T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ

YONCA YALÇİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2019

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ

Yonca YALÇİN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 12/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr.Üyesi Özlem AK GÜMÜŞ
Danışman

Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA
Üye

Prof. Dr. Murat KOCA
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ

Yonca YALÇİN

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr.Üyesi Özlem AK GÜMÜŞ
Yıl : 2019, Sayfa sayısı: 37+VI

Jüri : Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Dr. Öğr.Üyesi Özlem AK GÜMÜŞ
Dr. Öğr.Üyesi Bayram BALA

Bu tez çalışmasında, matematiksel biyoloji dalında büyük önem taşıyan zaman gecikmesi içeren bir dinamik sistemdeki Hopf çatallanma analizi incelenmiştir. Öncelikle çalışma için gerekli olan tanım ve kavramlar verilerek dinamik sistemler hakkında bazı bilgiler sunulmuştur. Daha sonra ele alınan dinamik sistemin tek pozitif denge noktasının kararlılığı incelenmiş, bu analize ek olarak, gecikme parametresi τ, çatallanma parametresi olarak alınarak sistemin belirli bir τ değerinde Hopf çatallanmaya sahip olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gecikmeli Diferansiyel Denklemler; Hopf Çatallanma, Dinamik Sistemler, Denge noktası.

ABSTRACT

MSc Thesis

HOPF BIFURCATION ANALYSIS OF A DELAYED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Yonca YALÇİN

Adiyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ
Year : 2019 , Number of pages: 37+VI

Jury : Asst. Prof. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ
Prof. Dr. Manaf MANAFLI
Asst. Prof. Dr. Bayram BALA

In this thesis study, Hopf bifurcation analysis in a dynamic system which includes time delay and which is very important in the mathematical biology branch was examined. First of all, some information about dynamic systems by giving the definitions and the terms which are necessary for the study was presented. After that, one positive equilibrium points stability of contextualised dynamic system was examined. In addition to this analysis delay parameter τ was assumed as bifurcation parameter and ıt was showed that the system has a Hopf bifurcation in the value of the spesific τ.

Key Words: Delayed differential equations; Hopf bifurcation, Dynamic systems, Equilibrium point.

BEYAN

"Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerde Hopf Çatallanma Analizi" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Yonca YALÇİN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla tezime yön veren sabrını ve bilgisini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Özlem AK GÜMÜŞ'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca hayatımın başlangıcından bu yana her zaman maddi ve manevi desteklerini hissettiğim kıymetli annem ve babama, her anımda yanımda olan değerli eşim Yusuf'a, bu süreçte motivasyon kaynağım olan sevgili kızım Serdem Jiyan'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

τ	: Gecikme parametresi
$x(t)$	: t zamandaki av popülasyonu
$y(t)$	: t zamandaki avcı popülasyonu
a	: Av popülasyonun maksimum büyüme oranı
$\frac{1}{b}$	: Avcının maksimum büyüme oranı
e	: Av olmadığında avcının ölüm oranı
$\frac{\partial f}{\partial x} = f'$	: f fonksiyonunun x 'e göre türev
x^*	: Denge noktası
$<,>$	: İç çarpım

1. GİRİŞ

İnsanlar karşılaştıkları doğa olaylarını açıklamak için özellikle son yüzyılda bilime dayanarak birçok çalışma yapmışlardır. Bu ise matematik, tıp, fizik, kimya, biyoloji gibi bilimlerin öne çıkmasını sağlamış ve zamanla bu bilimler bir noktada birleşerek kendi aralarında etkileşim içinde olan biyofizik, biyokimya, biyomatematik gibi alanları oluşturmuşlardır. Genel olarak uygulamalı matematik altında toplanan bu alanlar, matematiksel modelleme teknikleri kullanarak doğa olaylarını anlamaya ve bunları açıklamaya çalışmışlardır. Biyolojik olayların matematiksel modelleri fark ya da diferansiyel denklemler ile oluşturulur. Popülasyon dinamiğinde daha gerçekçi modeller, popülasyon dinamiğinin geçmiş durumlarını, yaşadıkları çevrenin popülasyon üzerindeki etkisini de içermelidir. Bunun yanı sıra bu alanda birçok çalışmada önemli olan "Sistemin bir parametresi değişirken sistemin dinamiği nasıl değişir?" sorusuna cevap vermektedir. Çatallanma teorisi; bu soruya cevap vermeye çalışır. Sistemde meydana gelen niteliksel değişimlere *çatallanma* ve bu değişimin meydana geldiği parametre değerine *çatallanma noktası* denir. Özellikle av-avcı sistemleri, konukçu-parazit sistemleri, hastalık modelleri, kimyasal tepkime gibi etkileşim içinde bulunan sistemlerde çatallanma parametresi gecikme değeri alınarak, sistemin yapısında meydana gelen değişimler gözlenmiştir. Parametre değiştikçe sistemin niteliksel yapısı da değişir, yani yeni denge noktaları ortaya çıkabildiği gibi denge noktalarının kararlılık yapıları da değişebilir. Dolayısıyla, daha gerçekçi bir yaklaşımla oluşturulan gecikmeli diferansiyel denklem sistemleri, Matematiksel Biyoloji'de önemli bir konuma sahiptir. Belirli bir girdi veya uyarıya biyolojik sistemin cevabı genellikle hemen olmaz; biraz gecikmeli olur. Örneğin, farmakokinetik modelde, ilacın dolaşım sistemine girmesinden önce bir gecikme olabilmesi durumu bir gecikmeli modelle tanımlanır. Yani uyarımı takiben, reaksiyon oluşumuna kadar sabit bir zaman varsa bu zaman "gecikme" olarak adlandırılır. Bu süreci inceleyen herhangi bir matematiksel model gecikmeli bir sürekli-popülasyon modeli ile verilebilir. Eğer uyarıma verilen tepki sabit zaman periyodundan sonra değil de, zamanın sürekli bir aralığı boyunca gerçekleşiyorsa "sürekli gecikmeli" olarak adlandırılır.

Biyoloji, tıp, kimya, fizik, mühendislik ve ekonomi gibi hem doğal hem de insan eli ile oluşturulmuş birçok süreç, zaman gecikmesi içerdiğinden, gecikmeli diferansiyel denklem teorisi günümüz için önemli bir çalışma konusudur. Zaman gecikmesine doğada verilebilecek en güzel örnek; ormanlık alanların ağaçlandırılmasıdır. Bir ağaç kesildikten sonra yerine dikilen ağacın, her anlamda olgunluğa erişmesi yirmi yıl gibi bir sürede gerçekleşmektedir. Hatta sekoya gibi bazı ağaç türlerinde bu süre daha fazla olabilmektedir.

Tez çalışmamız giriş bölümü ile beraber yedi bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde üzerinde çalıştığımız konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalar incelenmiştir. Üçüncü bölümde temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Dördüncü bölüm dinamik sistemler hakkında bilgi içerir. Beşinci bölümde Hopf çatallanma hakkında bilgi verilmiştir. Altıncı bölüm tezimizin orijinal kısmını oluşturmakta olup, gecikme etkisiyle av-avcı probleminin kararlılığı ve Hopf çatallanma analizi modifiye edilmiş Lotka-Voltera modeliyle incelenmiştir. Son bölümde çalışmamızın sonuçları ve öneriler sunulmuştur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Popülasyon dinamiklerinin matematiksel modellenmesi ile analiz edilmesi matematiksel biyoloji çalışmalarında önem arz eder. Modelleme için yaygın seçimlerden birini parametrelere bağlı diferansiyel denklemlerin kullanılması oluşturur. Çünkü biyolojiksel sistemleri anlamak için parametreye bağlı değişimlere bağlı olarak sistem davranışının incelenmesi gereklidir. Bazı durumlarda uyarıcıya tepki gecikmeli olabilir. Bu davranışı araştırmak için kurulan matematiksel modelde gecikmeli olarak bu dinamiği yansıtmalıdır. Gecikme etkisi ile sürekli sistemlerde parametreye bağlı değişimi incelemek için bir yöntem Hopf çatallanma analizidir. Burada gecikmeli sürekli popülasyon modellerinin Hopf çatallanma analizi ile ilgili incelediğimiz referans çalışmalarından kısaca bahsedeceğiz. Genel olarak bu çalışmalarda bu analize ek olarak, Poincaré normal formu ve merkez manifold teoremi kullanılarak çatallanmanın yönü ve kararlılığı araştırılmıştır. Hopf çatallanma yönünün belirlenmesi periyodik çözümlerin kararlılığının belirlenmesine yardım eder. Bizim çalışmamız sadece Hopf çatallanmanın oluşumunun belirlenmesi üzerine olup çalışmalardaki bilgiler bu konu dahilinde verilmiştir.

Yafia [1] bağışıklık sistemi ile tümör hücrelerinin rekabetini tanımlayan bir model analizi verilmiştir. Bu rekabeti tanımlayan model, bir gecikmeli diferansiyel denklem sistemleri tarafından yönetilir. Dinamiklerin zaman gecikmesi parametresine bağlı olarak sistemin kararlılık durumu hakkında bilgi verilmiş, kararlı durumunu değiştiren gecikmenin kritik bir değerinin varlığı araştırılmıştır. Hopf çatallanma teoremine dayanarak gecikme kritik değeri geçtiğinde Hopf çatallanma oluşumu gözlemlenmiştir.

Ranjith [2] yazarlar gecikmeli bir SIR salgın modeli çalışmasını ele alarak, hastalıksız ve hastalıklı denge noktasının lokal asimptotik kararlılığını çalıştılar. Bunun için hastalığın ortaya çıkmasını sağlayan bir eşik parametresi belirlediler. Ayrıca, Hopf çatallanma analizini de ele alarak çatallanma noktasını buldular.

Toaha [3] av denklemindeki gecikme zamanı ile bir av-avcı popülasyonun dinamikleri üzerinde, hasadın ve gecikme zamanının etkisi incelenmiştir. Denge noktalarının varlığı ve kararlılıkları araştırılmış ve gecikme zamanının Hopf çatallanma oluşturduğu gözlemlenmiştir.

Merdan [4] av popülasyonu üzerinde Allee etkisine maruz kalan sürekli zamanlı bir av-avcı popülasyonun denge çözümlerinin kararlılık analizini sunmuştur. Allee faktörünün sistem üzerindeki etkisi ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Çelik [5] gecikmeli bir diferansiyel denklem sistemini göz önüne aldılar. Bu sistemin lokal kararlılık analizi ve ilgili karakteristik denklemin analiz edilmesiyle Hopf çatallanmanın varlığını araştırdılar. Burada; Hopf çatallanma analizi için, gecikme parametresi bir çatallanma parametresi olarak seçilir.

Akkocaoğlu [6] genel bir lineer olmayan zaman gecikmesi içeren diferansiyel denklemde gecikme parametresini bir çatallanma parametresi olarak alarak Hopf çatallanma analizini sunarlar.

Kayan [7] Neumann sınır şartları ile gecikmeli reaksiyon-difüzyon denklem sisteminde Hopf çatallanmanın varlığını belirlemek için bir algoritma sundular. Gecikme parametresi kritik bir değeri geçerken Hopf çatallanma meydana geldiği sistem parametreleri üzerindeki koşullar belirlenir. Bu koşullar sistemin lineerleştirilmesine karşılık gelen karakteristik denklemin katsayılarına bağlıdır.

Merdan [8] Neumann sınır şartlarında zaman gecikmesini içeren Lengyel-Epstein reaksiyon-difüzyon modelinin çatallanması incelenmiştir. Gecikme parametresini çatallanma parametresi olarak seçerek Hopf çatallanma oluştuğu aynı zamanda Hopf çatallanmanın yönü ve kararlılığını araştırmışlardır.

Li [9] Beddington-DeAngelis fonksiyonel tepkisi ve avcı türlerinin seçici hasadı ile av-avcı modeli ele alınmıştır. Bu modelde, gençlerin olgunlaşma zamanlarını açıklamak için iki gecikme ortaya çıkmaktadır. Modelin dinamikleri lokal analiz ve Hopf çatallanma analizi açısından incelenmiştir.

Li [10] iki gecikme ile diferansiyel- fark denklemlerinin bir sınıfı incelenmiştir. İlk olarak, lineerleştirilmiş denkleme karşılık gelen karakteristik denklem analiz edilerek denklemin sıfır çözümünün lokal kararlılığı araştırılmıştır. Aynı zamanda gecikmelerden biri çatallanma parametresi seçilerek, denklemin Hopf çatallanma sergilediği gösterilmiştir.

Wei [11] iki gecikmeli basit bir sinir ağı modeli göz önüne alınmıştır. Modelin lineer kararlılığı, ilişkili karakteristik denklemi analiz edilerek incelenmiştir. Burada iki gecikmenin toplamı değiştiğinde ve kritik değerler dizisini geçtiğinde Hopf çatallanmanın oluştuğu bulunmuştur.

Ruan [12] genel fonksiyonların sıfırları üzerinde temel bir teorem oluşturmuşlar ve bilinen temel teoremler ile bazı üstel polinomların tüm sıfırlarının negatif gerçek parçalara sahip olduğu durumların kararlılığını araştırmak için bir ayrışma tekniği geliştirmişlerdir. Bu teknik, D-ayrıştırma ve L-ayrıştırma yöntemlerini birleştirir, böylece farklı denklemleri çoklu gecikmeler ile çalışmak için kullanılabilir. Bir skalar denkleminin kararlılığını ve çatallanma özelliğini, bileşik optik rezonatörleri modelleyen iki gecikmeyle incelemişlerdir.

Yan [13] gecikmeli bir Lotka-Volterra avcı-av sistemi ele alınmıştır. Bu çalışmada karakteristik denklemin köklerinin karmaşık düzlemindeki yerleri, sistemdeki salınımları elde etmek için parametrelerin doğrulaması gereken şartlar elde edilmiştir. Ayrıca Hopf çatallanmanın oluşumu incelenmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Öncelikle bahsedilen dinamik sistemleri daha iyi anlamak için bazı temel kavramlar üzerinde duracağız.

Tanım 3.1. $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0$ denklemini sağlayan ve hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \cdots, a_k$ sabitleri bulunabilirse, V vektör uzayındaki $v_1, v_2, \cdots, v_k$ vektörleri aralarında ***lineer bağımlıdır*** denir. Bu denklemin sağlanması sadece $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ olması ile mümkünse $v_1, v_2, \cdots, v_k$ vektörleri aralarında ***lineer*** bağımsızdır denir [25].

Tanım 3.2. V vektör uzayının her bir elemanı $v_1, v_2, \cdots, v_k$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade ediliyorsa $v_1, v_2, \cdots, v_k$ vektörler V'yi ***gerer*** denir. $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ olmak üzere S kümesi V'yi geriyor ya da başka bir ifadeyle V, S tarafından geriliyorsa $sp\{S\} = V$ ile gösterilir [25].

Tanım 3.3. Bir V vektör uzayının bir $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ alt kümesi

i. S,V yi gerer,

ii. S lineer bağımsızdır,

iki özelliğe sahipse V'nin bir ***bazı*** veya ***tabanı*** adını alır.

Uyarı: Eğer $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ kümesi bir V vektör uzayının bazı ise, bu kümedeki her bir vektör birbirinden ve sıfırdan farklıdır [25].

Tanım 3.4. Sıfırdan farklı bir V vektör uzayının bir bazındaki vektörlerin sayısına, V'nin ***boyutu*** denir. V'nin boyutu genellikle boyV biçiminde gösterilir [25].

Tanım 3.5. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesinin üstten sınırlı boş olmayan bir alt kümesi A olsun. A'nın üst sınırlarının en küçüğüne A'nın ***en küçük üst sınırı*** ya da A'nın ***supremumu*** denir ve supA ile gösterilir [30].

Tanım 3.6. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesinin alttan sınırlı boş olmayan bir alt kümesi A olsun. A'nın alt sınırlarının en büyüğüne A'nın ***infimumu*** denir ve infA ile gösterilir [30].

Tanım 3.7. V boş olmayan kümesi üzerinde vektörel toplama diyeceğimiz bir toplama ve skalerle çarpım tanımlanmış olsun. Simgesel olarak, vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemleri,

i) $x, y \in V$ için $x + y \in V$

ii) $r \in \mathbb{R}$, $x \in V$ için $rx \in V$

biçiminde tanımlı olsun. Eğer

[V1] $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$ olmalıdır.

[V2] $\forall x, y, z \in V$ için $(x+y)+z = x+(y+z)$

[V3] $\forall x \in V$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde bir $0 \in V$

[V4] $\forall x \in V$ için $x + y = y + x = 0$ olacak şekilde bir $y \in V$

[V5] $\forall x, y \in V$ ve $\forall c \in \mathbb{R}$ için $c(x+y) = cx + cy$

[V6] $\forall x \in V$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için $(c_1 + c_2)x = c_1 x + c_2 x$ olmalıdır.

[V7] $\forall x \in V$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için $(c_1 c_2)x = c_1(c_2 x)$ olmalıdır.

[V8] $\forall x \in V$ için $1.x = x$ olmalıdır.

koşulları sağlanıyorsa V kümesine $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı denir [26].

Tanım 3.8. K, gerçel ya da karmaşık sayılar cismini göstersin ve X kümesi K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. ∀x,y∈X ve ∀α∈K için

$N1)$ $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ (alt toplamsallık)

$N2)$ $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ (pozitif homojenlik)

$N3)$ $x \ne 0 \Rightarrow p(x) \ne 0$

özelliklere sahip bir $p : X \to \mathbb{R}$ yapısına X vektör uzayı üzerine bir ***norm*** denir [26].

Tanım 3.9. Bir X kümesi ile bir $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x, y, z \in X$ için,

$[M1]$ $d(x, y) \ge 0$

$[M2]$ $d(x, y) \le \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + \mathrm{d}(\mathrm{z}, \mathrm{y})$ (üçgen eşitsizliği)

$[M3]$ $d(x, y) = \mathrm{d}(\mathrm{y}, \mathrm{x})$ (simetrik)

$[M4]$ $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ (yani $d(x, \mathrm{x}) = 0$)

$[M5]\ x \neq y \Rightarrow d(x,\mathrm{y}) \neq 0$

aksiyomları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir ***metrik*** denir. Üzerinde metrik tanımlanmış bir kümeye bir ***metrik uzay*** denir.

Tanım 3.10. V bir vektör uzayı olsun. $x, y \in V$ için $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen

(i) $\forall x, y \in V$ için $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(ii) $\forall x, y, z \in V$ için $\langle x, y+\mathrm{z} \rangle = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle + \langle x, z \rangle$

(iii) $\forall x, y \in V,\ c \in \mathbb{R}$ için $\langle cx, y \rangle = c\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \langle x, \mathrm{cy} \rangle$

(iv) $\forall x \in V$ için $\langle x, \mathrm{x} \rangle \geq 0;\ \langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

koşulları sağlayan $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R},\ (x, y) \to \langle x, y \rangle$ fonksiyonuna V üzerinde bir ***iç çarpım*** V ' ye de ***iç çarpım uzayı*** denir. Bu iç çarpım uzayı $(V, \langle , \rangle)$ ile gösterilir [26].

Tanım 3.11. $\mathrm{X(t)} = (\mathrm{x}_1(t), \mathrm{x}_2(t), ..., x_n(t))^T, F = (\mathrm{f}_1, f_2, ..., f_n)^T$

ve $f_i = f_i(\mathrm{x}_1(t), \mathrm{x}_2(t), ..., x_n(t), \mathrm{t})$ olmak üzere $\dfrac{dX}{dt} = F(X(t), t)$ ifadesine birinci mertebeden sürekli sistem denir.

Tanım 3.12. (Tamlık Aksiyomu) Reel sayılar kümesinin üstten sınırlı, boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük üst sınırı vardır [30].

Tanım 3.13. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayı, normun indirgediği metriğe göre, tam ise bu normlu uzaya bir ***Banach Uzayı*** denir [29].

Tanım 3.14. $D \subset R^n$ açık bir küme $f : D \to R^m$ olmak üzere $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, $a \in D$ de türevlenebilen bir dönüşüm ise her $1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n$ için $\dfrac{\partial f_k(a)}{\partial x_i}$ kısmi türevleri vardır ve f ' in "a" noktasındaki Jacobian Matrisi

$$J_f(a)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dır. [17].

Tanım 3.15. p_j, $j= 1, 2, ..n$ sabit ve $L = D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_{n-1} D + p_1$ olmak üzere L operatörü verilsin. $Ly = f$ diferansiyel denklemi için,

i) $Ly = 0$' ın her çözümü $t \to \infty$ için sıfıra gidiyorsa, asimptotik kararlı;

ii) $Ly = 0$ ' ın her çözümü $t \to \infty$ için sınırlı ise kararlı;

iii) Kararlı değilse , kararsızdır;

denir. Aynı zamanda bir diferansiyel denklemin kararlılığını türeve bağlı olarak da verebiliriz. $\dfrac{dx}{dt} = f(x_t)$ denkleminin bir denge noktası x^* ve x^* noktasını içeren bir açık aralıkta $\dfrac{dx}{dt}$ sürekli olsun. Eğer $\dfrac{dx}{dt} < 0$ oluyorsa, o zaman x^* denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Eğer, $\dfrac{dx}{dt} > 0$ ise, o zaman x^* denge noktası kararsızdır [15].

Tanım 3.16. $f : R^m \times R \to R^m$ olmak üzere $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x_t)$ diferansiyel denklem sistemi verilsin. Eğer f fonksiyonu t bağımsız değişkenini içermiyorsa bu sistemlere ***otonom* sistem** denir. Aksi takdirde sisteme ***otonom olmayan sistem*** denir.

Tanım 3.17. a_i , $i = 1, 2, \cdots, n$ katsayılar, $g(t)$; sabit ya da t'nin (t : zaman) bir fonksiyonu ve $x = x(t)$ olmak üzere,

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = g(t) \qquad (*)$$

denklemine n mertebeli ***lineer diferansiyel denklem*** denir. Öte yandan a_i veya $g(t)$, x'in bir fonksiyonu veya x fonksiyonunun herhangi bir türevine bağlı ise (*)

denklemi ***lineer olmayan diferansiyel denklem*** olarak adlandırılır. (*) denklemi lineer ve $g(t)=0$ ise (*) denklemine ***homojen diferansiyel denklem*** denir. $f(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nx}{dt^n}, t)=0$ şeklinde yazılabilir [17].

Tanım 3.18. Birinci mertebeden $\frac{dx}{dt}=f(x_t)$ diferansiyel denkleminde $\frac{dx^*}{dt}=f(x^*)$ olacak şekilde x^* çözümüne birinci mertebeden diferansiyel denklemin ***denge noktası*** adı verilir [17].

Tanım 3.19. f fonksiyonu, $x=a$ noktasında türev değerleri mevcut olan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

serisine f fonksiyonunun Taylor seri acılımı ve

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

serisine f fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı denir [31].

4. DİNAMİK SİSTEMLER

Bir dinamik sistem kavramı, belirli bir sürecin genel bilimsel konseptinin matematiksel bir formülüzasyonudur. Çoğu fiziksel, kimyasal, biyolojik, ekolojik, ekonomik ve hatta sosyal sistemlerin gelecek ve geçmişteki durumları, onların gelişmelerine hükmeden yasaları bilerek (ve onların sundukları durumları) belirli bir kapsamda dinamik sistem yapısı tahmin edilebilir. Elde edilen bu yasalar zamanla değişmez. Böyle bir sistemin davranışı başlangıç şartlarına bağlı olarak (tamamen tanımlanarak) gözlemlenebilir. Bu nedenle dinamik sistem kavramı, mümkün olan durumların bir yasasını içerir [16].

Matematik ve Fizik'te, bir sistemin tüm olası durumlarının temsil edildiği uzaya ***faz uzayı*** denir. Yani, bir sistemin mümkün olan tüm durumları ***durum uzayı*** ya da ***faz uzayını*** oluşturur. Sistemin her olası durumuna karşılık faz uzayında bir tek nokta vardır. Örneğin bir sistemi açıklayan tüm değişkenleri, X kümesinin bazı noktaları ile karakterize edelim. Gerçekte $x \in X$ noktasını belirlemede, sadece sistemin şimdiki pozisyonunu tanımlamak değil, aynı zamanda onun evrimini (gelişimini de) belirlemek gerekir. Bir dinamik sistemin evrimi, bir dinamik sistemin iki tipi olan $T = Z$ fark zamanlı ya da $T = R$ sürekli-zaman olmak üzere $t \in T$ (T: sayı kümesi) zamanı ile sistemin durumundaki değişim anlamındadır. t zamanındaki sistemin durumu ile $t+1$ zamanındaki durum belirleyen fark zamanlı dinamik sistemler ekolojide ve ekonomide doğal bir şekilde ortaya çıkar.

Bilimin farklı branşları bize uygun ***durum (faz) uzayı*** sağlar. Mekanik sistemler için; faz uzayı genellikle, konum ve momentum değişkenlerinin tüm olası değerlerinden oluşur. Konum ve momentum değişkenlerinin zamana göre değişimini içeren bir fonksiyonunun çizimi bazen bir faz diyagramı olarak adlandırılır. Faz diyagramı sistemin girebileceği her durumu temsil eder ve diyagramın şekli, sistemin niteliklerini aydınlatır. Bununla beraber, bu terim genellikle fiziki bilimlerde kimyasal bir sistemin termodinamik fazlarının dengesini ve birbirlerine dönüşümünü, basıncın, sıcaklığın ve kompozisyonun bir fonksiyonu olarak gösteren bir diyagram için kullanılır.

Şimdi bazı basit terminolojileri tanımlayalım. Klasik mekanikte faz uzayının koordinatları genelleştirilmiş koordinatlar q_i ve onların konjuge eşlenikleri p_i' lerdir. Sistemin verilen herhangi bir zamandaki faz uzayı koordinatları sistemin tüm dinamik değişkenlerinden oluşmaktadır.

Ayrıca dinamik sistemlerde manifold kavramı önem arz eder. Bir n boyutlu manifold yerel olarak n boyutlu Öklid uzayına benzeyen bir topolojik uzaydır. Örneğin, 1 boyutlu manifold yerel olarak bir doğruyu, 2 boyutlu manifold yerel olarak bir düzlemi ve 3 boyutlu manifold ise yerel olarak 3 boyutlu uzayı andırır ve bu şekilde devam eder. 2 boyutlu manifolda ***yüzey*** de denir. Küre ve halka yüzeye örnek olarak verilebilir. Bir yüzeydeki her bir nokta topolojik olarak düzlemdeki bir açık kümeye eşdeğer olan bir açık kümenin içindedir.

Sistemin davranışı, bir (u,v) düzleminde $(u(\mathrm{t}),v(t))$ noktasının geometrik yeri ile tarif edilebilir. Bu biçimde diferansiyel denklem ile ilişkilendirilen (u,v) düzlemi **faz düzlemi** olarak adlandırılır. $(u(\mathrm{t}),v(t))$ parametrik çözüm eğrisine ***yörünge*** ve onun görüntüsüne de ***orbit*** veya ***iz*** denir. Bir yörünge ile orbit arasındaki fark, yörüngenin çözüm eğrisinin oryantasyonunu veren *t* parametresi ile donatılmış olmasıdır.

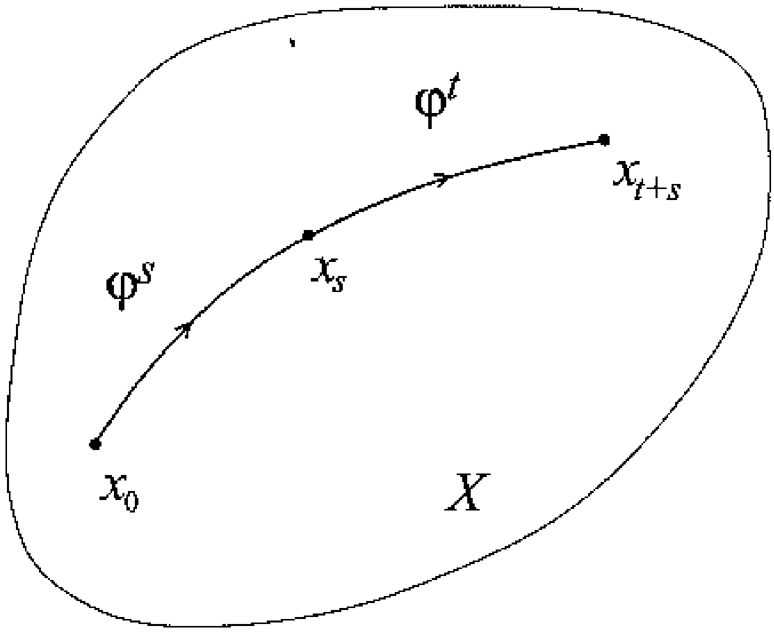
Bir dinamik sistemin esas bileşeni ***gelişim(evrim) bileşenidir***. X durum uzayında $t \in T$ için ϑ^t dönüşümünün belirlenmesi bu gelişimin belirlenmesinde en yaygın yoldur. $\vartheta^t ; t$ zamanda $x_t \in X$ durumuna $x_0 \in X$ başlangıç şartına göre bir dönüşümdür. Bu bileşen x_0 başlangıç şartına göre, t zamanda sistemin x_t durumunu belirler. Aynı zamanda; $\vartheta^t : X \to X$ için ϑ^t dönüşümü sıklıkla dinamik sistemin ***gelişim operatörü*** olarak adlandırılır. Sürekli-zaman durumunda evrim operatörlerinin $\{\vartheta^t\}_{t\in T}$ ailesi bir akım olarak tanımlanır.

Tanım 4.1.(Dinamik Sistem) T : zaman kümesi ve X : durum uzayı olmak üzere $\vartheta^t : X \to X$ için

(i) $\vartheta^o = id$ öyle ki $id : X$ üzerinde benzerlik (özdeşlik) dönüşümüdür. $\forall x \in X$ için $idx = x$ $(\vartheta^o x = x)$. Bu özellik sistemin kendiliğinden değişmez olduğunu ifade eder.

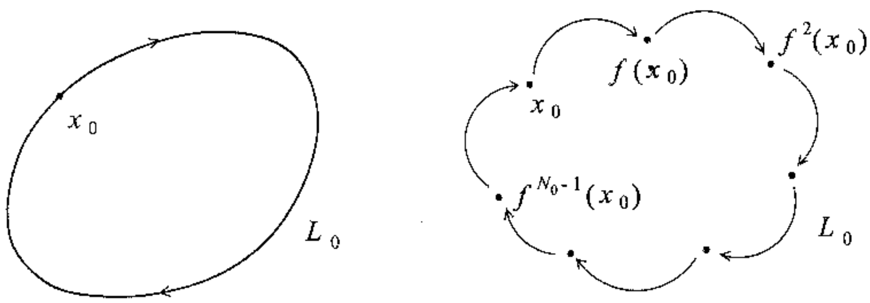
(ii) $\vartheta^{t+s} = \vartheta^t o \vartheta^s \quad (\vartheta^{t+s} = \vartheta^t(\vartheta^s x)) \ \ni \ t,s \in T \ \ ve \ \ \forall x \in X$

özelliklerine sahip bir dinamik sistem $\{T, X, \vartheta^t\}$ den oluşan üçlü sistemdir.



Şekil 4.1. Dinamik Sistem

Burada $Or(x_0) = \{x \in X : x = \vartheta^t x_0 \ , \ tüm \ \ t \in T\}$ orbitler durum uzayının elemanlarının bir değişimidir. $\vartheta^t x_0 = x_0 \Rightarrow x_0 \in X$ bir denge noktasıdır. Aynı zamanda $\forall x_0 \in L_0$, $\vartheta^{t+T_0} x_0 = \vartheta^t x_0$, T_0 , L_0 döngüsünün periyodudur. Döngü üzerinde bir x_0 noktasında bir sistemin evrimi başlarsa, T_0 birim zamandan sonra bu noktaya tekrar dönecektir. Bu sistem periyodik oskilasyon sunar. L_0 döngüsü sürekli zaman durumunda kapalı bir döngüdür.



Şekil 4.2. Kapalı Döngü

Faz portresi, bir dinamik sistemin davranışı üzerine birçok bilgi içerir. Faz portresine bakarak, sistemin $t \to \infty$ iken asimptotik durumu hakkında bilgi sahibi olabiliriz. Sistemin asimptotik kararlılığını belirlemede; daha ileri olarak (faz portresinden) değişmez küme tanımı kullanılır.

Tanım 4.2. (T, X, ϑ^t) kümesi değişmez $\Leftrightarrow x_0 \in S$, $S \subset X$, $\forall t$ için $\vartheta^t x_0 \in S$ olmalı ($\forall$t için $\vartheta^t S \subseteq S$)

Tanımdan açıktır ki $Or(x_0)$ orbitleri bir değişmez kümedir. ϑ^t evrim operatörünü $\{T, S, \psi^t\}$ değişmez kümesine kısıtlayabiliriz. $\psi^t : S \to S$ bir dönüşümdür.

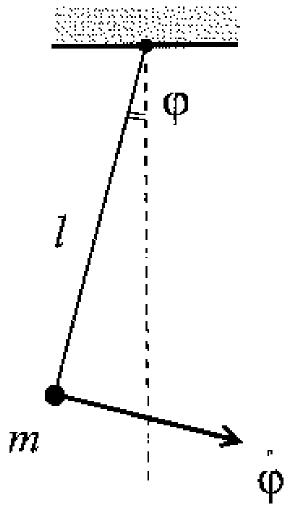
Tanım 4.3. S_0 Değişmez Kümesinin Kararlı $\Leftrightarrow$ Herhangi yeterince küçük derecede $S_0 \subset U$ komşuluğu için $S_0 \subset V$ komşuluğu vardır $\ni$ $\forall x \in V$ ve tüm $t > 0$ için $\vartheta^t_x \in U$ olmalıdır.

S_0 Değişmez Kümesinin Asimptotik Kararlı $\Leftrightarrow$ $S_0 \subset U_0$ bir komşuluğu vardır $\ni$ $\forall x \in U_0$ için $t \to \infty$ iken $\vartheta^t x \to S_0$ olmalıdır.

Bir dinamik sistemin kararlılığı, S_0 değişmez kümesinin kararlı olmasına bağlıdır. Yani, S_0 kümesinin yakındaki orbitleri çekmesi gerekir.

Aşağıdaki örnekler farklı bilim dallarında durum uzayını belirleyen durum vektörlerinin seçimi ile ilgilidir.

ÖRNEK 4.1. (**Sarkaç Örneği**) Bir ideal sarkaç (pendulum) durumu, tamamen dik pozisyondan onun φ açısal $(mod\ 2\pi)$ değişimi ile karakterize edilir ve υ ise onun açısal hızıdır. Burada, S^1; açı ile parametrize edilen birim çember ve R^1; mümkün olan bütün hızların kümesine karşılık gelen reel eksen olmak üzere $X = S^1 \times R^1$ durum uzayı kümesi R^3 te türevlenebilir iki boyutlu manifold olarak gözlemlenir.



Şekil 4.3. Klasik Sarkaç Örneği

ÖRNEK 4.2. (**Genel Mekanik Sistem**) Klasik mekanikte, bağımsız s derecesi ile yalıtılmış bir sistem durumu $(q_1, q_2, \cdots, q_s, p_1, p_2, \cdots, p_s)^T$ $2s$ boyutlu reel vektör ile karakterize edilir. Burada, q_i; genelleştirilmiş koordinatlar ve p_i; genelleştirilmiş momentumlardır. $X = R^{2s}$ ve k koordinatları periyodikse $X = S^k \times R^{2s-k}$ yazılabilir. Bir sarkaç önceki sarkaç örneğinde $s = k = 1$, $q_1 = v$ ve $p_1 = \dot{v}$ olmak üzere durum vektörü $(v, \dot{v})^T$ vektörü ile karakterize edilebilir.

ÖRNEK 4.3. (**Quantum Sistem**) Quantum mekaniğinde bir sistem durumu $\psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in C^2$ vektörü ile belirlenebilir. Burada; a_i: genlik $i = 1, 2$ (kompleks sayılardır) ve $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ şartını sağlamak üzere $p_i = |a_i|^2$, $i = 1, 2$ durum vektörü değişkenleridir.

ÖRNEK 4.4. (**Kimyasal Reaktör**) İyi bilinen izotermik kimyasal reaktör durumu, n tepkili kimyasal reaktörlerin konsantrasyon hacmini $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ belirterek tanımlar. Açık bir şekilde c_i konsantrasyonları pozitif olmalıdır. Bu nedenle

$$X = \{c : c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \in R^n \ , \ c_i \geq 0\}$$

dir. Noktadan noktaya konsantrasyon değişiyorsa, reaktör durumu (fiziksel olarak tepki bobini) $c_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ olmak üzere reaksiyon (reaktif) dağılımı tarafından tanımlanır, ve reaktör içi x noktası yakınlarında maddenin lokal konsantrasyonunu karakterize eder. Bu nedenle durum uzayı X, $c(x)$ vektör değerli fonksiyonlarından oluşan bir fonksiyon uzayı olup ve $c(x)$ türevlenebilir ve sınırlı şartlara sahiptir.

ÖRNEK 4.5. (**Ekolojik Sistem**) Önceki örneklere benzer şekilde; Ω belli bir alan içinde negatif olmayan bileşenler ile ekolojik ortaklık durumu, $N=(N_1,N_2,\cdots,N_n)^T\in R^n$ vektörü tarafından tanımlanabilir. N_i , $i.$ türün sayısının yoğunluğu (av ve avcı gibi) olmak üzere $N(x)=(N_1(x),N_2(x),\cdots,N_n(x))^T$, $x\in\Omega$ vektör fonksiyonu, uzaysal dağılımına bağlı olarak dinamiklerin yeterli bir tanımı için gereklidir.

Kimya ve ekolojideki ve hatta m ekanikteki örneklerden “durum uzayı” R^n in bir vektör uzayıdır ya da bu uzayda bir alt manifold (hiperyüzey) dir. Euclid normu $x,y\in R^n$ noktaları ile parametre edilen iki durum arasındaki mesafeyi ölçmek için kullanılabilir. Yani; $\langle .\,,.\rangle$, R^n de standart skaler çarpım olmak üzere

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

dir. Ayrıca $\langle x\ ,\ y\rangle=x^Ty=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ ile tanımlanır. Bir manifold üzerindeki iki kapalı nokta arasındaki mesafe, manifold içindeki bu noktalarla bağlantılı "bir eğrinin minimal uzunluğu olarak" ölçülebilir. Benzer şekilde kuantum sistem örneğinde ψ , ϑ iki durum arasındaki mesafesi C^n de standart skaler çarpım kullanarak tanımlanabilir.

$$\langle\psi,\vartheta\rangle=\bar{\psi}^T\vartheta=\sum_{i=1}^{n}\bar{\psi}_i\vartheta_i\ \ ,\ n=2\ \ ile\ \ni\ \langle\psi,\psi\rangle=\langle\vartheta,\vartheta\rangle=1.$$

"Durum uzayı” R bir fonksiyon uzayı olduğu zaman verilen fonksiyonların diferansiyellenebilirliğine bağlı olarak, mümkün mesafenin bir çeşidi vardır. Örnek için biz $\Omega\in R^m$ kapalı sınırlı bölgede $u(x)$ ve $v(x)$ iki sürekli reel vektör değerli fonksiyonlar arasında

$$\rho(u,v)=\|u-v\|=\max_{i=1,2,\cdots,n}\sup_{\Omega}|u_i(x)-v_i(x)|$$

olacak şekilde bir mesafe tanımlayabiliriz. Son olarak daha önceki örnekte $w,\theta\in\Omega_2$ iki dizi arasındaki mesafe $\rho(w,\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{w_k\theta_k}2^{-|k|}$ ile ölçülebilir. Burada;

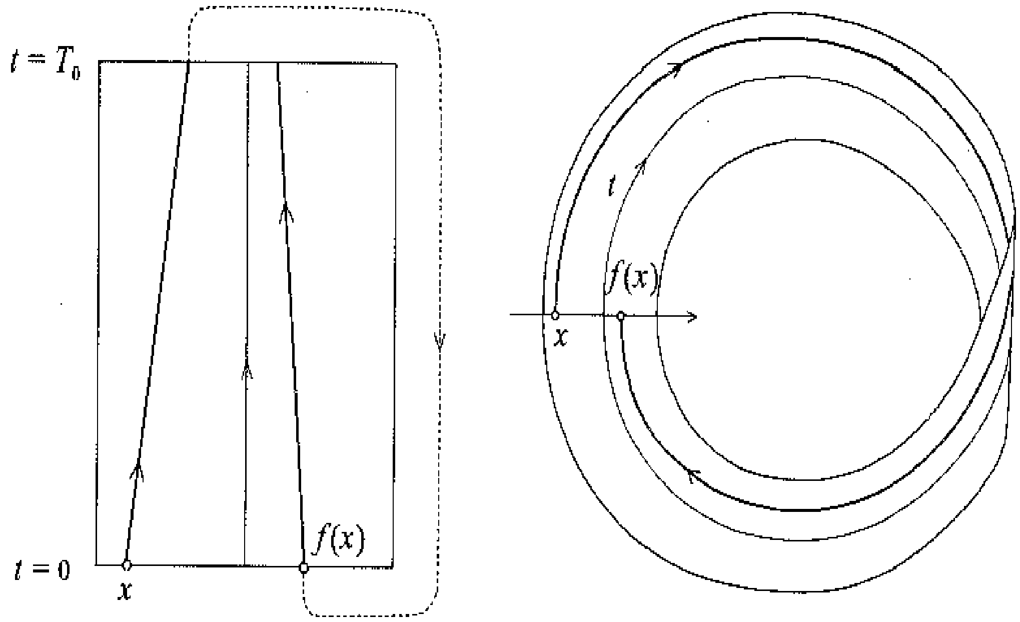
$$\delta_{w_k\theta_k}=\begin{cases}0 \ , \ w_k=\theta_k\\ 1 \ , \ w_k\neq\theta_k\end{cases}$$

dir. Öncelikle mesafeler kullanılarak tanımlanan X durum uzayı tamamlayıcı bir metrik uzaydır. X, uzayının tabanının boyutuna göre dinamik sistem ya sonlu ya da sonsuz olarak adlandırılır.

4.1. Diferansiyel Denklemlerin Dinamiği

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ vektör değerli fonksiyonun diferansiyellenebilir olduğunu ve $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ koordinatları ile bir sistemin durum uzayının $X=\mathbb{R}^n$ olduğunu varsayalım. Sistemin evrim yasası sıklıkla $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ koordinatlarının fonksiyonu olarak $\dot{x}_i=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ i=1,2,\cdots n;\ \dot{x}_i$ hız terimleri bakımından açık şekilde verilir. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ve $x=x(t,x_0),\ x\in R^n$ olmak üzere, $U\subset\mathbb{R}^n$ açık bölgede diferansiyellenebilir olan tek bir $\dot{x}=f(x)$ fonksiyonu vardır.

Sonuca bağlı dönüşümler, orijinal sistemden daha düşük boyutlu uzayda tanımlanır. $f=\vartheta^{T_0}$ haritası, (R^1,X,ϑ^t) orbitleri boyunca değişen bir T_0 değişim dönüşümüdür. Denge noktası (R^1,X,ϑ^t) den ayrı bir yerde konumlandırılmıştır.



Şekil 4.4. Diferansiyel Denklemlerin Dinamiği

Vektör alanı içinde tüm vektörler diferansiyellenebilirdir. Varsayalım ki bu denklem L_0 periyodik orbite sahip olsun. $x_0 \in L_0$ ve bu noktada bir Σ kesiti tanımlayalım. Σ kesiti sıfır olmayan bir L_0'ı kesen $n-1$ boyutlu bir hiperyüzeydir. Σ boyutu, durum uzayının boyutundan 1 birim daha azdır. $codm\Sigma =$ 1 dir. (codmension: vektör uzayındaki bir alt manifoldundaki yapılardır.) V, n boyutlu vektör uzayı, W, $n-1$boyutlu vektör uzay olmak üzere $W \subset V$' dir. Yani,

$\Sigma \subset R^n \Rightarrow d\imath m\Sigma = n-1 \;\; ve \;\; d\imath m(durum\ uzay\imath) \;=\; n\ ve\ cod\imath m\Sigma = \; 1$

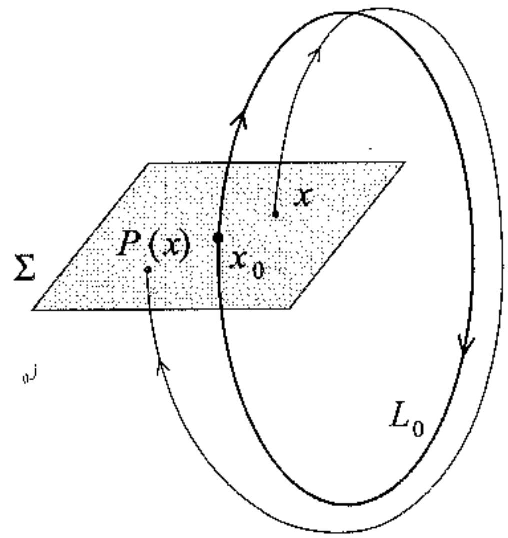
$\Sigma = \{x \in R^n \;\;,\;\; g(x) = 0\} \quad \ni \quad g : R^n \to R^1 \quad g(x_0) = 0$

dır. Burada $cod\imath mW \;=\; d\imath mV - d\imath mW$ olarak ifade edilir.

Bir sıfır olmayan kesişen açı (transversality) x_0' da L_0 ortogonal olmak üzere

$$\langle \nabla g(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0 \ni \nabla g(x) = \left(\frac{\partial g(x_1)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x_2)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g(x_n)}{\partial x_n} \right)^T$$

geçerlidir. Burada $g(x) =< f(x_0), x - x_0 >$ olarak tanımlanır.



Şekil 4.5. Ortogonal Hiperdüzlem

Σ ' ın en basit seçimi x_0 ' da L_0 döngüsüne ortogonal bir hiperdüzlemdir. Böyle kesitler, lineer fonksiyonların sıfır seviyesindeki kümeler ile verilir.

Şimdi L_0 yakınlarında bir yörünge göz önüne alalım. Kendi kendine dönen bir döngü, bir yörüngedir ki Σ üzerinde bir noktada başlar ve aynı $x_0 \in \Sigma$ noktasına geri döner. Çözümler onların başlangıç noktasına düzgün bir şekilde bağlı olduğu için $x \in \Sigma$ noktasında başlayan bir orbit $\bar{x} \in \Sigma$ (x_0 ' a yakın bulunan) noktasında geri döner. Dahası, yakındaki orbitler Σ ile belli bir açı ile kesişecektir. Bu nedenle $p:\Sigma \to \Sigma$, $x \to \bar{x} = p(x)$ ile yapılandırılır.

Parametre değişimi altında topolojik olarak denk olmayan faz portrelerinin ortaya çıkmasına **çatallanma** denir. Çatallanma teorisi, diferansiyel denklemlerin çözümler ailesinin niteliksel ya da topolojik yapısında meydana gelen değişimlerin incelenmesidir. Dinamik sistemler incelendiğinde, çatallanmanın parametre değerindeki değişim sonucu ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Aynı zamanda parametre değerindeki bu değişimler sistemin davranışında ani niteliksel veya topolojik değişmelere neden olmaktadır.

Bir diferansiyel denklemde, bir parametrenin değişimine izin verilirse, sistemin dinamikliği değişir. Bir denge noktası kararsız olabilir ve böylece periyodik bir çözüm gözükebilir. Ya da yeni bir kararlı denge noktası önceki denge noktasını kararsız yaparak ortaya çıkabilir. Oluşan bu değişimin parametresi çatallanma parametresidir.

5. DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNDE HOPF ÇATALLANMA

İki veya daha fazla denklem içeren diferansiyel denklemlerde oluşan bu çatallanma " Hopf Çatallanma " olarak bilinir. Bu çatallanma Alman Matematikçi Heinz. Hopf (1894-1971), Rus Matematikçi Alexandır A.Andronov (1901-1952) ve Fransız Matematikçi Jules Henri Poincare tarafından sunulan teoriye katkılarından dolayı Poincare – Andronov – Hopf çatallanma olarak ifade edilir.

Aynı zamanda Marsden ve Mc Cracken 1976 yüksek boyutlu Hopf çatallanma teoremini sunmuşlardır. Bu çatallanma teoremi, periyodik çözümlerin varlığı için yeterli şartları ifade eder. Bir parametre değişirken, bir sistemin dinamiği kararlı spiralden kararsız spiralin merkezine ya da tam tersi şekilde değişir**.** Yani, lineerleştirilmiş sistemin öz değerleri, negatif reel kısımdan sıfır reel kısma ve oradan pozitif reel kısma değişir. Bu şartlar altında periyodik çözüm vardır.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,r) \text{ ve } \frac{dy}{dt} = g(x,y,r)$$

ile verilen otonom diferansiyel denkleminin bir sistemini ele alalım. $f\, ve\, g, r$ çatallanma parametresine bağlıdır. Varsayalım ki yukarıdaki sistemin $(\bar{x}(r), \bar{y}(r))$ bir dengenin var olduğunu ve bu dengede değerlendirilen jakobian matrisinin öz değerleri $\alpha(r) \pm i\beta(r)$ olduğunu göz önüne alalım. Ek olarak $r = r^*$ 'da kararlılıkta bir değişim olduğunu $(\alpha(r^*) = 0 \; olmak\, üzere)$ varsayalım. r'nin r^* yakın değerleri için $\alpha(r) > 0$ ise $(\ni \beta^*(r) \neq 0), r; r^*$ boyunca geçerken kararlı bir spiralden kararsız bir spirale değişir. Hopf çatallanma teoremi R^n de denge noktasının herhangi bir komşuluğu için $r = r^*$ yakınında periyodik bir orbitin var olduğunu söyler. 2 boyutlu homojen olmayan başka bir sistemi

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(r)x + \beta(r)y = f(x,y,r)$$
$$\frac{dy}{dt} = -\beta(r)x + \alpha(r)y = g(x,y,r)$$

göz önüne alalım. Sistemin Jacobian matrisi

$$j(r)=\begin{pmatrix}\alpha(r) & \beta(r)\\ -\beta(r) & \alpha(r)\end{pmatrix}$$

olmak üzere $r=0'$ da $j(0)$ matrisi için $\lambda_{1,2}=\mp\beta(0)i$ olmak üzere 2 kök vardır. Bu sistemin subcritical ve supercritical olup olmadığını belirlemek için yöntemler vardır. Burada

$$c=\left(f_{xxx}+f_{xyy}+g_{xxy}+g_{yyy}\right)+\frac{1}{\beta(0)}\left[-f_{xy}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)+g(x,y)(g_{xx}+g_{yy})+f_{xx}g_{xx}-f_{yy}g_{yy}\right]$$

$\frac{dx}{dr}>0$ *olmak üzere;*

1. $c<0\Rightarrow r<0\Rightarrow$ *orijin kararlı spiral,*

   $r>0\Rightarrow$ *kararlı periyodik çözüm ve orijin kararsız* (sup*ercritical çatallanma*),

2. $c>0\Rightarrow r<0\Rightarrow$ *kararsız periyodik çözüm ve orijin kararlı,*

   $r>0\Rightarrow$ *orijin kararsız* (*subcritical çatallanma*),

3. $c=0\Rightarrow$ *test sonuç vermez.*

Teorem 5.1. (Hopf Çatallanma Teoremi) : J(r), |r| yeterince küçük değerleri için doğru ve $\alpha(r)\mp i\beta(r)$ öz değerler $\alpha(0)=0$, $\beta(0)\neq 0$ *ve* $(0,0)$ bir denge noktası olsun. f ve g 3. mertebeden türevlere sahip olsun. Buna göre *transversal* şartı $\frac{d\alpha}{dr}|_{r=0}\neq 0$ olsun. O zaman R^2 ‘de orijini içeren herhangi U açık kümesinde $(r_0>0)$ bir $\bar{r}$ değeri $(|\bar{r}|<r_0)$ vardır. Diferansiyel denklem sistemi $r=\bar{r}$ için U’ da periyodik çözümlere sahiptir. $\left(T=\frac{2\pi}{\beta(0)}\ \textit{periyot yaklaşımı ile}\right)$ Sistem $\bar{r}=0$ tamamen imajiner kök verir.

Aşağıdaki örnek Hopf çatallanma için çatallanma değerinin bulunması ile ilgilidir.

ÖRNEK 5.1. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=rx-y\\ \frac{dy}{dt}&=x+ry\end{aligned}\right\}$ sistemin hopf çatallanma şartlarını sağlar.

ÇÖZÜM : (0,0) bir denge noktasıdır. Bu noktada değerlendirilen Jacobian matrisi

$$J|_{(0,0)}=\begin{pmatrix}r & -1\\ 1 & r\end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $iz\, j = 2r$ ve $\det j = r^2 + 1$ olup $\lambda^2 - 2r\lambda + (r^2+1) = 0$ karakteristik denklem yardımıyla öz değerler $\lambda_{1,2} = r \mp i$ olarak bulunur.

$\alpha(r) = r$, $\alpha(0) = 0$, $\beta(r) = 1$, $\beta(0) \neq 0$ ve $\dfrac{d\alpha}{dr} = 1 \neq 0$ olmak üzere

$r^* = r = 0$ *çatallanma değeridir.* O halde

$r < 0 \Rightarrow Orijin\, kararlı,$
$r = 0 \Rightarrow Orijin\, bir\, merkezdir,$
$r > 0 \Rightarrow Orijin\, kararsız$

dır. Sistemin (0,0) denge noktası kararlı durumdan kararsız duruma değişir.

6. BULGULAR ve TARTIŞMA

6.1 Gecikme Etkisiyle Av-Avcı Probleminin Kararlılığı ve Hopf Çatallanma Analizi

Tezin bu bölümünde araştırmalarımız sonucunda elde ettiğimiz sonuçları sunacağız. Bu bölüm; gecikme etkisiyle sürekli popülasyon modelinin dinamik davranışının bir analizini sunar. Gecikme zamanı olarak bahsedilen durum; popülasyonun değişim oranının sadece şimdiki popülasyona değil, aynı zamanda geçmişteki popülasyona da bağlı olmasını ifade eder. Sürekli durumu ifade eden diferansiyel denklemler ya da gecikmeli diferansiyel denklemler ile daha geniş bilgi edinmek için [1,2,4,5] referanslarına bakabilirsiniz. Lotka-Volterra modelleri, ilk sürekli av-avcı popülasyon modellerinden biri olmakla birlikte, günümüzde popülasyon modellerinin dinamik çalışmalarında sıklıkla kullanılan temel formlardan biridir [27,28]. Çoğu yazar popülasyon modellerinin kararlılığını ve Hopf-Çatallanma analizini çalıştılar [1-3,4-8,9-13]. Hopf çatallanma analizi sürekli sistemlerde değişen parametre ile birlikte sistemin topolojik yapısındaki meydana gelen değişikliğin araştırılmasıyla ilgilidir [16,17,18,19,20].

Gecikme etkisi ile modifiye edilmiş bir Lotka –Volterra modelini

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= ax(t)(1-x(t)) - x(t-\tau)y(t-\tau) \\
\frac{dy(t)}{dt} &= \frac{1}{b}x(t)y(t) - ey(t)
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

ele alalım. Burada tüm parametreler pozitif olup, a; av popülasyonun maksimum büyüme oranı, $\frac{1}{b}$ avcının maksimum büyüme oranı, e; av olmadığında avcının ölüm oranıdır. *x(t);* t zamandaki av popülasyonunu, *y(t)*; t zamandaki avcı popülasyonunu verir. τ ise gecikme parametresidir.

Tanım (3.18) de denge noktası tanımını göz önüne alalım. (6.1) sisteminin denge noktalarını, $\frac{dx}{dt}=0$ ve $\frac{dy}{dt}=0$ dan hareket ederek $(0,0)$, $(1,0)$ *ve* $(be,\mathrm{a}-\mathrm{abe})$ olarak buluruz. Biz analizlerimizi av ve avcı popülasyonunun birlikte var olduğu pozitif $(be,\mathrm{a}-\mathrm{abe})$ denge noktası için yapacağız.

(6.1) sisteminin bir *(x,y)* noktasında lineerleştirirsek

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=(a-2ax)u-yu(t-\tau)-x\vartheta(t-\tau)\\ \frac{d\vartheta}{dt}&=(\frac{1}{b}y)u+(\frac{1}{b}x-e)\vartheta\end{aligned} \tag{6.2}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi farklı bir formda

$$\begin{bmatrix}\frac{du}{dt}\\ \frac{d\vartheta}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-2ax & 0\\ \frac{1}{b}y & \frac{1}{b}x-e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \vartheta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-y & -x\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(t-\tau)\\ \vartheta(t-\tau)\end{bmatrix} \tag{6.3}$$

yazabiliriz. Burada

$$\det\begin{bmatrix}a-2ax-ye^{-\tau\lambda}-\lambda & 0\\ \frac{1}{b}y & \frac{1}{b}x-e-\lambda\end{bmatrix}=0 \tag{6.4}$$

yardımıyla sistemin karakteristik denklemini

$$\lambda^2+A_1\lambda+A_2+e^{-\lambda\tau}(B_1\lambda+B_2)=0 \tag{6.5}$$

olarak elde ederiz. Burada katsayılar

$$\begin{aligned} A_1 &= -a + 2ax + e - \frac{x}{b} \\ A_2 &= -ae + 2axe + \frac{ax}{b} - \frac{2ax^2}{b} \\ B_1 &= y \\ B_2 &= ey \end{aligned} \tag{6.6}$$

ile verilir.

Teorem 6.1: $\tau = 0$ durumunda, $A_1 = 2abe - a$, $A_2 = 0$, $B_1 = a - abe$, $B_2 = e(a - abe)$ olmak üzere, $A_1 + B_1 > 0$ *ve* $A_2 + B_2 > 0$ ise E_2 denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat: (6.5) denkleminde $\tau = 0$ durumunu göz önüne alırsak;

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 + B_1\lambda + B_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + (A_1 + B_1)\lambda + A_2 + B_2 = 0 \tag{6.7}$$

elde ederiz. $E_2 = (be,\ a - abe)$ denge noktasında değerlendirilen katsayılar

$$\begin{aligned} A_1 &= 2abe - a \\ A_2 &= 0 \\ B_1 &= a - abe \\ B_2 &= ae - abe^2 \qquad \Rightarrow B_2 = e(a - abe) \end{aligned} \tag{6.8}$$

ile belirli katsayı toplamları hesaplanırsa

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= abe \\ A_2 + B_2 &= ea(1 - be). \end{aligned} \tag{6.9}$$

ifadelerine ulaşırız. Routh-Hurwitz (Bknz. [21-23]) kriterinden (6.7) denkleminde $A_1 + B_1 > 0$ *ve* $A_2 + B_2 > 0$ ise (6.7) denkleminin tüm kökleri negatif reel kısım ile kompleks eşlenik ya da negatif reel sayılardır. O halde, E_2 lokal asimptotik kararlıdır [2-3].

Teorem 6.2: $\tau > 0$ durumunda, $A_1 = 2abe - a$, $A_2 = 0$, $B_1 = a - abe$, $B_2 = e(a - abe)$ olmak üzere $A_1^2 - 2A_2 - B_1^2 > 0$ *ve* $A_2^2 - B_2^2 > 0$ ise E_2 asimptotik kararlıdır.

İspat: $\tau > 0$ durumunu göz önüne alırsak; (3.7)'den $\lambda = iw$ için

$$-w^2 + A_1\,wi + A_2 + (B_1\,wi + B_2)[\text{coswt} - \text{isinwt}] = 0 \tag{6.10}$$

elde ederiz. Bu denklemi

$$\begin{aligned} w^2 - A_2 &= B_1 w \sin wt + B_2 w \cos wt \\ -A_1 w &= -B_2 \sin wt + B_1 w \cos wt \end{aligned} \tag{6.11}$$

yazarsak biz; denk olarak

$$w^4 + (A_1^2 - 2A_2 - B_1^2)\,w^2 + (\text{A}_2^2 - B_2^2) = 0 \tag{6.12}$$

denklemine ulaşırız. Eğer $A_1^2 - 2A_2 - B_1^2 > 0$ *ve* $\text{A}_2^2 - B_2^2 > 0$ ise (6.7) denkleminin öz değerlerinin reel kısmı negatif olup, (6.7) denkleminin iw şeklinde köke sahip olacak şekilde bir w çözümü bulunamaz. Dolayısıyla (6.7) denkleminin $\tau > 0$ için öz değerlerinin tümünün reel kısmı negatiftir [2-3].

Remark 6.3. Tüm $\tau \geq 0$'lar ve (6.8) ile verilen değerler için $A_1 + B_1 > 0$, $A_2 + B_2 > 0$, $A_1^2 - 2A_2 - B_1^2 > 0$ ve $A_2^2 - B_2^2 > 0$ sağlanıyorsa E_2 asimptotik kararlıdır.

Remark 6.4. Tüm $\tau \geq 0$'lar ve (6.8) ile verilen değerler için $A_1^2 - 2A_2 - B_1^2$ veya $A_2^2 - B_2^2$ ifadelerinden herhangi biri negatifse (6.7)'yi sağlayan tek bir tamamen imajiner kök vardır. ($\mp i\,w_0$).

Teorem 6.5. $A_1^2 - 2A_2 - B_1^2 > 0$ ve $A_2^2 - B_2^2 < 0$ ise $\tau = \tau_0$'da Hopf çatallanma mevcuttur.

İspat: (6.11)'den w_0 ' a karşılık gelen τ_k 'lar elde edilebilir. Böylece,

$$\tau_k = \frac{1}{w_0}\arccos\left[\frac{(B_2 - A_1B_1)w^2 - A_2B_2}{B_1^2w^2 + B_2^2}\right] + \frac{2k\pi}{w_0} \quad , \quad k = 0,1,2,\ ... \qquad (6.13)$$

elde ederiz. $\tau = 0$ için E_2 kararlıdır; ve eğer $\left.\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{dt}\right|_{\lambda = i\,w_0} > 0$ ise $\tau < \tau_0$ *için* E_2 noktası kararlı kalır. (6.5) denklemi τ 'ya göre diferansiyellenirse, biz

$$\frac{d\lambda}{d\tau}\left[2\lambda + A_1 + B_1e^{-\lambda\tau} - (B_1\lambda + B_2)\tau e^{-\lambda\tau}\right] = \lambda(B_1\lambda + B_2)e^{-\lambda\tau} \qquad (6.14)$$

elde ederiz. Gerekli düzenlemeler ile

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + A_1 + B_1e^{-\lambda\tau} - (B_1\lambda + B_2)\tau e^{-\lambda\tau}}{\lambda(B_1\lambda + B_2)e^{-\lambda\tau}}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + A_1}{\lambda(B_1\lambda + B_2)e^{-\lambda\tau}} + \frac{B_1}{\lambda(B_1\lambda + B_2)} - \frac{\tau}{\lambda}$$

(6.15) ifadesine ulaşırız. $\mathrm{Re}\left.\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right|_{\lambda = i\,w_0} = \left.\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\tau}\right|_{\lambda = i\,w_0}$ olduğundan ve (6.5)'den

$e^{-\lambda\tau}(B_1\lambda + B_2) = -(\lambda^2 + A_1\lambda + A_2)$ eşitliği ve (6.15) ile

$$\frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\tau} = \mathrm{Re}\left[\frac{2i\,w_0 + A_1}{-i\,w_0(-w_0^2 + A_1\,i\,w_0 + A_2)} + \frac{B_1}{iw_0(B_1\,i\,w_0 + B_2)} - \frac{\tau}{i\,w_0}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{w_0}\left(\frac{2i\,w_0 + A_1}{A_1\,w_0 + (w_0^2 - A_2)\,i} + \frac{B_1}{(-B_1\,w_0^2 + B_2\,i)} + \tau i\right)\right]$$

$$= \frac{1}{w_0}\left(\frac{2w_0(w_0^2 - A_2) + A_1^2\,w_0}{A_1^2\,w_0 + (w_0^2 - A_2)^2} - \frac{B_1}{B_1^2w_0^2 + B_1^2}\right)$$

$$= \frac{2w_0^2 + A_1^2 - 2A_2 - B_1^2}{B_1^2w_0^2 + B_2^2}$$

elde ederiz. $A_1^2 - 2A_2 - B_1^2 > 0$ için, biz $\left.\dfrac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\tau}\right|_{\lambda = i w_0} > 0$ "transversal şarta" sahip oluruz. Bu şart elde tutulursa $w = w_0$ ile $\tau = \tau_0$ Hopf çatallanma oluşur.

ÖRNEK 6.1: $e = 0,5$, $b = 1,5$ ve $a = 0,7$ katsayıları ile oluşturulan

$$\frac{dx}{dt} = 0.7x(1-x) - x(t-\tau)y(t-\tau)$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.666667xy - 0.5y$$

sürekli popülasyon modelinde $E_2 = (0.75, 0.175)$ pozitif denge noktasının "τ_0 Hopf çatallanma değerini" bulunuz?

Çözüm: Verilen değerlere göre (6.8) ve (6.9)'dan

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= abe \\ &= 0,525 \\ A_2 + B_2 &= e(a - abe) \\ &= 0,0875 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A_1^2 - 2A_2 - B_1^2 &= 0,091875 > 0 \\ A_2^2 - B_2^2 &= -0,00765625 < 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Aynı zamanda (6.12) denkleminden

$$w^4 + (A_1^2 - 2A_2 - B_1^2)\,w^2 + (\mathrm{A}_2^2 - B_2^2) = 0$$

$$w^4 + 0,091875\,w^2 - 0,00765625 = 0$$

yazabiliriz. Buradan

$$w_{\mp}^{2}=\frac{-0,091875\mp\sqrt{(0,091875)^{2}+4(0,00765625)}}{2}$$
$$\Rightarrow w_{\mp}^{2}=\frac{-0,091875\mp 0,19765124745}{2}$$
$$\Rightarrow w_{+}^{2}=0,05288812373 \ \ ve \ \ w_{-}^{2}=-0,14476312372$$

ile

$$w_{1+}=0,22997,\ w_{2-}=-0,22997$$

$$i\,w_{1+}=0,38048i,\ i\,w_{1-}=-0,38048i$$

köklerini buluruz. (6.13) göz önüne alındığında

$$\tau_k=\frac{1}{w_0}\arccos\left[\frac{(B_2-A_1B_1)w_0^2-A_2B_2}{B_1^2w_0^2+B_2^2}\right]+\frac{2k\pi}{w_0},\quad k=0,1,2,...$$

ve $B_2-A_1B_1=0,02625,\ A_2B_2=0,\ B_1^2=0,030625,\ B_2^2=0,00765625$ olmak üzere

$k=0$ için hesaplama yapılırsa

$$\tau_0=\frac{1}{0,38048}\arccos\left[\frac{(0,02625)(0,38048)^2}{(0,030625)(0,38048)^2+0,00765625}\right]$$
$$\Rightarrow \tau_0\cong\frac{1}{0,38048}\arccos(0.3143245)$$
$$\Rightarrow \tau_0\cong\frac{1,251}{0,38048}=3.288.$$

değerine ulaşırız. $\tau\in[0,\tau_0^{+})$ da E_2 denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Yani

$\tau\in[0\ ,\ 3.288)$ E_2 kararlı ve $\tau=\tau_0=3,288$ 'de Hopf çatallanma oluşur

7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bir problemin dinamik sistem yapısını içeren, gerçeğe yakın bir matematiksel model kurabilmek için çoğu kez gecikmeli diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Aynı zamanda bu tür sistemlerde mutlaka bir parametre bulunduğundan, parametrenin değişiminin sistem üzerinde yarattığı etki merak edilmektedir. Bu parametre değişiminin sistemin dinamiği üzerindeki etkisinin incelenmesi, Hopf çatallanma analizini öne çıkarmaktadır. Bu yüzden Hopf çatallanma içeren bir Lotka-Volterra tipi av-avcı diferansiyel denklem sisteminde av popülasyonuna τ gecikme parametresi ekleyip, eklenen bu τ parametresinin sistem üzerindeki etkileri incelenmiştir. Öncelikle, ele alınan lineer olmayan dinamik sistem, yapılan teorik analizle lineerleştirilerek, sistemin asimptotik kararlılığı incelenmiştir. Sonra τ gecikme parametresi, Hopf çatallanma parametresi olarak seçilerek, τ için belirlenen koşullar altında sistemin tek pozitif denge noktasının kararlılığını kaybettiği ve Hopf çatallanma oluştuğu gösterilmiştir. Sonuç olarak elde edilen sonuçlar daha önce gecikmesiz av-avcı diferansiyel modeli üzerine var olan sonuçları geliştirmiştir.

Lineer olmayan dinamikler için yapılan analizler teorik ve pratik öneme sahiptir. Literatür incelendiğinde gecikmeli modeller üzerine yapılan çalışmaların popüler olduğunu görürüz. Ayrıca gecikmeli modellerde birden fazla gecikme içeren çalışmalar da dikkat çekicidir. Bu çalışmadaki modelde daha fazla gecikme parametresi alınarak yeni bir çalışma konusu oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

[1] R. Yafia, "Hopf bifurcation in differantial equations with delay for tumor immunue system competition model", *Siam J. Appl. Math.*, vol. 67, no. 6, pp. 1693-1703, 2007.

[2] G. Ranjith Kumar, K.Lakshmi Narayan and B. Ravindra Reddy, "Stability and Hopf Bifurcation Analysis of Sır Epidemic Model With Time Delay", *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 11, pp. 1419-1423, no:3, 2016.

[3] S. Toaha, M.A. Hassan, "Stability Analysis of Predator-Prey Population Model with Time Delay and Constant Rate of Harvesting", *Punjab University Journal of Mathematics*, vol. 40, pp. 37-48, 2008.

[4] H. Merdan, "Stability analysis of a Lotka-Volterra type predator-prey system involving Allee effect", *Anziam J*. vol. 52, pp. 139-145, 2010.

[5] C. Çelik, H. Merdan, "Hopf bifurcation analysis of a system of coupled delayeddifferential equations", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219 no. 12, pp. 6605-6617.

[6] H. Akkocaoğlu, H. Merdan, C. Çelik, "Hopf bifurcation analysis of a general non-linear differential equation with delay", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 237, no. 1, pp. 565-575.

[7] Ş. Kayan, H. Merdan, "An algorithm for Hopf bifurcation analysis of a delayed reaction–diffusion model", *Nonlinear Dynamics*, vol. 89, no. 1, pp. 345-366, 2017.

[8] H. Merdan, Ş. Kayan, "Hopf bifurcations in Lengyel–Epstein reaction–diffusion model with discrete time delay", *Nonlinear Dynamics*, vol. 79, no. 3, pp. 1757-1770, 2015.

[9] K. Li, J. Wei, "Stability and Hopf bifurcation analysis of a prey–predator system with two delays", *Chaos Solitons Fract.*, vol. 42, pp. 2606-2613, 2009.

[10] X. Li, S. Ruan, J. Wei, "Stability and bifurcation in delay-differential equations with two delays", *J. Math. Anal. Appl.*,vol. 236, pp. 254-280, 1999.

[11] J. Wei , S. Ruan, "Stability and bifurcation in a neural network model with two delays", *Physica D* 130 (1999), pp. 255-272.

[12] S. Ruan, J. Wei, "On the zero of some transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays", *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser.* A, vol. 10, pp. 863-874, 2003.

[13] X. P. Yan, Y. D. Chu, "Stability and bifurcation analysis for a delayed Lotka–Volterra predator–prey system", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 236, pp. 254-280, 2006.

[14] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics*, New York: Academic Press, 1993.

[15] B. Balachandran, T. Kalmar-Nagy, D. E. Gilsinn, *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*, New York: Springer, 2009.

[16] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Berlin: SpringerVerlag, 1998.

[17] J. S. L. Allen, *Introduction to Mathematical Biology*, New Jersey: Prentic Hall, 2007.

[18] N.D. Hassard, Y. H. Kazarinoff, H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation London Mathematical Society Lecture Notes*, *Cambridge University Press*, vol. 41, New York: Cambridge Universty Press, 1981.

[19] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, *Second Edition*, Boston: Physcal Sciences, 1988.

[20] B. Balachndran, T. Kalmar-Nagy, D.E. Gilsinn, Delay Differential Equations: *Recent Advances and New Directions*, New York: Springer, 2009.

[21] F. R. Gantmacher, *Applications of the Theory of Matrices*. New York: Wiley, p. 230, 1959.

[22] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, "Routh-Hurwitz Theorem." *Tables of Integrals, Series, and Products*, 6th ed. San Diego, CA: Academic Press, p. 1076, 2000.

[23] R. Séroul, "Stable Polynomials", *Programming for Mathematicians*. Berlin: Springer-Verlag, pp. 280-286, 2000.

[24] J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, New York: SpringerVerlag, 1977.

[25] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, New York: Springer-Verlag, 2002.

[26] H. Hacısalihoğlu, *Lineer Cebir*, Ankara: Gazi Üniversitesi, 2000.

[27] A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology*, Baltimore: Williams & Wilkins, 1925.

[28] V. Volterra, *Variazionie fluttuazioni del numero di' individui in specie animali conviventi*, Mem. R. Accad. Naz. Dei Lincei, Ser. vol. VI 2, pp. 31–113, 1926.

[29] S. A. Kılıç, M. Erdem, *Fonksiyonel Analize Giriş*, Ankara: Gazi Üniversitesi, 1987.

[30] M. Bayraktar, *Analiz*, Ankara: Nobel Akademi, 2010.

[31] D. Berkey Denis, P. Blanchard, *Calculus*, New York: Fort Worth: Saunders College, Pub, 1992.

KİŞİSEL BİLGİLİER

Adı Soyadı : Yonca YALÇİN

Doğum Yeri : Gaziantep

Doğum Tarihi : 01/10/1989

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : yoncayalcin1513@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans			
Lisans	Matematik	Gazi Osman Paşa Üniversitesi	2012
Lise	Sayısal	Arif Nihat Asya Lisesi	2006