T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKINLIK GAMMA YARI-HALKALARI

İBRAHİM HALİL BEKMEZCİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADIYAMAN, 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKINLIK GAMMA YARI-HALKALARI

İbrahim Halil BEKMEZCİ

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Yıl : 2019, Sayfa sayısı: 49+VII

Jüri : Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK
Doç. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmından oluşmaktadır. İkinci bölümde, önceki çalışmalar başlığı altında, tezde kullanılan ve faydalanılan kaynaklar özetlenmiştir. Üçüncü bölüm, tezin geri kalanı daha iyi anlamak için yaklaşımlı kümeler, yakın kümeler ve temel yaklaşım uzayı, zayıf yakın yaklaşım uzayı ve özellikleri olmak üzere üç kısımdan oluşmaktadır. Dördüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümün birinci kısımda zayıf yakın yaklaşım uzayı üzerinde gamma yarı halkaları tanımlanıp, tam ayırt edilemezlik bağıntısı kavramı ve zayıf yakın yaklaşım uzaylarında alt ve üst yaklaşımların bazı özelliklerine yer verildi. Ayrıca, gamma yakınlık alt yarı halkası ve ideali tanıtıldı ve gamma yakınlık yarı halka dikkate alınarak teoremler elde edildi. Bu bölümün ikinci kısmında, gamma yakınlık yarı halkasının asal (yarı-asal) idealleri tanıtılmış ve gamma yakınlık yarı halkası dikkate alınarak teoremler elde edilmiştir. Son bölümde, yapılan çalışmanın daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırılması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yakın küme; Yakın yaklaşım uzayı; Zayıf yakın yaklaşım uzayı; Yakınlık yarı halka; Gamma yakınlık yarı halka.

ABSTRACT

MSc Thesis

NEARNESS GAMMA SEMI-RINGS

İbrahim Halil BEKMEZCİ

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Year : 2019 , Number of pages: 49+VII

Jury : Assoc. Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Assoc. Prof. Dr. Yaşar ÇAKMAK
Assoc. Prof. Dr. İbrahim Halil GÜMÜŞ

This study, which is prepared as a MSc thesis, consists of five chapters. The first chapter consists of an introduction. In the second chapter, the references used and benefited in the thesis are summarized under the title of previous studies. The third part consists of three parts; rough sets, near sets and basic approximation spaces, weak nearness approximation spaces and their properties to better understand the rest of the thesis. The fourth section consists of two parts. In the first part of this chapter, gamma semi-rings on the weak close approximation space are defined, and the concept of complete indiscernibility relation and some features of the upper and lower approaches on weak approximation spaces are given. In addition, gamma nearness sub semi ring and its ideal was introduced, and the theorems were obtained considering gamma nearness semi ring. In the second part of this chapter, the prime (semi-prime) ideals of the gamma nearness semi ring were introduced and the theorems were obtained by taking into consideration the gamma nearness semi ring. The results of the last section, which is the result of the study done in comparison with previous studies. In the final section, the results of the study were compared with the previous studies.

Key Words: Near set; Nearness approximation space; Weak nearness approximation space; Nearness semiring; Gamma nearness semiring.

BEYAN

"Yakınlık Gamma Yarı-Halkaları" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

İbrahim Halil Bekmezci

TEŞEKKÜR

Tez aşamasında konumu belirleyen, bilgi ve birikimini aktaran, çalışmalarımı yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her konuda bana yardımcı olan arkadaşım İbrahim Halil KARAKUŞ'a desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

İbrahim Halil BEKMEZCİ

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathcal{F}$	: Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonu
L	: Tanım uzunluğu
$\mathcal{O}$	: Algılanabilen nesneler kümesi
φ_i	: Çıkarım fonksiyonu
Φ	: Nesne tanımlaması

1. GİRİŞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin giriş kısmı bulunmaktadır.

İkinci bölümde, önceki çalışmalar başlığı altında tezde kullanılan ve faydalanılan kaynaklar özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde, temel kavramlar adı altında, yaklaşımlı kümeler, yakın kümeler ve temel yaklaşım uzayı, zayıf yakınlık yaklaşım uzayı ve özellikleri olmak üzere; üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısmında, yaklaşım kümenin; alt yaklaşımın, üst yaklaşımın ve sınır bölgesinin tanımı yapıldı ve ayrıca temel yaklaşım uzayı verildi [23-24]. İkinci kısımda, temel yaklaşım uzayı genişletilerek; yakınlık yaklaşım uzayı tanımlandı. Yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde alt yaklaşım, üst yaklaşım ve sınır bölgesi tanımı yapıldı. Bu kümelerinde yakın küme olduğu teoremlerle ispat edildi [25]. Üçüncü kısımda da zayıf yakınlık yaklaşım uzayı tanımı ve temel özellikleri verildi.

Dördüncü bölümde bulgular ve tartışma başlığı altında zayıf yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde gamma yarı halkanın tanımı yapılıp, teorem ve örneklere yer verildi. Son bölüm olan sonuç bölümünde yapılan çalışmanın daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırılması yapılmıştır.

Bu tezin amacı, bir yakınlık yarı halkanın genelleştirilmiş durumu olan zayıf yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde gamma yarı halkalar konusuna girmek ve bu cebirsel yapıların temel yaklaşım özeliklerinden bazılarını incelemektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bir modelleme olarak yararlı ve klasik kümelerden farklı olan yaklaşımlı küme fikri, 1982 de bilgi sistemindeki eksikliği ve belirsizliği gidermek amacıyla Pawlak tarafından ortaya atıldı. Yaklaşımlı küme teorisi, bir evrensel kümenin alt kümesi dikkate alınmak üzere; alt ve üst yaklaşımı kullanarak tanımlanan, küme teorisinin bir genişletilmesidir. Pawlak'ın yaklaşımlı kümesinin temeli bir denklik bağıntısıdır [23] ve [24].

1987 de Iwinski yaklaşımlı küme üzerinde cebirsel yapıların bir modellemesini verdi [10]. Bu çalışmadan sonra Biswas ve Nanda 1994'te yaklaşımlı alt grupları çalıştı. 1997 de Kuroki yarı gruplarda yaklaşımlı ideal kavramını tanımlayarak; idealin karakterizasyonunu inceledi. Bu çalışmalardan sonra [3], [4], [11]-[14], [33], [34] ve benzeri birçok çalışma yapıldı.

1995 de ilk olarak, Rao gamma halkaların bir genelleştirilmesi olarak, gamma yarı halkaları çalıştı (30]. Gamma yarı halkaları ile ilgili tüm tanım ve temel kavramlar için [31] ve [33] da ki çalışmalara bakılabilir.

2002 de Peters yaklaşımlı küme teorisinin genişletilmesi olarak; yakın küme fikrini ortaya attı. Bu teoride Peters kümelerin yakınlığını tanımlamak için nesnelerin özeliklerine bağlı bir ayırt edilemezlik bağıntısını tanımladı [25]. [26], [27], [28] ve [29] kaynaklarda, boş olmayan kümelerin birbirine nasıl yakın olabileceklerine ilişkin özelikler genişletilmiş, yaklaşım (yakın küme) teorisi dikkate alınarak; çalışmalar yapılmıştır.

2012 de İnan ve Öztürk yakınlık grupların konusunu [6-7] ve yakın kümelerin öteki cebirsel yaklaşımlarını [8] ve [21] kaynaklarında ele aldılar.

Son dönemlerde Öztürk yakınlık yarı halkalarını oluşturdu ve yakınlık yarı halkaların ideallerini ve bunların bazı özeliklerini inceledi [18], [22].

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, temel olarak; yaklaşımlı kümeler, yakın kümeler, temel yaklaşım uzayı ve zayıf yakın yaklaşım uzayın temel özellikleri ve yakınlık yarı halkaları ile ilgili tanım, teoremler ve örneklere yer verildi.

3.1. Yaklaşımlı Kümeler

Yaklaşımlı kümeler kuramı, her nesnenin bilgi ve ölçümlerle tanımlanabildiği varsayılan evren dikkate alınarak tanımlanmıştır. Klasik kümeler ile yaklaşımlı kümeleri birbirinden ayıran en önemli özelliği sınır bölgesi kavramının tanımlanmış olmasıdır.

Boş olmayan sonlu U ve A kümeleri dikkate alınsın. U evrensel küme, A nitelikler kümesi ve $a \in A$ olmak üzere; V_a niteliklerin değerler kümesi olsun. A kümesinin herhangi bir alt kümesi B olmak üzere; U üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı $I(B)$ şöyle tanımlanır:

Bir x nesnesinin a niteliğine göre değerlendirilmesi $a(x) \in V_a$ olmak üzere; her $a \in A$ için $a(x) = a(y)$ ise $xI(B)y$ dir. Yani, x ve y nesneleri B nin nitelikleri ile ayırt edilemezdir. Açıkça görülüyor ki, $I(B)$ bir denklik bağıntısıdır. $I(B)$ nin bütün denklik sınıflarının ailesi, yani B tarafından belirlenen bölüm kümesi $U/I(B)$ ya da basitçe U/B şeklinde gösterilir. U/B bölüm kümesinde, x in bir denklik sınıfı $B(x)$ ile gösterilir.

Eğer $(x, y) \in I(B)$ ise x ve y, B −ayırt edilemezdir. $I(B)$ bağıntısının denklik sınıflarına B-temel kümeleri denir.

Tanım 3.1.1. [24] U evrensel küme ve $I(B)$, U üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $(U, I(B))$ çiftine temel yaklaşım uzayı denir.

Tanım 3.1.2. [24] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.

$$B_*(X) = \{x \in U | B(X) \subseteq X\}$$

kümesine X kümesinin B-alt yaklaşımı denir.

Tanım 3.1.3. [24] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.

$$B^*(X) = \{x \in U | B(X) \cap X \neq \emptyset\}$$

kümesine X kümesinin B −üst yaklaşımı denir.

Tanım 3.1.4. [24] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.

$$(\ B^*(X), B_*(X))$$

sıralı ikilisine yaklaşımlı küme denir.

Tanım 3.1.5. [24] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.

$$BN_B(X) = \ B^*(X) - B_*(X)$$

kümesine X kümesinin B-sınır bölgesi denir.

Eğer X kümesinin sınır bölgesi boş küme ise, yani $BN_B(X) = \emptyset$ ise, X kümesi B ye göre klasik kümedir. Diğer durumda, yani $BN_B(X) \neq \emptyset$ ise, X kümesi B ye göre yaklaşımlı kümedir.

3.2. Yakın Kümeler ve Yakınlık Yaklaşım Uzayı

Bu kısımda yakın küme kavramının temelleri, çıkarım fonksiyonları, yakın kümeler ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilecektir.

Yakın küme teorisi, ayrık kümelerdeki nesnelerden oluşan benzer bilgilerin metot olarak kullanılabilmesini sağlar. Yani nesnelerin gözlemlenmesi, karşılaştırılması ve sınıflandırılması için yakın küme teorisi kullanılır. Yakın kümelerin keşfi, gözlemlenen nesnelerin özelliklerini temsil eden fonksiyonların seçimi ile mümkün olmaktadır. Yakın küme teorisinde nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları bir nesneden, gözlemlenebilen özelliklerin değerine karşılık gelen bir reel sayıya tanımlıdır ([25]).

Tanım 3.2.1. [25] (Çıkarım Fonksiyonu) Algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden reel değerli fonksiyonlara çıkarım fonksiyonu denir.

V, algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden boş kümeden farklı herhangi bir küme, $X \subseteq \mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olmak üzere, çıkarım fonksiyonu, $\varphi: X \to V$ şeklinde tanımlanabilir. Reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanarak; her ne kadar cebirsel yapılar çalışılabilse de, bu tanım yakın kümeler teorisinde mantık ve cebirsel yapıların teorik olarak da çalışılabilmesine imkan sağlar.

Çıkarım fonksiyonları nesneler arasında olduğu gibi benzer nesnelerden oluşan kümeler arasında da benzerlik kurar. Nesnelerin aralarındaki benzerlikler dikkate alınırsa birbirine yakın oldukları gözlemlenir. Benzer şekilde nesnelerin oluşturduğu kümelerde benzerlik yönüyle birbirlerine belli derecelerde yakın olurlar.

Aksiyom 3.2.2. Bir nesne algılanabilirdir ancak ve ancak bu nesne tanımlanabilirdir.

Tanım 3.2.3. (Görsel Çıkarım Fonksiyonu) Algılanabilen nesneler yansıyan ışığın kaynağındaki görsel cisimlerin ayırt edici özellikleri olmak üzere, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olsun. Υ, reel sayılar kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere bir φ görsel çıkarım fonksiyonu, $\varphi: X \to \Upsilon$ şeklinde tanımlıdır. $x \in X$ nesnesi için $\varphi(x)$, x nesnesinin görsel algıdaki zenginliği temsil eder.

Aksiyom 3.2.4. Nesne tanımlamalarını formülleştirmek nesnelerin matematiksel olarak algılanmasını sağlar.

Tanım 3.2.5. [25] (*Algılanabilir Sistem*) $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının boş olmayan bir kümesi olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ ye bir algılanabilir sistem denir.

Çizelge 3.1 Temel Yakınlık Yaklaşım Uzayı

Sembol	Anlamı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi,
$\mathcal{O}$	Algılanabilen nesnelerin kümesi,
X	$X \subseteq \mathcal{O}$, örnek nesnelerin kümesi,
x	$x \in \mathcal{O}$, örnek nesne,
$\mathcal{F}$	Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi,
B	$B \subseteq \mathcal{F}$,
L	Tanım uzunluğu,
i	$i \leq L, L \in \mathbb{Z}^+$,
φ_i	$\varphi_i: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, çıkarım fonksiyonu,
Φ	$\Phi: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^L$ nesne tanımlaması,
$\Phi(x)$	$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \varphi_L(x))$

Nesneler ancak matematiksel birtakım tanımlamalar yardımıyla bilgisayar sistemleri tarafından algılanabilirler. Bir $x \in X$ nesnesinin tanımı, çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlenir. Burada önemli konulardan biri de $\varphi_i \in B$ çıkarım fonksiyonlarının, nesnelerin hangi yönüyle tanımlandığı dikkate alınarak belirlenmesidir. $B \subseteq \mathcal{F},\ X \subseteq \mathcal{O}$ örnek nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının, $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa

$$\Phi: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^L, \Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \varphi_L(x))$$

tanım uzunluğu $|\Phi| = \mathrm{L}$ olan nesne tanımlamasıdır.

$X \subseteq \mathcal{O}$ kümelerinde ki nesneler benzer tanımlamalara sahip ise o zaman nesneler birbirine yakındırlar. Her bir φ, bir nesnenin ayırt edici bir özelliğini belirtir. Bu durumda $x, x' \in \mathcal{O}$ olmak üzere; Δ_{φ_i} farkı,

$$\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)|$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.2.6. [25] $x, x' \in \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. $i \leq |\Phi|$ tanım uzunluğu olmak üzere;

$$\{(x, x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} | \forall \varphi_i \in B,\ \Delta_{\varphi_i} = 0\}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya $\mathcal{O}$ üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı denir ve "$\sim_B$" ile gösterilir.

Teorem 3.2.7. [25] $[x]_B \in \xi_B$ sınıfındaki nesneler yakın nesnelerdir.

Tanım 3.2.8. [25] $X,\ X' \subseteq \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $x \in X$ ve $x' \in X'$ için $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ olacak şekilde $\varphi_i \in B$ varsa X kümesi X' kümesine yakındır, denir.

Tanım 3.2.9. [25] $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $x,\ x' \in X$ olsun. $x,\ x'$ nesnesine yakın ise X kümesine kendisi ile ilgili yakın küme veya bu duruma X kümesinin yansımalı yakınlığı denir.

Teorem 3.2.10. [25] $\xi_B = \mathcal{O} /\!\sim_B$ ayrışımındaki her bir sınıf yakın kümedir.

İspat: $\xi_B = \mathcal{O}/\!\sim_B = \{[x]_B | x \in \mathcal{O}\}$ ayrışımında ki herhangi bir $[x]_B$ sınıfı aynı tanımlamalara sahip nesnelerin kümesidir, yani

$x, x' \in [x]_B$ ise $x \sim_B x'$ (Her $\varphi_i \in B$ için $\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)| = 0$)

olur. Yansımalı yakınlık tanımı dikkate alınırsa, $[x]_B \in \xi_B$ sınıfı yakın kümedir.

Teorem 3.2.11. [25] ξ_B ayrışımı bir yakın kümedir.

İspat: " $\sim_B$ ", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $\xi_B = \mathcal{O} /\!\sim_B$ ayrışımını tanımlayan bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. $[x]_B \in \xi_B$ sınıfının yakın küme olduğu ve ξ_B ayrışımı birbirleriyle yakın olan nesneler içerdiğinden ξ_B bir yakın kümedir.

Teorem 3.2.12. [25] Yakın küme içeren bir kümenin kendisi de yakın kümedir.

İspat: X kümesinin bir yakın küme içerdiğini kabul edelim. Yakın kümelerin hiyerarşisi ve kalıtımsal yakınlık kavramları dikkate alınırsa, X bir yakın kümedir.

Tanım 3.2.13. [25] (*Temel Yakınlık Yaklaşım Uzayı*) $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi, $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve "$\sim_B$", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$ yapısına temel yakınlık yaklaşım uzayı denir.

Lemma 3.2.14. [25] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; X kümesinin $B -$ alt yaklaşımı B_*X bir yakın kümedir.

Teorem 3.2.15. [25] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; X boştan farklı bir B_*X alt yaklaşımına sahip ise X bir yakın kümedir.

İspat: Boştan farklı bir B_*X alt yaklaşıma sahip olan bir X kümesi dikkate alınsın. B_*X alt yaklaşımı yakın küme olduğundan ve *Teorem 3.2.4* den yakın küme içeren bir küme yakın küme olduğundan X bir yakın kümedir.

Tanım 3.2.16. [25] (Bir kümenin üst yaklaşımı) $X \subseteq \mathcal{O}$, algılanabilen nesnelerin kümesi ve B kümesi de $\mathcal{O}$ daki nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin başka bir yaklaşımı, X kümesi ile ara kesiti boştan farklı olan $[x]_B \in \mathcal{O} / \sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu yaklaşıma X in $B -$ üst yaklaşımı denir ve

$$B^*X = \bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset} [x]_B$$

ile gösterilir. Diğer bir ifade ile B^*X üst yaklaşımın X deki bir nesneye tanımı ile eşleşen en az bir nesne tanımı içeren sınıfının birleşiminden oluşur.

B_*X alt yaklaşımı, B^*X üst yaklaşımının alt kümesidir. B^*X üst yaklaşımının alt kümesi olmayan bir veya birden fazla $[x]_B \in \mathcal{O} / \sim_B$ sınıfları olabilir ya da olmayabilir.

Teorem 3.2.17. [25] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; B^*X üst yaklaşımı ve X kümesi yakın kümelerdir.

Çizelge 3.2 Yakınlık Yaklaşım Uzayı

Sembol	Anlamı
$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$	Temel yaklaşım uzayı, $B \subseteq \mathcal{F}$
B^*X	$\bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset} [x]_B$, X in $B -$ üst yaklaşımı
B_*X	$\bigcup_{[x]_B \subseteq X} [x]_B$, X in $B -$ üst yaklaşımı
$Bnd_B X$	$Bnd_B X = B^*X \setminus B_*X = \{x \mid x \in B^*X \ ve \ x \notin B_*X\}$.

Boştan farklı Sınır Bölgesi olan Yakın Küme: Bir yakın kümenin sınırı boştan farklı olduğunda X kümesi alt ve üst yaklaşıma sahip olan küme olarak dikkate alınabilir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise X, yaklaşıma sahip olan ya da yaklaşık olarak B deki fonksiyonlarla ilişkili olan yakın kümedir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise $|\ Bnd_B X| > 0$ dır. Bu durumda X yaklaşıma sahip olan yakın kümedir.

Teorem 3.2.18. [25] (Temel Yakınlık Küme Teoremi) $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; $|\ Bnd_B X| \geq 0$ ise X kümesi yakın kümedir.

3.3. Zayıf Yakınlık Yaklaşım Uzayı ve Özellikleri

Bu kısımda, zayıf yakınlık yaklaşım uzayı kavramı yapısal olarak tüm bileşenleri ile dikkate alınacaktır. Zayıf yakınlık yaklaşım uzayı tanımlaması aşağıdaki (Çizelge 3.3.) kavramlar yardımıyla belirlenir/tanımlanır.

Çizelge 3.3 Zayıf Yakınlık Yaklaşım Uzayı

Sembol	Anlamı
B	$B \subseteq \mathcal{F}$
r	$\binom{\lvert B\rvert}{r}$, yani $\varphi_i \in B$ fonksiyonlarının sayısının r li kombinasyonu,
B_r	$r \leq \lvert B\rvert$,
$\sim_{B_r}$	B_r yardımıyla tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_{B_r}$	$r \leq \lvert B\rvert, [x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} \mid x \sim_{B_r} x'\}$ yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O} /\sim_{B_r}$	$\mathcal{O} /\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\}$, bölüm kümesi,
$\xi_{\mathcal{O},B_r}$	$\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O} /\sim_{B_r}$,
$N_r(B)$	$N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$, ayrışımların kümesi,
$N_r(B)^*X$	$N_r(B)^*X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset} [x]_{B_r}$, üst yaklaşım.

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $\mathcal{F}$ kümesi de nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

r, kısıtlanmış $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümesinin kardinalitesi olmak üzere; "$\sim_{B_r}$", yaklaşımlı küme teorisinden $B_r \subseteq B$ alt kümesine kısıtlanmışı olan ayırt edilemezlik bağıntısıdır. B_r kümesinin her seçimi, "$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısının $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin farklı bir ayrışımının tanımlanmasına yol açar. Bu seçim; $\lvert B\rvert$, B deki çıkarım fonksiyonlarının sayısı ve r, B_r kümesinin kardinalitesi olmak üzere, $\binom{\lvert B\rvert}{r}$ farklı şekilde yapılabilir.

"$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısı, $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesini ikişer ikişer ayrık olan $[x]_{B_r}$ yakınlık sınıflarına ayırır. Bu sınıfların $\mathcal{O}/\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\}$ kümesi bölüm kümesidir. $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$ dir. Ayrışımların bir ailesi olan $N_r(B)$ kümesi de $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ dir.

Tanım 3.3.1. [20] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi; $\mathcal{F}$, nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r < \lvert B\rvert$ olmak üzere; "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} | B_r \subseteq B\}$ ayrışımların kümesi olsun. Bu durumda $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r)$ yapısına zayıf yakınlık yaklaşım uzayı denir.

Teorem 3.3.2. [20] $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r)$ zayıf yakınlık yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $N_r(B)_* X \subseteq X \subseteq N_r(B)^* X$.

ii) $N_r(B)^*(X \cup Y) = (N_r(B)^* X) \cup (N_r(B)^* Y)$.

iii) $N_r(B)_*(X \cap Y) = (N_r(B)_* X) \cap (N_r(B)_* Y)$.

iv) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)_* X \subseteq N_r(B)_* Y$.

v) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)^* X \subseteq N_r(B)^* Y$.

vi) $N_r(B)_*(X \cup Y) \supseteq (N_r(B)_* X) \cup (N_r(B)_* Y)$.

vii) $N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq (N_r(B)^* X) \cap (N_r(B)^* Y)$.

İspat: i) $x \in N_r(B)_*(X)$ olsun. Bu durumda $x \in [x]_{B_r} \subseteq X$ olduğundan $N_r(B)_*(X) \subseteq X$ olur. $x \in X$ olmak üzere; $x \in [x]_{B_r}$ olduğundan $[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset$ dir. O halde $x \in N_r(B)^*(X)$ olur. Böylece $X \subseteq N_r(B)^*(X)$ dir.

ii)
$$\begin{aligned} x \in N_r(B)^*(X \cup Y) &\Leftrightarrow [x]_{B_r} \cap (X \cup Y) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow ([x]_{B_r} \cap X) \cup ([x]_{B_r} \cap Y) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \left([x]_{B_r} \cap X\right) \neq \emptyset \text{ veya } ([x]_{B_r} \cap Y) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in N_r(B)^* X \text{ veya } x \in N_r(B)^* Y \\ &\Leftrightarrow x \in (N_r(B)^* X) \cup (N_r(B)^* Y) \end{aligned}$$

dir. Böylece $N_r(B)^*(X \cup Y) = (N_r(B)^* X) \cup (N_r(B)^* Y)$ elde edilir.

iii)
$$\begin{aligned} x \in N_r(B)_*(X \cap Y) &\Leftrightarrow [x]_{B_r} \subseteq X \cap Y \\ &\Leftrightarrow [x]_{B_r} \subseteq X \text{ ve } [x]_{B_r} \subseteq Y \\ &\Leftrightarrow x \in N_r(B)_* X \text{ ve } x \in N_r(B)_* Y \\ &\Leftrightarrow x \in (N_r(B)_* X) \cap (N_r(B)_* Y) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak, $N_r(B)_*(X \cap Y) = (N_r(B)_*X) \cap (N_r(B)_*Y)$ olur.

iv) $X \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $X \cap Y = X$. *(iii)* özellik dikkate alınırsa,

$$N_r(B)_*X = N_r(B)_*(X \cap Y) = (N_r(B)_*X) \cap (N_r(B)_*Y)$$

olur. Böylece $N_r(B)_*X \subseteq N_r(B)_*Y$ elde edilir.

v) $X \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $X \cup Y = Y$ olur. (*ii)* özelliği kullanılırsa

$$N_r(B)^*Y = N_r(B)^*(X \cup Y) = (N_r(B)^*X) \cup (N_r(B)^*Y)$$

dir. Buradan $N_r(B)^*X \subseteq N_r(B)^*Y$ olduğu görülür.

vi) $X \subseteq X \cup Y \; ve \; Y \subseteq X \cup Y$ olduğundan *(iv)* özelliği kullanılırsa

$$N_r(B)_*X \subseteq N_r(B)_*(X \cup Y) \text{ ve } N_r(B)_*Y \subseteq N_r(B)_*(X \cup Y)$$

elde edilir. Böylece $(N_r(B)_*X) \cup (N_r(B)_*Y) \subseteq N_r(B)_*(X \cup Y)$ olur.

vii) $X \cap Y \subseteq X$ ve $X \cap Y \subseteq Y$ olduğundan *(v)* özelliği kullanılırsa

$$N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^*X \text{ ve } N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq N_r(B)^*Y$$

dir. Buradan $N_r(B)^*(X \cap Y) \subseteq (N_r(B)^*X) \cap (N_r(B)^*Y)$ bulunur.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. Gamma Yakınlık Yarı Halkaları

Bu bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda $\Gamma-$yakınlık yarı halka tanımı, $\Gamma-$alt yarı halka tanımı, $\Gamma-$ideal tanımı ve örnekler verilecektir. İkinci kısımda ise $\Gamma-$yakınlık yarı halkanın $\Gamma-$asal (yarı asal) ideal kavramları verilerek bu kavramlar ile ilgili bazı özellikler incelenecektir.

4.2. Gamma Yakınlık Yarı Halkanın Temel Özellikleri ve Örnekler

Tanım 4.2.1. $(\mathcal{O},\mathcal{F},\sim_{Br},N_r)$ ve $(\mathcal{O}',\mathcal{F},\sim_{Br},N_r)$ farklı iki zayıf yakın yaklaşım uzayları olmak üzere; $S \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Gamma \subseteq \mathcal{O}'$ olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa S ye $\mathcal{O}-\mathcal{O}'$ üzerinde bir $\Gamma-$yarı halka denir.

$\boldsymbol{NGSR_1}$) $(S,+)$, 0_s elemanlı $\mathcal{O}$ üzerinde değişmeli monoiddir.

$\boldsymbol{NGSR_2}$) $(\Gamma,+)$, 0_Γ elemanlı $\mathcal{O}'$ üzerinde değişmeli monoiddir.

$\boldsymbol{NGSR_3}$) $(S,\ \cdot)$, 1_S elemanlı $\mathcal{O}-\mathcal{O}'$ üzerinde Γ monoiddir.

$\boldsymbol{NGSR_4}$) $\forall x,y,z \in S$ ve $\forall \gamma,\beta \in \Gamma$

i) $x\gamma(y+z)=x\gamma y+x\gamma z$

ii) $x\,(\beta+\gamma)z=x\beta z+x\gamma z$

iii) $(x+y)\gamma z=x\gamma z+y\gamma z$

$N_r\ (B)^*S$ de sağlar.

$\boldsymbol{NGSR_5}$) $\forall x \in S$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$

$0_s\gamma x=0_s=x\gamma 0_s$

eşitlikleri $N_r\ (B)^*S$ de sağlanır.

$\boldsymbol{NGSR_6}$) $1_S \neq 0_s$.

$\mathcal{O}-\mathcal{O}'$ zayıf yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde S bir $\Gamma-$yarı halka olsun. Eğer $\mathcal{O}=\mathcal{O}'$ ise o zaman $S,\ \mathcal{O}'$ üzerinde bir $\Gamma-$yarı halkadır.

Şimdi, $\mathcal{O}-\mathcal{O}'$ zayıf yakınlık yaklaşım üzerinde Γ −yarı halka örneğini verelim.

Örnek 4.2.2 $U=\left\{\left[a_{ij}\right]_{2x3}\middle|\, a_{ij}\in\mathbb{Z}_2\right\}$ için

$$o=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, a=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, c=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$
$$d=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, e=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}, f=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, g=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix},$$
$$h=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}, k=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}, l=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, m=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$
$$n=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}, p=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}, r=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}, s=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

olmak üzere; $\mathcal{O}=\{o,a,b,c,d,e,f,g,h,k,l,m,n,p,r,s\}$ algılanabilen nesneler kümesi ve $U'=\left\{\left[a_{ij}\right]_{3x2}\middle|\, a_{ij}\in\mathbb{Z}_2\right\}$ için

$$\theta=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}, \alpha=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}, \gamma=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix},$$
$$\lambda=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}, \mu=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\0&1\end{bmatrix}, \delta=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&1\end{bmatrix}, \sigma=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{bmatrix}$$

olmak üzere; $\mathcal{O}'=\{\theta,\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\delta,\sigma\}$ algılanabilir nesneler kümesi, $r=1$, $\mathcal{B}=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}\subseteq\mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının bir kümesi, $S=\{b,c,g\}\subset\mathcal{O}$ ve $\Gamma=\{\alpha,\gamma\}\subseteq\mathcal{O}'$ olsun. Çıkarım fonksiyonları

$$\varphi_1:\mathcal{O}\longrightarrow V_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6\},$$
$$\varphi_2:\mathcal{O}\longrightarrow V_2=\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\},$$
$$\varphi_3:\mathcal{O}\longrightarrow V_3=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6\}$$

olmak üzere; aşağıdaki (*Çizelge 4.1.*) gibi tanımlansın.

Çizelge 4.1 S nin çıkarım fonksiyonları I

	o	a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n	p	r	s
φ_1	α_1	α_3	α_2	α_1	α_3	α_2	α_3	α_2	α_5	α_5	α_1	α_3	α_6	α_3	α_6	α_1
φ_2	α_5	α_3	α_5	α_1	α_1	α_5	α_1	α_3	α_1	α_3	α_4	α_3	α_4	α_4	α_4	α_3
φ_3	α_3	α_2	α_2	α_4	α_4	α_2	α_3	α_3	α_4	α_2	α_6	α_1	α_1	α_6	α_6	α_3

Ayrıca; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$$\varphi_1 : \mathcal{O}' \longrightarrow V_1^{'} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O}' \longrightarrow V_2^{'} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$
$$\varphi_3 : \mathcal{O}' \longrightarrow V_3^{'} = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

olmak üzere; aşağıdaki (*Çizelge 4.2.*) gibi verilsin.

Çizelge 4.2 Γ nin çıkarım fonksiyonları I

	θ	α	β	γ	λ	μ	δ	σ
φ_1	α_2	α_2	α_3	α_2	α_1	α_3	α_2	α_3
φ_2	α_1	α_3	α_3	α_4	α_1	α_2	α_4	α_4
φ_3	α_3	α_3	α_2	α_2	α_4	α_4	α_2	α_4

Şimdi $\mathcal{O}$ elemanlarının "$\sim_{Br}$" ayırt edilemezlik bağıntısına göre yakın denklik sınıflarını belirleyelim.

$$[o]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_1(o) = \alpha_1\} = \{o, c, l, s\}$$
$$= [c]_{\varphi_1} = [l]_{\varphi_1} = [s]_{\varphi_1},$$
$$[a]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_1(a) = \alpha_3\} = \{a, d, f, m, p\}$$
$$= [d]_{\varphi_1} = [f]_{\varphi_1} = [m]_{\varphi_1} = [p]_{\varphi_1},$$
$$[b]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_1(b) = \alpha_2\} = \{b, e, g\}$$
$$= [e]_{\varphi_1} = [g]_{\varphi_1},$$
$$[h]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_1(h) = \alpha_5\} = \{h, k, p\}$$
$$= [k]_{\varphi_1} = [p]_{\varphi_1},$$
$$[n]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_1(h) = \alpha_6\} = \{n, r\}$$

$= [r]_{\varphi_1}$.

Bu durumda $\xi_{\varphi_1} = \{[o]_{\varphi_1}, [a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [h]_{\varphi_1}, [n]_{\varphi_1}\}$ kümesi elde edilir.

$$[o]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_2(o) = \alpha_5\} = \{o, b, e\}$$
$$= [b]_{\varphi_2} = [e]_{\varphi_2},$$
$$[a]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_2(x) = \varphi_2(a) = \alpha_3\} = \{a, g, k, m, s\}$$
$$= [g]_{\varphi_2} = [k]_{\varphi_2} = [m]_{\varphi_2} = [s]_{\varphi_2},$$
$$[c]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_2(x) = \varphi_2(c) = \alpha_1\} = \{c, d, f, h\}$$
$$= [d]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2},$$
$$[l]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_2(x) = \varphi_2(l) = \alpha_4\} = \{l, n, p, r\}$$
$$= [l]_{\varphi_2} = [n]_{\varphi_2} = [p]_{\varphi_2} = [r]_{\varphi_2}.$$

Böylece $\xi_{\varphi_2} = \{[o]_{\varphi_2}, [a]_{\varphi_2}, [c]_{\varphi_2}, [l]_{\varphi_2}\}$ olur.

$$[0]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_3(x) = \varphi_3(0) = \alpha_3\} = \{0, f, g, s\}$$
$$= [f]_{\varphi_3} = [g]_{\varphi_3} = [s]_{\varphi_3},$$
$$[a]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_3(x) = \varphi_3(a) = \alpha_2\} = \{a, b, e, k\}$$
$$= [b]_{\varphi_3} = [e]_{\varphi_3} = [k]_{\varphi_3},$$
$$[c]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_3(x) = \varphi_3(c) = \alpha_4\} = \{c, d, h\}$$
$$= [d]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3},$$
$$[l]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_3(x) = \varphi_3(l) = \alpha_1\} = \{l, p, r\}$$
$$= [p]_{\varphi_3} = [r]_{\varphi_3}.$$

Buradan $\xi_{\varphi_3} = \{[o]_{\varphi_3}, [a]_{\varphi_3}, [c]_{\varphi_3}, [l]_{\varphi_3}\}$ ve r = 1 için algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlar kümesi $N_r(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ dir. Bu durumda

$$N_1(B)^* S = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap S \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$
$$= [o]_{\varphi_1} \cup [b]_{\varphi_1} \cup [o]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [c]_{\varphi_2} \cup [o]_{\varphi_3} \cup [a]_{\varphi_3}$$
$$= \{o, c, l, s\} \cup \{b, e, g\} \cup \{o, b, e\} \cup \{a, g, k, m, s\} \cup \{c, d, f, h\}$$
$$\cup \{o, f, g, s\} \cup \{a, b, e, k\}$$

$$= \{o, a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, s\}.$$

elde edilir.

$\boldsymbol{NGSR_1}$) $(S, +)$, $0_S = o$ elemanlı $\mathcal{O}$ üzerinde değişmeli monoid grup olduğunu gösterelim. S kümesi üzerinde $"+"$ işlemi, matrislerdeki $"+"$ işlemi olsun. Bu durumda

$b + b = o$	$c + g = d$
$b + c = h$	$g + b = k$
$b + g = k$	$g + c = d$
$c + b = h$	$g + g = o$
$c + c = o$	

olduğundan

Çizelge 4.3 S nin toplama işlemi I

$+$	b	c	g
b	o	h	k
c	h	o	d
g	k	d	o

elde edilir.

i) $"+"$ işlemi *Çizelge 4.3.* dikkate alındığında $N_1(B)^* \ S$ de kapalılık özelliğini sağlar.

ii) $\forall x, y, z \in S$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ özelliğini $N_1(B)^* \ S$ de sağlar. Çünkü;

$b + (b + b) = (b + b) + b = b$	$c + (b + b) = (c + b) + b = c$
$b + (b + c) = (b + b) + c = c$	$c + (b + c) = (c + b) + c = b$
$b + (b + g) = (b + b) + g = g$	$c + (b + g) = (c + b) + g = e$
$b + (c + b) = (b + c) + b = c$	$c + (c + b) = (c + c) + b = b$
$b + (c + c) = (b + c) + c = b$	$c + (c + c) = (c + c) + c = c$
$b + (c + g) = (b + c) + g = e$	$c + (c + g) = (c + c) + g = g$

$b + (g + b) = (b + g) + b = g$ $\qquad$ $c + (g + b) = (c + g) + b = e$

$b + (g + c) = (b + g) + c = e$ $\qquad$ $c + (g + c) = (c + g) + c = g$

$b + (g + g) = (b + g) + g = b$ $\qquad$ $c + (g + g) = (c + g) + g = c$

$g + (b + b) = (g + b) + b = g$ $\qquad$ $g + (b + c) = (g + b) + c = e$

$g + (b + g) = (g + b) + g = b$ $\qquad$ $g + (c + b) = (g + c) + b = e$

$g + (c + c) = (g + c) + c = g$ $\qquad$ $g + (c + g) = (g + c) + g = c$

$g + (g + b) = (g + g) + b = b$ $\qquad$ $g + (g + c) = (g + g) + c = c$

$g + (g + g) = (g + g) + g = g$

iii) $\forall a, b \in S \;\; a + b = b + a$, $(S, +)$ değişme özelliğini sağlar. Böylece, $(S, +)$ değişmeli monoid gruptur.

$\boldsymbol{NGSR_2}$) $(\Gamma, +)$, $0_\Gamma = \theta$ elemanlı $\mathcal{O}'$ üzerinde değişmeli monoid grup olduğunu gösterelim. Bunun için $\mathcal{O}'$ elemanlarının "$\sim_{Br}$" ayırt edilemezlik bağıntısına göre yakın denklik sınıflarını belirleyelim.

$$[\theta]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_1(x) = \varphi_1(\theta) = \alpha_2\} = \{\theta, \alpha, \gamma, \delta\}$$
$$= [\alpha]_{\varphi_1} = [\gamma]_{\varphi_1} = [\delta]_{\varphi_1},$$
$$[\beta]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_1(x) = \varphi_1(\beta) = \alpha_3\} = \{\beta, \mu, \sigma\}$$
$$= [\mu]_{\varphi_1} = [\sigma]_{\varphi_1},$$
$$[\lambda]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_1(x) = \varphi_1(\lambda) = \alpha_1\} = \{\lambda\}.$$

Bu durumda, $\xi_{\varphi_1} = \{[\theta]_{\varphi_1}, [\beta]_{\varphi_1}, [\lambda]_{\varphi_1}\}$ kümesi elde edilir.

$$[\theta]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_2(x) = \varphi_2(\theta) = \alpha_1\} = \{\theta, \lambda\}$$
$$= [\lambda]_{\varphi_2},$$
$$[\alpha]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_2(x) = \varphi_2(\alpha) = \alpha_3\} = \{\alpha, \beta\}$$
$$= [\beta]_{\varphi_2},$$
$$[\gamma]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_2(x) = \varphi_2(\gamma) = \alpha_4\} = \{\gamma, \delta, \sigma\}$$
$$= [\delta]_{\varphi_2} = [\sigma]_{\varphi_2},$$

$$[\mu]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_2(x) = \varphi_2(\mu) = \alpha_2\} = \{\mu\}.$$

Bu durumda, $\xi_{\varphi_2} = \{[\theta]_{\varphi_2}, [\alpha]_{\varphi_2}, [\gamma]_{\varphi_2}, [\mu]_{\varphi_2}\}$ olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
[\theta]_{\varphi_3} &= \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_3(x) = \varphi_3(\theta) = \alpha_3\} = \{\theta, \alpha\} \\
&= [\alpha]_{\varphi_3}, \\
[\beta]_{\varphi_3} &= \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_3(x) = \varphi_3(\beta) = \alpha_2\} = \{\beta, \gamma, \delta\} \\
&= [\gamma]_{\varphi_3} = [\delta]_{\varphi_3}, \\
[\lambda]_{\varphi_3} &= \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_1(x) = \varphi_1(\lambda) = \alpha_4\} = \{\lambda, \mu, \sigma\} \\
&= [\mu]_{\varphi_3} = [\sigma]_{\varphi_3}.
\end{aligned}$$

O halde; $\xi_{\varphi_3} = \{[\theta]_{\varphi_3}, [\beta]_{\varphi_3}, [\lambda]_{\varphi_3}\}$ olur ve $r = 1$ için algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlar kümesi $N_r(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ olarak elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
N_1(B)^* \, \Gamma &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap \Gamma \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i} \\
&= [\theta]_{\varphi_1} \cup [\alpha]_{\varphi_2} \cup [\gamma]_{\varphi_2} \cup [\theta]_{\varphi_3} \cup [\beta]_{\varphi_3} \\
&= \{\theta, \alpha, \gamma, \delta\} \cup \{\alpha, \beta\} \cup \{\gamma, \delta, \sigma\} \cup \{\beta, \gamma, \delta\} \\
&= \{\theta, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma\}
\end{aligned}$$

olur. Γ −kümesi üzerindeki " $+$ " işlemi, matrislerdeki "+" işlemi olarak tanımlansın. Buna göre,

$$\alpha + \alpha = \theta \qquad \alpha + \gamma = \delta$$
$$\gamma + \gamma = \theta \qquad \gamma + \alpha = \delta$$

Olduğundan

Çizelge 4.4 Γ nin toplama işlemi I

$+$	α	γ
α	θ	δ
γ	δ	θ

elde edilir.

i) “ $+$ ” işlemine göre $N_1(B)^*\Gamma$ de kapalılık özelliği sağlanır.

ii) $\forall\alpha,\gamma,\beta \in \Gamma$ $\alpha+(\gamma+\beta)=(\alpha+\gamma)+\beta$ özelliğini $N_1(B)^*\Gamma$ üzerinde sağlar. Çünkü

$$\alpha+(\alpha+\alpha)=(\alpha+\alpha)+\alpha=\alpha \qquad \gamma+(\alpha+\alpha)=(\gamma+\alpha)+\alpha=\gamma$$
$$\alpha+(\alpha+\gamma)=(\alpha+\alpha)+\gamma=\gamma \qquad \gamma+(\alpha+\gamma)=(\gamma+\alpha)+\gamma=\alpha$$
$$\alpha+(\gamma+\alpha)=(\alpha+\gamma)+\alpha=\gamma \qquad \gamma+(\gamma+\alpha)=(\gamma+\gamma)+\alpha=\alpha$$
$$\alpha+(\gamma+\gamma)=(\alpha+\gamma)+\gamma=\alpha \qquad \gamma+(\gamma+\gamma)=(\gamma+\gamma)+\gamma=\gamma$$

iii) *Çizelge 4.4.* ten $\forall\alpha,\gamma \in \Gamma$ için $\alpha+\gamma=\gamma+\alpha$ özelliği sağlanır. Böylece, $(\Gamma,+)$ $\mathcal{O}'$ üzerinde $0_\Gamma=\theta$ birim elemanlı bir değişmeli monoiddir.

$\boldsymbol{NGSR_3}$) Böylece, $(S,\ \cdot)$, $1_S=f$ elemanlı $\mathcal{O}-\mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −monoiddir. Çünkü, matrislerdeki " $\cdot$ " işlemi dikkate alınırsa,

$$b\alpha b=o \qquad b\gamma b=o$$
$$b\alpha c=a \qquad b\gamma c=a$$
$$b\alpha g=l \qquad b\gamma g=l$$
$$c\alpha b=d \qquad c\gamma b=d$$
$$c\alpha c=o \qquad c\gamma c=o$$
$$c\alpha g=o \qquad c\gamma g=o$$
$$g\alpha b=d \qquad g\gamma b=d$$
$$g\alpha c=c \qquad g\gamma c=c$$
$$g\alpha g=g \qquad g\gamma g=g$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, S kümesi üzerinde " $\cdot$ " işlemi, aşağıdaki *Çizelge 4.5.* ve *Çizelge 4.6.* daki gibi tanımlanır.

Çizelge 4.5 S nin α işlemi I

γ	b	c	g
b	o	a	l
c	d	o	o
g	d	c	g

Çizelge 4.6 S nin γ işlemi I

α	b	c	g
b	o	a	l
c	d	o	o
g	d	c	g

$\forall x, y, z \in S$ ve $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$

$b\alpha(b\gamma b) = (b\alpha b)\gamma b = 0$ $b\alpha(b\gamma c) = (b\alpha b)\gamma c = 0$

$b\alpha(b\gamma g) = (b\alpha b)\gamma g = 0$ $b\alpha(c\gamma b) = (b\alpha c)\gamma b = b$

$b\alpha(c\gamma c) = (b\alpha c)\gamma c = 0$ $b\alpha(c\gamma g) = (b\alpha c)\gamma g = 0$

$b\alpha(g\gamma b) = (b\alpha g)\gamma b = b$ $b\alpha(g\gamma c) = (b\alpha g)\gamma c = a$

$b\alpha(g\gamma g) = (b\alpha g)\gamma g = l$ $c\alpha(b\gamma b) = (c\alpha b)\gamma b = 0$

$c\alpha(b\gamma c) = (c\alpha b)\gamma c = c$ $c\alpha(b\gamma g) = (c\alpha b)\gamma g = g$

$c\alpha(c\gamma b) = (c\alpha c)\gamma b = 0$ $c\alpha(c\gamma c) = (c\alpha c)\gamma c = 0$

$c\alpha(c\gamma g) = (c\alpha c)\gamma g = 0$ $c\alpha(g\gamma b) = (c\alpha g)\gamma b = 0$

$c\alpha(g\gamma c) = (c\alpha g)\gamma c = 0$ $c\alpha(g\gamma g) = (c\alpha g)\gamma g = 0$

$g\alpha(b\gamma b) = (g\alpha b)\gamma b = 0$ $g\alpha(b\gamma c) = (g\alpha b)\gamma c = c$

$g\alpha(b\gamma g) = (g\alpha b)\gamma g = g$ $g\alpha(c\gamma b) = (g\alpha c)\gamma b = d$

$g\alpha(c\gamma c) = (g\alpha c)\gamma c = 0$ $g\alpha(c\gamma g) = (g\alpha c)\gamma g = 0$

$g\alpha(g\gamma b) = (g\alpha g)\gamma b = d$ $g\alpha(g\gamma c) = (g\alpha g)\gamma c = c$

$g\alpha(g\gamma g) = (g\alpha g)\gamma g = g$

$b\gamma(b\alpha b) = (b\gamma b)\alpha b = 0$ $b\gamma(b\alpha c) = (b\gamma b)\alpha c = 0$

$b\gamma(b\alpha g) = (b\gamma b)\alpha g = 0$ $b\gamma(c\alpha b) = (b\gamma c)\alpha b = b$

$b\gamma(c\alpha c) = (b\gamma c)\alpha c = 0$ $b\gamma(c\alpha g) = (b\gamma c)\alpha g = 0$

$b\gamma(g\alpha b) = (b\gamma g)\alpha b = b$ $b\gamma(g\alpha c) = (b\gamma g)\alpha c = a$

$b\gamma(g\alpha g) = (b\gamma g)\alpha g = l$ $c\gamma(b\alpha b) = (c\gamma b)\alpha b = 0$

$c\gamma(b\alpha c) = (c\gamma b)\alpha c = c$ $c\gamma(b\alpha g) = (c\gamma b)\alpha g = g$

$c\gamma(c\alpha b) = (c\gamma c)\alpha b = 0$ $c\gamma(c\alpha c) = (c\gamma c)\alpha c = 0$

$c\gamma(c\alpha g) = (c\gamma c)\alpha g = 0$ $c\gamma(g\alpha b) = (c\gamma g)\alpha b = 0$

$c\gamma(g\alpha c) = (c\gamma g)\alpha c = 0$ $c\gamma(g\alpha g) = (c\gamma g)\alpha g = 0$

$g\gamma(b\alpha b) = (g\gamma b)\alpha b = 0$ $g\gamma(b\alpha c) = (g\gamma b)\alpha c = c$

$g\gamma(b\alpha g) = (g\gamma b)\alpha g = g$ $g\gamma(c\alpha b) = (g\gamma c)\alpha b = d$

$g\gamma(c\alpha c) = (g\gamma c)\alpha c = 0$ $g\gamma(c\alpha g) = (g\gamma c)\alpha g = 0$

$g\gamma(g\alpha b) = (g\gamma g)\alpha b = d$ $g\gamma(g\alpha c) = (g\gamma g)\alpha c = c$

$g\gamma(g\alpha g) = (g\gamma g)\alpha g = g$

$\boldsymbol{NGSR_4}$) $\forall x, y, z \in S$ ve $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ olmak üzere

$b\alpha(b+b) = b\alpha b + b\alpha b = 0$ $c\alpha(b+b) = c\alpha b + c\alpha b = 0$

$b\alpha(b+c) = b\alpha b + b\alpha c = 0$ $c\alpha(b+c) = c\alpha b + c\alpha c = d$

$b\alpha(b+g) = b\alpha b + b\alpha g = l$ $c\alpha(b+g) = c\alpha b + c\alpha g = d$

$b\alpha(c+b) = b\alpha c + b\alpha b = a$ $c\alpha(c+b) = c\alpha c + c\alpha b = d$

$b\alpha(c+c) = b\alpha c + b\alpha c = 0$ $c\alpha(c+c) = c\alpha c + c\alpha c = 0$

$b\alpha(c+g) = b\alpha c + b\alpha g = b$ $c\alpha(c+g) = c\alpha c + c\alpha g = 0$

$b\alpha(g+b) = b\alpha g + b\alpha b = l$ $c\alpha(g+b) = c\alpha g + c\alpha b = d$

$b\alpha(g+c) = b\alpha g + b\alpha c = b$ $c\alpha(g+c) = c\alpha g + c\alpha c = 0$

$b\alpha(g+g) = b\alpha g + b\alpha g = 0$ $c\alpha(g+g) = c\alpha g + c\alpha g = 0$

$g\alpha(b+b)=g\alpha b+g\alpha b=0$
$g\alpha(b+c)=g\alpha b+g\alpha c=g$
$g\alpha(b+g)=g\alpha b+g\alpha g=c$
$g\alpha(c+b)=g\alpha c+g\alpha b=g$
$g\alpha(c+c)=g\alpha c+g\alpha c=0$
$g\alpha(c+g)=g\alpha c+g\alpha g=d$
$g\alpha(g+b)=g\alpha g+g\alpha b=c$
$g\alpha(g+c)=g\alpha g+g\alpha c=d$
$g\alpha(g+g)=g\alpha g+g\alpha g=0$
$c\gamma(b+b)=c\gamma b+c\gamma b=0$
$c\gamma(b+c)=c\gamma b+c\gamma c=d$
$c\gamma(b+g)=c\gamma b+c\gamma g=d$
$c\gamma(c+b)=c\gamma c+c\gamma b=d$
$c\gamma(c+c)=c\gamma c+c\gamma c=0$
$c\gamma(c+g)=c\gamma c+c\gamma g=0$
$c\gamma(g+b)=c\gamma g+c\gamma b=d$
$c\gamma(g+c)=c\gamma g+c\gamma c=0$
$c\gamma(g+g)=c\gamma g+c\gamma g=0$

$b\gamma(b+b)=b\gamma b+b\gamma b=0$
$b\gamma(b+c)=b\gamma b+b\gamma c=a$
$b\gamma(b+g)=b\gamma b+b\gamma g=l$
$b\gamma(c+b)=b\gamma c+b\gamma b=a$
$b\gamma(c+c)=b\gamma c+b\gamma c=0$
$b\gamma(c+g)=b\gamma c+b\gamma g=b$
$b\gamma(g+b)=b\gamma g+b\gamma b=l$
$b\gamma(g+c)=b\gamma g+b\gamma c=b$
$b\gamma(g+g)=b\gamma g+b\gamma g=0$
$g\gamma(b+b)=g\gamma b+g\gamma b=0$
$g\gamma(b+c)=g\gamma b+g\gamma c=g$
$g\gamma(b+g)=g\gamma b+g\gamma g=c$
$g\gamma(c+b)=g\gamma c+g\gamma b=g$
$g\gamma(c+c)=g\gamma c+g\gamma c=0$
$g\gamma(c+g)=g\gamma c+g\gamma g=d$
$g\gamma(g+b)=g\gamma g+g\gamma b=c$
$g\gamma(g+c)=g\gamma g+g\gamma c=d$
$g\gamma(g+g)=g\gamma g+g\gamma g=0$

$b(\alpha+\gamma)b=b\alpha b+b\gamma b=0$
$b(\alpha+\gamma)g=b\alpha g+b\gamma g=0$
$c(\alpha+\gamma)c=c\alpha c+c\gamma c=0$
$g(\alpha+\gamma)b=g\alpha b+g\gamma b=0$
$g(\alpha+\gamma)g=g\alpha g+g\gamma g=0$

$b(\alpha+\gamma)c=b\alpha c+b\gamma c=0$
$c(\alpha+\gamma)b=c\alpha b+c\gamma b=0$
$c(\alpha+\gamma)g=c\alpha c+c\gamma g=0$
$g(\alpha+\gamma)c=g\alpha c+g\gamma c=0$

$(b+b)\alpha b=b\alpha b+b\alpha b=0$
$(b+b)\alpha g=b\alpha g+b\alpha g=0$
$(b+c)\alpha c=b\alpha c+c\alpha c=a$
$(b+g)\alpha b=b\alpha b+g\alpha b=d$
$(b+g)\alpha g=b\alpha g+g\alpha g=s$

$(b+b)\alpha c=b\alpha c+b\alpha c=0$
$(b+c)\alpha b=b\alpha b+c\alpha b=d$
$(b+c)\alpha g=b\alpha g+c\alpha g=l$
$(b+g)\alpha c=b\alpha c+g\alpha c=m$

$(c+b)\alpha b=c\alpha b+b\alpha b=d$

$(g+b)\alpha b=g\alpha b+b\alpha b=d$

$(c+b)\alpha c = c\alpha c + b\alpha c = a$

$(c+b)\alpha g = c\alpha g + b\alpha g = l$

$(c+c)\alpha b = c\alpha b + c\alpha b = 0$

$(c+c)\alpha c = c\alpha c + c\alpha c = 0$

$(c+c)\alpha g = c\alpha g + c\alpha g = 0$

$(c+g)\alpha b = c\alpha b + g\alpha b = 0$

$(c+g)\alpha c = c\alpha c + g\alpha c = c$

$(c+g)\alpha g = c\alpha g + g\alpha g = g$

$(b+b)\gamma b = b\gamma b + b\gamma b = 0$

$(b+b)\gamma g = b\gamma g + b\gamma g = 0$

$(b+c)\gamma c = b\gamma c + c\gamma c = a$

$(b+g)\gamma b = b\gamma b + g\gamma b = d$

$(b+g)\gamma g = b\gamma g + g\gamma g = s$

$(g+b)\alpha c = g\alpha c + b\alpha c = m$

$(g+b)\alpha g = g\alpha g + b\alpha g = s$

$(g+c)\alpha b = g\alpha b + c\alpha b = 0$

$(g+c)\alpha c = g\alpha c + c\alpha c = c$

$(g+c)\alpha g = g\alpha g + c\alpha g = g$

$(g+g)\alpha b = g\alpha b + g\alpha b = 0$

$(g+g)\alpha c = g\alpha c + g\alpha c = 0$

$(g+g)\alpha g = g\alpha g + g\alpha g = 0$

$(b+b)\gamma c = b\gamma c + b\gamma c = 0$

$(b+c)\gamma b = b\gamma b + c\gamma b = d$

$(b+c)\gamma g = b\gamma g + c\gamma g = l$

$(b+g)\gamma c = b\gamma c + g\gamma c = m$

$(c+b)\gamma b = c\gamma b + b\gamma b = d$

$(c+b)\gamma c = c\gamma c + b\gamma c = a$

$(c+b)\gamma g = c\gamma g + b\gamma g = l$

$(c+c)\gamma b = c\gamma b + c\gamma b = 0$

$(c+c)\gamma c = c\gamma c + c\gamma c = 0$

$(c+c)\gamma g = c\gamma g + c\gamma g = 0$

$(c+g)\gamma b = c\gamma b + g\gamma b = 0$

$(c+g)\gamma c = c\gamma c + g\gamma c = c$

$(c+g)\gamma g = c\gamma g + g\gamma g = g$

$(g+b)\gamma b = g\gamma b + b\gamma b = d$

$(g+b)\gamma c = g\gamma c + b\gamma c = m$

$(g+b)\gamma g = g\gamma g + b\gamma g = s$

$(g+c)\gamma b = g\gamma b + c\gamma b = 0$

$(g+c)\gamma c = g\gamma c + c\gamma c = c$

$(g+c)\gamma g = g\gamma g + c\gamma g = g$

$(g+g)\gamma b = g\gamma b + g\gamma b = 0$

$(g+g)\gamma c = g\gamma c + g\gamma c = 0$

$(g+g)\gamma g = g\gamma g + g\gamma g = 0$

olduğundan

i) $x\gamma(y+z) = x\gamma y + x\gamma z$,

ii) $x\,(\beta+\gamma)z = x\beta z + x\gamma z$,

iii) $(x+y)\gamma z = x\gamma z + y\gamma z$

özellikleri $N_r\ (B)^*S$ de sağlanır.

$\boldsymbol{NGSR_5}$) $\forall x \in S$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ olmak üzere

$o\alpha b = o = b\alpha o \qquad o\gamma b = o = b\gamma o$

$o\alpha c = o = c\alpha o \qquad o\gamma c = o = c\gamma o$

$$o\alpha g = o = g\alpha o \qquad o\gamma g = o = g\gamma o$$

olduğundan $0_S\gamma x = 0_S = x\gamma 0_S$ özelliği $N_r\ (B)^*S$ de sağlanır.

$\boldsymbol{NGSR_6}$) $\forall x \in S$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ olmak üzere

$$f\alpha b = b = b\alpha f \qquad f\gamma b = b = b\gamma f$$
$$f\alpha c = c = c\alpha f \qquad f\gamma c = c = c\gamma f$$
$$f\alpha g = g = g\alpha f \qquad f\gamma g = g = g\gamma f$$

olduğundan $1_s\gamma x = x = x\gamma 1_s$ özelliği $N_r\ (B)^*S$ de sağlanır. Dolayısıyla, $f = 1_S \neq 0_s = o$ elde edilir.

Böylece $(S, +, \cdot)$; $NGSR_1$, $NGSR_2$, $NGSR_3$, $NGSR_4$, $NGSR_5$ ve $NSGR_6$ koşullarını sağlar. Bu durumda; *Tanım 4.1.1.* den $(S, +, \cdot)$, $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ zayıf yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde bir Γ −yarı halkadır. Yani, $(S, +, \cdot)$ bir Γ −yakınlık yarı halkadır.

S bir Γ −yakınlık yarı halkası ve x, S nin bir elemanı olsun. $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere; $y\gamma x = 1_s \in N_r(B)^*S$ $(x\gamma z = 1_s \in N_r(B)^*S)$ olacak biçimde $y \in S$ $(z \in S)$ varsa y (z) elemanına x in sol (sağ) ters elemanı denir. Eğer $x \in$ S hem sol hem de sağda tersinir ise o zaman x'e Γ −yakınlık tersi veya Γ −yakınlık birim elemanı denir.

S, Γ −yakınlık yarı halkalarındaki elemanların bazı temel özellikleri her zaman S, Γ −yarı halkasında ki gibi değildir. $N_r(B)^*S$ bir Γ −yarı halka gibi dikkate alınırsa o zaman S, Γ −yakınlık yarı halkasında elemanların temel özellikleri benzer biçimde gösterilir.

Tanım 4.2.3. $S, \mathcal{O} - \mathcal{O}'$ üzerinde bir Γ −yarı halka, $r \leq |B|$ olmak üzere; $B_r \subseteq \mathcal{F}, B \subseteq \mathcal{F}$ ve "$\sim_{Br}$" de $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. Bu durumda, $\forall x, y \in S$ ve $\forall \gamma, \beta \in \Gamma$ olmak üzere; $x \sim_{Br} y$ ve $\gamma \sim_{Br} \beta$ olduğunda $\forall x, y \in S$ ve $\forall x, y \in \Gamma$

$$(x + b) \sim_{Br} (y + b) \qquad (\alpha + \gamma) \sim_{Br} (\alpha + \beta)$$

$$(b + x) \sim_{Br} (b + y) \qquad (\gamma + \alpha) \sim_{Br} (\beta + \alpha)$$

$$(x\alpha b) \sim_{Br} (y\alpha b) \qquad (b\alpha x) \sim_{Br} (b\alpha y)$$

sağlanırsa "$\sim_{Br}$" bağıntısına $S\ \Gamma -$yakınlık yarı halkasında bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı denir.

Lemma 4.2.4. S bir $\Gamma -$yakınlık yarı halkası olsun. Eğer "$\sim_{Br}$" bağıntısı S üzerinde bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı ise $\forall x, y \in S$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$

$$[x]_{Br} + [y]_{Br} \subseteq [x+y]_{Br}, \quad [\beta]_{Br} + [\gamma]_{Br} \subseteq [\beta+\gamma]_{Br}$$

ve

$$[x]_{Br}\, \alpha [y]_{Br} \subseteq [x\, \alpha\, y]_{Br}$$

dir.

İspat: $z \in [x]_{Br} + [y]_{Br}$ olsun. Bu durumda $z = a + b$; $a \in [x]_{Br}$, $b \in [y]_{Br}$ olur. Buradan $x \sim_{Br} a$ ve $y \sim_{Br} b$ dir. Böylece, hipotezden $(x+y) \sim_{Br} (a+y)$ ve $(a+y) \sim_{Br} (a+b)$ elde edilir. Dolayısıyla $(x+y) \sim_{Br} (a+b) \Longrightarrow z = a+b \in [x+y]_{Br}$ olduğundan

$$[x]_{Br} + [y]_{Br} \subseteq [x+y]_{Br}$$

dir.

$\alpha \in [\beta]_{Br} + [\gamma]_{Br}$ olsun. Bu durumda $\alpha = a + b$; $a \in [\beta]_{Br}$, $b \in [\gamma]_{Br}$ olur ve buradan $\beta \sim_{Br} a$ ve $\gamma \sim_{Br} b$ dir. O halde, hipotezden $(\beta+\gamma) \sim_{Br} (a+\gamma)$ ve $(a+\gamma) \sim_{Br} (a+b)$ elde edilir.

Dolayısıyla $(\beta+\gamma) \sim_{Br} (a+b) \Longrightarrow \alpha = a+b \in [\beta+\gamma]_{Br}$ olduğundan

$$[\beta]_{Br} + [\gamma]_{Br} \subseteq [\beta+\gamma]_{Br}$$

elde edilir.

$z \in [x]_{Br}\, \alpha [y]_{Br}$ olsun. $z = a\alpha b$; $a \in [x]_{Br}$, $\alpha \in \Gamma$, $b \in [x]_{Br}$ dir. Böylece $x \sim_{Br} a$ ve $y \sim_{Br} b$ olur.

Hipotezden $(x\alpha y) \sim_{Br} (a\alpha y)$ ve $(a\alpha y) \sim_{Br} (a\alpha b) \Longrightarrow (x\alpha y) \sim_{Br} (a\alpha b)$ elde edilir. Buradan $z = \mathrm{a}\, \alpha\, b \in [x\alpha y]_{Br}$ olur. Dolayısıyla

$$[x]_{Br}\, \alpha\, [y]_{Br} \subseteq [x\alpha y]_{Br}$$

dir.

Tanım 4.2.5. S bir Γ $-$yakınlık yarı halkası, $B \subseteq \mathcal{F}$ ve $r \leq |B|$ olmak üzere; $B_r \subseteq \mathcal{F}$ ve "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ ve $\mathcal{O}'$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. Buna göre $\forall x, y \in S$ ve $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$

$$[x]_{Br} + [y]_{Br} = [x + y]_{Br}, \qquad [\beta]_{Br} + [\gamma]_{Br} = [\beta + \gamma]_{Br}$$

ve

$$[x]_{Br}\, \alpha\, [y]_{Br} = [x\, \alpha\, y]_{Br}$$

ise o zaman "$\sim_{B_r}$" ye S Γ $-$yakınlık yarı halkasında bir tam kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı denir.

S bir Γ $-$yakınlık yarı halka olsun. X ve Y; S nin alt kümeleri olmak üzere

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ ve } y \in Y\}$$

ve

$$X\Gamma Y = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i y_i \mid x_i \in X, \gamma_i \in \Gamma, y_i \in Y;\ n \in N \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Lemma 4.2.6. S bir Γ $-$yakınlık yarı halkası olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $X, Y \subseteq S$ ise $(N_r(B)^*X) + (N_r(B)^*Y) \subseteq N_r(B)^*(X + Y)$,

ii) $X, Y \subseteq S$ ise $(N_r(B)^*X)\Gamma(N_r(B)^*Y) \subseteq N_r(B)^*(X\Gamma Y)$.

İspat: i) $x \in (N_r(B)^*X) + (N_r(B)^*Y)$ alalım. Bu durumda $x = a + b$; $a \in N_r(B)^*X$, $b \in N_r(B)^*Y$ dır. Böylece, $a \in N_r(B)^*X \Longrightarrow [a]_{Br} \cap X \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, y \in [a]_{Br} \cap X \Longrightarrow$ $y \in [a]_{Br}$ ve $y \in X$ ve $b \in N_r(B)^*Y \Longrightarrow [b]_{Br} \cap Y \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, z \in [b]_{Br} \cap Y \Longrightarrow z \in$ $[a]_{Br}$ ve $z \in Y$ dir. *Lemma 4.2.4.* den $w = y + z \in [a]_{Br} + [b]_{Br} \subseteq [a + b]_{Br}$ dır. Dolayısıyla $w \in [a + b]_{Br}$ ve $w \in X + Y$ olur ve buradan $w \in [a + b]_{Br} \cap (X + Y)$ dir. O halde $[a + b]_{Br} \cap (X + Y) \neq \emptyset \Longrightarrow x = a + b \in N_r(B)^*(X + Y)$ ve dolayısıyla

$$(N_r(B)^*X) + (N_r(B)^*Y) \subseteq N_r(B)^*(X + Y)$$

elde edilir.

ii) $x \in (N_r(B)^*X)\Gamma(N_r(B)^*Y)$ alalım. $a_i \in N_r(B)^*X$, $\gamma_i \in \Gamma$, $b_i \in N_r(B)^*Y$, $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere;

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i b_i$$

dir. Böylece, $a_i \in N_r(B)^*X \Longrightarrow [a_i]_{Br} \cap X \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, y_i \in [a_i]_{Br}$ve $y_i \in X$ $(1 \leq i \leq n)$ dir. Ayrıca, $b_i \in N_r(B)^*Y \Longrightarrow [b_i]_{Br} \cap Y \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, z_i \in [b_i]_{Br}$ ve $z_i \in Y$ $(1 \leq i \leq n)$ dir. Buna göre; *Lemma 4.2.4.* ten $y_i\gamma_i z_i \in [a_i]_{Br}\gamma_i[b_i]_{Br} \subseteq [a_i\gamma_i b_i\,]_{Br}$ $(1 \leq i \leq n)$ dir. O halde,

$$w = \sum_{i=1}^{n} y_i\gamma_i z_i \in \left[\sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i b_i\right]_{Br} = [x]_{Br}$$

ve

$$w = \sum_{i=1}^{n} y_i\gamma_i z_i \in X\Gamma Y$$

elde edilir. Buradan $w \in [x]_{Br} \cap (X\Gamma Y)$ olur. Bu durumda, $[x]_{Br} \cap (X\Gamma Y) \neq \emptyset \Longrightarrow x \in N_r(B)^*(X\Gamma Y)$ ve dolayısıyla

$$(N_r(B)^*X)\Gamma(N_r(B)^*Y) \subseteq N_r(B)^*(X\Gamma Y)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.7. S bir Γ yakınlık yarı halkası "$\sim_{Br}$", S üzerinde bir tam kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı ve X, Y; S nin boş olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $(N_r(B)_*X) + (N_r(B)_*Y) \subseteq (N_r(B)_*(X+Y)$,

ii) $(N_r(B)_*X)\Gamma(N_r(B)_*Y) \subseteq (N_r(B)_*(X\Gamma Y)$.

İspat: i) $x \in (N_r(B)_*X) + (N_r(B)_*Y)$ alalım. $x = a + b$ olacak biçimde $a \in (N_r(B)_*X)$ ve $b \in (N_r(B)_*Y)$ dir. $a \in N_r(B)_*X \Longrightarrow [a]_{Br} \subseteq X$ ve $b \in N_r(B)_*Y \Longrightarrow [b]_{Br} \subseteq Y$ olur. Bu durumda

$$[a]_{Br} + [b]_{Br} \subseteq X + Y$$

dir. Gereçten, $c \in [a]_{Br} + [b]_{Br} \Longrightarrow c = d + e; d \in [a]_{Br}$, $e \in [b]_{Br}$ dir. Böylece $[a]_{Br} \subseteq X$ ve $[b]_{Br} \subseteq Y$ olduğundan $d \in X$ ve $e \in Y$ olur ve buradan $d + e = c \in$

$X+Y$ olur. "$\sim_{Br}$" tam kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı olduğundan $[a]_{Br}+[b]_{Br}=[a+b]_{Br}\subseteq X+Y$ dir. Bu durumda $a+b=x\in N_r(B)_*(X+Y)$ olur ve dolayısıyla

$$(N_r(B)_*X)+\ (N_r(B)_*Y)\subseteq (N_r(B)_*(X+Y)$$

elde edilir.

ii) $x\in (N_r(B)_*X)\Gamma(N_r(B)_*Y)$ alalım. $a_i\in N_r(B)_*X$, $\gamma_i\in\Gamma$, $b_i\in N_r(B)_*Y$ $(1\le i\le n)$ olmak üzere;

$$x=\sum_{i=1} a_i\gamma_i b_i$$

olur. Buradan $a_i\in N_r(B)_*X\Rightarrow [a_i]_{Br}\subseteq X$ ve $b_i\in N_r(B)_*Y\Rightarrow [b_i]_{Br}\subseteq Y$ dir. Bu durumda, $x_i\in[a_i]_{Br}$ ve $y_i\in[b_i]_{Br}$ olacak biçimde x_i ve y_i $(1\le i\le n)$ elemanları vardır. Böylece "$\sim_{Br}$" tam kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı olduğundan *Tanım 4.2.5.* den $x_i\gamma_i y_i\in[a_i\gamma_i b_i]_{Br}=[a_i]_{Br}\,\gamma_i[b_i]_{Br}$ $(1\le i\le n)$ olur. Buradan

$$\sum_{i=1} x_i\gamma_i y_i\in\left[\sum_{i=1} a_i\gamma_i b_i\right]_{Br}=[x]_{Br}\subseteq X\Gamma Y$$

elde edilir ve dolayısıyla $x\in (N_r(B)_*(X\Gamma Y)$ dır. Yani;

$$(N_r(B)_*X)\Gamma(N_r(B)_*Y)\subseteq (N_r(B)_*(X\Gamma Y)$$

bulunur.

Uyarı 4.2.8. S bir Γ yakınlık yarı halka olsun. $(\Gamma,+)$, O' üzerinde bir değişmeli monoid grup olduğundan Δ ve Ω; Γ nın boş kümeden farklı iki alt kümesi olmak üzere

$$(N_r(B)^*\Delta)+(N_r(B)^*\Omega)\subseteq N_r(B)^*(\Delta+\Omega)$$

dır.

Tanım 4.2.9. S bir Γ −yakınlık yarı halka ve A, S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

i) A+$A\subseteq (N_r(B)^*A)$ ve A$\Gamma A\subseteq (N_r(B)^*A)$ ise A ya S nin bir alt Γ −yakınlık yarı halkası denir.

ii) $(N_r(B)^*A)+(N_r(B)^*A)\subseteq N_r(B)^*A$ ve $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A)\subseteq N_r(B)^*A$ ise A ya S nin bir üst-yakın alt Γ −yakınlık yarı halkası denir.

Teorem 4.2.10. S bir Γ −yakınlık yarı halka olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $\emptyset \neq A \subseteq S, A + A \subseteq A$ ve $A\Gamma A \subseteq A$ ise A, S nin üst-yakın alt Γ −yakınlık yarı halkasıdır.

ii) A, S nin bir alt Γ −yakınlık yarı halkası ve $N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ ise A, S nin bir üst-yakın alt Γ −yakınlık yarı halkasıdır.

İspat: **i)** $\emptyset \neq A \subseteq S, A + A \subseteq A$ ve $A\Gamma A \subseteq A$ alalım. *Lemma 4.2.6.(i)-(ii)* den

$$(N_r(B)^*A) + (N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*(A + A)$$

ve

$$(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*(A\Gamma A)$$

elde edilir. Öte yandan *Teorem 3.3.2.(v)* den $N_r(B)^*(A + A) \subseteq N_r(B)^*A$ ve $N_r(B)^*(A\Gamma A) \subseteq N_r(B)^*A$ dır. Bu durumda

$$(N_r(B)^*A) + (N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$$

ve

$$(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$$

olur ve dolayısıyla A, S nin üst-yakın alt Γ −yakınlık yarı halkasıdır.

ii) A, S nin bir alt Γ −yakınlık yarı halkası olduğundan $A + A \subseteq N_r(B)^*A$ ve $A\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A$ olur. Böylece *Teorem 3.3.2.(v)* den

$$N_r(B)^*(A + A) \subseteq N_r(B)^*(N_r(B)^*A)$$

ve

$$N_r(B)^*(A\Gamma A) \subseteq N_r(B)^*(N_r(B)^*A)$$

olur. Hipotezden

$$N_r(B)^*(A + A) \subseteq N_r(B)^*A$$

ve

$$N_r(B)^*(A\Gamma A) \subseteq N_r(B)^*A$$

elde edilir. Böylece *Lemma 4.2.6.* dikkate alınırsa

$$(N_r(B)^*A) + (N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$$

ve

$$(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$$

olur ve böylece A, S nin bir üst-yakın alt Γ −yakınlık yarı halkasıdır.

Tanım 4.2.11. S bir Γ −yakınlık yarı halka ve $A \neq S$ olmak üzere; A, S nin bir alt Γ −yakınlık yarı halkası olsun. Bu durumda

i) Eğer $A\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$ $(S\Gamma A \subseteq N_r(B)^*A)$ ise A ya S nin bir sağ (sol) Γ −ideali denir.

ii) Eğer $(N_r(B)^*A)\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$ $(S\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A)$ ise A ya S nin bir sağ (sol) üst-yakın Γ −ideali denir.

Teorem 4.2.12. S bir Γ −yakınlık yarı halkası olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) Eğer $\emptyset \neq A \subseteq S$, $A + A \subseteq A$ ve $A\Gamma S \subseteq A$ $(S\Gamma A \subseteq A)$ ise o zaman A, S nin bir üst-yakın sağ (sol) Γ −idealidir.

ii) Eğer A, S nin sağ (sol) Γ −ideali ve $N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ ise o zaman A ya S nin bir üst-yakın sağ (sol) Γ −idealidir.

İspat: i) $\emptyset \neq A \subseteq S$, $A + A \subseteq A$ ve $A\Gamma S \subseteq$ A alalım. *Lemma 4.2.6.(i)* den

$$(N_r(B)^*A) + (N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*(A + A)$$

bulunur ve ayrıca *Lemma 4.2.6.(ii)* ve *Teorem 3.3.2.(i)* kullanılırsa

$$(N_r(B)^*A)\Gamma S \subseteq (N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*S) \subseteq N_r(B)^*(A\Gamma S)$$

elde edilir. Öte yandan *Teorem 3.3.2.(v)* den $N_r(B)^*(A + A) \subseteq N_r(B)^*A$ ve $N_r(B)^*(A\Gamma S) \subseteq N_r(B)^*A$ olur. Bu durumda

$$(N_r(B)^*A) + (N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$$

ve

$$(N_r(B)^*A)\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$$

olur ve dolayısıyla A, S nin bir üst-yakın sağ Γ −idealidir.

ii) A, S nin sağ Γ −ideali olduğundan $A + A \subseteq N_r(B)^*A$ ve $A\Gamma S \subseteq N_r(B)^*A$ olur. Böylece *Teorem 3.3.2.(v)* den

$$N_r(B)^*(A + A) \subseteq N_r(B)^*(N_r(B)^*A)$$

ve

$$N_r(B)^*(A\Gamma S) \subseteq N_r(B)^*(N_r(B)^*A)$$

olur. Hipotezden

$$N_r(B)^*(A+A) \subseteq N_r(B)^*A$$

ve

$$N_r(B)^*(A\Gamma S) \subseteq N_r(B)^*A$$

elde edilir. Böylece *Lemma 4.2.6.* dikkate alınırsa

$$(N_r(B)^*A) + (N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*A$$

ve

$$(N_r(B)^*A)\Gamma S) \subseteq N_r(B)^*A$$

olur ve dolayısıyla A, S nin bir üst-yakın sağ Γ −idealidir.

Teorem 4.2.13. S bir Γ −yakınlık yarı halkası ve I bir indeks kümesi olmak üzere; $\{A_i | i \in I\}$; S Γ −yakınlık halkasın ideallerin bir kümesi olsun. Bu durumda

i) $N_r(B)^*(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} N_r(B)^*A_i$ ise $\bigcap_{i\in I} A_i$, S nin bir Γ −idealidir.

ii) $\bigcup_{i\in I} A_i$, S nin bir Γ −idealidir.

İspat: i) $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ alalım. Bu durumda $\forall i \in I$ $x, y \in A_i$ dır. $\forall i \in I$ A_i, S nin Γ −idealleri olduğundan $\forall i \in I$ $x + y \in N_r(B)^*A$ dir. Böylece, $x + y \in \bigcap_{i\in I} N_r(B)^*A_i$ ve hipotezden $x + y \in N_r(B)^*(\bigcap_{i\in I} A_i)$ olur. Benzer şekilde, her $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, $s \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $x\gamma s, s\gamma x \in N_r(B)^*(\bigcap_{i\in I} A_i)$ dır. Buradan $\bigcap_{i\in I} A_i$; S nin bir Γ −idealidir.

ii) $x, y \in \bigcup_{i\in I} A_i$ alalım. Bu durumda $\exists i \in I$ $x \in A_i$ veya $\exists j \in I$ $y \in A_j$ dır. Buradan $x, y \in A_i$ veya $x, y \in A_j$ olur ve ayrıca A_i ve A_j; S nin Γ −ideali olduğundan $x + y \in N_r(B)^*A_i$ veya $x + y \in N_r(B)^*A_j$ dır. Böylece $x + y \in \bigcup_{i\in I} N_r(B)^*A_i$ olur ve dolayısıyla *Teorem 3.3.2.(ii)* den $x + y \in N_r(B)^*(\bigcup_{i\in I} A_i)$ elde edilir.

Benzer şekilde, $\forall x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, $\forall s \in S$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ $x\gamma s, s\gamma x \in \mathrm{N_r(B)^*}(\bigcup_{i\in I} A_i)$ bulunur. O halde; $\bigcup_{i\in I} A_i, S$ nin bir Γ −idealidir.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi genel olarak; S nin Γ −ideallerinin ara kesiti, S nin bir Γ −ideali olmayabilir.

Örnek 4.2.14. $U = \left\{ [a_{ij}]_{2x3} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$$o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$\mathcal{O} = \{o, a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n\}$ algılanabilen nesneler kümesi ve

$U' = \left\{ [a_{ij}]_{3x2} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ için

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere; $\mathcal{O}' = \{\theta, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \delta, \sigma\}$ algılanabilir nesneler kümesi, $r = 1$, $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının bir kümesi, $S = \{a, b, c, e\} \subset \mathcal{O}$ $A_1 = \{a, b\} \subseteq S$, $A_2 = \{b, c\} \subset S$ ve $\Gamma = \{\gamma, \lambda\} \subseteq \mathcal{O}'$ olsun. Çıkarım fonksiyonları

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\},$$

$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

olmak üzere; aşağıdaki (*Çizelge 4.7*) gibi tanımlansın.

Çizelge 4.7 S nin çıkarım fonksiyonları II

	o	a	b	c	d	e	f	g	h	l	k	m	n
φ_1	α_1	α_2	α_2	α_1	α_5	α_2	α_2	α_3	α_2	α_1	α_5	α_3	α_1
φ_2	α_5	α_1	α_5	α_1	α_1	α_5	α_4	α_1	α_1	α_4	α_5	α_4	α_6
φ_3	α_3	α_2	α_2	α_4	α_4	α_2	α_3	α_3	α_4	α_1	α_1	α_1	α_4

Ayrıca; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$$\varphi_1 : \mathcal{O}' \longrightarrow V_1' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O}' \longrightarrow V_2' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\},$$
$$\varphi_3 : \mathcal{O}' \longrightarrow V_3' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

olmak üzere; aşağıdaki (*Çizelge 4.8.*) gibi verilsin.

Çizelge 4.8 Γ nin çıkarım fonksiyonları II

	θ	α	β	γ	λ	μ	δ	σ
φ_1	α_2	α_2	α_3	α_2	α_1	α_3	α_2	α_3
φ_2	α_1	α_3	α_3	α_5	α_1	α_2	α_5	α_5
φ_3	α_3	α_3	α_2	α_2	α_4	α_3	α_2	α_4

Şimdi $\mathcal{O}$ elemanlarının "$\sim_{Br}$" ayırt edilemezlik bağıntısına göre yakın denklik sınıflarını belirleyelim.

$$[o]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_1(o) = \alpha_1\} = \{o, c, l, m\}$$
$$= [c]_{\varphi_1} = [l]_{\varphi_1} = [m]_{\varphi_1},$$
$$[a]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_1(a) = \alpha_2\} = \{a, b, e, f, h\}$$
$$= [b]_{\varphi_1} = [e]_{\varphi_1} = [f]_{\varphi_1} = [h]_{\varphi_1},$$
$$[d]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_1(d) = \alpha_5\} = \{d, k\}$$
$$= [k]_{\varphi_1},$$
$$[g]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_1(x) = \varphi_1(f) = \alpha_3\} = \{g, m\}$$
$$= [m]_{\varphi_1}.$$

Buradan $\xi_{\varphi_1} = \{[o]_{\varphi_1}, [a]_{\varphi_1}, [d]_{\varphi_1}, [g]_{\varphi_1}\}$ elde edilir.

$$[o]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_2(x) = \varphi_2(o) = \alpha_5\} = \{o, b, e, k\}$$
$$= [b]_{\varphi_2} = [e]_{\varphi_2} = [k]_{\varphi_2},$$
$$[a]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_2(x) = \varphi_2(a) = \alpha_1\} = \{a, c, d, g, h\}$$
$$= [c]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2},$$
$$[f]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_2(x) = \varphi_2(d) = \alpha_4\} = \{f, l, m\}$$
$$= [l]_{\varphi_2} = [m]_{\varphi_2},$$
$$[n]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_2(x) = \varphi_2(n) = \alpha_6\} = \{n\}.$$

Böylece $\xi_{\varphi_2} = \{[o]_{\varphi_2}, [a]_{\varphi_2}, [f]_{\varphi_2}, [n]_{\varphi_2}\}$ bulunur.

$$[o]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_3(x) = \varphi_3(o) = \alpha_3\} = \{o, f, g\}$$
$$= [f]_{\varphi_3} = [g]_{\varphi_3},$$
$$[a]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_3(x) = \varphi_3(a) = \alpha_2\} = \{a, b, e\}$$
$$= [b]_{\varphi_3} = [e]_{\varphi_3},$$
$$[c]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_3(x) = \varphi_3(c) = \alpha_4\} = \{c, d, h, n\}$$
$$= [d]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3} = [n]_{\varphi_3},$$
$$[k]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O} | \varphi_3(x) = \varphi_3(k) = \alpha_1\} = \{k, l, m\}$$
$$= [l]_{\varphi_3} = [m]_{\varphi_3}.$$

O halde; $\xi_{\varphi_3} = \{[o]_{\varphi_3}, [a]_{\varphi_3}, [c]_{\varphi_3}, [k]_{\varphi_3}\}$ dir. Algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $r = 1$ için $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ olarak bulunur. O halde

$$N_r(B)^* S = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap S \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$
$$= [o]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_1} \cup [o]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3} \cup [c]_{\varphi_3}$$
$$= \{o, c, l, m\} \cup \{a, b, e, f, h\} \cup \{o, b, e, k\} \cup \{a, c, d, g, h\} \cup \{a, b, e\} \cup \{c, d, h, n\}$$
$$= \{o, a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n\}$$

elde edilir. $S = \{a, b, c, e\}$ kümesi üzerinde, matrislerdeki " + " işlemi dikkate alınırsa o zaman " + " işlemin işlem tablosu aşağıdaki *Çizelge 4.9.* da verilen işlem tablosu olur.

Çizelge 4.9 S nin toplama işlemi II

$+$	a	b	c	e
a	o	e	h	b
b	e	o	l	a
c	h	l	o	g
e	b	a	g	o

Bu durumda, $\mathcal{O}$ üzerinde $(S, +)$, $0_s = o$ birim elemanlı bir değişmeli monoiddir.

Şimdi, $\mathcal{O}'$ elemanlarını "$\sim_{Br}$" ayırt edilemezlik bağıntısına göre yakın denklik sınıflarını belirleyelim.

$$[\theta]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_1(x) = \varphi_1(\theta) = \alpha_2\} = \{\theta, \alpha, \gamma, \delta\}$$
$$= [\alpha]_{\varphi_1} = [\gamma]_{\varphi_1} = [\delta]_{\varphi_1},$$
$$[\beta]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_1(x) = \varphi_1(\beta) = \alpha_3\} = \{\beta, \mu, \sigma\},$$
$$= [\mu]_{\varphi_1} = [\sigma]_{\varphi_1},$$
$$[\lambda]_{\varphi_1} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_1(x) = \varphi_1(\lambda) = \alpha_1\} = \{\lambda\}.$$

Buradan $\xi_{\varphi_1} = \{[\theta]_{\varphi_1}, [\beta]_{\varphi_1}, [\lambda]_{\varphi_1}\}$ elde edilir.

$$[\theta]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_2(x) = \varphi_2(\theta) = \alpha_1\} = \{\theta, \lambda\}$$
$$= [\lambda]_{\varphi_2},$$
$$[\alpha]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_2(x) = \varphi_2(\alpha) = \alpha_3\} = \{\alpha, \beta\}$$
$$= [\beta]_{\varphi_2},$$
$$[\gamma]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_2(x) = \varphi_2(\gamma) = \alpha_5\} = \{\gamma, \delta, \sigma\}$$
$$= [\delta]_{\varphi_2} = [\sigma]_{\varphi_2},$$
$$[\mu]_{\varphi_2} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_1(x) = \varphi_1(\mu) = \alpha_2\} = \{\mu\}.$$

Böylece $\xi_{\varphi_2} = \{[\theta]_{\varphi_2}, [\alpha]_{\varphi_2}, [\gamma]_{\varphi_2}, [\mu]_{\varphi_2}\}$ bulunur.

$$[\theta]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_3(x) = \varphi_3(\theta) = \alpha_3\} = \{\theta, \alpha, \mu\}$$
$$= [\alpha]_{\varphi_3} = [\mu]_{\varphi_3},$$
$$[\beta]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_3(x) = \varphi_3(\beta) = \alpha_2\} = \{ \beta, \gamma, \delta\}$$
$$= [\gamma]_{\varphi_3} = [\delta]_{\varphi_3},$$
$$[\lambda]_{\varphi_3} = \{x \in \mathcal{O}' | \varphi_3(x) = \varphi_3(\lambda) = \alpha_4\} = \{\lambda, \sigma\},$$
$$= [\sigma]_{\varphi_3}.$$

O halde; $\xi_{\varphi_3} = \{[\theta]_{\varphi_3}, [\beta]_{\varphi_3}, [\lambda]_{\varphi_3}\}$ olur. Algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlar kümesi $r = 1$ için $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$N_r(B)^* \,\Gamma = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap \Gamma \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i}$$
$$= [\theta]_{\varphi_1} \cup [\lambda]_{\varphi_1} \cup [\theta]_{\varphi_2} \cup [\gamma]_{\varphi_2} \cup [\beta]_{\varphi_3} \cup [\lambda]_{\varphi_3}$$
$$= \{\theta, \alpha, \gamma, \delta\} \cup \{\lambda\} \cup \{\theta, \lambda\} \cup \{\gamma, \delta, \sigma\} \cup \{\beta, \gamma, \delta\} \cup \{\lambda, \sigma\}$$
$$= \{\theta, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \delta, \sigma\}$$

elde edilir. $\Gamma = \{\gamma, \lambda\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki *Çizelge 4.10.* daki işlem tablosunu dikkate alınsın.

Çizelge 4.10 Γ nin toplama işlemi II

$+$	γ	λ
γ	θ	δ
λ	δ	θ

Bu durumda, $\mathcal{O}'$ üzerinde $(\Gamma, +)$, $0_\Gamma = \theta$ birim elemanlı bir değişmeli monoiddir. Aşağıdaki *Çizelge 4.11.* ve Çizelge *4.12.* deki işlem tabloları dikkate alınırsa

Çizelge 4.11 S nin γ işlemi II

γ	a	b	c	e
a	a	b	o	e
b	o	o	a	o
c	c	d	o	k
e	a	b	a	e

Çizelge 4.12 S nin λ işlemi II

λ	a	b	c	e
a	a	b	o	e
b	o	o	a	o
c	c	d	o	k
e	a	b	a	e

$S, \mathcal{O} - \mathcal{O}'$ zayıf yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde bir $\Gamma -$ yarı halkadır. Üstelik, benzer şekilde

$$N_1(B)^*A_1 = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap A_1 \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i} = \{o, a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$$

ve

$$N_1(B)^*A_2 = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap A_2 \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i} = \{o, a, b, c, d, e, f, g, h, k, l\}$$

elde edilir. Yukarıdaki *Çizelge 4.11.* ve *Çizelge 4.12.* işlem tablolarına göre A_1 ve A_2; S nin birer $\Gamma -$ idealleridir. Ayrıca

$$N_1(B)^*(A_1 \cap A_2) = \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap (A_1 \cap A_2) \neq \emptyset} [x]_{\varphi_i} = \{o, a, b, e, f, h, k\}$$

dır. Bu durumda $b \in (A_1 \cap A_2) = \{b\}$, $\gamma \in \Gamma$ ve $c \in S$ alınırsa $c\gamma b = d \notin N_1(B)^*(A_1 \cap A_2)$ dır. Buradan $A_1 \cap A_2$; S nin bir $\Gamma -$ideali değildir.

4.3. Gamma Yakınlık Yarı Halkasının Asal İdealleri

Bu kısım boyunca aksi belirtilmedikçe $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{Br}, \mathrm{N_r})$ ve $(\mathcal{O}', \mathcal{F}, \sim_{Br}, \mathrm{N_r})$ iki farklı zayıf yakınlık yaklaşım uzayları olmak üzere; S, $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ üzerinde bir $\Gamma -$yarı halka olarak alınacaktır.

Tanım 4.3.1. S bir $\Gamma -$yakınlık yarı halka, $A, A_1,$ A_2 ve P; S nin $\Gamma -$idealleri olmak üzere;

$$A_1\Gamma A_2 \subseteq N_r(B)^*P \;\; (\, A\Gamma A \subseteq N_r(B)^*P\,)$$

olduğunda $A_1 \subseteq P$ veya $A_2 \subseteq P$ ($A \subseteq P$) ise P ye S nin Γ −asal (Γ −yarı asal) ideali denir.

Tanım 4.3.2. S bir Γ −yakınlık yarı halka, A, A_1, A_2 P; S nin $\Gamma -$ idealleri olmak üzere;

$$(N_r(B)^*A_1)\Gamma(N_r(B)^*A_2) \subseteq N_r(B)^*P \; (\, (N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*P\,)$$

olduğunda $N_r(B)^*A_1 \subseteq P$ veya $N_r(B)^*A_2 \subseteq P$ ($N_r(B)^*A \subseteq P$) ise P ye S nin bir üst-yakın Γ −asal (Γ −yarı asal) ideali denir.

Teorem 4.3.3. S bir Γ −yakınlık yarı halka, sırasıyla A_1, A_2 ve P, $N_r(B)^*(N_r(B)^*A_1) = N_r(B)^*A_1$, $N_r(B)^*(N_r(B)^*A_2) = N_r(B)^*A_2$ ve $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin Γ −idealleri olsun. P, S nin bir Γ −asal ideali ve $(N_r(B)^*A_1)\Gamma(N_r(B)^*A_2) \subseteq N_r(B)^*P$ ise o zaman P, S nin bir üst-yakın Γ −idealidir.

İspat: P, $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin bir Γ −ideali olduğundan *Teorem 4.2.12.(ii)* den P, S nin üst-yakın Γ −idealidir. Farz edelim ki $N_r(B)^*A_1 \nsubseteq P$ ve $N_r(B)^*A_2 \nsubseteq P$ olacak biçimde $(N_r(B)^*A_1)\Gamma(N_r(B)^*A_2) \subseteq N_r(B)^*P$ olsun. Bu durumda $x \in N_r(B)^*A_1, x \notin P$ ve $y \in N_r(B)^*A_2, y \notin P$ olacak biçimde $x, y \in S$ elemanları vardır. Böylece $[x]_{Br} \cap A_1 \neq \emptyset$ ve $[y]_{Br} \cap A_2 \neq \emptyset \Rightarrow$ $a \in [x]_{Br} \cap A_1$ ve $b \in [y]_{Br} \cap A_2$ olacak biçimde $a, b \in S$ elemanları vardır. O halde $a \in [x]_{Br}, a \in A_1$ ve $b \in [y]_{Br}, b \in A_2$ olur. Böylece $x\sim_{Br}a, a \in A_1$ ve $y\sim_{Br}b, b \in A_2$ elde edilir. "$\sim_{Br}$", S üzerinde bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı ve $A_1,\ A_2$; S nin Γ −idealleri olduğundan

$$x\gamma y\sim_{Br} a\gamma b, a\gamma b \in (N_r(B)^*A_1) \cap (N_r(B)^*A_2)$$

dir. Böylece $a\gamma b \in [x\gamma y]_{Br}$ olduğundan

$$a\,\gamma\, b \in [x\gamma y]_{Br} \cap ((N_r(B)^*A_1) \cap (N_r(B)^*A_2)\,)$$

olur ve buradan $[x\gamma y]_{Br} \cap ((N_r(B)^*\, A_1) \cap (N_r(B)^*A_2)) \neq \emptyset$ dır. Dolayısıyla $x\gamma y \in N_r(B)^*((N_r(B)^*A_1) \cap (N_r(B)^*A_2))$ dır. Böylece, *Teorem 3.3.2.(vii)* den $x\gamma y \in N_r(B)^*(N_r(B)^*A_1)$ ve $x\gamma y \in N_r(B)^*(N_r(B)^*A_2)$ olur ve hipotezden $x\gamma y \in N_r(B)^*A_1$ ve $x\gamma y \in N_r(B)^*A_2$ dır. Buradan $(x\gamma y)^2 = (x\gamma y)\beta(x\gamma y) \in (N_r(B)^*A_1)\Gamma(N_r(B)^*A_2) \subseteq N_r(B)^*P$ dır ve dolayısıyla $(x\gamma y)^2 \in N_r(B)^*P$ elde edilir. $P,\ S$ nin Γ $-$asal ideali olduğundan $x\gamma y \in P$ olur. Bu ise varsayım ile çelişir. O halde; $N_r(B)^*A_1 \subseteq$ P veya $N_r(B)^*A_2 \subseteq$ P dir.

Teorem 4.3.4. S bir Γ $-$yakınlık yarı halka, sırasıyla A ve P; $N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ ve $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin Γ $-$idealleri olsun. Eğer P, S nin Γ $-$yarı asal ideali ve $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*P$ ise P, S nin bir üst-yakın Γ $-$yarı asal idealidir.

İspat: P, S nin $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak biçimde bir Γ $-$ideali olduğundan *Teorem 4.2.12.(ii)* den P, S nin bir üst-yakın Γ $-$idealidir. Varsayalım ki $N_r(B)^*A \nsubseteq P$ olacak biçimde $(N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*P$ olsun. Bu durumda $x \in N_r(B)^*A$ ve $x \notin P$ olacak biçimde en az bir x elemanı vardır. Buradan $[x]_{Br} \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow a \in [x]_{Br} \cap A \Longrightarrow a \in [x]_{Br}$ ve $a \in A \Longrightarrow\ x \sim_{Br} a,\ a \in A$ dır. Böylece "$\sim_{Br}$" bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı ve A, S nin Γ $-$ideali olduğundan $x\gamma x \sim_{Br} a\gamma a,\ a\gamma a \in N_r(B)^*A \Longrightarrow a\gamma a \in [x\gamma x]_{Br}$ ve $a\gamma a \in N_r(B)^*A$ elde edilir. Buradan $[x\gamma x]_{Br} \cap (N_r(B)^*A) \neq \emptyset \Longrightarrow x\gamma x \in N_r(B)^*(N_r(B)^*A) = N_r(B)^*A$ bulunur. O halde $(x\gamma x)^2 = (x\gamma x)\beta(x\gamma x) \in (N_r(B)^*A)\Gamma(N_r(B)^*A) \subseteq N_r(B)^*P \Longrightarrow (x\gamma x)^2 \in N_r(B)^*P$ dir. $P,\ S$ nin Γ $-$yarı asal ideali olduğundan $x\gamma x \in P$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde; varsayımımız yanlıştır. $N_r(B)^*A \subset P$ dır. Yani; P, S nin bir üst-yakın Γ $-$yarı asal idealidir.

S bir Γ $-$yakınlık yarı halka, A, S nin boş olmayan bir alt kümesi ve $s \in S$ olsun.

$$s\Gamma A = \left\{ \sum_{sonlu} s\gamma_i a_i \mid \gamma_i \in \Gamma \text{ ve } a_i \in A \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Lemma 4.3.5. S bir Γ $-$yakınlık yarı halka ve $a \in S$ olsun. $a\Gamma S$, S nin bir Γ $-$sağ idealidir.

İspatı: $x, y \in a\Gamma S$ alalım. Bu durumda

$$x = \sum_{i=1}^{n} a\,\gamma_i s_i;\ \gamma_i \in \Gamma,\ \ s_i \in S,\ \ n \in \infty^{+}$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} a\,\beta_i s_i{}';\ \ \beta_i \in \Gamma,\ \ s_i{}' \in S,\ \ m \in \infty^{+}$$

biçiminde tanımlanır.

$$x + y = \left(\sum_{i=1}^{n} a\gamma_i s_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} a\beta_i s_i{}'\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m+n} a\,\alpha_i \dot{s}_i \in a\Gamma\,(N_r(B)^{*}S), \qquad \alpha_i \in \Gamma, \qquad \dot{s}_i \in S$$

$x + y = a\gamma z;\ a \in S,\ \ \gamma \in \Gamma$ olacak biçimde bir $z \in (N_r(B)^{*}S)$ vardır. Eğer $z \in N_r(B)^{*}S \Longrightarrow\ [z]_{Br} \cap S \neq \emptyset \Longrightarrow\ c \in [z]_{Br} \cap S$ olacak biçimde $c \in S$ vardır. Buna göre $c \in [z]_{Br}$ ve $c \in S$ olur. Buradan $z{\sim_{Br}}c,\ c \in S$. "$\sim_{Br}$" S üzerinde bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı olduğundan $a\gamma z{\sim_{Br}}\, a\gamma c; c \in S,\ \gamma \in \Gamma \Longrightarrow a\gamma c \in [a\gamma z]_{Br}$ ve $a\gamma c\ \in a\Gamma S$ olur. Dolayısıyla $[a\gamma z]_{Br} \cap (a\Gamma S) \neq \emptyset\ \Longrightarrow\ a\gamma z \in N_r(B)^{*}(a\Gamma S)$ dır. Böylece $x + y \in N_r(B)^{*}(a\Gamma S)$ olur ve $(a\Gamma S) + (a\Gamma S) \subseteq N_r(B)^{*}(a\Gamma S)$ elde edilir.

Şimdi $x \in a\Gamma S$ alalım. Böylece

$$x = \sum_{sonlu} a\beta_i s_i;\ \beta_i \in \Gamma, s_i \in S$$

Buradan

$$x\gamma s = \left(\sum_{sonlu} a\beta_i s_i{}'\right)\gamma s = \sum_{sonlu} a\beta_i(s_i'\gamma s) \in a\Gamma(N_r(B)^{*}S)$$

ve böylece her $s \in S$ ve her $\alpha, \gamma \in \Gamma$ için $x\gamma s = a\alpha b$ olacak biçimde $b \in N_r(B)^{*}S$ vardır. Eğer $b \in N_r(B)^{*}S \Longrightarrow [b]_{Br} \cap S \neq \emptyset \Longrightarrow \exists z \in [b]_{Br} \cap S \Longrightarrow z \in [b]_{Br}$ ve $z \in S \Longrightarrow b{\sim_{Br}}z,\ z \in S$ elde edilir. "$\sim_{Br}$", S üzerinde bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı olduğundan $a\alpha b{\sim_{Br}}a\alpha z,\ \ z \in S, \alpha \in \Gamma$ elde edilir. Buradan $a\alpha z \in [a\alpha b]_{Br}$ ve $a\ \alpha\ z \in a\Gamma S \Longrightarrow [a\alpha b]_{Br} \cap (a\Gamma S) \neq \emptyset$ ve dolayısıyla $a\alpha S = a\alpha b \in N_r(B)^{*}(a\Gamma S)$ bulunur. Böylece $a\Gamma$S, S nin bir Γ $-$idealidir.

Teorem 4.3.6. S bir Γ −yakınlık yarı halka ve I herhangi bir indeks kümesi olmak üzere; $\{P_i | \, i \in I\}$, S nin bir Γ −asal (Γ −yarı asal) ideallerin bir kümesi olsun. Bu durumda

i) Eğer $N_r(B)^* \, (\bigcap_{i \in I} P_i) = \bigcap_{i \in I} N_r(B)^* P_i$ ise $\bigcap_{i \in I} P_i$, S nin bir Γ −asal (Γ −yarı asal) idealidir.

ii) Eğer $\bigcup_{i \in I} P_i$, S nin bir Γ −asal (Γ −yarı asal) idealidir.

İspat: i) *Teorem 4.2.13.(i)* den $\bigcap_{i \in I} P_i$, S nin bir Γ −idealidir. Şimdi, $A_1 \Gamma A_2 \subseteq N_r(B)^* \, (\bigcap_{i \in I} P_i)$ olacak biçimde S nin bir A_1 ve A_2 idealleri var olsun. Hipotezden $A_1 \Gamma A_2 \subseteq N_r(B)^* (\bigcap_{i \in I} P_i) \implies \forall i \in I \quad A_1 \Gamma A_2 \subseteq N_r(B)^* P_i$ dir. $\forall i \in I \quad P_i$ ler S nin Γ −asal ideali olduğundan $\forall i \in I \quad A_1 \subseteq P_i$ veya $A_2 \subseteq P_i$ dir. Böylece $A_1 \subseteq \bigcap_{i \in I} P_i$ veya $A_2 \subseteq \bigcap_{i \in I} P_i$ olur. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} P_i$, S nin Γ −asal idealidir.

ii) $A_1 \Gamma A_2 \subseteq N_r(B)^* (\bigcap_{i \in I} P_i)$ olacak biçimde S nin A_1 ve A_2 idealleri var olsun. *Teorem 4.1.13.(ii)* den $\bigcup_{i \in I} P_i$, S nin bir Γ −idealidir. Böylece *Teorem 3.3.2.(ii)* den $A_1 \Gamma A_2 \subseteq \bigcup_{i \in I} N_r(B)^* \, P_i$ dir. Buradan en az $j \in I$ için $A_1 \Gamma A_2 \subseteq N_r(B)^* P_j$ dır. Her $i \in I$ için P_i ler S nin Γ −asal ideali olduğundan $A_1 \subseteq P_j$ veya $A_2 \subseteq P_j$, $j \in I$ ve buradan $A_1 \subseteq \bigcup_{i \in I} P_i$ veya $A_2 \subseteq \bigcup_{i \in I} P_i$ olur. Böylece $\bigcup_{i \in I} P_i$, S nin bir Γ −asal idealidir.

Teorem 4.3.7. S bir Γ −yakınlık yarı halka, P; $N_r(B)^* (N_r(B)^* P) = N_r(B)^* P$ olacak biçimde S nin bir Γ −sağ ideali ve $a, b \in S$ olsun. P, S nin bir Γ −asal sağ ideali ve $a \Gamma S \Gamma b \subseteq N_r(B)^* P$ ise o zaman $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

İspatı: $a, b \in S$ için $a \Gamma S \Gamma b \subseteq N_r(B)^* P$ olsun. P, S nin bir Γ −asal sağ ideali olduğundan hipotez ve *Teorem 4.2.10.(ii)* den $a \Gamma S \Gamma b \Gamma S \subseteq (N_r(B)^* P) \Gamma S \subseteq N_r(B)^* P$ elde edilir. Öte yandan *Lemma 4.2.5* ten $a \Gamma S$ ve $b \Gamma S$, S nin bir Γ −sağ idealleri ve P, S nin bir Γ −asal sağ ideali olduğundan $a \Gamma S \subseteq P$ veya $b \Gamma S \subseteq P$ dir. Her $a, b \in S$ ve her $\gamma, \beta \in \Gamma$ için $a = 1_S \gamma a$ veya $b = 1_S \beta b$ olacak biçimde $1_S \in N_r(B)^* S$ vardır. Böylece $a \in a \Gamma S \subseteq P$ veya $b \in b \Gamma S \subseteq P$ olur. Bu durumda $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

Teorem 4.3.8. S bir Γ −yakınlık yarı halka, P; $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin bir Γ −sağ ideali ve $a \in S$ olsun. P, S nin bir Γ −yarı asal sağ ideali ve $a\Gamma S\Gamma a \subseteq N_r(B)^*P$ ise o zaman $a \in P$ dir.

İspat: $a \in S$ için $a\Gamma S\Gamma a \subseteq N_r(B)^*P$ olsun. P, S nin bir Γ −yarı asal sağ ideali olduğundan hipotez ve *Teorem 4.2.10.(ii)* den $a\Gamma S\Gamma a\Gamma S \subseteq (N_r(B)^*P)\Gamma S \subseteq N_r(B)^*P$ elde edilir. Öte yandan *Lemma 4.2.5* ten $a\Gamma S$, S nin bir Γ −sağ ideali ve P, S nin bir Γ −yarı asal sağ ideali olduğundan $a\Gamma S \subseteq P$ dir. Her $a \in S$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $a = 1_S\gamma a$ olacak biçimde $1_S \in N_r(B)^*S$ vardır. Böylece $a \in a\Gamma S \subseteq P$ olur. Bu durumda $a \in P$ elde edilir ve ispat biter.

Teorem 4.3.9. S bir Γ −yakınlık yarı halka, P; $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin bir Γ −sağ ideali ve $a,\ b \in S$ olsun. Eğer $a\Gamma S\Gamma b \subseteq N_r(B)^*P$ olduğunda $a \in P$ veya $b \in P$ ise o zaman P, S nin bir Γ −asal sağ idealidir.

İspatı: Varsayalım ki A_1 ve A_2; $A_1\Gamma A_2 \subseteq N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin Γ −sağ idealleri ve $A_1 \nsubseteq P$ olsun. Böylece $a \notin P$ olacak biçimde $a \in A_1$ vardır. Keyfi bir $b \in A_2$ için $a\Gamma S\Gamma b = (a\Gamma S)\Gamma b \subseteq (N_r(B)^*A_1)\Gamma b$ dir. Öte yandan $x \in (N_r(B)^*A_1)\Gamma b$ alınırsa o zaman $x = \sum_{i=1} a_i\gamma_i b$; $a_i \in N_r(B)^*A_1,\ \gamma_i \in \Gamma,\ b \in A_2\ (1 \le i \le n)$ dır. Bu durumda $a_i \in N_r(B)^*A_1 \implies [a_i]_{Br} \cap A_1 \neq \emptyset$ dır. Böylece, $c \in [a_i]_{Br} \cap A_1$ olacak biçimde en az bir $c \in S$ vardır. Buradan $c \in [a_i]_{Br}$ ve $c \in A_1 \implies a_i \sim_{Br} c,\ c \in A_1,\ 1 \le i \le n$ "$\sim_{Br}$", S üzerinde bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı olduğundan $(a_i\gamma_i b)\sim_{Br}(c\gamma_i b),\quad c\gamma_i b \in A_1\Gamma A_2 \subseteq N_r(B)^*P,\quad 1 \le i \le n$ dır. Varsayımdan $(a_i\gamma_i b)\sim_{Br}(c\,\gamma_i b),\quad c\,\gamma_i b \in N_r(B)^*P,\quad 1 \le i \le n$ dır. P; $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin bir Γ −sağ ideali olduğundan $(\sum_{i=1} a_i\gamma_i b)\sim_{Br}(\sum_{i=1} c\,\gamma_i b)$, $\sum_{i=1} c\,\gamma_i b \in N_r(B)^*P$ olur. Bundan dolayı

$$\sum_{i=1} c\gamma_i b \in \left[\sum_{i=1} a_i\gamma_i b\right]_{Br}$$

ve

$$\sum_{i=1} c\gamma_i b \in N_r(B)^*P$$

dır. Bu durumda

$$\left[\sum_{i=1} a_i\gamma_i b\right]_{Br} \cap (N_r(B)^*P) \neq \emptyset$$

ve kısaca $[x]_{Br} \cap (N_r(B)^*P) \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece $x \in N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olur ve dolayısıyla $a\Gamma S\Gamma b \subseteq N_r(B)^*P$ elde edilir. Hipotezden ve $a \notin P$ olduğundan $b \in P$ dır. Yani, $A_2 \subseteq P$ dır. *Tanım 4.2.1* den P, S nin bir Γ −asal sağ idealidir.

Teorem 4.3.10. S bir Γ −yakınlık yarı halka, P; $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin bir Γ −sağ ideali ve $a \in S$ olsun. Eğer $a\Gamma S\Gamma a \subseteq N_r(B)^*P$ olduğunda $a \in P$ ise o zaman P, S nin bir Γ −yarı asal sağ idealidir.

İspat: Varsayalım ki A, $A\Gamma A \subseteq N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin bir Γ −sağ ideali olsun. Böylece, keyfi bir $a \in A$ için $a\Gamma S\Gamma a = (a\Gamma S)\Gamma a \subseteq (N_r(B)^*A)\Gamma a$ dir. Öte yandan $x \in (N_r(B)^*A)\Gamma a$ alınırsa o zaman $x = \sum_{i=1} a_i\gamma_i a$; $a_i \in N_r(B)^*A$, $\gamma_i \in \Gamma$, $a \in A$ $(1 \leq i \leq n)$ dır. Bu durumda $a_i \in N_r(B)^*A \Longrightarrow [a_i]_{Br} \cap A \neq \emptyset$ dır. Böylece, $c \in [a_i]_{Br} \cap A$ olacak biçimde en az bir $c \in S$ vardır. Buradan $c \in [a_i]_{Br}$ ve $c \in A \Longrightarrow a_i \sim_{Br} c$, $c \in A$, $1 \leq i \leq n$ olur. "$\sim_{Br}$", S üzerinde bir kongrüent ayırt edilemezlik bağıntısı olduğundan $(a_i\gamma_i a) \sim_{Br} (c\gamma_i a)$ ve $c\gamma_i a \in A\Gamma A \subseteq N_r(B)^*P$, $1 \leq i \leq n$ dır. P, $N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olacak biçimde S nin bir Γ −sağ ideali olduğundan $(\sum_{i=1} a_i\gamma_i a) \sim_{Br} (\sum_{i=1} c\gamma_i a)$, $\sum_{i=1} c\gamma_i a \in N_r(B)^*P$ olur. Bundan dolayı

$$\sum_{i=1} c\gamma_i a \in \left[\sum_{i=1} a_i\gamma_i a\right]_{Br}$$

ve

$$\sum_{i=1} c\gamma_i a \in N_r(B)^*P$$

dır. Bu durumda

$$\left[\sum_{i=1} a_i\gamma_i a\right]_{Br} \cap (N_r(B)^*P) \neq \emptyset$$

ve kısaca $[x]_{Br} \cap (N_r(B)^*P) \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece $x \in N_r(B)^*(N_r(B)^*P) = N_r(B)^*P$ olur ve dolayısıyla $a\Gamma S\Gamma a \subseteq N_r(B)^*P$ elde edilir. Hipotezden $a \in P$ dır. Yani, $A \subseteq P$ dır. *Tanım 4.3.1* den P, S nin bir Γ −yarı asal sağ idealidir.

Tanım 4.3.11. S bir Γ −yakınlık yarı halka, A_1, A_2 ve P; S nin Γ −idealleri olsun. Bu durumda $A_1 \cap A_2 = N_r(B)^*P$ $(A_1 \cap A_2 \subseteq N_r(B)^*P$ olduğunda $A_1 = P$ veya $A_2 = P$ $(A_1 \subseteq P$ veya $A_2 \subseteq P)$ ise P ye S bir Γ −indirgenemez ideali ($\Gamma -$ kuvvetli indirgenemez ideali) denir.

Teorem 4.3.12. S bir Γ −yakınlık yarı halka ve I herhangi bir indeks kümesi olmak üzere; $\{A_i |\ i \in I\}$, S nin bir Γ −ideallerin bir kümesi olsun. $N_r(B)^*(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} N_r(B)^*A_i$ ise o zaman S nin her bir $\Gamma -$ kuvvetli indirgenemez ve Γ −yarı asal ideali S nin bir Γ −asal idealidir.

İspatı: S nin her A_i $(i \in I)$ Γ −ideali için $N_r(B)^*(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} N_r(B)^*A_i$ ve P, S nin bir Γ −kuvvetli indirgenemez ve Γ −yarı asal ideali olsun. S nin keyfi A_1 ve A_2 Γ −idealleri için $A_1\Gamma A_2 \subseteq N_r(B)^*P$ olarak alalım. Bu durumda *Teorem 4.2.13.(i)* den $A_1 \cap A_2$ S nin bir Γ −idealidir. Bundan dolayı

$$(A_1 \cap A_2)^2 = (A_1 \cap A_2)\Gamma(A_1 \cap A_2) \subseteq A\ \Gamma\ B \subseteq N_r(B)^*P$$

olur ve buradan $(A \cap B)^2 \subseteq N_r(B)^*P$ elde edilir. P, S nin bir Γ −yarı asal ideali olduğundan $A_1 \cap A_2 \subseteq P$ dir. Böylece *Teorem 3.3.2.(i)* den $A_1 \cap A_2 \subseteq N_r(B)^*P$ dir. Buradan P, S nin bir Γ −kuvvetli indirgenemez ideali olduğundan $A_1 \subseteq P$ ve $A_2 \subseteq P$ dir. Böylece P, S nin bir Γ −asal idealidir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Tezde, küme teorisi alanında yeni bir yöntem olarak araştırmalara konu olan yakınlık yaklaşım uzayları üzerinde, bir kümenin üst yaklaşımı kullanılarak yeni bir cebirsel yapı ortaya koyma fikri esas alınmıştır. Bu noktadan hareketle zayıf yakınlık yaklaşım uzayları üzerinde gamma yakınlık yarı halkalarının tanımlanması ve teorik özelliklerinin incelenmesi yapılmıştır.

Bu tezdeki sonuçlar özgün olup, tezde elde edilen sonuçlar teorik altyapıyı güçlendirici ve bundan sonra bu alanda yapılabilecek olan diğer araştırmalara kaynak olabilecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

[1] R. Biswas ve S. Nanda, "Rough groups ve rough subgroups", *Bull. Pol. AC. Math.* 42, pp. 251-254, 1994.

[2] R. Chinram and C. Jirojkul, "On bi-Γ −ideals in Γ-semigroups", *Songklanakarin J. Sci. Technol.* 29(1), pp. 231-234, 2007.

[3] B. Davvaz, "Rough sets in a fundamental ring", *Bull. Iranian Math. Soc.* 24(2), pp. 49-61, 1998.

[4] B. Davvaz, "Roughness in rings", *Inform. Sci.* 164(1-4), pp. 147-163, 2004.

[5] J. S. Golan, "Semirings and their applications", *Kluwer Academic Publishers* 1999.

[6] E. İnan and M. A. Öztürk, "Near groups on nearness approximation spaces", *Hacet. J. Math. Stat.* 41(4), pp. 545-558, 2012.

[7] E. İnan and M. A. Öztürk, "Erratum and notes for near groups on nearness approximation spaces", *Hacet. J. Math. Stat.* 43(2), pp. 279-281, 2014.

[8] E. İnan ve M. A. Öztürk, "Nearness semigroups on naerness approximation spaces, *Ann. Fuzzy Math. Inform.* 10(2), pp. 287-297, 2015.

[9] E. İnan, "Algebraic structures on nearness approximation space", PhD Thesis, İnönü University, *Graduate School of Natural and Applied Sciences,* 2015.

[10] T. B. Iwinski, "Algebraic approach to rough sets", *Bull. Pol. AC. Math.* 35, pp. 673-683, 1987.

[11] Y. B. Jun, "Roughhness of gamma-subsemigroups / ideals in gamma-semigroups", *Bull. Korean Math. Soc.* 40(3), pp. 531-536, 2003.

[12] N. Kuroki, "Rough ideals in semigroups", *Inform. Sci.* 100(1-4) (1997), 139-163.

[13] N. Kuroki ve J. N. Monderson, "Structure of rough sets and rough groups", *J. Fuzzy Math.* 5(1), pp. 183-191, 1997.

[14] D. Miao, S. Han, D. Li ve L. Sun, "Rough group, rough subgroup and their properties", *International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular-soft Computing, Springer-Verlag,* Heidelberg, pp. 104-113, 2005.

[15] M. A. Öztürk ve E. İnan, "Soft nearness approximation space", *Fund. Inform.* 124(1), pp. 231-250, 2013.

[16] M. A. Öztürk, Mustafa Uçkun ve E. İnan, "Near group of weak cosets on nearness approximation spaces", *Fund. Inform.* 133, pp. 433-448, 2014.

[17] M. A. Öztürk, İ. Çelik Siner ve Y. B. Jun, "Nearness BCK-Algebras", *Int. J. Open Probl. in Comput. Sci. and Math.* 8(4), pp. 37-57, 2015.

[18] M. A. Öztürk, "Semiring on weak nearness approximation spaces", *Ann. Fuzzy Math. Inform.* 15(3), pp. 227-241, 2018.

[19] M. A. Öztürk, "Prime ideals of gamma semigroups on weak nearness approximation spaces", *Asian-Eur. J. Math.* 12(1), 1950080, 10 pages, 2019.

[20] M. A. Öztürk, Y. B. Jun ve A. İz, "Gamma semigroups on weak nearness approximation spaces", *J. Int. Math. Virtual Inst*. 9, pp. 53-72, 2019.

[21] M. A. Öztürk ve E. İnan, "Nearness rings", *Ann. Fuzzy Math. Inform.,* (in press), 2019.

[22] M. A. Öztürk ve İ. Temur, "Prime ideals of nearness semirings", *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1-Mathematics and Statistics* (in press), 2019.

[23] Z. Pawlak, "Clasification of objects by means of attributes", *Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, Report*, 429, 1981.

[24] Z. Pawlak, "Rough sets", *Int. J. Comput. Inform. Sci.* 11(5), pp. 341-356, 1982.

[25] J. F. Peters, "Near sets: General theory about nearness of objects", *Appl. Math. Sci.* 1(53-56), pp. 2609-2629, 2007.

[26] J. F. Peters, "Near sets: Special theory about nearness of objects", *Fund. Inform*. 75(1-4), pp. 407-433, 2007.

[27] J. F. Peters, "Clasification of perceptual objects by means of features", *Int. J. Info. Technol. Intell. Comput.* 3(2), pp. 1-35, 2008.

[28] J. F. Peters ve S. A. Naimpally, "Applications of near sets", *Notices Amer. Math. Soc*. 59(4), pp. 536-542, 2012.

[29] J. F. Peters, "Near sets: An introduction", *Math. Comput. Sci.* 7(1), pp. 3-9, 2013.

[30] M. M. K. Rao, Γ −semirings-I, *Southeast Asian Bull. of Math*. 19, pp. 49-54, 1995.

[31] M. M. K. Rao," Γ −semirings-II", *Southeast Asian Bull. of Math*. 21, pp. 281-287, 1997.

[32] S. K. Sardar ve U. Dasgupta, "On primitive Γ −semiring", *Novi Sad J. Math*. 30(1), pp. 97-108, 2000.

[33] V. Selvan ve G. Senthil Kumar, "Rough ideals in semirings", *Int. J. Math. Sci. Appl*. 2(2), pp. 557-564, 2012.

[34] M. Wolski, "Perception and classication, A note on near sets and rough sets", *Fund. Inform*. 101 (1-2), pp. 143-155, 2010.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İbrahim Halil BEKMEZCİ
Doğum Yeri : Adıyaman
Doğum Tarihi : 01.07.1983
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ibekmezci02@gmail.com

Eğitim Durumu

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Sayısal	Erdemir Lisesi	2001
Lisans	Matematik	İnönü Üniversitesi	2007
Tezsiz Yüksek Lisans	Matematik Öğretmenliği	Cumhuriyet Üniversitesi	2015