T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVEKS, İKİNCİ ANLAMDA s-KONVEKS VE r-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

MUSTAFA KARAGÖZLÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2019

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS, İKİNCİ ANLAMDA s-KONVEKS ve r-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

MUSTAFA KARAGÖZLÜ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Bu tez 15/03/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ
Danışman

Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Üye

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Üye

Prof. Dr. Refet KARADAĞ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS, İKİNCİ ANLAMDA s-KONVEKS VE r-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Mustafa KARAGÖZLÜ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ
Yıl : 2019, Sayfa sayısı: VI+60

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Bu tez çalışmasında konveks fonksiyonlar, ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar ve r-konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Tezin birinci bölümü giriş için ayrılmış olup bu bölümde konvekslik ve eşitsizlik tarihi üzerine bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde konveks fonksiyon, ikinci anlamda s-konveks fonksiyon, genişletilmiş s-konveks fonksiyon ve r-konveks fonksiyon sınıfları tanıtılmış ve bu sınıflar için bazı özel bilgiler sunulmuştur. Ayrıca bu bölümde Euler Gama, Beta ve tamamlanmamış Beta fonksiyonu tanımları ve bazı özel eşitsizlikler sunulmuştur. Üçüncü bölümde ilk olarak literatürde önemli bir yere sahip olan Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson eşitsizlikleri verilmiştir. Daha sonra tez çalışmasında kullanılacak olan konveks fonksiyon sınıfları için önceden elde edilmiş literatürdeki bazı eşitsizlikler sunulmuştur. Son olarak bu konveks fonksiyon sınıfları için integral eşitsizlikler elde etmede temel olarak kullanılacak lemmalardan söz edilmiştir. Dördüncü bölümde ise konveks, ikinci anlamda s-konveks ve r-konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks Fonksiyon; s-Konveks Fonksiyon; r-Konveks Fonksiyon; İntegral Eşitsizlikler.

ABSTRACT

MSc Thesis

INTEGRAL INEQUALITIES FOR CONVEX, s-CONVEX IN THE SECOND SENSE AND r-CONVEX FUNCTIONS

Mustafa KARAGÖZLÜ

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Merve AVCI ARDIÇ
Year : 2019 , Number of pages: VI+60

Jury : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

In this thesis, integral inequalities for convex functions, s-convex functions in the second sense and r-convex functions were obtained. The first part of the thesis is reserved for entry and in this section, information on the history of convexity and inequality is presented. In the second part, convex function, s-convex function in the second sense, generalized s-convex function and r-convex function classes are introduced and some specific information is presented for these classes. In addition, in this section definitions of Euler Gamma, Beta, incomplete Beta function and some special inequalities are presented. In the third section, first, Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson inequalities which have an important place in the literature are given. Then, some inequalities in literature are presented for the convex function classes to be used in the thesis study. Finally, the lemmas used as a basis for obtaining integral inequalities for these convex function classes are mentioned. In the fourth section, integral inequalities for convex, s-convex in the second sense and r-convex functions are obtained.

Key Words: Convex Function; s-Convex Function; r-Convex Function; Integral Inequalities.

BEYAN

"Konveks, İkinci Anlamda s-Konveks ve r-Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Mustafa KARAGÖZLÜ

M KARAGÖZLÜ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışma sırasında biz öğrencilerini bir baba edasıyla karşılayan, dinamik ufkuyla yön gösteren ve her türlü şartlar altında sabretmeyi öğreten değerli Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Tez konumu belirleyip bu konuda çalışmam için bana rehberlik eden, bilgisi ve tecrübesiyle çalışmalarıma etkin katkı sağlayan, her türlü tökezlememde elimden tutup kaldıran, bu çalışmanın baş mimarı değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

Verdiği manevi desteklerden dolayı Sayın Doç. Dr. Halil İbrahim GÜMÜŞ'e teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamda bana yardımcı olan Sayın Arş. Gör. Dr. Mehmet Alper ARDIÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

Değerli annem Yıldız KARAGÖZLÜ'ye, babam Nazım KARAGÖZLÜ'ye ve kardeşim Fatih KARAGÖZLÜ'ye öğrenimim boyunca bana sağladıkları maddi ve manevi her türlü destekten ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Lisans eğitimim sırasında bende emeği çok olan Hocam Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET I
ABSTRACT II
BEYAN III
TEŞEKKÜR IV
İÇİNDEKİLER V
SİMGELER ve KISALTMALAR VI
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
3. MATERYAL ve YÖNTEM 11
   3.1. Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson Eşitsizlikleri 11
   3.2. Konveks Fonksiyonlar, İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar ve r-Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler 12
   3.3. Lemmalar 18
4. BULGULAR 22
   4.1. Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipi Eşitsizlikler 22
   4.2. İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipi Eşitsizlikler 26
   4.3. r-Konveks Fonksiyonlar için Farklı Tipten Eşitsizlikler 30
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 57
KAYNAKLAR 58
KİŞİSEL BİLGİLİER 60

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

(a, b)	: a, b açık aralığı
$[a, b]$	: a, b kapalı aralığı
$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
β	: Beta fonksiyonu
ln	: e tabanında logaritma fonksiyonu
f'	: f fonksiyonun birinci mertebeden türevi
f''	: f fonksiyonun ikinci mertebeden türevi
f'''	: f fonksiyonun üçüncü mertebeden türevi
$f^{(4)}$	: f fonksiyonun dördüncü mertebeden türevi
$f^{(n)}$	: f fonksiyonun n. mertebeden türevi
$\lvert f\rvert$	: f fonksiyonunun mutlak değeri
Γ	: Gama fonksiyonu
$\mathcal{L}_r$	: Genelleştirilmiş logaritmik ortalama
I°	: I aralığının içi
K_s^2	: İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı
lim	: Limit
$\mathcal{L}$	: Logaritmik ortalama
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
I	: Reel sayılar kümesinde bir aralık
$M_r(x, y; \gimel)$	: r. Kuvvetlere göre kuvvet ortalaması
$\lVert f\rVert_\infty$	: Supremum normu
sup	: Supremum
β_z	: Tamamlanmamış Beta fonksiyonu
Σ	: Toplam sembolü
$x!$	: x sayısının faktöriyeli
$\int_x^y$	: x, y aralığında integral işlemi

Kısaltmalar

M.Ö.	: Milattan önce

1. GİRİŞ

M. Ö. 250 yılında Arşimet'in, çemberin içine ve etrafına çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla ünlü π sayısı hesabına kadar uzanan konvekslik kavramının matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. Birçok alanda önemli bir yer tutan konvekslik kavramının literatüre katılması 1881 yılının Ekim ayında Hermite'in elde ettiği sonucu 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlamasıyla olmuştur. Bu sonuç ispatsız olarak Mathesis dergisinde basılmıştır [1].

1893 yılında Hadamard çalışmalarında konveksliğe yer verse de sistematik bir şekilde konveks fonksiyonların çalışılması J.L.W.V. Jensen ile 1905-1906 yıllarında başlamıştır.

Konveks fonksiyonun tanımı eşitsizlikle verilmektedir. Bu yüzden eşitsizlikler Konveks Fonksiyonlar Teorisi'nde önemli bir yer tutar. Konveks Fonksiyonlar ve Eşitsizlikler Teorisi üzerine yazılmış temel sayılabilecek ilk çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Pólya'nın kaleme aldığı "Inequalities" kitabıdır [2]. İkinci kitap ise 1961 yılında E.F. Beckenbach ve R. Bellman'ın yazdığı yine "Inequalities" adlı kitaptır [3]. Bu çalışma 1934-1960 yılları arasında elde edilen eşitsizliklerin sonuçlarını içermektedir. Bu çalışmaları Mitrinović'in 1970 yılında yayınlanan "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip etmektedir [4]. Bu çalışmada ilk iki kitapta bulunmayan sonuçlara yer verilmiştir. Pečarić tarafından 1987 yılında yazılan "Convex Functions: Inequalities" adı verilmiş kitap sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizliklerden bahseden ilk temel kaynaktır [5]. Bu kaynakların yanında "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives [6]", "Classical and New Inequalities in Analysis [7]", "Mathematical Inequalities [8]", "Convex Functions and Their Applications [9]", "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications [10]" ve "Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration [11]" çalışmaları literatürde mevcut olan diğer kaynaklar arasında sayılabilir.

Bu çalışmada ilk üç bölümde konveks fonksiyon, s-konveks fonksiyon ve r-konveks fonksiyon sınıfları hakkında temel bazı bilgiler verilip ve bu fonksiyon sınıfları için elde edilmiş bazı eşitsizliklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde bahsedilen fonksiyon sınıfları için farklı tipli integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmamızda kullanılacak olan bazı temel tanımlar, teoremler ve eşitsizliklere bu bölümde değinilmiştir.

Tanım 2.1 (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olmak üzere $+: L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A) $L, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

$G1$. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

$G2$. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

$G4$. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

$G5$. Her $x, y \in L$ için $x + y = x + y$ dir.

B)$x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

$L1$. $\alpha . x \in L$ dir.

$L2$. $\alpha .(x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir.

$L3$. $(\alpha + \beta). x = \alpha . x + \beta . x$ dir.

$L4$. $(\alpha\beta). x = \alpha .(\beta . x)$ dir.

$L5$. $1. x = x$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir [12].

Tanım 2.2 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Keyfi $x, y \in A$ elemanları için

$$B = \{z \in L: z = tx + (1 - t)y, \qquad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir [13].

Tanım 2.3 (Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (2.1) eşitsizliği her $x \neq y$ ve $t \in (0,1)$ için kesin ise f fonksiyonuna kesin konvekstir denir.

Eğer f fonksiyonu için

$$f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y) \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. (2.2) eşitsizliği her $x \neq y$ ve $t \in (0,1)$ için kesin ise f fonksiyonuna kesin konkavdır denir [14].

Sonuç 2.4: $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonunun I'da konveks olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in I$ ve her $\alpha,\ \beta$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha+\beta}\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}f(x)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}f(y)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [14].

Teorem 2.5: $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I'da konveks olması için gerek ve yeter şart $x_1 < x_2 < x_3$ olmak üzere $x_1, x_2, x_3 \in I$ noktaları için

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} = (x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3) \geq 0 \tag{2.3}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [14].

(2.3) eşitsizliği

$$f(x_2) \leq \left(\frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}\right)f(x_1)+\left(\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}\right)f(x_3) \tag{2.4}$$

veya

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \geq 0 \tag{2.5}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$x_1 < x_3$ ve $x_1, x_3 \neq x_2$ olmak üzere (2.4) eşitsizliği

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} \tag{2.6}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan şu sonuca varılır: $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerinde konveks olması için gerek ve şart $\forall c \in I, x \neq c$ için $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ fonksiyonunun I üzerinde artan olmasıdır [14].

Teorem 2.6: $[a,b] \subset I°$olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise f $[a,b]$ üzerinde Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak f $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli ve $I°$'nde süreklidir [15].

Teorem 2.7. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı, $[a,b]$ aralığında konveks (konkav) ve $x_0 \in (a,b)$ noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a,b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \geq (\leq) f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.7}$$

eşitsizliği yazılır [15].

Teorem 2.8: $[a,b]$'de konveks olan fonksiyon aynı aralıkta sınırlı; (a,b)'de süreklidir [16].

Örneğin; $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = -1 \ ise \\ x^2, & x \in (-1,1) ise \\ 2, & x = 1 \ ise \end{cases}$$

fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında konveks; $(-1,1)$ aralığında süreklidir [15].

Teorem 2.9: $f: I \to \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) ise $f_+'(x)$ ve $f_-'(x)$ vardır ve $I°$ üzerinde artandır (kesin artandır). Burada

$f_+'(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ ve $f_-'(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ dir [15].

Teorem 2.10: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $c \in (a,b)$ olmak üzere her $x \in (a,b)$ için

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt \tag{2.8}$$

olacak şekilde $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ artan (kesin artan) fonksiyonunun olmasıdır [15].

Teorem 2.11: f, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilir olsun. f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f''nin artan (kesin artan) olmasıdır [15].

Teorem 2.12: f'', (a,b) üzerinde var olsun. f'nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır. Ayrıca (a,b) üzerinde $f''(x) > 0$ ise f aralık üzerinde kesin konvekstir [15].

Tanım 2.13 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $s \in (0,1]$, $t \in [0,1]$ olmak üzere her $x, y \in [0,\infty)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. (2.9) eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonları için $f \in K_s^2$ yazılır [17].

Örnek 2.14: $0 < s < 1$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $x \in [0,\infty)$ için

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \ ise \\ bx^s + c, & x > 0 \ ise \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

i) Eğer $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

ii) Eğer $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir [10].

Tanım 2.15 (Genişletilmiş s-Konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $s \in [-1,1]$, $t \in (0,1)$ olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \tag{2.10}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna genişletilmiş s-konveks fonksiyon denir [18].

x, y pozitif sayılarının r. kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; t) = \begin{cases} (tx^r + (1-t)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^t y^{1-t}, & r = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

olarak tanımlanır [10].

Tanım 2.16 (r-Konveks Fonksiyon): Pozitif bir f fonksiyonu için her $x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq M_r(f(x), f(y); t) \tag{2.12}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde r-konveks fonksiyon denir.

(2.12) eşitsizliğinin yön değiştirmesi durumunda f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde r-konkav fonksiyon denir [19].

Bu tanım yardımıyla 1-konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna varılır.

$$\mathcal{L}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{lnx - lny}, & x \neq y \\ x, & x = y \end{cases} \tag{2.13}$$

eşitliği $x, y > 0$ sayılarının logaritmik ortalaması olarak tanımlanır.

$$\mathcal{L}_r(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r}, & x \neq y, r \neq 0, -1 \\ \frac{x-y}{lnx - lny}, & x \neq y, r = 0 \\ xy \frac{lnx - lny}{x-y}, & x \neq y, r = -1 \\ x, & x = y \end{cases} \tag{2.14}$$

eşitliği $x, y > 0$ sayılarının r. kuvvetlerine göre genelleştirilmiş logaritmik ortalaması olarak tanımlanır [10].

Teorem 2.17: f, $[a, b]$ üzerinde pozitif r-konveks fonksiyon olsun. O halde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \mathcal{L}_r\big(f(a), f(b)\big) \tag{2.15}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer f pozitif r-konkav fonksiyon ise (2.15) eşitsizliği yön değiştirir [20].

Tanım 2.18 (Euler Gama Fonksiyonu): $x > 0$ için Euler Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanır [21].

Tanım 2.19 (Beta Fonksiyonu): $x > 0$ ve $y > 0$ için Beta fonksiyonu

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlanır [22].

Ayrıca $x, y > 0$ ve $0 \leq z < 1$ için tamamlanmamış Beta fonksiyonu

$$\beta_z(x,y) = \int_0^z t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Teorem 2.20 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^q$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.19}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

Power-mean eşitsizliği Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.21 (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.20}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.22: Herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [4].

Teorem 2.23 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $a<b$ olmak üzere

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^{\mathrm{b}} |f(x)|dx \tag{2.21}$$

eşitsizliği geçerlidir. [7].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson Eşitsizlikleri

Teorem 3.1.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+\mathrm{b}}{2}\right) \leq \frac{1}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} \int_{a}^{\mathrm{b}} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır [14].

Hermite-Hadamard eşitsizliği konveks fonksiyonların integralinin ortalama değeri için tahminler vermesi açısından önemlidir.

Teorem 3.1.2 (Ostrowski Eşitsizliği): $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'nde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} \int_{a}^{b} f(u)du \right|$$

$$\leq \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]$$

$$= M(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. $\frac{1}{4}$ katsayısı en iyi katsayıdır [24].

Ostrowski eşitsizliği diferensiyellenebilen ve sınırlı fonksiyonlar için üst sınırlar veren bir eşitsizliktir. Ayrıca bu eşitsizlik $x = \frac{a+b}{2}$ için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafını vermesi açısından önemlidir.

Teorem 3.1.3 (Simpson Eşitsizliği): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon, $\left\|f^{(4)}\right\|_{\infty}=sup_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}(x)\right|<\infty$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_{\infty}(b-a)^4$$

eşitsizliği elde edilir [25].

3.2. Konveks Fonksiyonlar, İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar ve r-Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

Bu bölümde konveks fonksiyonlar, ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar ve r-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan eşitsizliklerden bahsedilecektir.

Teorem 3.2.1: $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu ikinci anlamda s-konveks fonksiyon, $s\in(0,1)$, $a,b\in[0,\infty)$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^{\mathrm{b}} f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlik olarak bilinir [26].

Teorem 3.2.2: $a<b$, $a,b\in I^{\circ}$ olmak üzere $f:I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. f'' I°'nde mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f'''\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'''|$, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s-konveks ise $s\in(0,1]$ için

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^4}{6}\left[\left(\frac{2^{-3-s}(s^2+7s+18)+s-2}{(1+s)(2+s)(3+s)(4+s)}\right)\right]$$

$$\times\left[|f'''(a)|+|f'''(b)|\right] \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır [27].

Teorem 3.2.3: $a<b,\ \ a,b\in I^{\circ}$ olmak üzere $f: I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. f'' I°'nde mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f'''\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'''|^q$, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s-konveks ise $s\in(0,1]$, $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^4}{48}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}|f'''(a)|^q+\frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)}|f'''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)}|f'''(a)|^q+\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}|f'''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır [27].

Teorem 3.2.4: $a<b,\ a,b\in I^{\circ}$ olmak üzere $f: I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu üçüncü mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ve $f'''\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'''|^q$, $[a,b]$ üzerinde genişletilmiş s-konveks ise $s\in[-1,1]$, $q\geq 1$ için

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{12}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \frac{(b-a)^3}{96} \left\{ \left[2|f'''(a)|^q + (s+2)\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left[(s+2)\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + 2|f'''(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır [28].

Sonuç 3.2.5: Teorem 3.2.4'ün şartları altında

i) $q = 1$ ise

$$\left| \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{48(s+2)(s+3)(s+4)}$$

$$\times \left[|f'''(a)| + (s+2)\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f'''(b)| \right], \tag{3.5}$$

ii) $q = 1$ ve $s = 1$ ise

$$\left| \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{2880}\left[|f'''(a)| + 3\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f'''(b)| \right], \tag{3.6}$$

iii) $s = 1$ ise

$$\left| \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{1152}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{q}} \times \left\{\left[2|f'''(a)|^q + 3\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left[3\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + 2|f'''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{3.7}$$

eşitsizlikleri sağlanır [28].

Teorem 3.2.6: $a < b,\ a, b \in I^{\circ}$ olmak üzere $f: I \subseteq [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu üçüncü mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ve $f''' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'''|^q$, $[a, b]$ üzerinde genişletilmiş s-konveks ise $s \in [-1,1],\ q \geq 1$ için

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^3}{96}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{\left[\beta(s+2, 2q+1)|f'''(a)|^q + \frac{1}{(2q+s+1)(2q+s+2)}\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+ \left[\frac{1}{(2q+s+1)(2q+s+2)}\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right.$$

$$\left. + \beta(s+2, 2q+1)|f'''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\beta(,)$ Beta fonksiyonudur [28].

Sonuç 3.2.7: Teorem 3.2.6'nın şartları altında eğer $s = 1$ ise seçilirse

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{192}\left(\frac{1}{(q+1)(2q+1)(2q+3)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\left[2|f'''(a)|^q+(2q+1)\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[(2q+1)\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+2|f'''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır [28].

Teorem 3.2.8: $f:[a,b]\to(0,\infty)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde r-konveks olsun. $0<r\leq 1$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{r}{r+1}\left([f(a)]^r+[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

Sonuç 3.2.9: $f:[a,b]\to(0,\infty)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde 1-konveks olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) \tag{3.11}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

Teorem 3.2.10: $f,g:[a,b]\to(0,\infty)$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde sırasıyla r_1-konveks ve r_2-konveks fonksiyonlar olsun. $0<r_1,r_2\leq 2$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx &\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_1+2}\right)^{\frac{2}{r_1}}\left([f(a)]^{r_1}+[f(b)]^{r_1}\right)^{\frac{2}{r_1}}\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_2+2}\right)^{\frac{2}{r_2}}\left([g(a)]^{r_2}+[g(b)]^{r_2}\right)^{\frac{2}{r_2}}\end{aligned} \tag{3.12}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

Sonuç 3.2.11: Teorem 3.2.10'da $r_1 = r_2 = 2$ seçilirse

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{4}\left([f(a)]^2 + [f(b)]^2 + [g(a)]^2 + [g(b)]^2\right) \tag{3.13}$$

eşitsizliği elde edilir [29].

Sonuç 3.2.12: Teorem 3.2.10'da $r_1 = r_2 = 2$ ve $f(x) = g(x)$ seçilirse

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{1}{2}\left([f(a)]^2 + [f(b)]^2\right) \tag{3.14}$$

eşitsizliği elde edilir [29].

Teorem 3.2.13: $f, g: [a, b] \to (0, \infty)$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde sırasıyla r_1-konveks ve r_2-konveks fonksiyonlar olsun. Eğer $r_1 > 1$ ve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{[f(a)]^{r_1} + [f(b)]^{r_1}}{2}\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\frac{[g(a)]^{r_2} + [g(b)]^{r_2}}{2}\right)^{\frac{1}{r_2}} \tag{3.15}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

Sonuç 3.2.14: Teorem 3.2.13'te $r_1 = r_2 = 2$ seçilirse

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sqrt{\frac{[f(a)]^2 + [f(b)]^2}{2}}\sqrt{\frac{[g(a)]^2 + [g(b)]^2}{2}} \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilir[29].

Sonuç 3.2.15: Teorem 3.2.13'te $r_1 = r_2 = 2$ ve $f(x) = g(x)$ seçilirse

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{1}{2}\left(f^2(a)+f^2(b)\right) \tag{3.17}$$

eşitsizliği elde edilir [29].

Teorem 3.2.16: $a < b,\ a,b \in I$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'nde diferensiyellenebilir ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$, $[a,b]$ üzerinde r-konveks ise $p > 1$ için

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\mathcal{L}_r\left(|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\mathcal{L}_r\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] \tag{3.18}$$

eşitsizliği sağlanır [30].

3.3. Lemmalar

Tez çalışmasında konveks fonksiyonlar, ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar ve r-konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilirken bu bölümde verilen lemmalardan faydalanılmıştır.

Lemma 3.3.1: $a < b$ ve $a,b \in I$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'nde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt \qquad (3.19)$$

eşitliği yazılır [31].

Lemma 3.3.2: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'nde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f'' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x)$$

$$= \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\int_0^1 t^2 f''(tx+(1-t)a)dt$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\int_0^1 t^2 f''(tx+(1-t)b)dt \qquad (3.20)$$

eşitliği yazılır [32].

Lemma 3.3.3: $a < b$ ve $a, b \in I$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'nde üçüncü mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f''' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12}\int_0^1 t(1-t)(2t-1)f'''(ta+(1-t)b)dt \qquad (3.21)$$

eşitliği yazılır. [33]

Lemma 3.3.4: $a < b$ ve $a, b \in I$ olmak üzere $f'': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'nde mutlak sürekli ve $f''' \in L[a,b]$ ise

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$= (b-a)^4 \int_0^1 m(t) f'''(ta + (1-t)b)dt, \tag{3.22}$$

eşitliği yazılır. Burada

$$m(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{6}(t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right), & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{3.23}$$

dir [34].

Lemma 3.3.5: $a < b$ ve $a, b \in I$ olmak üzere $f''': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'nde mutlak sürekli olsun. Eğer $f^{(4)} \in L[a, b]$ ise

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$= (b-a)^5 \int_0^1 h(t) f^{(4)}(ta + (1-t)b)dt, \tag{3.24}$$

eşitliği yazılır. Burada

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{24} t^3 \left(t - \frac{2}{3}\right), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{24}(t-1)^3 \left(t - \frac{1}{3}\right), & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{3.25}$$

dir [35].

Lemma 3.3.6: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 1$ için $f^{(\mathrm{n})}$ $I°$'nde mevcut olsun. $a < b,\ a, b \in I$ için $f^{(\mathrm{n})}$ $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir ise

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{[(-1)^k + 1](b-a)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right) f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \left(\frac{(-1)(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\right) \int_0^1 K_n(t) f^{(\mathrm{n})}(ta + (1-t)b)dt \tag{3.26}$$

eşitliği yazılır. Burada

$$K_n(t) := \begin{cases} t^{\mathrm{n}}, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (t-1)^{\mathrm{n}}, & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{3.27}$$

dir. [36]

Tezin Bulgular bölümünde aşağıdaki

$$\text{Ʊ}_1 = \left| \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right|,$$

$$\text{Ʊ}_2 = \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) \right|,$$

$$\text{Ʊ}_3 = \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right] \right|,$$

$$\text{Ʊ}_4 = \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \right|$$

ve

$$\text{Ʊ}_5 = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{[(-1)^k + 1](b-a)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$

eşitlikler kullanılacaktır.

4. BULGULAR

Bu bölümde ilk olarak Lemma 3.3.5'teki eşitlik kullanılarak konveks ve ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için Simpson tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra Lemma 3.3.1, Lemma 3.3.2, Lemma 3.3.3, Lemma 3.3.4, Lemma 3.3.5 ve Lemma 3.3.6'daki eşitlikler kullanılarak r-konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilmiştir.

4.1. Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipi Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1: $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'de dördüncü mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f''': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'de mutlak sürekli bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f^{(4)} \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f^{(4)}|$ $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\text{Ҍ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{5760}\left[\left|f^{(4)}(a)\right| + \left|f^{(4)}(b)\right|\right] \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.5 ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu kullanılırsa

$$\text{Ҍ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^3\left(\frac{2}{3}-t\right)\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^3\left(t-\frac{1}{3}\right)\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right] \tag{4.2}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.2) eşitsizliğinde $|f^{(4)}|$ fonksiyonunun konveks oluşu kullanılırsa

$$\text{Ҍ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^3\left(\frac{2}{3}-t\right)\left[t\left|f^{(4)}(a)\right| + (1-t)\left|f^{(4)}(b)\right|\right]dt\right.$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^3\left(t-\frac{1}{3}\right)\left[t\left|f^{(4)}(a)\right|+(1-t)\left|f^{(4)}(b)\right|\right]dt\Bigg] \tag{4.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^4\left(\frac{2}{3}-t\right)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^4\left(t-\frac{1}{3}\right)dt=\frac{1}{640} \tag{4.4}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^3\left(\frac{2}{3}-t\right)(1-t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^3\left(t-\frac{1}{3}\right)tdt=\frac{1}{384} \tag{4.5}$$

dir. (4.4) ve (4.5) eşitlikleri (4.3) eşitsizliğinde yerlerine yazıldığında (4.1)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.2: $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'de dördüncü mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f''': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'de mutlak sürekli bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f^{(4)} \in L[a,b]$ olsun. Eğer $\left|f^{(4)}\right|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise $q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$\text{Ƕ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left(\frac{2^{-2-3p}(5+3p)}{3(2+9p(1+p))}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\frac{\left|f^{(4)}(a)\right|^q+4\left|f^{(4)}(b)\right|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{4\left|f^{(4)}(a)\right|^q+\left|f^{(4)}(b)\right|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.5 ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu kullanılırsa (4.2) eşitsizliği elde edilir. (4.2) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği ve $\left|f^{(4)}\right|^q$'nun konveks oluşu kullanırsa

$$\text{Ʉ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{3p}\left(\frac{2}{3}-t\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)\left[t\left|f^{(4)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{3p}\left(t-\frac{1}{3}\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{3}\right)\left[t\left|f^{(4)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{3p}\left(\frac{2}{3}-t\right)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{3p}\left(t-\frac{1}{3}\right)dt=\frac{2^{-2-3p}(5+3p)}{3(2+9p(1+p))} \tag{4.8}$$

dir.

(4.7) eşitsizliğinde (4.8) eşitliği kullanılırsa ve diğer integraller hesaplanıp yerlerine yazılırsa (4.6) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.3: Teorem 4.1.2'nin şartları altında

$$\text{Ʉ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left(\frac{2^{-4-p}3^{-3-p}(-350+2^{9+2p}-303p-90p^2-9p^3)}{(1+p)(2+p)(3+p)(4+p)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\frac{2\left|f^{(4)}(a)\right|^q+3\left|f^{(4)}(b)\right|^q}{320}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\left|f^{(4)}(a)\right|^q+2\left|f^{(4)}(b)\right|^q}{320}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.2) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği ve $\left|f^{(4)}\right|^q$'nun konveks oluşu kullanılırsa

$$\text{Ƕ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^3\left(\frac{2}{3}-t\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^3\left[t\left|f^{(4)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^3\left(t-\frac{1}{3}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^3\left[t\left|f^{(4)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.10}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^3\left(\frac{2}{3}-t\right)^p dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^3\left(t-\frac{1}{3}\right)^p dt$$

$$=\frac{2^{-4-p}3^{-3-p}(-350+2^{9+2p}-303p-90p^2-9p^3)}{(1+p)(2+p)(3+p)(4+p)} \tag{4.11}$$

dir. (4.11) eşitliği (4.10) eşitsizliğinde kullanılırsa ve diğer integraller hesaplanıp yerlerine yazılırsa (4.9) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.4: Teorem 4.1.2'nin şartları altında

$$\text{Ƕ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left(\frac{1}{(3p+1)2^{3p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\frac{4^{q+2}-(3q+7)}{(q+1)(q+2)6^{q+2}}\left|f^{(4)}(a)\right|^q+\frac{2^{2q+3}(3q+4)-(3q+5)}{(q+1)(q+2)6^{q+2}}\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\frac{2^{2q+3}(3q+4)-(3q+5)}{(q+1)(q+2)6^{q+2}}\left|f^{(4)}(a)\right|^q\right.$$

$$+\frac{4^{q+2}-(3q+7)}{(q+1)(q+2)6^{q+2}}\left|f^{(4)}(b)\right|^{q}\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg] \tag{4.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.2) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği ve $\left|f^{(4)}\right|^{q}$'nun konveks oluşu kullanılırsa

$$\text{Ʊ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{3p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)^{q}\left[t\left|f^{(4)}(a)\right|^{q}+(1-t)\left|f^{(4)}(b)\right|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{3p}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{3}\right)^{q}\left[t\left|f^{(4)}(a)\right|^{q}+(1-t)\left|f^{(4)}(b)\right|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.13}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)^{q}tdt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{3}\right)^{q}(1-t)dt=\frac{4^{q+2}-(3q+7)}{(q+1)(q+2)6^{q+2}} \tag{4.14}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)^{q}(1-t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{3}\right)^{q}tdt=\frac{2^{2q+3}(3q+4)-(3q+5)}{(q+1)(q+2)6^{q+2}} \tag{4.15}$$

dir. (4.13) eşitsizliğinde (4.14) ve (4.15) eşitlikleri yerlerine yazılıp diğer integraller hesaplanırsa (4.12)'deki eşitsizlik elde edilir.

4.2. İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipi Eşitsizlikler

Teorem 4.2.1: $f: I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'de dördüncü mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f''': I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I°$'de mutlak sürekli bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f^{(4)} \in L[a,b]$ olsun. Eğer $\left|f^{(4)}\right|^q$, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s-konveks ise $s \in (0,1]$ ve $q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$Ƕ_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left(\frac{3p+5}{2^{3p+2}3(3p+1)(3p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\frac{(s+5)2^{-s-2}}{3(s+1)(s+2)}\left|f^{(4)}(a)\right|^q+\frac{4+2^{-s}+(8-2^{-s})s}{12(s+1)(s+2)}\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4+2^{-s}+(8-2^{-s})s}{12(s+1)(s+2)}\left|f^{(4)}(a)\right|^q+\frac{(s+5)2^{-s-2}}{3(s+1)(s+2)}\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.2) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği ve $\left|f^{(4)}\right|^q$'nun ikinci anlamda s-konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$Ƕ_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{3p}\left(\frac{2}{3}-t\right)dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)\left[t^s\left|f^{(4)}(a)\right|^q+(1-t)^s\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t-\frac{1}{3}\right)(1-t)^{3p}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t-\frac{1}{3}\right)\left[t^s\left|f^{(4)}(a)\right|^q+(1-t)^s\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.17}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)t^s dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t-\frac{1}{3}\right)(1-t)^s dt=\frac{(s+5)2^{-s-2}}{3(s+1)(s+2)} \tag{4.18}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)(1-t)^s dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t-\frac{1}{3}\right)t^s dt=\frac{4+2^{-s}+(8-2^{-s})s}{12(s+1)(s+2)} \tag{4.19}$$

dir. (4.8), (4.18) ve (4.29) eşitlikleri (4.17) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (4.16)'daki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.2.2: Eğer Teorem 4.2.1'de $s=1$ seçilirse (4.16)'daki eşitsizlik (4.6)'daki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.2.3: Teorem 4.2.1'in şartları altında

$$\text{Ʊ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left(\frac{2^{-4-p}3^{-3-p}(-350+2^{9+2p}-303p-90p^2-9p^3)}{(1+p)(2+p)(3+p)(4+p)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{2^{s+4}(s+4)}\left|f^{(4)}(a)\right|^q\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2^{-s-4}(-90+3\times 2^{5+s}-53s-12s^2-s^3)}{(1+s)(2+s)(3+s)(4+s)}\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{2^{-s-4}(-90+3\times 2^{5+s}-53s-12s^2-s^3)}{(1+s)(2+s)(3+s)(4+s)}\left|f^{(4)}(a)\right|^q\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2^{s+4}(s+4)}\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.2) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği ve $\left|f^{(4)}\right|^q$'nun ikinci anlamda s-konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$
\text{Ʉ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^3\left(\frac{2}{3}-t\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.
$$

$$
\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^3\left[t^s\left|f^{(4)}(a)\right|^q+(1-t)^s\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}
$$

$$
+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^3\left(t-\frac{1}{3}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}
$$

$$
\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^3\left[t^s\left|f^{(4)}(a)\right|^q+(1-t)^s\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.21}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$
\int_0^{\frac{1}{2}} t^{3+s}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{3+s}dt=\frac{1}{2^{s+4}(s+4)} \tag{4.22}
$$

ve

$$
\int_0^{\frac{1}{2}} t^3(1-t)^s dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^3 t^s dt
$$

$$
=\frac{2^{-s-4}(-90+3\times 2^{5+s}-53s-12s^2-s^3)}{(1+s)(2+s)(3+s)(4+s)} \tag{4.23}
$$

dir. (4.11), (4.22) ve (4.23) eşitlikleri (4.21) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (4.20)'deki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.2.4: Teorem 4.2.3'te $s=1$ seçilirse (4.20)'deki eşitsizlik (4.9)'daki eşitsizliğe indirgenir.

4.3. r-Konveks Fonksiyonlar için Farklı Tipten Eşitsizlikler

Teorem 4.3.1: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I,\ a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^{q}$ $[a,b]$ aralığında r-konveks ise $q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\text{Ƕ}_1 \leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\mathcal{L}_r(|f'(a)|^q, |f'(x)|^q)\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\mathcal{L}_r(|f'(b)|^q, |f'(x)|^q)\right]^{\frac{1}{q}}\right) \tag{4.24}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.1, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\text{Ƕ}_1 \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.25}$$

eşitsizliği elde edilir.

$|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında r-konveks olduğundan (2.15)'teki eşitsizlik yardımıyla

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \mathcal{L}_r(|f'(x)|^q, |f'(a)|^q) \tag{4.26}$$

ve

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \mathcal{L}_r(|f'(x)|^q, |f'(b)|^q) \tag{4.27}$$

yazılır. (4.26) ve (4.27) eşitsizlikleri (4.25) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa ve $\int_0^1 (1-t)^p dt = \frac{1}{p+1}$ oluşu kullanılırsa (4.24) eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç 4.3.2: Teorem 4.3.1'de $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse (4.24)'teki eşitsizlik Teorem 3.2.16'daki (3.18) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.3.3: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu $I°$'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I,\ a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ $[a,b]$ aralığında r-konveks ise $r>q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$Ƕ_1 \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{r}{q+r}\right)^{\frac{1}{q}}[|f'(a)|^q+|f'(x)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{r}{q+r}\right)^{\frac{1}{q}}[|f'(b)|^q+|f'(x)|^q]^{\frac{1}{q}} \tag{4.28}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.1, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak (4.25) eşitsizliği elde edilir. (4.25) eşitsizliğinde $|f'|$'nün r-konveks oluşu kullanılırsa

$$Ƕ_1 \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 [t|f'(x)|^r+(1-t)|f'(a)|^r]^{\frac{q}{r}} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 [t|f'(x)|^r+(1-t)|f'(b)|^r]^{\frac{q}{r}} dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.29}$$

yazılır. $0<k<1, a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k \leq \sum_{i=1}^{n}{a_i}^k+\sum_{i=1}^{n}{b_i}^k \tag{4.30}$$

eşitsizliği (4.29)'da kullanılırsa

$$Ʊ_1 \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[t^{\frac{q}{r}}|f'(x)|^q + (1-t)^{\frac{q}{r}}|f'(a)|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[t^{\frac{q}{r}}|f'(x)|^q + (1-t)^{\frac{q}{r}}|f'(b)|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.31)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.31)'deki integraller hesaplanıp yerlerine yazıldığında (4.28)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.4: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ $[a, b]$ aralığında r-konveks ise $r > 1$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$Ʊ_1 \leq \frac{r^2}{(1+r)(2r+1)}\left(\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{b-a}\right)|f'(x)|$$

$$+\frac{r}{2r+1}\left(\frac{(x-a)^2|f'(a)| + (b-x)^2|f'(b)|}{b-a}\right) \quad (4.32)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.1 ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu kullanılarak

$$Ʊ_1 \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx + (1-t)a)|dt$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx + (1-t)b)|dt \quad (4.33)$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|$ fonksiyonu r-konveks olduğundan

$$Ʊ_1 \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)[t|f'(x)|^r + (1-t)|f'(a)|^r]^{\frac{1}{r}} dt$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)[t|f'(x)|^r + (1-t)|f'(b)|^r]^{\frac{1}{r}} dt \quad (4.34)$$

elde edilir. (4.30) eşitsizliği (4.34) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\text{Ƕ}_1 \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)\left[t^{\frac{1}{r}}|f'(x)| + (1-t)^{\frac{1}{r}}|f'(a)|\right]dt$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)\left[t^{\frac{1}{r}}|f'(x)| + (1-t)^{\frac{1}{r}}|f'(b)|\right]dt \tag{4.35}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.35)'teki integraller hesaplanıp yerlerine yazıldığında (4.32)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.5: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I°'de ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$ $[a,b]$ aralığında r-konveks ise $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\text{Ƕ}_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\mathcal{L}_r(|f''(x)|^q, |f''(a)|^q)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\mathcal{L}_r(|f''(x)|^q, |f''(b)|^q)\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.36}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.2, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\text{Ƕ}_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\int_0^1 t^2|f''(tx+(1-t)a)|dt$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\int_0^1 t^2|f''(tx+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left(\int_0^1 t^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f''(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left(\int_0^1 t^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f''(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.37}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında r-konveks olduğundan (2.15)'teki eşitsizlik yardımıyla

$$\int_0^1 |f''(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \mathcal{L}_r(|f''(x)|^q, |f''(a)|^q) \tag{4.38}$$

ve

$$\int_0^1 |f''(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \mathcal{L}_r(|f''(x)|^q, |f''(b)|^q) \tag{4.39}$$

yazılır. (4.38) ve (4.39) eşitsizlikleri (4.37) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa ve $\int_0^1 t^{2p} dt = \frac{1}{2p+1}$ oluşu kullanılırsa (4.36) eşitsizliğine ulaşılır.

Teorem 4.3.6: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I°'de ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ aralığında r-konveks ise $r>1$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\text{Ʊ}_2 \leq \frac{r}{3r+1}\left(\frac{(x-a)^3+(b-x)^3}{2(b-a)}\right)|f''(x)|$$

$$+\frac{r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)}\left(\frac{(x-a)^3|f''(a)|+(b-x)^3|f''(b)|}{b-a}\right) \tag{4.40}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.2, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve $|f''|$'nün r-konveks oluşu kullanılırsa

$$\text{Ʊ}_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\int_0^1 t^2[t|f''(x)|^r+(1-t)|f''(a)|^r]^{\frac{1}{r}}dt$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\int_0^1 t^2[t|f''(x)|^r+(1-t)|f''(b)|^r]^{\frac{1}{r}}dt \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.30) eşitsizliği (4.41) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\text{Ʊ}_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\int_0^1 \left[t^{2+\frac{1}{r}}|f''(x)|+t^2(1-t)^{\frac{1}{r}}|f''(a)|\right]dt$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\int_0^1 \left[t^{2+\frac{1}{r}}|f''(x)| + t^2(1-t)^{\frac{1}{r}}|f''(b)|\right]dt \tag{4.42}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^1 t^{2+\frac{1}{r}}dt = \frac{r}{3r+1} \tag{4.43}$$

ve

$$\int_0^1 t^2(1-t)^{\frac{1}{r}}dt = \frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} \tag{4.44}$$

dir. Eğer (4.43) ve (4.44) eşitlikleri (4.42) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (4.40)'daki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.7: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I,\ a < b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında r-konveks ise $r > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\text{Ʊ}_2 \leq \frac{1}{2(b-a)(2p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{r}{1+r}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[(x-a)^3[|f''(a)|^q + |f''(x)|^q]^{\frac{1}{q}} + (b-x)^3[|f''(x)|^q + |f''(b)|^q]^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.45}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.2, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak (4.37) eşitsizliği elde edilir. (4.37) eşitsizliğinde $|f''|^q$'nun r-konveks oluşu ve $\int_0^1 t^{2p}dt = \frac{1}{2p+1}$ eşitliği kullanılırsa

$$\text{Ʊ}_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 [t|f''(x)|^{qr} + (1-t)|f''(a)|^{qr}]^{\frac{1}{r}}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 [t|f''(x)|^{qr}+(1-t)|f''(b)|^{qr}]^{\frac{1}{r}}dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.46)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.30) eşitsizliği (4.46) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$Ƕ_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 [t^{1/r}|f''(x)|^{q}+(1-t)^{1/r}|f''(a)|^{q}]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 [t^{1/r}|f''(x)|^{q}+(1-t)^{1/r}|f''(b)|^{q}]dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.47)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.47)'deki integraller hesaplanırsa (4.45)'teki eşitsizlik elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.8: Teorem 4.3.7'nin şartları altında

$$Ƕ_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{r}{qr+r+1}|f''(x)|^q+\beta\left(\frac{r+1}{r},q+1\right)|f''(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{r}{qr+r+1}|f''(x)|^q+\beta\left(\frac{r+1}{r},q+1\right)|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad (4.48)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada β Beta fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.3.2, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$Ƕ_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t^q|f''(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t^q|f''(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.49)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.49) eşitsizliğinde $|f''|^q$'nun r-konveks oluşu ve $\int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}$ eşitliği kullanılırsa

$$\text{H}_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t^q [t|f''(x)|^{qr} + (1-t)|f''(a)|^{qr}]^{\frac{1}{r}} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t^q [t|f''(x)|^{qr} + (1-t)|f''(b)|^{qr}]^{\frac{1}{r}} dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.50)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.30) eşitsizliği (4.50) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\text{H}_2 \leq \frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t^q [t^{1/r}|f''(x)|^{q} + (1-t)^{1/r}|f''(a)|^{q}] dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t^q [t^{1/r}|f''(x)|^{q} + (1-t)^{1/r}|f''(b)|^{q}] dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.51)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.51)'deki integraller hesaplanırsa (4.48)'deki eşitsizlik elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.9: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de üçüncü mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f''' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'''|$, $[a,b]$ aralığında r-konveks ise $r > 1$ için

$$\text{H}_3 \leq \frac{(b-a)^3 r^2}{12(2r+1)(3r+1)(4r+1)}\left(1+\frac{1+6r}{2^{2+\frac{1}{r}}}\right)[|f'''(a)| + |f'''(b)|] \qquad (4.52)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.3, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve $|f'''|$'nün r-konveks oluşu kullanılırsa

$$\text{H}_3 \leq \frac{(b-a)^3}{12}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)(1-2t)[t|f'''(a)|^r + (1-t)|f'''(b)|^r]^{\frac{1}{r}} dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t)(2t-1)[t|f'''(a)|^r + (1-t)|f'''(b)|^r]^{\frac{1}{r}} dt\right] \qquad (4.53)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.30) eşitsizliği (4.53) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$Ꞁ_3 \leq \frac{(b-a)^3}{12}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)(1-2t)\left[t^{\frac{1}{r}}|f'''(a)| + (1-t)^{\frac{1}{r}}|f'''(b)|\right]dt\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t(1-t)(2t-1)\left[t^{\frac{1}{r}}|f'''(a)| + (1-t)^{\frac{1}{r}}|f'''(b)|\right]dt\right] \tag{4.54}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{1+\frac{1}{r}}(1-t)(1-2t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t(1-t)^{1+\frac{1}{r}}(2t-1)dt$$

$$= \frac{2r^2+12r^3}{2^{4+\frac{1}{r}}(2r+1)(3r+1)(4r+1)} \tag{4.55}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)^{1+\frac{1}{r}}(1-2t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{1+\frac{1}{r}}(1-t)(2t-1)dt$$

$$= \frac{r^2}{(2r+1)(3r+1)(4r+1)} + \frac{2r^2+12r^3}{2^{4+\frac{1}{r}}(2r+1)(3r+1)(4r+1)} \tag{4.56}$$

dir. (4.55) ve (4.56) eşitlikleri (4.54) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (4.52)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.10: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de üçüncü mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f''' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'''|^q$, $[a,b]$ aralığında r-konveks ise $r > 1, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$Ꞁ_3 \leq \frac{(b-a)^3}{12}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\beta\left(q+1, \frac{r+rq+1}{r}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.57}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.3, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu, $|f'''|^q$'nun r-konveks oluşu ve (4.30) eşitsizliği kullanılarak

$$\text{Ƕ}_3 \leq \frac{(b-a)^3}{12}\left(\int_0^1 |2t-1|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t^q(1-t)^q |f'''(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{12}\left(\int_0^1 |2t-1|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\int_0^1 t^q(1-t)^q [t|f'''(a)|^{qr} + (1-t)|f'''(b)|^{qr}]^{\frac{1}{r}} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{12}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\int_0^1 t^{q+\frac{1}{r}}(1-t)^q |f'''(a)|^q + t^q(1-t)^{q+\frac{1}{r}} |f'''(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.58}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.58)'deki integraller hesaplanıp yerlerine yazıldığında (4.57)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.11: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de üçüncü mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f'': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de mutlak sürekli bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f''' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'''|^q$, $[a,b]$ aralığında r-konveks ise $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\text{Ƕ}_4 \leq \frac{(b-a)^3}{96}\left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\mathcal{L}_r\left(|f'''(a)|^q, \left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left[\mathcal{L}_r\left(|f'''(b)|^q,\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \tag{4.59}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada Γ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.3.4, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$Ƕ_4 \leq \frac{(b-a)^3}{6}\left\{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^2\left(\frac{1}{2}-t\right)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}|f'''(ta+(1-t)b)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left((1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f'''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.60}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'''|^q$ $[a,b]$ aralığında r-konveks olduğundan (2.15)'teki eşitsizlik yardımıyla

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|f'''(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}_r\left(\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,|f'''(b)|^q\right) \tag{4.61}$$

ve

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f'''(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}_r\left(|f'''(a)|^q,\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right) \tag{4.62}$$

yazılır. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^2\left(\frac{1}{2}-t\right)\right)^p dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left((1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^p dt$$

$$=\frac{8^{-p}\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{2\Gamma(3p+2)} \tag{4.63}$$

dir. (4.63) eşitliği, (4.61) ve (4.62) eşitsizlikleri (4.60) eşitsizliğinde kullanılırsa (4.59)'daki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.12: Teorem 4.3.11'in şartları altında

$$Ƕ_4 \leq \frac{(b-a)^3}{48}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p^2+p+q}{p^2q}}\left(\frac{1}{2p^2+1}\right)^{\frac{1}{p^2}}\left(\frac{1}{pq+1}\right)^{\frac{1}{pq}}$$

$$\times\left\{\left[\mathcal{L}_r\left(|f'''(a)|^q,\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\mathcal{L}_r\left(\left|\left|f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,f'''(b)\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.64}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.4, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak (4.60) eşitsizliği elde edilir. (4.60) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği tekrar kullanılırsa

$$Ƕ_4 \leq \frac{(b-a)^3}{6}\left\{\left(\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2p^2}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)^{pq}dt\right]^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left[\int_0^{\frac{1}{2}}|f'''(ta+(1-t)b)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}+\left(\left[\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{2p^2}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^{pq}dt\right]^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\times\left[\int_{\frac{1}{2}}^1|f'''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.65}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2p^2}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{2p^2}dt=\frac{1}{(2p^2+1)2^{2p^2+1}} \tag{4.66}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)^{pq}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{2}\right)^{pq}dt=\frac{1}{(pq+1)2^{pq+1}} \tag{4.67}$$

dir. (4.61), (4.62) eşitsizlikleri ve (4.66), (4.67) eşitlikleri (4.65) eşitsizliğinde kullanılırsa (4.64)'teki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.13: Teorem 4.3.11'in şartları altında $r>1$ için

$$\begin{aligned}
\text{Ƕ}_4 \leq{}& \frac{(b-a)^3}{96}\left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{r}{2^{\frac{1}{r}}(r+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\times\left\{\left(|f'''(a)|^q+\left(2^{1+\frac{1}{r}}-1\right)|f'''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\left(2^{1+\frac{1}{r}}-1\right)|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.4, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak (4.60) eşitsizliği elde edilir. (4.60) eşitsizliğinde $|f'''|^q$'nun r-konveks oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\text{Ƕ}_4 \leq{}& \frac{(b-a)^3}{6}\left\{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^2\left(\frac{1}{2}-t\right)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\times\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left[t|f'''(a)|^{qr}+(1-t)|f'''(b)|^{qr}\right]^{\frac{1}{r}}dt\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left((1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\left.\times\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t|f'''(a)|^{qr}+(1-t)|f'''(b)|^{qr}\right]^{\frac{1}{r}}dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.30) eşitsizliği (4.69) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\text{Ƕ}_4 \leq \frac{(b-a)^3}{6}\left\{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^2\left(\frac{1}{2}-t\right)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left[\int_0^{\frac{1}{2}}[t^{1/r}|f'''(a)|^q+(1-t)^{1/r}|f'''(b)|^q]dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left[\int_{\frac{1}{2}}^1\left((1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\times\left[\int_{\frac{1}{2}}^1[t^{1/r}|f'''(a)|^q+(1-t)^{1/r}|f'''(b)|^q]\,dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.70}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{r}}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{\frac{1}{r}}dt=\frac{r}{(r+1)2^{1+\frac{1}{r}}} \tag{4.71}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{r}}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\frac{1}{r}}dt=\frac{r}{r+1}\left(1-\frac{1}{2^{1+\frac{1}{r}}}\right) \tag{4.72}$$

dur. (4.63), (4.71) ve (4.72) eşitlikleri (4.70) eşitsizliğinde kullanılırsa (4.68)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.14: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de üçüncü mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f'': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de mutlak sürekli bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f''' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'''|$ r-konveks ise $r > 1$ için

$$\text{Ʉ}_4 \leq \frac{(b-a)^3}{6}$$

$$\times \left[\frac{18r^4 + 7r^3 + r^2}{2^{3+\frac{1}{r}}(r+1)(2r+1)(3r+1)(4r+1)} + \frac{r^3 - 2r^4}{(r+1)(2r+1)(3r+1)(4r+1)}\right]$$

$$\times \left(|f'''(a)| + |f'''(b)|\right) \tag{4.73}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.4, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve $|f'''|$'nün r-konveks oluşu kullanılırsa

$$\text{Ʉ}_4 \leq \frac{(b-a)^3}{6}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\left(\frac{1}{2}-t\right)[t|f'''(a)|^r + (1-t)|f'''(b)|^r]^{\frac{1}{r}}dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)[t|f'''(a)|^r + (1-t)|f'''(b)|^r]^{\frac{1}{r}}dt\right\} \tag{4.74}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.30)'daki eşitsizlik yardımıyla

$$\text{Ʉ}_4 \leq \frac{(b-a)^3}{6}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{2+\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{2}-t\right)|f'''(a)| + t^2(1-t)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{2}-t\right)|f'''(b)|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[(1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)t^{\frac{1}{r}}|f'''(a)| + (1-t)^{2+\frac{1}{r}}\left(t-\frac{1}{2}\right)|f'''(b)|\right]dt\right\} \tag{4.75}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2+\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{2}-t\right)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{2+\frac{1}{r}}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt = \frac{r^2}{2^{4+\frac{1}{r}}(1+3r)(1+4r)} \tag{4.76}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2(1-t)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{2}-t\right)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)t^{\frac{1}{r}}dt$$

$$= \frac{r^3-2r^4}{(r+1)(2r+1)(3r+1)(4r+1)}$$

$$+\frac{34r^4+11r^3+r^2}{2^{4+\frac{1}{r}}(r+1)(2r+1)(3r+1)(4r+1)} \tag{4.77}$$

dir. (4.76) ve (4.77) eşitlikleri (4.75) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (4.73)'teki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.15: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de dördüncü mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f''': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $I°$'de mutlak sürekli fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f^{(4)} \in L[a,b]$ olsun. Eğer $\left|f^{(4)}\right|^q$ $[a,b]$ aralığında r-konveks ise $q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$Ƕ_4 \le \frac{(b-a)^4}{1152}\frac{1}{2^{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}}}\left(\frac{1}{3p^2+1}\right)^{\frac{1}{p^2}}\left(\frac{1}{pq+1}\right)^{\frac{1}{pq}}\left(\frac{4^{pq}-1}{3}\right)^{\frac{1}{pq}}$$

$$\times\left\{\left[\mathcal{L}_r\left(\left|f^{(4)}(a)\right|^q,\left|f^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left[\mathcal{L}_r\left(\left|f^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f^{(4)}(b)\right|^q\right)\right]^{1/q}\right\} \tag{4.78}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.5, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$Ƕ_4 \le \frac{(b-a)^4}{24}\left\{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^3\left(\frac{2}{3}-t\right)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left((1-t)^{3}\left(t-\frac{1}{3}\right)\right)^{p}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \tag{4.79}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.79) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği tekrar kullanılırsa

$$Ƕ_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left\{\left(\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^{3p^2}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)^{pq}dt\right]^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{3p^2}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{3}\right)^{pq}dt\right]^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\times\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.80}$$

eşitsizliği elde edilir. $\left|f^{(4)}\right|^{q}, [a,b]$ aralığında r-konveks olduğundan (2.15)'teki eşitsizlik yardımıyla

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}_r\left(\left|f^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}, \left|f^{(4)}(b)\right|^{q}\right) \tag{4.81}$$

ve

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}_r\left(\left|f^{(4)}(a)\right|^{q}, \left|f^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right) \tag{4.82}$$

yazılır. Ayrıca

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{3p^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{3p^2} dt = \frac{1}{2^{3p^2+1}(3p^2+1)} \tag{4.83}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-t\right)^{pq} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t-\frac{1}{3}\right)^{pq} dt = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{pq+1} - \left(\frac{1}{6}\right)^{pq+1}}{pq+1} \tag{4.84}$$

dir. (4.81), (4.82) eşitsizlikleri ve (4.83), (4.84) eşitlikleri (4.80) eşitsizliğinde kullanılırsa (4.78)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.16: Teorem 4.3.15'in şartları altında $r > 1$ için

$$Ƕ_4 \leq \frac{(b-a)^4}{144}\left(\frac{4^{p+1}-1}{6(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\left[\frac{r}{(3qr+r+1)2^{3q+1+\frac{1}{r}}}\left|f^{(4)}(a)\right|^q + \beta_{\frac{1}{2}}(3q+1,\frac{1}{r}+1)|f^4(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\beta_{\frac{1}{2}}(3q+1,\frac{1}{r}+1)\left|f^{(4)}(b)\right|^q + \frac{r}{(3qr+r+1)2^{3q+1+\frac{1}{r}}}\left|f^{(4)}(a)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.85}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada β_x tamamlanmamış Beta fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.3.5, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$Ƕ_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\left\{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^{3q}\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{3}\right)^{p}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{3q}\left|f^{(4)}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \quad (4.86)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.86) eşitsizliğinde $\left|f^{(4)}\right|^{q}$'nun $[a,b]$ üzerinde r-konveks oluşu ve (4.30) eşitsizliği kullanılırsa

$$\text{Ƕ}_4 \leq \frac{(b-a)^4}{24}\Bigg\{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)^{p}dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\int_0^{\frac{1}{2}}t^{3q}[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(4)}(a)\right|^{q}+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(4)}(b)\right|^{q}]dt\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{3}\right)^{p}dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{3q}[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(4)}(a)\right|^{q}+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(4)}(b)\right|^{q}]dt\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \quad (4.87)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}-t\right)^{p}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{3}\right)^{p}dt=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}-\left(\frac{1}{6}\right)^{p+1}}{p+1}, \quad (4.88)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^{3q+\frac{1}{r}}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{3q+\frac{1}{r}}dt=\frac{r}{(3qr+r+1)2^{3q+1+\frac{1}{r}}} \quad (4.89)$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^{3q}(1-t)^{\frac{1}{r}}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{3q}t^{\frac{1}{r}}dt=\beta_{\frac{1}{2}}\left(3q+1,\frac{1}{r}+1\right) \quad (4.90)$$

dir. (4.88), (4.89) ve (4.90) eşitlikleri (4.87) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (4.85)'teki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.17: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu için $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ olmak üzere $f^{(\mathrm{n})}$, I°'nde var ve $a, b \in I,\ \ a < b$ için $f^{(\mathrm{n})}$ $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $|f^{(\mathrm{n})}|$ $[a, b]$ üzerinde r-konveks ise $r > 1$ için

$$\text{Ƕ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left(\frac{r}{(nr+r+1)2^{n+1+\frac{1}{r}}} + \beta_{\frac{1}{2}}\left(n+1, \frac{1}{r}+1\right)\right)$$

$$\times\left[\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right| + \left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|\right] \tag{4.91}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.6 ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu kullanılırsa

$$\text{Ƕ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\mathrm{n}}\left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\mathrm{n}}\left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|dt\right] \tag{4.92}$$

eşitsizliği elde edilir. $\left|f^{(\mathrm{n})}\right|$ fonksiyonu r-konveks olduğundan

$$\text{Ƕ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\mathrm{n}}\left(t\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^r + (1-t)\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\mathrm{n}}\left(t\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^r + (1-t)\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}dt\right] \tag{4.93}$$

elde edilir. (4.30) eşitsizliği (4.93) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\text{Ƕ}_5 \leq \left(\frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\right)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^{n+\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right| + t^{\mathrm{n}}(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left((1-t)^{\mathrm{n}}t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right| + (1-t)^{n+\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|\right)dt\right] \tag{4.94}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n+\frac{1}{r}}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{n+\frac{1}{r}}dt = \frac{r}{(nr+r+1)2^{n+1+\frac{1}{r}}} \tag{4.95}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\mathrm{n}}(1-t)^{\frac{1}{r}}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\mathrm{n}} t^{\frac{1}{r}}dt = \beta_{\frac{1}{2}}\left(n+1, \frac{1}{r}+1\right) \tag{4.96}$$

tür. (4.95) ve (4.96) eşitlikleri (4.94) eşitsizliğinde yerlerine yazıldığında (4.91)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.18: $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu için $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ olmak üzere $f^{(\mathrm{n})}$, $I°$'nde var ve $a, b \in I$, $a < b$ için $f^{(\mathrm{n})}$ $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $|f^{(\mathrm{n})}|^{q}$ $[a, b]$ üzerinde r-konveks ise $r > 1$ ve $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$Ƕ_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left(\frac{1}{(np+1)2^{np+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{r}{(r+1)2^{1+\frac{1}{r}}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\left[\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^{q} + \left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^{q}\left(2^{1+\frac{1}{r}}-1\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^{q}\left(2^{1+\frac{1}{r}}-1\right) + \left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.97}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.3.6 ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu kullanılırsa (4.92) eşitsizliği elde edilir. (4.92) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$Ƕ_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg] \tag{4.98}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.98) eşitsizliğinde $\left|f^{(\mathrm{n})}\right|^{q}$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde r-konveks oluşu ve (4.30) eşitsizliği kullanılırsa

$$\text{Ƕ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^{q}+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^{q}+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.99}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^{np}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{np}dt=\frac{1}{(np+1)2^{np+1}}, \tag{4.100}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{r}}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\frac{1}{r}}dt=\frac{r}{(r+1)2^{1+\frac{1}{r}}} \tag{4.101}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{r}}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{\frac{1}{r}}dt=\frac{r}{(r+1)}\left(\frac{2^{1+\frac{1}{r}}-1}{2^{1+\frac{1}{r}}}\right) \tag{4.102}$$

dur. (4.100), (4.101) ve (4.102) eşitlikleri (4.99) eşitsizliğinde yerlerine yazıldığında (4.97)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.19: Teorem 4.3.18'in şartları altında

$$\text{Ƕ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!\,2^{\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{r}{(qnr+r+1)2^{nq+1+\frac{1}{r}}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^{q}+\beta_{\frac{1}{2}}\left(qn+1,\frac{1}{r}+1\right)\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\beta_{\frac{1}{2}}\left(qn+1,\frac{1}{r}+1\right)\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^{q}+\frac{r}{(qnr+r+1)2^{nq+1+\frac{1}{r}}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \quad (4.103)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.92)'deki eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\text{Ʊ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^{nq}\left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{nq}\left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad (4.104)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.104) eşitsizliğinde $\left|f^{(\mathrm{n})}\right|^{q}$ fonksiyonun $[a,b]$ üzerinde r-konveks oluşu ve (4.30) eşitsizliği kullanılırsa

$$\text{Ʊ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!\,2^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^{nq}[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^{q}+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^{q}]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{nq}[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^{q}+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^{q}]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad (4.105)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^{nq+\frac{1}{r}}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{nq+\frac{1}{r}}dt=\frac{r}{(qnr+r+1)2^{nq+1+\frac{1}{r}}} \quad (4.106)$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{nq}(1-t)^{\frac{1}{r}}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{nq}t^{\frac{1}{r}}dt = \beta_{\frac{1}{2}}\left(qn+1,\frac{1}{r}+1\right) \qquad (4.107)$$

tür. (4.106) ve (4.107) eşitlikleri (4.105) eşitsizliğinde yerlerine yazıldığında (4.103)'teki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.20: Teorem 4.3.18'in şartları altında

$$\text{Ʊ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left(\frac{1}{2^{\mathrm{n}+1}(n+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{r}{(nr+r+1)2^{n+1+\frac{1}{r}}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q + \beta_{\frac{1}{2}}\left(n+1,\frac{1}{r}+1\right)\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\beta_{\frac{1}{2}}\left(n+1,\frac{1}{r}+1\right)\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q + \frac{r}{(nr+r+1)2^{n+1+\frac{1}{r}}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \qquad (4.108)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.92)'deki eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\text{Ʊ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^n dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^n\left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (4.109)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.109) eşitsizliğinde $\left|f^{(\mathrm{n})}\right|^q$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde r-konveks oluşu ve (4.30) eşitsizliği kullanılırsa

$$Ƕ_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\left[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n\left[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.110}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt=\frac{1}{2^{\mathrm{n}+1}(n+1)}$$

oluşu ve (4.95), (4.96) eşitlikleri (4.110) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (4.108)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.21: Teorem 4.3.18'in şartları altında

$$Ƕ_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left(\frac{1}{(np-p+2)2^{np-p+2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{r}{(2r+1)2^{2+\frac{1}{r}}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q+\frac{r}{(r+1)(2r+1)}\left(r-\frac{3r+1}{2^{2+\frac{1}{r}}}\right)\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\frac{r}{(r+1)(2r+1)}\left(r-\frac{3r+1}{2^{2+\frac{1}{r}}}\right)\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r}{(2r+1)2^{2+\frac{1}{r}}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.111}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.92)'deki eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\text{Hʋ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np-p+1}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{np-p+1}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left|f^{(\mathrm{n})}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (4.112)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.112) eşitsizliğinde $\left|f^{(\mathrm{n})}\right|^q$ fonksiyonunun r-konveks oluşu ve (4.30) eşitsizliği kullanılırsa

$$\text{Hʋ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{n!}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np-p+1}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{np-p+1}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left[t^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q+(1-t)^{\frac{1}{r}}\left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (4.113)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np-p+1}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{np-p+1}dt=\frac{1}{(np-p+2)2^{np-p+2}}, \qquad (4.114)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{1+\frac{1}{r}}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{1+\frac{1}{r}}dt=\frac{r}{(2r+1)2^{2+\frac{1}{r}}} \qquad (4.115)$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)^{\frac{1}{r}}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)t^{\frac{1}{r}}dt = \frac{r}{(r+1)(2r+1)}\left(r - \frac{3r+1}{2^{2+\frac{1}{r}}}\right) \qquad (4.116)$$

tür. (4.114), (4.115) ve (4.116) eşitlikleri (4.113) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (4.111)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.22: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu için $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ olmak üzere $f^{(\mathrm{n})}$, I°'nde var ve $a, b \in I,\ \ a < b$ için $f^{(\mathrm{n})}$ $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $|f^{(\mathrm{n})}|^q$ $[a, b]$ üzerinde r-konveks ise $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\text{Ʊ}_5 \leq \frac{(b-a)^{\mathrm{n}}}{2^{n+1}(n!)}\left(\frac{1}{np+1}\right)^{\frac{1}{p}} \times \left\{\left[\mathcal{L}_r\left(\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q, \left|f^{(\mathrm{n})}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left[\mathcal{L}_r\left(\left|f^{(\mathrm{n})}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \qquad (4.117)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\left|f^{(\mathrm{n})}\right|^q$ $[a, b]$ aralığında r-konveks olduğundan (2.15)'teki eşitsizlik yardımıyla

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left|f^{(\mathrm{n})}(ta + (1-t)b)\right|^q dt \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}_r\left(\left|f^{(\mathrm{n})}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f^{(\mathrm{n})}(b)\right|^q\right) \qquad (4.118)$$

ve

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left|f^{(\mathrm{n})}(ta + (1-t)b)\right|^q dt \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}_r\left(\left|f^{(\mathrm{n})}(a)\right|^q, \left|f^{(\mathrm{n})}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right) \qquad (4.119)$$

yazılır. (4.98) eşitsizliğinde (4.100) eşitliği ve (4.118), (4.119) eşitsizlikleri kullanılırsa (4.117)'deki eşitsizlik elde edilir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada konveks ve ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için Simpson tipinde; r-konveks fonksiyonlar için ise Hermite-Hadamard tipli, Ostrowski tipli ve Simpson tipinde integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca n. mertebeden diferensiyellenebilir r-konveks fonksiyonlar için de eşitsizlikler elde edilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar tez çalışmasında temel alınan lemmalar yardımıyla konveks fonksiyonların farklı sınıfları için yeni sonuçlar elde edebilirler. Ayrıca n. mertebeden diferensiyellenebilir r-konveks fonksiyonlar için literatürde mevcut olan başka lemmalar kullanılarak da yeni sonuçlar elde edilebilir. Dahası bu lemmalar koordinatlarda yeniden ifade edilerek koordinatlarda konveks fonksiyon sınıfları için eşitsizlikler yazılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Ch. Hermite, “Sur Deux Limites D’une Intégrale Définie”, Mathesis 3, 82, 1883.

[2] G. Hardy, J.E. Littlewood ve G. Pòlya, *Inequalities.* Cambridge, England: Cambridge University Press, 1952.

[3] E.F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities,* Berlin, Göttingen ve Heidelberg: Springer-Verlag, 1961.

[4] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*. Berlin, New York ve Heidelberg: Springer-Verlag, 1970.

[5] J.E. Pečarić, *Convex Functions: Inequalities.* Serbocroatian, Beograd, 1987.

[6] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić ve A.M. Fink, *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives.* Dordrecht, Boston ve London: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[7] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić ve A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*. Dordrecht, Boston ve London: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[8] B.G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities.* Amsterdam, The Netherlands: Elsevier B.V., 2005.

[9] C. Niculescu, L.E. Persson, *Convex Functions and Their Applications.* United States of America: Springer, 2006.

[10] S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce, “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications”, Victoria University: RGMIA Monographs, 2000.

[11] S.S. Dragomir ve T. M. Rassias, *Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical integration.* Melbourne, Athens: Springer, 2002.

[12] H. Anton, *Elementary Linear Algebra.* Jhon Wiley & Sons, Inc., 1994.

[13] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz.* Ankara: Gazi Kitabevi 2000.

[14] J.E. Pečarić, F. Proschan ve Y.L. Tong, *Convex Function, Partial Orderings and Statistical Applications.* Boston: Academic Press, Inc., 1992.

[15] A.W. Roberts ve D.E. Varberg, *Convex Functions.* New York ve London: Academic Press, 1973.

[16] A.G. Azpeitia, “Convex Functions and The Hadamard Inequality”, Rev. Colombiana Mat., vol. 28, pp. 7-12, 1994.

[17] H. Hudzik ve L. Maligranda, “Some Remarks on s-Convex Functions” Aequationes Math., vol. 48, pp. 100-111, 1994.

[18] B.Y. Xi ve F. Qi, “Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Extended s-Convex Functions and Applications to Means”. arXiv: 1406.5409v1.

[19] C.E.M. Pearce, J. Pečarić ve V. Šimić, “Stolarsky Means and Hadamard's Inequality”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 220, pp. 99-109, 1998.

[20] P.M. Gill ve C.E.M. Pearce, “Hadamard’s Inequality for r-Convex Functions”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 215, pp. 461-470, 1997.

[21] I.S. Gradshteyn ve I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products, 7th ed.* Elsevier Inc.: Academic Press, 2007.

[22] S.S. Dragomir, R.P. Agarwal ve N.S. Barnett, "Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities", Journal of Inequalities and Applications, 5: 103-165, 2000.

[23] R.K. Parmar ve K. Chopra, "Further Results on Generalized Incomplete Extended Beta Function", International Journal of Scientific and Research Publications, vol. 2, pp. 6, 2012.

[24] A. Ostrowski, "Uber Die Absolutabweichung Einer Differentienbaren Funktionen von Ihren Integralimittelwert", Comment. Math. Hel., vol. 10, pp. 226-227, 1938.

[25] P.J. Davis, ve P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*. New York: Academic Press, 1976.

[26] S.S. Dragomir ve S. Fitzpatrick, "The Hadamard's Inequality for s-Convex Functions in the Second Sense", Demonstratio Math., vol. 32, pp. 687-696, 1999.

[27] M. Avcı Ardıç, "Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları İçin İntegral Eşitsizlikler", Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, 2013.

[28] L. Chun ve F. Qi, "Inequalities of Simpson Type for Functions Whose Third Derivatives Are Extended s-Convex Functions and Applications to Means", Journal of Computational Analysis and Applications, vol. 19, pp. 555-569, 2015.

[29] N.P.N. Ngoc, N.V. Vinh, ve P.T.T. Hien, "Integral Inequalities of Hadamard Type for r-Convex Functions", International Matematical Forum, vol. 4, pp.1723-1728, 2009.

[30] M.W.N. Alomari, "Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s-Convex, Quasi-Convex and r-Convex Mappings and Applications", Doktora tezi, Kebangsaan Malaysia Üniversitesi, 2011.

[31] H. Kavurmacı, M. Avcı ve M.E. Özdemir, "New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Convex Functions with Applications", Journal of Inequalities and Applications, 2011: 86, 2011.

[32] E. Set, M.Z. Sarıkaya ve M.E. Özdemir, "Some Ostrowski's Type Inequalities for Functions Whose Second Derivatives are s-Convex in the Second Sense and Applications", Demonstratio Mathematica, 47, 2010.

[33] F. Qi ve L. Chun, "Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Functions Whose $3rd$ Derivatives Are s-Convex", Applied Mathematics, vol. 3, pp. 1680-1685, 2012.

[34] M.W.N. Alomari ve H. Sabir, "Two Inequalities of Simpson Type For $quasi$-Convex Functions and Applications", Applied Mathematics E-Notes, vol. 11, pp. 110-117, 2011.

[35] M.W. Alomari, "An Improvement Inequality of Simpson's Type for $quasi$-Convex Mappings with Applications", Arxiv: 1603.08055v1, 2016.

[36] M.A. Latif ve S.S. Dragomir, "On Hermite Hadamard Type Integral Inequalities for n-times Differentiable m- and (α, m)-Logarithmically Convex Functions", RGMIA Reserch Report Collection, vol. 17, Article 14, 2014.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Mustafa KARAGÖZLÜ

Doğum Yeri : Diyarbakır

Doğum Tarihi : 05.02.1990

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : m.karagozlu@hotmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Matematik	Adıyaman Üniversitesi	2019
Pedagojik Formasyon		Hacettepe Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik	Ankara Üniversitesi	2014
Lise	Fen Bilimleri	Mehmet Bayezıt (Y.D.A.)	2008

Yayınlar

[1] M. Karagözlü ve M. Avcı Ardıç, “On the Simpson Type Inequalities for s-Convex and Convex Functions”, 1^{st} International Conference on Mathematical and Related Sciences, Antalya, Türkiye, 2018.

[2] M. Karagözlü ve M. Avcı Ardıç, “New Integral Inequalities for r-Convex Functions”, 1^{st} International Conference on Mathematical and Related Sciences, Antalya, Türkiye, 2018.

[3] M. Karagözlü ve M.A. Ardıç, “Simpson Type Integral Inequalities for r-Convex Functions”, IFSCOM2018: 5^{th} Int. IFS and Contemporary Mathematics Conference, Kahramanmaraş, Türkiye, 2018.