) (α,β) ∈ durum (II) ise o zaman hemen hemen her $x\in(0,1)$ için x_n^k, x e yakınsar,

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} 2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)l_n^k - 1 + \frac{l_n^k}{n\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 q - s\cot + s\cot\beta\right)\right\} \tag{4.1.4}$$

Burada γ = 0 ise bir başka şekilde cot γ = 0 ise scot γ = 0 dır.

Lemma 4.1.1 ([20] ve [22])

$(q,\alpha,\beta)\in L^1(0,1)\times[0,\pi^2)$ olsun. α > 0 ise α_0 = 1 ve α= 0 ise α_0 = -1 olsun.

(a) Eğer α=β = 0 veya *α,β>0* ise n→∞ iken,

$$s_n = n\pi + \frac{1}{n\pi}\left(-s\cot\alpha + s\cot\beta + \frac{1}{2}\int_0^1\left(1+\alpha_0\cos(2n\pi t)q(t)dt\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

(b) Eğer *α* = *β*< *0* veya *α>0=β* ise n→∞ iken,

$$s_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}\left(-s\cot\alpha+s\cot\beta+\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+\alpha_0\cos\left(\left(2n-1\right)\pi\tau\right)q\left(t\right)dt\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Burada $\gamma=0$ veya $\cot\gamma=0$ ise $s\cot\gamma=0$ dır.

4.2 Yeni Ters Nodal Problem

Bu paragrafta R^l de ters nodal problemleri araştıracağız. Gesztesy-Simon'un sonuçlarını kullanarak X.F. Yang ters nodal problemler üzerine ilginç bir teorem ([23] ispatlandı. Kısaca $\left(0,b\right)\left(\frac{1}{2}<b\leq 1\right)$ alt aralığındaki tüm nodal noktaların cümlesinin teklik için yeterliliği gösterildi. Aşağıdaki teorem Yang tarafından ispatlanmıştır.

Teorem. 4.2.1 ([23])

$\frac{1}{2}<b\leq 1$ *ve* $0<\varepsilon<2b-1$ olsun. Kabul edelim ki B(A), (0,b) üzerinde S-yoğun ve tamdır, ve yeteri kadar büyük n için,

$$\left\{n_j:n_j\leq n\right\}\geq\left(1-\varepsilon\right)n+\frac{3\varepsilon}{2}$$

dir. Herhangi yeteri kadar büyük $j\in N$ için, burada tim $k\in Z$ için

$$x_{n_j}^{k_j+k}=\overline{x}_{\overline{n_j}}^{\overline{k_j}+k}$$

olmak üzere $(\left(\overline{k_j},\overline{n_j}\right)$ vardır ve $(k_j+k,n_j)\in A$ olacak şekilde $L^1(0,l\times(Q,\pi)^2$ de

$$\left(q-\int_0^1 q\left(x\right)dt,\alpha,\beta\right)=\left(\overline{q}-\int_0^1\overline{q}\left(t\right)dt,\overline{\alpha},\overline{\beta}\right)$$

dır.

$0<b\leq 1$ sabittir ve (q,α,β) ile tanımlanan Sturm-Liouville problemi ile bağlantılıdır. $s=\{n_j\}$ pozitif tamsayıların kesin azalan bir dizisi olsun.

T (S) = {(k,n): n∈*S,k* =1,...,*n*-l}

olduğunu kabul edelim. $A\subset T\left(S\right)$ olsun, herhangi bir n_j∈S için (k_j,n_j) olacak şekilde bazı $k=k_j$ vardır. Dikkat edersek k_j tek olarak seçilmelidir. (0,b) üzerinde bir alt nodal cümleyi B(A) olarak tanımlarsak

$B(A)=\{x_n^k\in(0,b):(k,n)\in A\}$

dır. Açıkça (q,α, β) problemine bağlı olan B(A), (0,b) aralığında S ve A kadar iyidir.

Tanım,

a. Her $j\geq 1$ için B(A) da kapsanan komşu $x_{n_j}^{k_j}$ *ve* $x_{n_j}^{k_j+1}$ nodal noktalar çifti varsa, B(A) cümlesi (0,b) aralığında ikilidir,

b. B(A) =[0,b] ise B(A), (0,b) üzerinde yoğundur.

c. Her $X\in(0,b)$ için $\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_j}^{k_j}=x$ olacak şekilde $\{k_j\}$ mevcut olduğunda ve

d. $x_{n_j}^{k_j}\in B(A)$ olmak üzere S nin alt dizisi varsa (bunu $\{n_j\}$ ile gösterelim.) B(A) ,

(0,b) üzerinde S-yoğundur

B(A), (0,b) üzerinde S-yoğun ise yoğun olacağı açıktır.

Nodallara göre Sturm-Liouville operatörü için ters problemin çözümüne ait aşağıdaki önemli teoremler sağlanır.

Teorem 4.2.2 ([23])

$0<b\leq 1$ olsun. B(A), *(q,α,β)* 'ya göre [0,b] aralığında S-yoğun ve çift olsun.

$$x_{n_j}^{k_j+k}(q,\alpha,\beta)=x_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j+1}(\bar{q},\bar{\alpha},\bar{\beta})$$

olmak üzene $\bar{k}_j$ *ve* $\bar{n}_j$ vardır öyle ki tüm $k\in Z$ için

$$(k_j+k,n_j)\in A$$

dır. Bu takdirde ancak sonlu j ler için

$$n_j=\bar{n}_j$$

ve tüm büyük j için

$$\lambda_{n_j}(q,\alpha,\beta)=\lambda_{n_j}(\bar{q},\bar{\alpha},\bar{\beta})+C$$

ve [0,b] üzerinde hemen hemen her yerde

$q=\bar{q}+C$ dir.

Burada $C = C\left(\alpha,\beta,\overline{\alpha},\overline{\beta},\int_0^1 \overline{q}-q\right)$ bir sabittir.

Teorem 4.2.3 $0 < b \le 1$ alalım. B(A)'nın *(q,α,β)* ile (0,b) üzerinde yoğun ve çiftli olduğunu kabul edelim. Her j ≥ 1 için $\left(\overline{k}_j,\overline{n}_j\right)$ vardır öyle ki

$$x_{n_j}^{k_j+k} = \overline{x}_{\overline{n_j}}^{\overline{k_j}+k}$$

olmak üzere $\left(\overline{k}_j,\overline{n}_j\right)$ mevcut olduğunda ve tüm k∈Z için $x_{n_j}^{k_j+k}$ ∈B(A) olacak şekilde sonlu j ler hariç

$$\left(k_j,n_j\right)=\left(\overline{k}_j,\overline{n}_j\right), \qquad \lambda_{n_j}=\overline{\lambda}_{n_j}+C$$

dır. Aynı zamanda (0,b) üzerinde $\alpha=\overline{\alpha}$ ve $q=\overline{q}+C$ dir. Burada C bir reel sabittir.

İspat: (4.1.2) formülünü yeniden yapılandırırsak cotα için doğrudan görürüz ki $\alpha=\overline{\alpha}$ dir.

O zaman görürüz ki $s_n=\sqrt{\lambda_n}$ (Lemma 4.1.1) 'nin asimptotik ifadelerinden

$$\lambda_n=\begin{cases} n^2\pi^2+2s\cot\beta-2s\cot\alpha+\int_0^1 q+o1, & (\alpha,\beta)\in \text{durum (I) ise} \\ \left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2+2s\cot\beta-2s\cot\alpha+\int_0^1 q+o1, & (\alpha,\beta)\in \text{durum (II) ise} \end{cases}$$

elde ederiz.

Şimdi $\alpha=\overline{\alpha}$ j yeteri kadar büyük olmak üzere

$$C=2\left(s\cot\beta-s\cot\overline{\beta}\right)+\int_0^1\left(q-\overline{q}\right)dt$$

olduğundan

$$\lambda_{n_j}-\overline{\lambda}_{n_j}=C+o(1)$$

elde ederiz.

φ_n ve $\overline{\varphi}_n$, $\left(q,\alpha,\beta\right)$ *ve* $\left(\overline{q},\overline{\alpha},\overline{\beta}\right)$ ile tanımlanan Sturm-Liouville problemleri için normlaştırılmış özfonksiyonlar olsun öyle ki sırasıyla

$$\varphi_n(0)=\overline{\varphi}_n(0)=\sin\alpha,\ \varphi_n'(0)=\overline{\varphi}_n'(0)=-\cos\alpha$$

dır. O zaman *j* büyük olmak üzere Lagrange özdeşliğinden

$$\left(\varphi_{n_j}'(x)\overline{\varphi}_{n_j}(x)-\varphi_{n_j}(x)\overline{\varphi}_{n_j}'(x)\right)=\left(q(x)-\overline{q}(x)+\overline{\lambda}_{n_j}-\lambda_{n_j}\right)\varphi_{n_j}(x)\overline{\varphi}_{n_j}(x) \quad (4.2.1)$$

elde ederiz.

$x\in$ *(0,b)* sabittir. (0,b) aralığında B(A) yoğun olduğundan s o zaman $x_{n_j}^{k_j}\in$ *B(A)* nodal noktalarının bir dizisi ya $x\in$ *B(A)* ya veya *x*‘ e yakınsaktır. Bundan dolayı 0 dan $x_{n_j}^{k_j}$ ye (veya son durum için x) 4.2.1 ifadesini integrallersek

$$0=\int_0^{x_{n_j}^{k_j}}\left(\varphi_{n_j}'(t)\overline{\varphi}_{n_j}(t)-\varphi_{n_j}(t)\overline{\varphi}_{n_j}'(t)\right)'dt=\int_0^{x_{n_j}^{k_j}}\left(q(t)\overline{q}(t)+C+o(1)\right)\varphi_{n_j}(t)\overline{\varphi}_{n_j}(t)dt \quad (4.2.2)$$

elde ederiz.

Biliyoruz ki, $\dfrac{1}{s_{n_j}}-\dfrac{1}{s_{\overline{n}_j}}=O\left(\dfrac{1}{n_j}\right)$ den

$$\varphi_{n_j}(x)\overline{\varphi}_{n_j}(x)=\begin{cases}\cos\left(s_{n_j}\right)\cos\left(\overline{s}_{n_j}\right)\sin^2\alpha+O\left(\dfrac{1}{n_j}\right),\alpha\neq 0\\ \dfrac{1}{n_j^2\pi^2}\sin\left(s_{n_j}x\right)\sin\left(\overline{s}_{n_j}x\right)+O\left(\dfrac{1}{n_j^3}\right),\alpha=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\left(2s_{n_j}x\right)\right)\sin^2\alpha+O\left(\dfrac{1}{n_j}\right),\alpha\neq 0\\ \dfrac{1}{2n_j^2\pi^2}\left(1-\cos\left(2s_{n_j}x\right)\right)+O\left(\dfrac{1}{n_j^3}\right),\alpha=0\end{cases}$$

(4.2.2) de $j\to\infty$

$$\int_0^x\left(q-\overline{q}-C\right)=0$$

elde ederiz. Bundan dolayı (0,b) üzerinde $q=\overline{q}+C$ dir, Sonuçta, j büyük olduğu zaman $\left(x_{n_j}^{k_j}, x_{n_j}^{k_j+1}\right)$ nodal noktalarının alt aralıklarında arasında

$$\phi\left(x_{n_j}^{k_j}\right)=\phi\left(x_{n_j}^{k_j+1}\right)=0$$

olacak şekilde

$$-\phi''+q\phi=\lambda\phi \ \ ve \ \ -\phi''+\left(\overline{q}+C\right)\phi=\left(\lambda+C\right)\phi$$

Sturm-Liouville problemlerini göz önüne alalım:

Bu problemin birinci özdeğerinin tekliğinden dolayı $\lambda_{n_j}=\overline{\lambda}_{n_j}+C$ dir.

5.ETKİLEŞİM NOKTALI STURM–LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜĞÜM NOKLARINA GÖRE TERS PROBLEMLER ÜZERİNE

Bu bölümde diferansiyel operatörler için ters nodal ve ters spektral problemlerin çözümleri incelenmiştir. Ters spektral problemler kendi spektral karakteristiklerinden oluşan kurtarma operatörlerinden oluşmaktadır. Bu problemler birçok doğal bilimlerin uygulanmasında önemli rol oynamaktadır.

Ters nodal problem özfonksiyonların sıfırlarından kurulan operatörlerden oluşur. Aşağıda ters nodal problem ile ters spektral problemin bazı sonuçları ve aralarındaki ilişkiler elde edilmiştir.

Aşağıda verilen aralık içinde sürekli olmayan şartlar ile sınır değer problemini gözönüne alalım.

$$-y''+q(x)y=\lambda y \quad , \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),... \tag{5.1}$$

$$U(y):=y'(0)-hy(0)=0 \quad ; \quad V(y):=y'(\pi)+Hy(\pi)=0\ldots \tag{5.2}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=y\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=y\left(\frac{\pi}{2}\right),\ y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\alpha y\left(\frac{\pi}{2}-0\right)... \tag{5.3}$$

Burada λ spektral parametre, $q(x),\ h,H,\alpha$ reeldir.

$q(x)\in L[0,\pi]$ ve genelliği bozmayacak şekilde

$$\int_0^{\pi} q(x)\,dx=0 \tag{5.4}$$

dır. Kayıt edelim ki (5.1), (5.3) problemi

$$-y''+\left(\alpha\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+q(x)\right)y=\lambda y,\ x\in(0,\pi)... \tag{5.5}$$

denklemine denktir. Burada δ -Dirak fonksiyonudur. [28]

Verilen nodal karakteristiklere göre $q(x),h$ ve H’nın bulunmasını içeren ters problemi düşünelim. Burada α sayısının önceden bilindiği varsayılmaktadır.

Sınır değer problemi (5.1)-(5.3) ü B=B(q,h,H) ile gösterelim.

Aralık içindeki süreksiz durumlu sınır problemleri sık sık uygulamalarda ortaya çıkmaktadır. Örneğin; elektronik de istenen, teknik özellikli heterojen elektronik hataların parametrelerinin oluşturulmasında süreksiz ters problemler ortaya çıkmaktadır.

Spektral bilgi, tek boyutlu süreksiz ortamların geçirgenlik ve iletkenlik profillerinin oluşturulmasında kullanılabilir. İç bir noktada süreksiz olan sınır değer problemleri dünya salınımları için oluşturulan jeofizik modellerde de ortaya çıkmaktadır. Burada temel süreksizlik, yer kabuğunun tabanındaki kesme dalgalarının yansımasından oluşmaktadır.

5.1. Özdeğerlerin Asimptotik Durumu

Bu bölümde potansiyel aralığın bir parçasında önsel bilgi olarak bilmek şartıyla potansiyel $q(x)$'i B spektrumunda çeviren tamamlanmamış ters problemi çalışacağız.

(0, π) aralığında $q(x)$'i çevirmek için farklı sınır durumlara sahip iki tane sınır değer probleminin spektrası tanımlanması gerekmektedir. Ayrıca, klasik Sturm-Liouville operatörü için tamamlanmamış ters problemler aşağıda incelenmiştir.

y(x) ve *z(x)* fonksiyonları $\left(0,\pi/2\right)$ ve $\left(\pi/2,\pi\right)$ aralıklarında sürekli ve türevlenebilir olsun. $\langle y,z\rangle := yz' - y'z$ olarak alalım. y(x) ve z(x) fonksiyonlarının (5.3) teki koşulları sağlanması koşuluyla

$$\langle y,z\rangle_{x=\frac{\pi}{2}+0} = \langle y,z\rangle_{x=\frac{\pi}{2}-0} \tag{5.5}$$

şeklinde yazabiliriz.

$\varphi(x,\lambda)$ yı (5.3) ve y(0)=1, $y'(0)=h$ şartlarını sağlayan (5.1) denkleminin bir çözümü olarak alalım. $U(\varphi)=0$ ve $\Delta(\lambda):=-V(\delta)$ olsun. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu B'nin karakteristik fonksiyonudur.

$$\lambda = p^2$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos px + \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt\right)\frac{\sin px}{p} + 0\left(\frac{1}{p}\exp\left(|\tau|x\right)\right),\ x < \frac{\pi}{2} \tag{5.6}$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos px+\left(2h+\int_0^x q(t)\,dt+\alpha\right)\frac{\sin px}{2p}-\alpha\frac{\sin p(\pi-x)}{2p}+$$
$$0\left(\frac{1}{p}\exp(|\tau|x)\right),\quad x>\frac{\pi}{2} \tag{5.7}$$

$$\varphi'(x,\lambda)=p\sin px+\left(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt\right)\cos px$$
$$+0\left(\frac{1}{p}\exp(|\tau|x)\right),\quad x<\frac{\pi}{2} \tag{5.8}$$

$$\varphi'(x,\lambda)=p(-\sin px)+\left(2h+\int_0^x q(t)\,dt+\alpha\right)\frac{\cos px}{2}+\alpha\frac{\cos p(\pi-x)}{2}$$
$$+0\left(\frac{1}{p}\exp(|\tau|x)\right),\quad x>\frac{\pi}{2} \tag{5.9}$$

(5.6) ve (5.9) da $|\lambda|\to\infty$ alınırsa

$$\Delta(\lambda)=p\sin p\pi-\frac{w\cos p\pi}{2}+\frac{w_1}{2}+0\big(\exp(|\tau|x)\big)... \tag{5.10}$$

$$w=2H+2h+\int_0^x q(t)\,dt+\alpha,\ w_1=-\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} w-w_1&=2H+2h+2\alpha\\ w+w_1&=2H+2h \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

$n\to\infty$ (5.10) kullanılırsa

$$pn:=\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{1}{2\pi n}\left(2H+2h+\int_0^x q(t)\,dt+\alpha+(-1)^{n-1}(-\alpha)\right)+o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5.12}$$

elde edilir.

B ile birlikte aynı formattaki fakat farklı katsayılarla $\tilde{q},\tilde{h},\tilde{H}$ ile sınır değer problemi $\tilde{B}=B(\tilde{q},\tilde{h},\tilde{H})$ düşünelim, a sembolü B ile ilgili bir nesneyi gösterdiğine göre $\bar{\alpha}$ sembolünde $\tilde{B}$ ile ilgili bir nesneyi gösterecektir. Aşağıdaki teorem içerisinde süreksizlik olmayan Sturm-Liouville denklemi için M. Horvath tarafından ispatlanmıştır.

Teorem5.1.1 $b\in(0,\pi/2], \Lambda\subset N\cup\{0\}$ *ve* $\Omega:=\{\lambda_n\}_{n\in\Lambda}$, $L_2(0,b)$ de tanımlı $\{\cos 2p_n x\}_{n\in\Lambda}$ fonksiyon sisteminin B spektrumunun bir bölümü olsun (b,π) üzerinde $q(x)=\tilde{q}(x)$ *ve* $H=\tilde{H}$, $\Omega=\bar{\Omega}$ olsun. O halde $(0,\pi)$ üzerinde $q(x)=\bar{q}(x)$ *ve* $h=\tilde{h}$ dır.

İspat:

$$-\varphi''(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda),\ -\tilde{\varphi}''(x,\lambda)+\tilde{q}(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\lambda\tilde{\varphi}(x,\lambda)$$
$$\varphi(0,\lambda)=\tilde{\varphi}(0,\lambda)=1,\quad \varphi'(0,\lambda)=h,\ \ \tilde{\varphi}(0,\lambda)=\tilde{h}$$

(5.5) kullanılırsa;

$$\int_0^T r(x)\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)\,dx=\left(\Big|_0^{\pi/2}+\Big|_{\pi/2+0}^{\pi/2}\right)\left(\varphi'(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\right) \tag{5.13}$$
$$=\varphi(x,\lambda)\tilde{\Delta}(\lambda)-\Delta(\lambda)\tilde{\varphi}(\pi,\lambda)-\left(h-\tilde{h}\right)$$

Burada $r(x)=q(x)-\tilde{q}(x)$ dir. (5.11) ve (5.12) yi kullanarak $h=\tilde{h}$ alabiliriz (5.14) ten

$$\int_0^b r(x)\left(\varphi(x,\lambda_n)\tilde{\varphi}(x,\lambda_n)-\frac{1}{2}\right)dx=0,\ n\in\Lambda \tag{5.15}$$

$x\le\pi/2$ için

$$\varphi(x,\lambda)=\cos px+\int_0^x K(x,t)\cos pt\,dt\ \ldots \tag{5.16}$$

olur. Burada K(x,t) λ ’ya bağımlı olmayan sürekli fonksiyondur.

$$\varphi(x,\lambda),\tilde{\varphi}(x,\lambda)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos 2px+\int_0^x V(x,t)\cos 2pt\,dt\right)$$ olur. Burada V(x,t) λ ’ya bağımlı olmayan sürekli fonksiyondur. (5.16) ve (5.15) yerine yazılırsa ve $\int_0^T r(x)\,dx=0$ ile tekrar hesaplanırsa

$$\int_0^b\left(r(x)+\int_x^b V(t,x)r(t)\,dt\right)\cos 2pnx\,dx=0,\ \ n\in\Lambda$$

ve sonuç olarak

$$r(x)+\int_0^b V(t,x)r(t)dt,\ (0,b)\ \text{üzerindedir.}$$

Bu homojen integral sistemi sadece adi çözüme sahip olduğundan r(x)=0, (0,b) aralığından ve $q(x)=\tilde{q}(x)$ de (0,b) aralığındadır.

5.2. Inverse Nodal Problem

Bu bölümde ters nodal problemleri süreksiz durumlu düşüneceğiz. İlk kısımda teklik teoremini ve nodal noktaların yoğun alt kümesinde olan $(0,\pi)$ aralığı üzerindeki kurtarma potansiyeli olan q(x) in prosedürünü elde edeceğiz.

İkinci kısımda ise, Ters nodal ve ters spektral problemle arasındaki ilişkileri elde edeceğiz. Bu ilişkileri ve ikinci bölümün sonuçlarını kullanılarak; ek sınırlamalar altında aralığın bir kısmında yer alan nodal noktaların alt kümesinden oluşan $(0,\pi)$ aralığı üzerinde potansiyelin oluşturulacağı ispatlanabilir.

Sınır değer problemi B'nin öz fonksiyonları, $y_n(x)=\varphi(x,\lambda_n)$ formuna sahiptir.

$y_n(x)$, gerçel değerli fonksiyon olmak üzere (5.12) yi (5.6) ve (5.7) nin içine yerleştirilerek aşağıdaki $n\to\infty$ x için asimptotik formülü elde ederiz.

$$y_n(x)=\cos x+\frac{1}{2\pi n}\left(\pi\left(2h+\int_0^x q(t)dt\right)-\left(w+(-1)_{w_1}^{n-1}\right)x\right)\sin nx+o\left(\frac{1}{n}\right)x<\frac{\pi}{2} \qquad (5.2.1)$$

$$-\left(wt(-1)^{n-1}w_1(x)\right)\sin nx+0\left(\frac{1}{n}\right),\ x>\frac{\pi}{2} \qquad (5.2.2)$$

Sınır değer B için benzer Sturm's salınım teoremi doğrudur. Daha doğrusu, $y_n(x)$ özfonksiyonu tam olarak $(0,\pi)$ aralığında n tane (basit) sıfıra sahiptir. Yani;

$0<x_n^1<\cdots<x_n^n<\pi$ dir.

$X_B:=\{x_n^j\}_{n\geq 1,j=\overline{1,n}}$,sınır değer problemi B'nin nodalları olarak adlandırılmaktadır.

$X_B^k:=\{x_{2m-k}^j\}_{m\geq 1,j=\overline{1,2m-k},k=0,1}$ olarak gösterilir. Açıkça $X_B^0\cup X_B^1=X_B$ dir.

Ters nodal problemler, verilen X_B nodal noktalar kümesi veya bazı kısımları potansiyel olarak q(x), h ve H katsayılarından oluşur.

$\alpha_n^j := \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}$ şeklinde ifade edebiliriz.

(5.2.1.) ve (5.2.2.) eşitliklerini gözönüne alarak $n \to \infty$ aşağıdaki asimptotik formülleri elde edebiliriz:

$x_n^j = \alpha_n^j + \frac{1}{2\pi n^2}\left(\pi\left(2h + \int_0^{\alpha_n^j} q(t)dt\right) - (\omega - \omega_1)\alpha_n^j\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), x_n^j \epsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,n=2m

(5.2.3)

$x_n^j = \alpha_n^j + \frac{1}{2\pi n^2}\left(\pi\left(2h + \int_0^{\alpha_n^j} q(t)dt\right) - (\omega + \omega_1)\alpha_n^j\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), x_n^j \epsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,n=2m+1

(5.2.4.)

$x_n^j = \alpha_n^j + \frac{1}{2\pi n^2}\left(\pi \int_0^{\alpha_n^j} q(t)dt - (\omega - \omega_1)\alpha_n^j + c_0\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), x_n^j \epsilon \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,n=2m,

(5.2.5.)

$x_n^j = \alpha_n^j + \frac{1}{2\pi n^2}\left(\pi \int_0^{\alpha_n^j} q(t)dt - (\omega + \omega_1)\alpha_n^j + c_1\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), x_n^j \epsilon \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,n=2m+1,

(5.2.6.)

olur. Burada $c_0 = 2\pi\alpha + 2\pi h$ ve $c_1 = 2\pi h$ dır.

Böylece $X_B^k, k = 0{,}1$ kümesi $(0, \pi)$ aralığında yoğundur.,

Teorem 5.2.1. $k = 0 \vee 1$ ve $x \in [0, \pi]$ olsun. $lim_{n\to\infty} x_n^{j_n} = x$ olacak şekilde $\{x_n^{j_n}\} \in X_B^k$ seçilebilir. Burada sonlu bir limit ortaya çıkar,

$$g_k(x) := \lim_{n\to\infty} 2n\left(x_n^{j_n} n - \left(j_n - \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

ve

$$g_k(x) = \int_0^x q(t)dt - \frac{\omega + (-1)^{k+1}\omega_1}{\pi}x + 2h, \qquad x \le \frac{\pi}{2}$$

$$g_k(x) = \int_0^x q(t)dt - \frac{\omega + (-1)^{k+1}\omega_1}{\pi} x + \frac{c_k}{\pi}, \qquad x \geq \frac{\pi}{2}$$

elde edilir. Burada $c_0 = 2\pi\alpha + 2\pi h$ ve $c_1 = 2\pi h$ dır.

KAYNAKLAR

1. Akhizer, N.I. and Glazman, I.M., (1961). Theory of Linear Operators in Hilbert Space , Eng. Trans.1-2 vols. New York
2. Atkinson, F.V., (1964), “Discrete *and* Continuous Boundary Problems” Academic Press, New York
3. Borg, G., (1946). Eine Umkerung der Sturm-Liouville Eigenwertaufgabe, Acta Math.76, 1-96.
4. Browne, P.J. and Sleeman, B.D., (1966). Inverse Nodal Problems for Sturm-Liouville Equations with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, Inverse Problems 12,377-381
5. Gelfand, I.M. and Levitan. B.M., (1951). On the Determination of a Differential Eguation from Its Spectrum. Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Math., 15,309-360; Amer. Math. Soc.Transl.l (1955),253-304
6. Hald, O.H., McLaughlin J.R., (1989). Solutions of inverse nodal problems, inverse problems 5,307-47
7. Hochstadt, H. (1973). The inverse Sturm-Liouville Problem , Comm. On Pure and Applied Mathematics. vol. XXVI, 715-729
8. Hochstadt, H., (1976). On The Determination of the Density of a Vibrating String from Spectral Data. J. Math, Anal Appl.55, 673-685.
9. Hochstadt, H. and Lieberman B., (1978). An inverse Sturm-Liouville Problem with Mixed Given Data, SI*AM* J. Appl. Math. 34, No.4,676-680
10. Kostyuchenko, A. G. and Sargsyan, I.S., (1979). Distribution of Eigenvalues. Nauka, 364.Moscow
11. Koyunbakan H. and Panakhov E.S., (2006). Solution of a Discontinuous Inverse Nodal Problem on a Finite İnterval .Math. and Comp. Modelling 44, 204-209
12. Law, C.K. and Yang, C.F., (1998). Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data, Inverse Problems.14 299-312
13. Law, C.K. Shen, C.L, and Yang, C.F., (1999), The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function , Inverse Problems. 15, 253-263
14. Levin, B.Ja., (1980). Distribution of Zeros of Entire Functions. 621. Rhode Island
15. Levitan , B.M. and Gasımov, M.G., (1964). Determination of a Differential Equations by Two its Spectra. Russian Math. surveys,19, 1-63.

16. Levitan, B.M.,(1987). Inverse Sturm-Liouville Problems. Utrecht, 239, Netherlands.
17. Marchenko , V.A., (1977). Sturm-Liouville Operators and Their Applications. Proc. Roy.Soc.,79(A),25-12.
18. McLaughlin, J.R.,(1988). Inverse spectral theory using nodal points as data - a uniqueness results, J, Diff. Eqns. 73, 354-362.
19. Naimark, M.A., (1968). Linear Differential Operators, Frederik Ungar Publishing Co. Inc,528, New York
20. Shen, C.L. and Shieh, C.T., (2000). An inverse nodal problem for vectorial Sturm-Liouville equations, to appear in Inverse problems. 16, No.2, 349-356
21. Şuhubi, E.S., (2001). Fonksiyonel Analiz. İ.T.Ü, 638. İstanbul
22. Yang, X.F., (1997). A solution of the inverse nodal problem,Inverse Problems 13,203-213.
23. Yang, X.F., (2001). A new inverse nodal problem, to appear in J. Diff. Eqns. 169, No2, 633-653
24. Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S., (1991). Sturm-Liouville and Dirac Operators Kluver Academic Piblisherz, 345, Netherland.
25. Markushevich, A.I. and Markushevich, L.A., (1977). Introduction to Theory of Analitic Functions. 320. Moscow.
26. Kreyszig, E., (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. 480. Newyork.
27. İdemen M., (1999). Kompleks değişkenli Fonksiyonlar Teorisi. Işık Üni., 208, İstanbul
28. Albeverio, S., Geszlezy, F., Høegh-Krohn, R., Holden, H., with an appendix by Exner, P., (2005). Solvable models in quantum mechanics (Second edition) AMS Chelsee Publ.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Ad **:** Muhammed

Soyad **:** ÇUBUK

Baba Adı **:** Hanefi

Uyruğu **:** T.C.

Doğum Yeri **:** Merkez/Elazığ

Doğum Tarihi **:** 14.11.1986

Medeni Hali **:** Bekar

EĞİTİM DURUMU

Balakgazi Lisesi (Elazığ)	2000-2003
Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2005-2010
Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2011-2013

YABANCI DİL

İngilizce

ÇALIŞTIĞI KURUM

T.C. Doğu Akdeniz Kalkınma Ajansı – Proje Uzmanı