YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZOOTEKNİ ANABİLİM DALI

ALTGRUP SAYILARI FARKLI DENEMELERDE EN YÜKSEK OLABİLİRLİK (EYO) VE EN KÜÇÜK KARELER (EKK) YÖNTEMLERİNİN VARYANS UNSURLARI BAKIMINDAN KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Hikmet ORHAN

JÜRİ ÜYELERİ

BAŞKAN

Doç. Dr. Orhan KARACA

ÜYE

Yrd. Doç. Dr. Hüsnü BARUTOĞLU

ÜYE

Y. Doç. Dr. Sinan BAŞ

TEZ KABUL TARİHİ

05/01/1993

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Tahminleme Metodlarından daha yaygın olarak kullanılan EYO ve EKK yöntemlerinin hangi durumlarda kullanılmasının daha uygun olabileceği araştırılmıştır.

Bu çalışmanın başlamasından bitimine kadar her zaman yardımlarını gördüğüm sayın hocam Yard. Doç. Dr. Hüsnü BARUTOĞLU'na, tezin her aşamasında değerli fikirleriyle katkıda bulunan sayın Prof.Dr. Necati YILDIZ'a, birlikte çalışma ahengini veren bölüm başkanım ve hocam Prof. Dr. Yusuf VANLI ve Doç. Dr. Orhan KARACA'ya çalışmada verilerin kullanılmasına izin verdiği için Dr.Tufan ALTIN'a, istatistik analizler ve değerlendirmelerde teşvik ve yardımlarını esirgemeyen Dr.Hayrettin OKUT'a ve tüm mesai arkadaşlarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Hikmet ORHAN

VAN, 1992

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

ÇİZELGE LİSTESİ

ÖZ

Bu çalışmada, Parametre tahminleyicileri olan En Yüksek Olabilirlik (EYO) ve En Küçük Kareler (EKK) yöntemleri şansa bağlı, sabit ve karışık modellerin sözkonusu olması halinde tahminlenen parametrelerin etkinliği bakımından karşılaştırılmıştır.

Elde edilen sonuçlara göre şansa bağlı faktörlerin sözkonusu olması durumunda EYO yöntemi EKK yöntemine, sabit etkilerin sözkonusu olduğu durumlarda ise EKK yöntemi EYO yöntemine tercih edilmelidir.

ABSTRACT

Comparing of the Maximum Likelihood (ML) and the Least Squares (LS) Methods in Terms of Varyans Components at Unequal Number of Observation in Subclasses.

In this study, The parameter estimator, ML and LS methods, in case of random, fixed and mixed model conditions have been compared in respect of the efficiency of the estimated parameters.

According to results obtained, ML method should be prefered to LS method in the case of random factors and vice versa in the case of fixed effects.

1. GİRİŞ

Bütün araştırmacılar, deneme sırasında meydana gelen çeşitli olaylar nedeniyle eşit sayıda gözlemlerle çalışma imkanına sahip değildirler. Bu sebeble, altsınıf sayıları farklı olan verilerle analizleri yürütmek mecburiyetindedirler. Ayrıca, araştırmacı çalışmasını farklı altsınıf sayılarıyla yürütmek isteyebilir. Bu durum, bilhassa hayvancılıkla ilgili çalısmalarda daha sık görülmektedir (1). Mesela; döllerinin bazı karekterlerini etkilediği düşünülen denemelere tabi tutulan dişi tavşanların döl sayılarını kontrol etmek mümkün değildir veya hayvancılıkla ilgili herhangi bir denemenin yapılması esnasında bu hayvanların bir kısmı deneme dışı bırakılmak mecburiyetinde kalınabilir. Keza herhangi bir tarla denemesinde parsellerin bir veya birkaçının çeşitli sebeblerden dolayı deneme dışı bırakılması gerekebilir. Bundan dolayı, bu denemelerin altgrup sayıları farklı olacaktır. İşte bu farklılıklardan dolayı, konvensiyonel deneme planlarıyla varyans analizlerini tamamlamak bazı zorluklar arzeder (2, 3).

Denemeden elde edilen verilerin tek yönlü sınıflandırılması halinde herhangi bir hesaplama güçlüğü olmadan normal bildiğimiz metodla (tesadüf parselleri deneme planı) analiz yapılabilir. Fakat araştırmaların büyük bir kısmı çok faktörlü olarak düzenlenmektedir. Böyle durumlarda görülen hesaplama zorluklarını azaltmak veya kaldırmak için çeşitli metodlar geliştirilmiştir. Bunlar; En Küçük Kareler (E.K.K.), En Yüksek Olabilirlik (E.Y.O.), Tartılı Kareler Ortalaması, Momentler ve Bayes Metodlarıdır.

Bu çalışma, alt sınıf sayıları farklı denemelerden elde edilen verilerin analizinde en yaygın olarak kullanılan En Küçük Kareler ve En Yüksek Olabilirlik tahminleme metodlarıyla ilgilidir. Bu metodların kullanım alanları, faydalı ve mahsurlu yanları ile özel halleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca, bu metodların Şansa Bağlı (Random), Sabit (Fixed) ve Karışık (Mixed) modeller için parametre tahminleri bakımından birbirine olan üstünlükleri üzerinde de durulmuştur. İki metodu zikredilen özellikler bakımından karşılaştırmak üzere bir uygulama yapılmıştır. Uygulamada kullanılan veriler Yüzüncü Yıl Üniversitesi'nde yapılan bir doktora çalışmasından alınmıştır.

II. LİTERATÜR ÖZETİ

2.1. Tahminleme Metodlarının Genel Özellikleri

İstatistiksel tahminlemenin amacı, örnek istatistiğine dayanarak populasyon parametresinin tahminini yapmaktır (3, 4).

Örneklemelerin yapıldığı populasyonların en önemli özellikleri, bunların gösterdiği dağılışlardır. Bu dağılışlar genel olarak yoğunluk fonksiyonlarıyla tanımlanırlar. Dağılışı bilinen bir populasyonun özellikleri bir yoğunluk fonksiyonuyla özetlenebilmektedir.

X gibi bir şans değişkenine konu olan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ değerleri bir şans örneğini meydana getirsin. Bu örneğin çekildiği populasyonu belirleyen yoğunluk fonksiyonu $f(x;\theta)$ olsun. Burada θ populasyon parametresini göstermektedir. Dikkat edilirse, θ'nın değeri bilinmesi halinde $f(x;\theta)$'nın şekli kesinlik kazanmaktadır. Bu şekilde f fonksiyonunun şekli ve θ parametresinin değerinin bilinmesi ile populas-yonun gösterdiği dağılımın bütün özellikleri belirlenebilir(5).

Populasyonun büyük bir kitle olması sebebiyle çoğu zaman θ parametresinin değeri bilinmez. Bununla birlikte θ parametresi θ_1, θ_2, ..., θ_k gibi birden fazla değerler de alabilir. Ve bunlardan birkaçı veya hiçbirinin değeri bilinmeyebilir. Parametre değerinin bulunması için başvurulacak en iyi yol bunların örnek değerlerinden tahmin edilmesidir. Populasyondan x_1, x_2, ..., x_n gibi bir şans örneği çekilerek parametre (veya parametrelerin) tahmin edilmesine çalışılır.

Parametrenin gerçek değerinin tahmin edilmesine istatistikte "Nokta tahmini" denir (3, 5). Fakat parametrenin gerçek değerinin tahmini çoğu zaman mümkün olmamaktadır. Dolayısıyla bu tahminde belirli bir hata her zaman sözkonusudur (6).

Populasyon parametresi θ'nın tahminlerinin bulunmasında kullanılan metodlardan elde edilen tahminleyiciler çoğu zaman farklı özellikler gösterirler. Dağılımın belirlenmesinde bu özelliklerin önemli rolleri vardır. Tahminleme metodlarında bulunması gereken özellikler aşağıda kısaca özetlenmiştir;

2.1.1. Sapmasız Tahminleyiciler (Unbiased Estimators)

θ parametresinin her durumda gerçek değerini verecek bir tahminleyicinin elde edilmesi söz konusu olamayacağından, bulunan tahminleyicilerin hiç olmazsa "ortalama olarak" parametre değerlerine yaklaşmaları istenir. Başka bir ifadeyle, tahminleyicinin beklenen değerinin, tahminlenen parametre değerine eşit olması istenir. Bu özelliğe sahip olan tahminleyicilere "Sapmasız Tahminleyiciler" denir. Mesela, örnek ortalaması ve varyansının beklenen değerleri sırasıyla, $E(x) = \mu$ ve $E(s^2) = \sigma^2$ olduğundan aritmetik ortalama ve varyans sapmasız tahminleyicilerdir (5, 6, 7).

2.1.2. Kararlı Tahminleyiciler (Consistent Estimators)

Örnek büyüklüğünün artması halinde nokta tahmini, parametreye daha da yaklaşıyorsa ilgili tahminleyici kararlıdır (5, 6). Bu ifade matematiksel olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\lim_{n \to \infty} P(|U_n - \theta| < \epsilon) \to 1$$

Bu ifade de, n büyüdükçe, n'ye bağlı olan U_n istatistiğinin, gerçek parametre θ'nın oldukça küçük bir ϵ komşuluğu bulunması ihtimalinin 1'e yaklaştığını gösterir (4).

Mesela; $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ şans örneğinde, tahminleyici n örnek büyüklüğü olması şartıyla $T_n = t_n(x_1 x_2, \ldots x_n)$ olsun. Mesela, n=1 için $T_1 = t_1(x_1)$; n=2 için $T_2 = t_2(x_1, x_2)$; ve n=3 için $T_3 = t_3(x_1, x_2, x_3)$ dir. Bu tanıma göre örnek varyansı olan $S^2 = (1/n)\Sigma(x_i - \overline{x})^2$ tahminleyicisi,

$$T_n = t_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S^2$$
$$= (1/n)\Sigma(x_i - \overline{x})^2$$

şeklinde gösterilebilir. n'nin aldığı değer büyüdükçe T_n tahminleyicisinin aldığı değerin $T(\theta)$ değerine yaklaşması beklenir. Bu özelliğe sahip olan tahminleyicilere kararlı tahminleyiciler denir. Örnek büyüklüğünün artmasıyla arit-metik ortalama populasyon parametresine daha da yaklaştı-ğından dolayı kararlı bir tahmindir. Yukarıda yapılan tanımların geçerli olması için dağılışın simetrik olması şarttır (4).

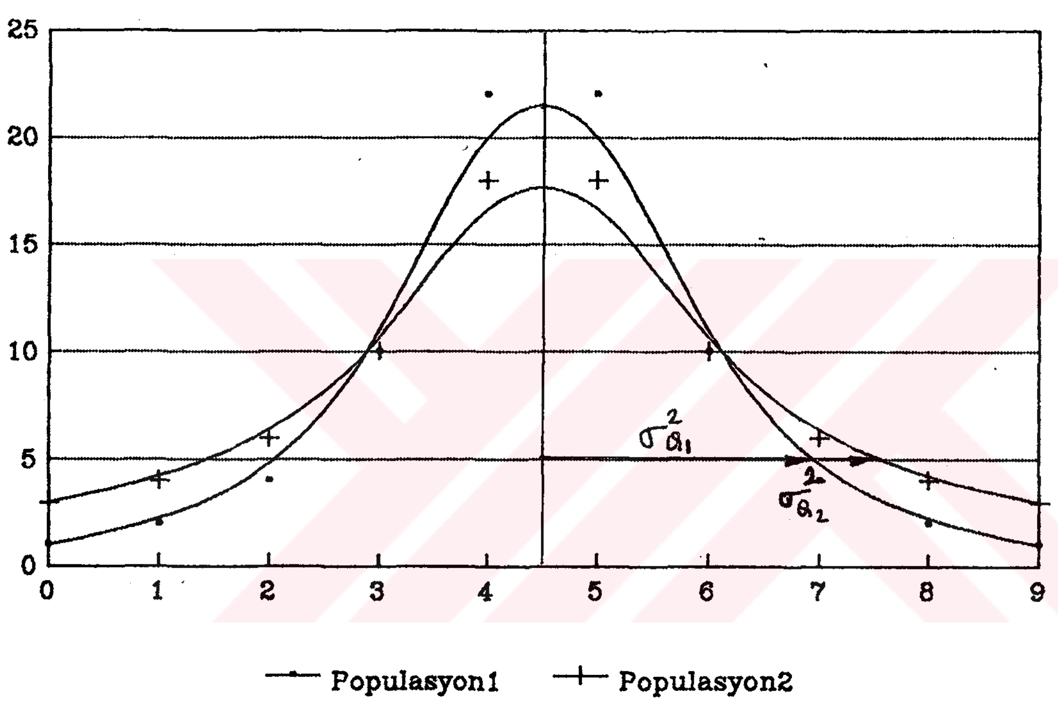
2.1.3. Yeterli Tahminleyiciler (Sufficient Estimators)

Tahminleme problemlerinin bir çoğunda "genel olarak" örneğin taşıdığı bilgilerin özetlenmesine çalışılır. Başka bir ifadeyle örneğin bir fonksiyonu olarak elde edilen bir istatistik ile θ parametresi hakkında bir tahminde bulunulur. θ'nın tahmin edilmesinde kullanılan istatistik, örneğin sahip olduğu bütün bilgileri de ihtiva ediyorsa, o zaman söz konusu istatistiğe veya tahminleyiciye "Yeterli Tahminleyici" denir(3, 4, 6).

$f(x;\theta)$ gibi bir yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanan populasyondan çekilen $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şans örneği θ hakkındaki bilgilerin tümünü kapsar. Örneğin kendisi kullanıldığı takdirde, θ parametresiyle ilgili olarak sahip olunan bilgilerin de tamamı dikkate alınmış demektir. Örneğin, $E(x)= \mu$ olmaktadır. $\bar{x}$ ortalama yerine medyan veya mod kullanılmasıyla μ' yü daha iyi tanımlayacak ilave bilgi sağlamayacaktır. Bu nedenle $\bar{x}$, μ için yeterli bir istatistiktir. Fakat, istatistikte, örnek değerleri yerine bunları iyi bir şekilde özetleyebilecek çeşitli istatistikler kullanılır. Bu istatistikler bilindiği gibi örneğin veya örneği meydana getiren değişkenlerin birer fonksiyonudurlar. Bu tip istatistikler içinde örneğin sahip olduğu bilgilerin tamamına sahip olanları, yeterli istatistik olarak tanımlanır (5, 8).

2.1.4. Etkin Tahminleyiciler (Efficient Estimators)

Nokta tahminleyicilerinin en önemli özelliğidir. Etkinlik iki yada daha fazla istatistiğin karşılaştırılması halinde sözkonusudur. Eğer θ_1 ve θ_2 aynı θ parametresinin iki tahminleyicisi ise, daha küçük varyansa sahip olan tahminleyici en etkin tahminleyici olarak adlandırılır. Bu durum şekil 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1. En Küçük Varyanslı Tahmin

Şekil 1'de $\sigma^2_{\theta_1} < \sigma^2_{\theta_2}$ olduğundan θ_1 daha etkin bir tahminleyicidir (4). Örneğin; $\bar{x} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$ ve $x_{med} \sim N(\mu,\pi\sigma^2/2n)$ olmaktadır. Burada normal dağılış gösteren populasyonda aritmetik ortalamanın ve medyanın kullanılması halinde beklenen değerler verilmektedir. Her iki ölçü birimi kullanıldığında, ikisinde de ortalamanın beklenen değeri μ olmaktadır. Buna karşılık x_{med}'ın varyansı daha büyük olduğundan $\bar{x}$ x_{med}'dan daha etkin bir tahminleyicidir.

Başka bir anlatımla, bir θ_n tahminleyicisi (daha doğrusu, $\{\theta_n\}$

tahminleyicilerinin bir kümesi) aşağıdaki iki şartı sağlaması halinde etkili tahminleyici olduğu söylenir:

1. $\{n(\theta_n - \theta)\}^{1/2}$ ifadesi n'nin örnek büyüklüğünü göstermesi şartıyla, genellikle ortalaması 0 ve varyansı σ^2 olan asimtotik bir dağılım gösterir.

2. Varyans σ^2, birinci şartı sağlayan diğer herhangi bir θ_n' tahminleyicisinin varyansından daha küçüktür(3).

Bu ifadelerden etkinlik kavramının büyük örnek kavramı olduğunu görürüz. Başka bir ifadeyle bir θ tahminleyicisi, $E[\theta-E(\theta)]^2 \le E[\theta'-E(\theta')]^2$ ise $\hat{\theta}$'nın θ''za göre daha küçük varyanslı tahminleyici olduğu söylenir. Burada, θ', θ için herhangi diğer bir tahminleyicidir.

Buradan, en küçük varyansa sahip olan tahminleyicinin en etkin tahminleyici olduğu anlaşılır. Etkin olan bir tahmin limitte kararlı ve sapmasızdır. Ancak sınırlı örnek büyüklükleri için sapmasız olacağı anlamına gelmez. Bir sapmasız tahminleyicinin de mutlaka kararlı olacağı söylenemez (3).

2.2 Tahminleme Metodları

2.2.1 Moment Metodu

Parametrelerin tahmin edilmesinde kullanılan metodlardan biri olan momentler metodu istatistikte çok eskiden beri bilinen bir metoddur. Bu metod, normal dağılışa sahip bir örnekte ortalama ve varyans için E.Y.O. ile aynı tahminleyiciyi verir. Fakat normal olmayan dağılışlar için E.Y.O. ile aynı tahminleyiciyi vermediği gibi, aynı asimtotik etkinliğe de sahip değildir (5, 7). Bu metodun esasını şöyle açıklayabiliriz; parametreleri tahmin edilmek istenen dağılış $f(x;\theta_1,...\theta_k)$ olsun. $\mu_r=E(x^r)$ şeklinde tanımlanan sıfır etrafındaki r'ci momenti μ_r ile gösterelim. Genel olarak μ_r, dağılışın parametrelerinin bir fonksiyonudur. $f(x;\theta_1,...,\theta_k)$ dağılışından çekilen $x_1,...,x_n$ şans örneğince momentler

$m_j=(1/n)\Sigma x_i^j$ $\quad j=1, 2,..., k$

şeklinde gösterilir. Örnek momentleri diye bilinen bu momentlerin μ_j (j=1, 2,..., k)' nin birer tahminleyicisi olarak kabul edilirse,

$\mu_j=m_j$ $\quad j=1, 2,..., k$

şeklinde k tane eşitlik elde edilir. μ_j, k tane paramet-renin $(\theta_1,......, \theta_k)$ bir fonksiyonu olduğundan, sonuç olarak k bilinmeyenli k adet denklem elde edilir. Bu denklemlerin çözülmesiyle, $\theta_1,.....,\theta_k$ 'nin $\hat{\theta}_1,.....,\hat{\theta}_k$ gibi tahminleyicileri elde edilir. Bu tahminleyicilere momentler tahminleyicileri denir(3, 9).

2.2.2. Bayes Tahmin Metodu

x_1, x_2,....., x_n , $f(x,\theta)$ yoğunluk fonksiyonundan çekilen bir örnek olsun. $P(\theta)$, θ'nın yoğunluk fonksiyonu olsun ve $g(x_1, x_2,....., x_n|\theta)$, θ verildiğine göre x_i'in şartlı yoğunluk fonksiyonu olsun. Ayrıca $h(\theta|x_1, x_2,....., x_n)$, x verildiğine göre θ'nın şartlı yoğunluk fonksiyonu ve $L(\theta,\hat{\theta})$ kayıp fonksiyonu olsun. Buradan θ'nın bayes tahminleyicisi;

$$E[L(\theta,\hat{\theta})]=E[R(d,\theta)]= R(d,\theta)P(\theta)d\theta$$

$$= L[d(x_1,x_2,\ldots,x_n);\theta]\ g(x_1,x_2,\ldots,x_n/\theta)dx_1dx_2,\ldots,dx_n]P(\theta)d\theta$$

ile verilen kayıp fonksiyonun beklenen değerini minimum yapan $\theta=d(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ile tanımlanan bir fonksiyondur (5). Sonuç olarak, örnek ve parametrelerin birlikte yoğunluk fonksiyonu bilinmediği fakat şartlı yoğunluk fonksiyonlarının bilindiği durumlarda kullanılır.

2.2.3. Ağırlıklı Kareler Ortalaması Metodu

Temelde en küçük kareler yöntemine dayanan bu yöntem,

$$y_i=m + \beta x_i + e_i$$

Şeklindeki bir model için, herbir altsınıfta eşit sayıda tekerrür bulunması halinde parametreler, bilinen en küçük kareler metoduyla tahminlenebilir, fakat altsınıf sayıları farklı ise ağırlıklı en küçük kareler metodunun kullanılması uygun olabilir. Ağırlıklar, $W_i=1/var(e_i)$ şeklinde tanımlanır. ß'nın ağırlıklı tahmini,

$$\beta=\Sigma W_i(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})/\Sigma W_i(x_i-\bar{x})^2$$

ve örnek varyansı,

$$Var(\beta)=1/\Sigma W_i(x_i-\bar{x})^2$$ dir (2, 10, 11, 12).

2.2.4. Model Özellikleri ve Varyans Komponentlerinin Tahminlenmesi

Model, aralarında fiziki ilişki bulunan bir denklem setidir. Matematiksel deyimlerden yararlanılarak fiziki ilişkinin karakteri belirlenir. Bu ilişki kantitatif veya kalitatif olabilmektedir. Gözlem sonucu elde eldilen veri seti dağılış fonksiyonuna göre istatistik testler yardımıyla analiz edilir.

Verilere uygulanacak istatistik analizin gücü, tanımlanan modelde yer alan etkilerin doğru tespit edilmesine bağlıdır. Etkiler modelde sabit (fixed) yada şansa (random) bağlı olarak yer alırlar (13).

Modelde sadece sabit etkiler bulunduğunda model, "sabit etkiler" (fixed effects) modeli, olmaktadır. Sabit etkilere ait sonuçlar sadece etkilerin çekildiği grup için genelleştirilebilir (14, 15). Sabit etkilere ait doğrusal model;

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + e_{ij}$$

Modelde,

Y_{ij} : i'nci etkiye ait j'nci gözlem değeri,

μ : populasyona ait genel ortalama,

β_i : i'nci sabit etki (sürü, yıl, mevsim, genotip gibi),

e_{ij} : normal dağılış gösteren bağımsız hata değişkenidir

Sabit model eşitlikleri doğrusal model çözümü aşağıdaki gibi gösterilir ;

$$Y = Xb + e$$

Y : (N x 1) boyutunda gözlem vektörü,

X : (N x p) boyutunda sabit etkilere ait desen matrisi,

b : (p x 1) boyutunda bilinmeyen sabit etkiler vektörü,

e : (N x 1) boyutlu ortalaması sıfır, E(e) = 0, varyansı σ^2_ε olan şansa bağlı hata vektörü.

Geniş bir populasyondan şansa bağlı olarak seçilmiş etkiler şansa bağlı olarak kabul edilir. Bu nedenle şansa bağlı etkilerin sonuçları çekildiği populasyon için genelleştirilebilir (14, 16). Şansa bağlı model

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

olarak gösterilirse;

Modelde Y_{ij}, μ ve e_{ij} tanımı sabit modeldeki ile aynıdır.

α_i : şansa bağlı etkilerin vektörünü göstermektedir

Öte yandan sabit ve şansa bağlı etkilerin bir arada bulunduğu modeller, "karışık" (mixed) model olarak bilinir. Karışık modellere ilişkin çözümler Henderson (1949) tarafından yapılmıştır (15, 17, 18). Bir karışık modelin matematiksel ifadesi;

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

şeklinde yazılabilir. Modeldeki ifadeler sabit ve karışık model için verilen matematik ifadelerle aynı olmaktadır.

Modellerde yer alan gözlem değerleri (y) teorik populasyonlardan gelen şans vektörüdür. y teorik populasyonlardan şansa bağlı olarak elde edildiği için ortalama ve varyans gibi parametreleri belli değildir. Bu iki parametre dağılış şeklini belirledikleri için bunların doğru tahminlenmesi önemlidir. Parametre tahminleme işleminde modeldeki etkilere göre farklı yöntemler uygulanır.

Karışık modelde, sabit etkilerin varyasyona kaynak oluşturması beklenmez. Bu nedenle temel varyasyon kaynağı şansa bağlı etkilerden kaynaklanır. Şansa bağlı etkilerin birbirlerinden bağımsız olduğu aralarında kovaryans (korelasyon) bulunmadığı varsayılmaktadır (15, 19, 20, 21). Bu özellikler esas alındığında karışık modelin doğrusal özelliği,

$$Y = Xb + Zu + e$$

şeklinde yazılabilir. Bu modelde yer alan terimlerden,

Y , X ve b sabit model eşitliğindeki tanımlamalarla aynıdır.

Z : (N x q) boyutunda, şansa bağlı etkilere ait desen matrisini

u : (q x 1) boyutunda, şansa bağlı etkiler vektörünü

e : (N x 1) boyutlu ortalaması sıfır, $E(e) = 0$ varyans kovaryans matrisi R_0, olan gözlenemeyen şansa bağlı hata vektörünü ve beklenen değer ifadesini temsil etmektedir.

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= Var(Xb + Zu + e) \\
&= Var(Xb) + Var(Zu) + Var(e) + \text{Kovaryanslar}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(y, u') &= Cov(Zu + e, u') \\
&= Cov(Zu, u') + Cov(e, u') \\
&= ZG = C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(Y, e') &= Cov(Zu + e, e') \\
&= Cov(Zu, e') + Cov(e, e') \\
&= R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= Var(Xb + Zu + e) = Var(Zu + e) \\
&= Var(Zu) + Var(e) + Z\,Cov(u,e') + Cov(u',e)Z'
\end{aligned}$$

$$= Z\, Var(u)\, Z' + Var(e) + 0$$

$$= ZGZ' + R$$

$E(u) = 0$ $Var(u) = G$ $Cov(u, e) = 0$

$E(e) = 0$ $Var(e) = R$ $Var(X) = 0$

$$Var \begin{vmatrix} u \\ e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G & 0 \\ 0 & R \end{vmatrix}$$

olarak yazılabilir (19, 22, 23, 24).

Bu nedenle karışık modelin matris notasyonu ile parametrelerin tahminlenmesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{vmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} b \\ u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X'R^{-1}Y \\ Z'R^{-1}Y \end{vmatrix}$$

Bu açıklamalardan sonra gözlem değerleri (Y) ve şans değişkenlerinin (u, e) varyansları aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$V \begin{vmatrix} Y \\ u \\ e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y \\ u \\ e \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} V & Z'G & R \\ GZ' & G & 0 \\ R & 0 & R \end{vmatrix}$$

Biyolojik denemelerde şansa bağlı etki, u, n*n boyutunda bir matrise sahiptir. Modeldeki şansa bağlı etkilerin varyans-kovaryans değeri G ile gösterilirse uygulamada R ve G değerleri bilinmediğinden tahminleme yapılır. Bunu yaparken, R veya G 'nin diyagonal olduğu;

diyagonal elemanların birbirine eşit olduğu ve diyagonal dışı elemanların sıfır olduğu kabul edilir. Bu açıklamaların matris notasyonu ile gösterilmesi şu şekilde olmaktadır (25, 26).

$$G = Var(u) = \begin{vmatrix} \sigma_u^2 & & & 0 \\ & \sigma_u^2 & & \\ & & \sigma_u^2 & \\ & & & . \\ & 0 & & & . \end{vmatrix} = I\sigma_u^2$$

$$R = Var(e) = \begin{vmatrix} \sigma_e^2 & & & 0 \\ & \sigma_e^2 & & \\ & & \sigma_e^2 & \\ & & & . \\ & 0 & & & . \end{vmatrix} = I\sigma_e^2$$

Bilinen En Küçük Kareler -Ordinary Least Squares (OLS) yönteminde Var(Y) = Var(e) = R ve R = $I\sigma_e^2$ olarak yazılabilir. Karışık model için belirlenen matrisin her iki tarafı $I\sigma_e^2$ ile çarparsak,

$$I\sigma_e^2 * \begin{vmatrix} X'(I\sigma_e^2)^{-1}X & X'(I\sigma_e^2)^{-1}Z \\ Z'(I\sigma_e^2)^{-1}X & Z'(I\sigma_e^2)^{-1}Z + G^{-1} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} b \\ u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X'(I\sigma_e^2)^{-1}Y \\ Z'(I\sigma_e^2)^{-1}Y \end{vmatrix}$$

matrisi,

$$= \begin{vmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + G^{-1}I\sigma_e^2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} b \\ u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{vmatrix}$$

şeklini alır (15, 26, 27).

Yukarıdaki eşitliklerden de görüldüğü gibi temelde $G^{-1}\sigma_e^2$ hariç bu iki matris birbirlerinin aynısıdır. Bu nedenle

Henderson'nın geliştirdiği Karışık Model Eşitliği -Mixed Model Equation- (MME) ile OLS çözümleri birbirlerine benzer olmaktadırlar.

OLS eşitliğinde b ve u parametreleri için çözümü yapıldığında,

$$\begin{vmatrix} b \\ u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + G^{-1} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{vmatrix}$$

olur ve eşitlikteki b değeri En iyi Linear Sapmasız Tahminleyici, Best Linear Unbiased Estimation (BLUE); u değeri ise En iyi Linear Sapmasız Tahminleyici, Best Linear Unbiased Prediction (BLUP) tahminleyicileri olur (21).

Bu işlemler sonucunda amaç, en iyi tahminleyiciyi belirlemektir. Tahminlenen parametrelerin en küçük hatalı olması amaçlanır. Bu nedenle sapmasız tahminleyici bulmak için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu araştırmada E.K.K ve E.Y.O. yöntemleri varyans komponentleri bakımından karşılaştırılmıştır.

2.2.5. En Küçük Kareler Metodu

2.2.5.1. En Küçük Kareler Metodunun Gelişimi ve Genel Özellikleri

İstatistikte parametrelerin tahmin edilmesinde en çok kullanılan metodlardan biri olan en küçük kareler metodu ve onun linear özelliklerini Anderson'nun (28) bildirdiğine göre, ilk olarak Legendre (1806) ve Gauss (1809) birbirlerinden habersiz olarak geliştirmişlerdir. Linear modeller teorisi prensibi başta astronomide olmak üzere diğer bilim dallarında da varyans komponentleri formüllerinin çıkarılmasında kullanılmıştır (29). Henderson' nun bildirdiğine göre (17), Brandt (1933) ve Yates (1933,1934) altsınıfları oransız olan çok faktörlü sınıflamalara en küçük kareler analiz metodunu uygulamışlardır. Brandt'ın metodu 2*n sınıflaması için sınırlandırılmıştır. Yates ise p*q sınıflamasına uygun olan genişletmeyi yapmış ve genel hipotez testi teorisi ve örnekleme hatasının hesaplanmasını göstermiştir. Wilk (1938) ve Hazel (1946) iki-yönlü sınıflamadan daha fazla olan deneme desenleri için en küçük kareler analizinin kullanımını tanıtmışlardır(18).

E.K.K tahminleme metodu hata kareler toplamının minumum yapılması esasına göre geliştirilmiştir (30, 31, 32). İlk bulunduğundan beri araştırmacılar tarafından yaygın olarak kullanılmaya başlanmış ve hala kullanılmaktadır. Çünkü, ihtiyaçlara önemli ölçüde cevap verebilmektedir. Bu metodla sapmasız tahminleme yapılabilmektedir. Ayrıca, tahminleme metodlarında bulunması arzu edilen diğer şartları da sağlayabilmektedir.

Parametre tahminlenmesinde en küçük kareler metodunun tercih edilmesinin sebebleri Henderson tarafından şu şekilde açıklanmıştır (17, 18) :

1. Tahminleyicilerin sapmasız olduğu varsayılır, yani, $E(\hat{Q})=Q$. Burada, Q tahminlenen parametredir ve $\hat{Q}$, Q'nın en küçük kareler tahminleyicisidir.
2. Herbir tahminleyici için örnekleøe hatası, seçilen diğer bir linear kombinasyondan elde edilebilecek tahmin-

leyicinin hata değerinden daha küçük olduğu varsayılmaktadır.

3. Bu yöntem ile tahminleyici hesaplamaları her zaman yapılabilir.
4. Bu yöntem ile tahminlenecek parametre için güvenilir varyans-kovaryans matrisinin elde edilmesi mümkündür.
5. Parametre tahminleri, e_{ijk} (hata)'nın dağılışı hususunda herhangi bir varsayıma bağlı olmaksızın yapılabilir.
6. e_{ijk} normal dağılışlı olduğu varsayılması halinde, hipotez testleri F dağılışı kullanılarak yapılabilir. Ayrıca, bu durumda en küçük kareler tahminleri EYO tahminleriyle aynıdır ve önem testleri olabilirlik oran (likelihood ratio) testleriyle benzerlik içindedir.
7. Bu metod, oransız altsınıf frekanslı veri setinden maksimum bilgi elde edilmesini sağlamaktadır.

2.2.5.2. Matematik Model, E.K.K Denklemleri ve Kısıtlamaların Uygulanması

$Y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + ab_{ij} + e_{ijk}$ gibi bir modelde;

$(i= 1,2,\ldots,p$ ve $j= 1,2,\ldots,q)$

μ, a_i, b_j ve ab_{ij} sabit etkiler olduğu ve e_{ijk} $E(e_{ijk})= 0$ ve $E(e_{ijk})^2= \sigma_e^2$ olan bir populasyondan alındığı varsayılsın. Sözkonusu parametrelerin $(\mu,\ \sigma^2)$ tahminlenmesi ve bunların hipotez testlerinin yapılabildiğinin varsayılması durumunda en küçük kareler tahminlerine ihtiyaç duyulur.

En küçük kareler prensibi hata kareler toplamının minimize edilmesini sağlayan parametre tahminleyicisidir(1, 32, 33).

$$Y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + ab_{ij} + e_{ijk}$$

modelinde verilen μ, a_i, b_j ve ab_{ij} 'nin en küçük kareler tahminleri,

$$\Sigma e_{ijk}^2 = \Sigma(y_{ijk} - \mu - a_i - b_j - ab_{ij})^2$$

değerinin minimize edilmesi ile elde edilir. Bu ise herbir parametreye göre e_{ijk}'nın kısmi türevinin alınıp sıfıra eşitlenerek çözülmesiyle gerçekleşir. Böylece, verilen model için E.K.K.eşitlikleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{array}{ll}
\mu: & n_{..}\mu + n_{i.}a_i + n_{.j}b_j + n_{ij}ab_{ij} = y_{...} \\
a_i: & n_{i.}\mu + n_{i.}a_i + n_{ij}b_j + n_{ij}ab_{ij} = y_{i..} \\
b_j: & n_{.j}\mu + n_{.j}b_j + n_{ij}a_i + n_{ij}ab_{ij} = y_{.j.} \\
ab_{ij}: & n_{ij}\mu + n_{ij}a_i + n_{ij}b_j + n_{ij}ab_{ij} = y_{ij.}
\end{array}$$

Eşitliklere dikkatli bakıldığında, μ denklemindeki a_i 'nin katsayıları toplamı b_j 'nin katsayıları toplamına ve bu toplam da μ 'nün katsayısına eşittir. a_i denklemindeki b_j 'nin katsayıları toplamı a_i katsayısına, a_i ve b_j denklemlerine ait sağ yan elemanları toplamı $y_{ij.}$' nin genel toplamına ($y_{...}$) eşittir. Benzer şekilde, ab_{ij} denklemleri toplamı a_i denklemleri toplamına ve ab_{ij} denklemleri toplamı b_j denklemleri toplamına eşittir. Bu denklemlerin çözülebilmesi veya katsayı matrisinin inversinin alınabilmesi için a_i ve

b_q 'ye kısıtlamaların uygulanması gerekmektedir. Çünkü, EKK denklemleri, sayı olarak serbestlik derecesine indirgenmedikçe, bu denklemlerden birtek çözüm elde edilemez (1).

EKK denklemlerine matematiksel olarak çeşitli kısıtlamalar uygulanabilir. Burada, bunlardan ençok kullanılan ikisi üzerinde durulmuştur. Birincisi, $a_p = b_q = ab_{iq} = ab_{pj} = ab_{pq} = 0$ şeklindeki kısıtlamadır. Bu kısıtlamanın uygulanmasıyla sıfıra eşitlenen katsayıların sıra ve sütun olarak yok edilmesi gereklidir. Sözkonusu kısıtlamalarla ilgili denklemlerden tek bir çözüm elde edilebildiği halde

$$
\begin{aligned}
\mu &= a_i + a_p + b_q + \bar{ab}_{pq} \\
a_i &= a_i - a_p + ab_{iq} - ab_{pq} \\
b_j &= b_j - b_q + ab_{ij} + ab_{pq} \\
ab_{ij} &= ab_{ij} - ab_{iq} - ab_{pj} + ab_{pq}
\end{aligned}
$$

olduğundan, katsayılara ait bu tahminler tamamıyla tatmin edici değildir (1). Bundan dolayı bu kısıtlamaların kullanılması katsayı karışmasına neden olduğu söylenebilir. Ayrıca,

$\Sigma_i^{p-1} a_i y_{i.} + \Sigma_j^{q-1} b_j y_{.j} + \Sigma_i^{p-1}\Sigma_j^{q-1} ab_{ij} y_{ij}$ ' den elde edilen genel redüksiyon kareler toplamları sapmalı olmakta ve alt-invers matrislerinden bulunan çeşitli tesirlere ait katsayı tahminleri de hatalı olmaktadır. Bu sebeble, bu metodun interaksiyonun bulunmadığı durumlarda kullanılması tavsiye edilmektedir (1).

İnteraksiyon bulunduran modeller için ana tesirlere ait katsayılar toplamını ve herbir sıra ve sütun üzerinden

ab_{ij} 'ye ait katsayıların toplamını sıfır yapan kısıtlama ($\Sigma\ a_i = \Sigma b_j = \Sigma_i ab_{ij} = \Sigma_j ab_{ij} = 0$) 'nın uygulanması tercih edilebilir. a_i, b_j, ab_{ij} ve e_{ij} populasyon ortalamasından ayrılışlar olarak ifade edildiğinden matematik modelin kendisi bu kısıtlamaların uygulanması gerektirir (2).

2.2.5.3. E.K.K. ile Varyans Unsurlarının Tahmin Edilmesi

Bilindiği gibi, varyans unsurları faktörlerin şansa bağlı varsayılması halinde sözkonusu olmaktadır.

Bu çalışmada modellerin şansa bağlı, sabit ve karışık olmaları durumları inceleneceğinden Henderson metodları dikkate alınmıştır.

Şansa bağlı faktörlerin analiz yöntemi olarak bilinen Henderson-I yönteminin özellikleri şu şekilde açıklanabilir: Gözlenen varyasyonun çeşitli faktörler bakımından analizi, bu faktörlerin istatistiki olarak önemli tesire sahip olup olmadıkları hakkında bilgi verir. Varyasyon kaynaklarına ait kareler ortalamalarının beklenen değerlerindeki varyans unsurlarının tahmini üzerine en genel ve önemli çalışma Henderson (17) tarafından yapılmıştır. Henderson,

$$Y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + ab_{ij} + e_{ijk}$$

$i = 1, 2, \ldots, p$

$j = 1, 2, \ldots, q$

$k = 1, 2, \ldots, nij$

şeklinde yazılabilen bir matematik modele göre sınıflandırılmış, alt gruplarında farklı değişken sayıları bulunan a, b, ab ve e unsurlarını birer şans değişkeni farzederek analize tabi tutmuş ve varyans unsurlarının nasıl tahmin edileceğini göstermiştir. Bu metodla yapılan analizde esas varsayımlar Eisenhart'ın Model-II diye tanımladığı matematik modele uygundur (2, 17, 34). Yani a_i, b_j, ab_{ij}, e_{ijk} ortalamaları 0 ve varyansları σ^2_a, σ^2_b, σ^2_{ab} ve σ^2_e olan bağımsız şans değişkenleridir. Bu şans değişkenleri normal dağılışa sahip ve $Cov(a_i, e_{ijk}) = Cov(b_j, e_{ijk}) = Cov(ab_{ij}, e_{ijk}) = 0$ ve $Cov(e_{ijk}, e'_{ijk}) = \sigma^2_e$ olduğu varsayılmıştır. Analiz için hesaplanan unsurların herbirinin beklenen değeri bulunarak analizdeki esaslara göre düzenlendikten sonra kareler ortalamalarına eşitlenerek elde edilen denklemler çözülür. Karışık modeller için geliştirilen Henderson-II metodunda, sabit etkiler düzeltmeye tabi tutularak şansa bağlı varsayılır. Daha sonra analiz Henderson-I metodu ile yapılır. $Y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + ab_{ij} + e_{ijk}$ modelinde olduğu gibi, sabit ve şansa bağlı faktörler arasında interaksiyon bulunduğunda bu metod uygulanamamaktadır (35, 36, 37). Böyle bir durum için Henderson-III metodu geliştirilmiştir. Bu metod, sabit ve şansa bağlı faktörler arasında interaksiyon mevcut olsa bile uygulanabilmektedir. Bu sebeble Henderson-II metoduna tercih edilebilir.

Ana tesirler ve interaksiyon kareler toplamları eşit olmayan fert sayıları için kullanılan genel yolla hesaplanır. Kareler ortalamalarındaki (veya toplamları) varyans unsurlarının katsayıları bulunur. Daha sonra hesaplanan kareler ortalamaları beklenen değerlerine eşitlenir. Elde edilen denklemler serisinin çözülmesiyle varyans unsurları tahminlenir (36).

2.2.6. En Yüksek Olabilirlik Metodu-EYO- (Maximum Likelihood Methods)

En yüksek olabilirlik metodu, istatistikte parametrelerin tahmin edilmesinde en çok kullanılan metodlardan biridir. Bu metodu ilk kez Edgeworth (1908) kullanmıştır. 1921 yılında Fisher, bu metodla elde edilen tahminleyicilerin varyansı için genel formülü bulması ve tahminleyicilerin gösterdiği bazı özellikler, metodun geniş çapta uygulanmasını sağlamıştır (24). En yüksek olabilirlik (EYO) metodu varyans kompenentlerinin tahminlenmesinde, Searle (29)'nin bildirdiğine göre, ilk olarak Hartley ve Rao (1967) tarafından kullanılmıştır. EYO metodu bağımlı şans değişkeni y değerlerinin logaritmik olabilirlik fonksiyonunu kullanarak çözüme ulaşır. Bu yöntem, p kadar parametre icab eden bir örneğin Q1, Q2,...Qp olarak dikkate alınıp meydana gelme ihtimalini maksimize etme prensibine dayanmaktadır. Her bir gözlemin y_i yoğunluğu $fy(y_i)$ ile verilir. Yani n kadar bağımsız gözleme sahip şans örneklerinde birleşik ihtimali veya likelihood (olabilirliği), $L = \pi fy(yi)$ olur. Burada, π çarpım sembolü olmaktadır (22, 31, 38, 39).

Bir çok sürekli dağılışlarda L'nin maksimizasyonu ve eşitliklerin çözümü için L'nin doğal logaritması kullanıldığı durumda daha kolaydır. Log_e nin maksimizasyonu L'e eşittir.

Çünkü doğal logaritma tek değerli bir fonksiyondur ve bilinmeyen paremetrelerin olmadığı durumlarda bu metod tek değerli fonksiyonlar tarafından transformasyon ile değişmezler (22, 40, 41). EYO normalite özelliği dikkate alınarak L(y) değeri,

$L(Y) = -.5 \log|V| - .5 (Y - Xb)' V^{-1} (Y-Xb)$

şeklinde açıklanabilir (42). b ve σ^2 değerlerini elde etmek için kısmı türevler alındığında,

$dL(Y)/db = -X' V^{-1} Xb + X' V^{-1} Y$

$dL(Y)/d\sigma^2 = -.5\ tr[V^{-1} V] + .5 (Y - Xb)' V^{-1} V V^{-1} (Y - Xb)$

olur. Bu eşitlikler sıfıra eşitlendiği zaman,

$b = X' V^{-1} X)^{-} X' V^{-1} Y$

$tr[V^{-1} V] = (Y - Xb)' V^{-1} V V^{-1} (Y-Xb)$

şeklinde çözümler elde edilir. Bu eşitlikler esas alındığında,

$Y = Xb + Zu + e$

şeklindeki karışık modelin parametrelerinin EYO metodu ile tahminlenmesinde,

$Y \sim N(Xb,\ V),$

$e \sim N(0,\ R)$

$u \sim N(0,\ G)$

$Cov\ (u_i,\ u'_{i'}) = 0 \qquad i \neq i'$

varsayımları geçerli olmaktadır. Bu varsayımlar esas alındığında;

$$y = Xb + Zu + \epsilon \sim N(Xb,\ V),$$

$$= Xb + Zu + e \sim N(Xb,\ R + ZGZ')$$

y eşitliğinde bulunan parametrelerden sabit etkilerin vektörü, b, yukarıda açıklandığı şekilde bulunur (26). Hata ve u şeklindeki şansa bağlı etkilerin varyansının EYO ile tahminlenmesi ise;

$$\sigma^2_\epsilon = (Y'Y - b'X' - u'Z'Y)/N$$

$$\sigma^2_u = [u'u + \sigma^2_e\, tr(Z'Z + \sigma^2_\epsilon G^{-1})^{-1}]/q$$

şeklinde yapılmaktadır.

Burada;

N = toplam gözlem sayısı,

p = sabit etkilerin sayısı,

q = şansa bağlı etlilerin sayısını vermektedir.

Eşitliklerde görüldüğü gibi EYO metodu ile hata varyansı tahminlenirken sabit etkilere ait serbestlik derecesi ihmal edilmektedir. Bu nedenle sabit etkilerin fazla olduğu karışık bir modelde EYO ile elde edilen parametre tahminleyicileri sapmasız değildir (25, 40).

Bu tahminleme metodu ile elde edilen tahminleyiciler istatistikte kullanılan temel varsayımların bir fonksiyonudur. EYO tahminleyiciler aynı zamanda yeterli, kararlı, etkin ve asimptotik normal özelliklerine sahiptirler. Bu yönleri ile EYO nun avantajları,

1. Yeterli, kararlı, etkin ve asimptotik normal olduğu

için bu varsayımları yeterli karşılamayan tahminleme metodlarından daha güçlüdür.

2. Sabit etkilerden kaynaklanan serbestlik derecesinin kaybından fazla etkilenmez.

3. EYO tahminleyicileri başta normalite olmak üzere istatistiksel tahminleme metodlarında yaygın olan önemli parametrik formlar esas alınarak türetilir.

4. EYO metodu ile hem iç-içe hem de çapraz sınıflandırmalara ait denemlerde σ^2_ε tahminlemesi yapılabilir (7).

Bu metodun en önemli dezavantajları ise sabit etkilerin fazla olduğu denemelerde sapmasız tahminleme yapmak zor olmaktadır. Ayrıca matematiksel olarak, normal dağılışta $\mu=\bar{Y}$ ve σ^2'nin $\sigma^2 = \Sigma(Y_i-\mu)/n$ olarak EYO ile tahminlenmesi daha kompleksdir.

3. UYGULAMA

3.1. Materyal

Bu araştırmada kullanılan veriler; Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Ziraat Fakültesi, Zootekni bölümünde 1991 yılı içerisinde yürütülmüş bir doktora çalışmasından alınmıştır (43). Verilerin elde edildiği materyal ile ilgili özellikler aşağıda kısaca verilmiştir.

Çalışmanın hayvan materyalini Yüzüncü Yıl Üniversitesi Zootekni Bölümü işletmesinde ve Van ili Bardakçı köyünde beş işletmede yetiştirilen toplam altı farklı işletmedeki Akkaraman koyunlarının 1991 yılı doğumlu kuzuları oluşturmuştur. Bu işletmelerde bulunan toplam 146 Akkaraman kuzusu üzerinde yapılan ölçümlerde elde edilen veriler bu çalışmanın da verilerini oluşturmuştur.

3.2. Metod

Altı işletmede bulunan 146 Akkaraman kuzusu üzerinde yapılan gözlemlerde; işletme, ana yaşı, cinsiyet ve doğum tipinin yapağı randımanına olan etkisi ele alınmıştır. Bağımsız faktör olarak işletme, ana yaşı, cinsiyet ve doğum tipi 3 ayrı modelle ele alınmıştır. Birinci modelde bütün faktörler şansa bağlı, ikinci modelde bütün faktörler sabit ve üçüncüde ise faktörlerden biri şansa bağlı diğerleri sabit kabul edilmiştir. Bu modellere En Küçük Kareler (Least Squares) ve En Yüksek Olabilirlik (Maximum Likelihood) tahminleme metodları uygulanmıştır. Uygulanan bu tahminleme metodları sonucunda variyans unsurları ayrı ayrı hesaplanmış ve en küçük hata varyansını veren tahminleme metodu belirlenmeye çalışılmıştır. E.M.K. metodu ile hata varyansı,

$$\mathrm{Var}(e) = e'e = (y'y) - 2ß'(x'y) + ß'(x'x)ß$$

formülden elde edilir (7). Matematik modelde bulunan sabit etkilere ait parametre vektörlerinin varyansı ise,

$$\mathrm{Var}(ß) = (x'x)^{-1} c_{ij}(\sigma^2_y|\{x_j\})$$

formülüyle bulunabilir (41). Burada c_{ij} diagonal olmayan elementler, $(\sigma^2_y|\{x_j\})$ ise bağımsız sabit etkilerin, x_j, modelde bulunması durumunda hata için tahminlenen değer. Hata ve şansa bağlı etkilere ait parametrelerin (u) varyansları E.Y.O. ile sırasıyla aşağıdaki formüllerle tahminlenebilir (25, 26, 44);

$$\sigma^2_\varepsilon = (v'y - b'x' - u'z'y)/N$$

$$\sigma^2_u = [u'u + \sigma^2_\varepsilon \, tr(z'z + \sigma^2_\varepsilon G^{-1})^{-1}]/q$$

Bu formüllerde yer alan terimlerden;

N = Toplam gözlem sayısını,

q = Şansa bağlı etkilerin sayısını temsil etmektedir.

Modelin şansa bağlı olması halinde verilerle ilgili doğrusal model;

$$Y = Xß + e$$

şeklinde olacaktır. Bu modelde yer alan terimlerden;

Y = İlgili karektere ait bilinen gözlem degerini,

X = Şansa bağlı faktörlerin n*n boyutlu desen matrisini,

ß = Şansa bağlı faktörlerin p*1 boyutlu bilinmeyen parametre vektörünü,

e = Şansa bağlı normal dağılışa sahip N $(0,\sigma^2)$ N*1 boyutlu hata vektörü'nü temsil etmektedir.

Modelin sabit olması halinde verilerle ilgili doğrusal model;

$Y = X\beta + e$

şeklinde olacaktır. Bu modelde yer alan terimlerden;

Y = İlgili karektere ait bilinen gözlem değerini,

X = Sabit faktörlerin n*n boyutlu desen matrisini,

ß = Sabit faktörlerin n*1 boyutlu bilinmeyen parametre vektörünü,

e = Şansa bağlı normal dağılışa sahip N $(0,\sigma^2)$ N*1 boyutlu hata vektörünü temsil etmektedir.

Modelin karışık olması halinde doğrusal model;

$Y = X\beta + Zu + e$

şeklinde olacaktır. Bu modelde yer alan terimlerden;

Y= İlgili karektere ait bilinen gözlem değerini,

X= Sabit faktörlerin n*n boyutlu gözlenen desen matrisini,

ß= Sabit faktörlerin n*1 boyutlu bilinmeyen parametre vektörünü,

Z= Şansa bağlı faktörün p*p boyutlu desen matrisini,

u= Şansa bağlı faktörün p*1 boyutlu parametre vektörünü,

e= Şansa bağlı normal dağılışa sahip N $(0,\sigma^2)$ N*1 boyutlu hata vektörünü temsil etmektedir.

Variyans analizi esnasında şansa bağlı faktörlerle şansa bağlı hatanın birbirlerinden bağımsız olduğu, aralarında korelasyon bulunmadığı ve Cov(u,e) = 0 olduğu varsayılmıştır. En Küçük Kareler ve En Yüksek Olabilirlik metodlarıyla ilgili geçerli olan varsayımları karşılamak üzere gözlenen verilere Normalite, Doğrusallık ve Outlier testleri uygulanmıştır. Veri sayısı 50'den büyük olduğundan normalite testi için Kolmogram Smirnov testi uygulanmıştır (7, 41). Ayrıca, karışık modelde şansa bağlı faktör ile sabit faktör arasında interaksiyonun olmadığı varsayılmıştır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Yapağı Verimini Etkileyen Faktörlerin Şansa Bağlı Olması

İşletme, ana yaşı, cinsiyet ve doğum tipi gibi yapağı verimini etkileyen faktörlerin tamamı şansa bağlı kabul edilerek, EYO ve EKK yöntemleri parametre etkinliği bakımından karşılaştırılmıştır.

EKK yöntemiyle elde edilen şansa bağlı faktörlerin varyans analiz sonuçları ve beklenen değerleri Çizelge 1' de, tahminlenen parametre varyansları Çizelge 2' de, EYO yönteminin çeşitli iterasyon sonuçları ise Çizelge 3' de verilmiştir. Şansa bağlı model için işletme ve hata varyanslarının EYO ve EKK sonuçları Şekil 2' de verilmiştir.

Çizelge 1. Modelin şansa bağlı kabul edilmesi halinde yapağı verimine ait varyans analiz sonuçları ve beklenen değerleri.

V.K.	S.D.	K.O.	E(K.O.)
IŞL	5	382092.59	$\sigma^2_e + 0.265\sigma^2_{dt} + 0.326\sigma^2_{cin} + 1.698\sigma^2_{anay} + 21.712\sigma^2_{işl}$
ANAY	4	115596.22	$\sigma^2_e + 0.131\sigma^2_{dt} + 0.768\sigma^2_{cin} + 25.182\sigma^2_{anay}$
CIN	1	133651.19	$\sigma^2_e + 0.036\sigma^2_{dt} + 68.078\sigma^2_{cin}$
DT	1	570719.86	$\sigma^2_e + 0.23\sigma^2_{dt}$
HATA	134	45614.46	σ^2_e

Çizelge 1' de varyasyon kaynaklarını oluşturan faktörlerin E(K.O.) değerleri verilmiştir. Burada, beklenen değerler Henderson-I yöntemi esas alınarak bulunmuştur(1,17). Çizelgeden de görüleceği gibi şansa bağlı etkilere ait beklenen değer bulunurken faktörler sistematik olarak iç-içe tanımlanmaktadır. Bundan dolayı: işletmeye bütün şansa bağlı faktörler varyasyon kaynağı olarak yazıldığı halde, ana yaşına sadece cinsiyet ve doğum tipi, cinsiyete sadece doğum tipi ve doğum tipine ise sadece hata varyasyon kaynağı olarak yazılmıştır.

Çizelge 2. Modelin Şansa Bağlı Kabul Edilmesi Halinde Yapağı Verimi İçin Tahminlenen Parametre Varyansları.

Tahminlenen parametreler	E.Y.O.[1]	E.K.K.
$\sigma^2_{iş}$	9417.73	15007.04
σ^2_{anay}	3424.16	2523.15
σ^2_{cin}	1688.43	1281.37
σ^2_{dt}	10225.50	22411.25
σ^2_{e}	45536.15	45614.46

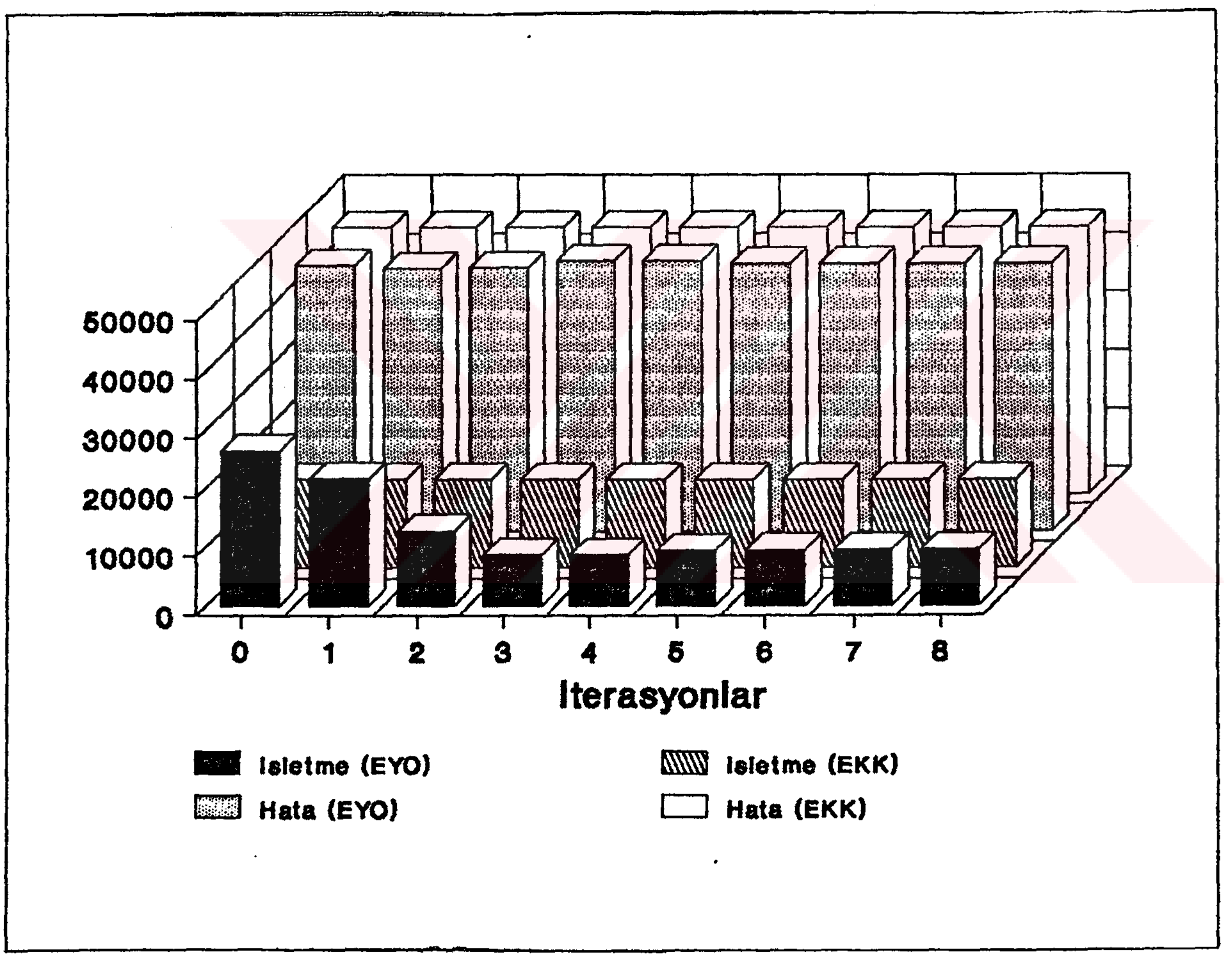
Tablo 3. Modelin şansa bağlı kabul edilmesi halinde yapağı verimine ait EYO ile tahminlenen parametrelerin çeşitli iterasyon sonuçları.

	Bağımsız Değişkenler				
İterasyon.	işletme	anayaşı	Cinsiyet	Doğum Tipi	Hata
1	26200.91	2210.18	3946.07	5391.45	45217.90
4	8597.21	3238.99	1416.32	5660.57	46011.28
8	9417.73	3424.16	1688.43	10225.50	45536.15
Fark(8-1)	-16783.18	1213.98	-2257.64	4834.05	318.25
Oran (8/1)	0.36	1.55	0.43	1.89	1.01

[1] Tablodaki E.Y.O. değerleri 8. iterasyona aittir.

Çizelge 2' den de anlaşılacağı gibi işletme, doğum tipi ve hata varyansları EYO ile daha küçük tahmin edilmesine karşı, diğer değişkenlerin varyansları EKK ile daha küçük tahmin edilmiştir. Burada, hata varyansının (σ^2_ε) EYO ile tahminlenen varyansı EKK ile tahminlenen değerden küçük olması dikkat çekmektedir. Çizelge 2' deki bağımsız değişkenlere ait EYO değerleri 8. iterasyon sonuçlarıdır. Bu sonuçların daha detaylı incelenebilmesi için 1, 4 ve 8. iterasyon değerleri Çizelge 3' de verilmiştir. Çizelge 3' den de görüleceği gibi bağımsız hata değişkenine ait 8. iterasyon ile 1. iterasyon arasındaki fark 318.25 birim bulunmuştur. Bu fark, 1. iterasyonun baz kabul edilmesi halinde 8. iterasyona göre % 1 oranında olmaktadır. Burada önemli olan sonuçların converge olmasıdır. Başka bir ifadeyle, hesaplamaların bir sonuca ulaşmasıdır. EYO yönteminde iterasyonun sonuca ulaşmasında esas kriter $(SS_{\varepsilon(i-1)} - SS_{\varepsilon i})/(SS_{\varepsilon i} - 10^{-\varepsilon}) < C$ eşitsizliğidir. Burada C, mümkün olan en küçük pozitif değeri, i ise iterasyon sayısını göstermektedir. Bu eşitsizliğin sol tarafından elde edilen sonucun C katsayısından küçük olması hesaplamaların neticelenmesi için yeterli olmaktadır. Yani, iki iterasyon arasındaki farkın $(SS_{\varepsilon(i-1)} - SS_{\varepsilon i})$ sonuncu iterasyondan $10^{-\varepsilon}$ çıkarılmasıyla elde edilen sonuca $(SS_{\varepsilon i} - 10^{-\varepsilon})$ bölünmesiyle elde edilen değer C' den daha küçük bulunuyorsa iterasyon sonuca ulaşmış demektir (41).

Tahminleme yöntemleri birbiri ile karşılaştırılırken ilk olarak hata varyansına bakılır. Zira hata varyansı küçük olan denemelerin belirleme (determinasyon) katsayısı daha büyük olmaktadır. Belirleme katsayısı daha büyük olan denemelerin sonuçları daha güvenilir olmaktadır. Bu yönüyle faktörlerin tamamıyla şansa bağlı olması durumunda EYO EKK yöntemine tercih edilebilir. Fakat, EYO çözümlerinin elde edilmesi için büyük bilgisayar imkanlarına ihtiyaç vardır(25, 29).



Şekil 2. Şansa Bağlı Model İçin İşletme ve Hata Varyanslarının EYO ve EKK Sonuçları.

Şekil 2' de verilen, işletme ve hata varyanslarının EYO ve EKK yöntemlerine ait 8 iterasyon üzerindeki sonuçlardan anlaşılacağı gibi hata dışındaki şansa bağlı etkilerin varyansında iterasyon sayısı arttıkca azalma eğilimi gözlenmiştir.

EYO ile EKK yöntemlerindeki tahminlenen sonuçların farklı olması bu yöntemlerin olasılık fonksiyonlarıyla açıklanabilir. Zira EYO yönteminde n kadar bağımsız gözlemin olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \pi_{i=1}^{n} f_y(Y_i)$$

şeklindedir. Burada, π çarpım sembolüdür. EYO çözümü, L değerinin doğal logaritmasının alınmasıyla yapılabilir. Çözümler sonunda x, μ' nün ve S^2_ε ise σ^2_ε' ye ait en küçük sapmalı tahminleyicilerini verdiği varsayılır. Çünkü EYO çözümünde kullanılan formül,

$$\sigma^2_\varepsilon = (Y'Y - B'X'Y - U'Z'Y)/N$$

iken EKK çözümünde,

$$\sigma^2_\varepsilon = (Y'Y - b'X'Y)/N$$

şeklindedir. Bu iki çözümde temel farklılık, EKK yönteminin bağımsız faktörlerin tamamını sabit olarak dikkate alıp çözüme ulaşmasıdır. EKK şansa bağlı faktörlerin analizlerini Henderson-I yöntemine göre çözmektedir. Çünkü bu yöntem şansa bağlı faktörlerin analizinde EKK prensiplerini kullanmaktadır (17). Faktörlerin sabit olması durumunda ise bilinen EKK yönteminin sapmasız tahmin yaptığı varsayılmaktadır (7). Dolayısıyla karışık modellerde bu iki yöntem arasındaki temel farklılık daha bariz bir duruma dönüşür. EYO yönteminde hata varyansının daha küçük tahmin edilmesinin yanısıra verilerin normal dağılış göstermesi halinde daha da tutarlı olmaktadır. Bu nedenle normalite varsayımı konusunda tereddüt edilen verilerden elde edilen EYO tahminleyicilerine fazla güvenilmemelidir.

4.2. Yapağı Verimini Etkileyen Değişkenlerin Sabit Olması:

İşletme, ana yaşı, cinsiyet ve doğum tipi gibi yapağı verimini etkileyen faktörlerin tamamı sabit kabul edilerek, EYO ve EKK yöntemleri parametre etkinliği bakımından karşılaştırılmıştır.

EKK yöntemiyle elde edilen sabit faktörlerin varyans analiz sonuçları ve beklenen değerleri Çizelge 4' de, tahminlenen parametre varyansları Çizelge 5' de, EYO yönteminin çeşitli iterasyon sonuçları ise Çizelge 6' da verilmiştir.

Çizelge 4. Modelin şansa bağlı kabul edilmesi halinde yapağı verimine ait varyans analiz sonuçları ve beklenen değerler.

V.K.	S.D.	K.O.	E(K.O.)
IŞL	5	382092.59	σ^2_ε + Q(İŞL, ANAY, CİN, DT)
ANAY	4	115596.22	σ^2_ε + Q(ANAY, CİN, DT)
CIN	1	133651.19	σ^2_ε + Q(CİN, DT)
DT	1	570719.86	σ^2_ε + Q(DT)
HATA	134	45614.46	σ^2_ε

Çizelge 4' de verilen E(KO) değerleri sabit faktörlere ait etki paylarıdır. Çünkü faktörlerin sabit kabul edilmsi halinde model etki payları modeli olarak bilinmektedir(14). Faktörlerin sabit olması durumunda beklenen değerlerle ilgili katsayılar kullanılırken kuadratik şekilleri yazılır. Bu nedenle E(KO) sütununda gösterilen Q değeri sabit faktörlerin (işletme, ana yaşı, cinsiyet ve doğum tipi) kuadratik görünümünü ifade etmektedir.

Şansa bağlı modelde de bahsedildiği gibi beklenen değerler bulunurken sistematik olarak faktörlere ait etkiler iç-içe tanımlanmıştır(41). Yani, işletmede faktörlere ait bütün etkiler bulunduğu halde ana yaşında cinsiyet ve doğum tipi, cinsiyette ise sadece doğum tipi varyasyon kaynağı olarak tanımlanmıştır.

Çizelge 5. Modelin sabit kabul edilmesi halinde yapağı verimi için tahminlenen parametre varyansları.

Tahminlenen parametreler	E.Y.O.[2]	E.K.K.
$\sigma^2_{\text{iş}}$	9417.73	-
σ^2_{anay}	3424.16	-
σ^2_{cin}	1688.43	-
σ^2_{dt}	10225.50	-
σ^2_{e}	45536.15	45614.46

Çizelge 5' den de görüleceği gibi EYO yöntemi parametre tahmini sırasında bütün faktörleri şansa bağlı kabul ederek çözüme ulaşmıştır. Dolayısıyla EYO yönteminde şansa bağlı ile sabit model çözümleri aynı olmaktadır. Çizelge 4' den de görüleceği üzere EKK yönteminde sabit faktörlerin etki paylarına ilişkin beklenen değerler verilmiştir. Zira

[2] Tablodaki E.Y.O. değerleri 8. iterasyona aittir.

faktörler şansa bağlı olunca varyans modeli, sabit olduğunda ise etki bağlam modeli olarak bilinir (14). EYO yönteminin şansa bağlı faktörlerin analizi için geliştirildiği bildirilmektedir (25, 32, 35).

Çizelge 6. Modelin sabit kabul edilmesi halince yapağı verimine ait EYO ile tahminlenen parametrelerin çeşitli iterasyon sonuçları.

	Bağımsız Değişkenler				
İterasyon.	İşletme	anayaşı	Cinsiyet	Doğum Tipi	Hata
1	26200.91	2210.18	3946.07	5391.45	45217.90
4	8597.21	3238.99	1416.32	5660.57	46011.28
8	9417.73	3424.16	1688.43	10225.50	45536.15
Fark(8-1)	-16783.18	1213.98	-2257.64	4834.05	318.25
Oran (8/1)	0.36	1.55	0.43	1.89	1.01

Parametre tahminleyicileri bulunurken EYO ve EYO türevlerinin normalite varsayımına uyan verilerin şansa bağlı faktörlerini daha küçük varyanslı tahminlediği varsayılmaktadır (21, 24). Bu nedenle EYO sadece şansa bağlı faktörlerin bulunduğu modellerde kullanılır. Zira EYO hata varyansını tahminlerken sabit faktörlerin serbestlik derecesini ihmal etmektedir. Buna karşılık EKK yönteminin sabit faktörlere ait parametreleri daha küçük tahminlediği varsayılmaktadır (8, 17,). Özellikle alt grup sayısının eşit olduğu sabit modellerde EKK yönteminin parametre tahminleyicisi olarak en iyi yöntem olduğu kabul edilmektedir. Bilindiği üzere faktörlerin sabit olması durumunda EKK yöntemi varyans-kovaryans tahmini yapmaktadır. Çünkü, sabit faktörlere ait varsayım gereği bu faktörler arasındaki kovaryansın sıfır olduğu varsayılmaktadır (26). Modeldeki faktörlerin tamamının sabit olması durumunda gerek analiz kolaylığı ve gerekse varsayımların uygunluğu bakımından EKK yöntemi EYO yöntemine tercih edilebilir (17, 33).

4.3. Yapağı Verimini Etkileyen Şansa Bağlı ve Sabit Faktörlerin Birlikte (Karışık) Olması:

İşletme, ana yaşı, cinsiyet ve doğum tipi gibi yapağı verimini etkileyen faktörlerden işletme şansa bağlı, diğerleri sabit kabul edilerek, EYO ve EKK yöntemleri parametre etkinliği bakımından karşılaştırılmıştır.

EKK yöntemiyle elde edilen şansa bağlı faktörlerin varyans analiz sonuçları ve beklenen değerleri Çizelge 7' de, tahminlenen parametre varyansları Çizelge 8' de, EYO yönteminin çeşitli iterasyon sonuçları ise Çizelge 9' da verilmiştir. Karışık model için işletme ve hata varyanslarının EYO ve EKK sonuçları Şekil 3' de verilmiştir.

Çizelge 7' de verilen şansa bağlı ve sabit faktörlerin E(KO) değerlerinde de sistematik olarak iç-içe tamınlama yapılmıştır. Çünkü, faktörlerin sabit olması durumunda beklenen değerlerle ilgili katsayılar kullanılırken kuadratik şekilleri yazılır. Bu nedenle E(KO) sütununda gösterilen Q değeri sabit faktörlerin (ana yaşı, cinsiyet ve doğum tipi) kuadratik görünümünü ifade etmektedir. E(KO) değerlerinin sistematik olarak yazılmasıyla ilgili açıklamalar şansa bağlı ve sabit faktörlerle ilgili bölümlerde yapılmıştır.

Çizelge 7. Modelin karışık kabul edilmesi halinde yapağı verimine ait varyans analiz sonuçları ve beklenen değerler.

V.K.	S.D.	K.O.	E(K.O.)
ANAY	4	165616.69	$\sigma^2_\varepsilon + 1.285\sigma^2_{İŞL} + Q(ANAY, CİN, DT)$
CİN	1	215506.27	$\sigma^2_\varepsilon + 0.465\sigma^2_{İŞL} + Q(CİN, DT)$
DT	1	372854.69	$\sigma^2_\varepsilon + 0.886\sigma^2_{İŞL} + Q(DT)$
İŞL	5	365278.22	$\sigma^2_\varepsilon + 20.415\sigma^2_{İŞL}$
HATA	134	45614.46	σ^2_ε

Çizelge 8. Modelin karışık kabul edilmesi halinde yapağı verimi için tahminlenen parametre varyansları.

Tahminlenen parametre varyansı	E.Y.O.[3]	E.K.K.
$\sigma^2_{İŞL}$	7945.27	15658.64
σ^2_ε	43437.46	45614.46

Çizelge 9. Modelin karışık kabul edilmesi halinde yapağı verimine ait EYO ile tahminlenen parametrelerin çeşitli iterasyon sonuçları.

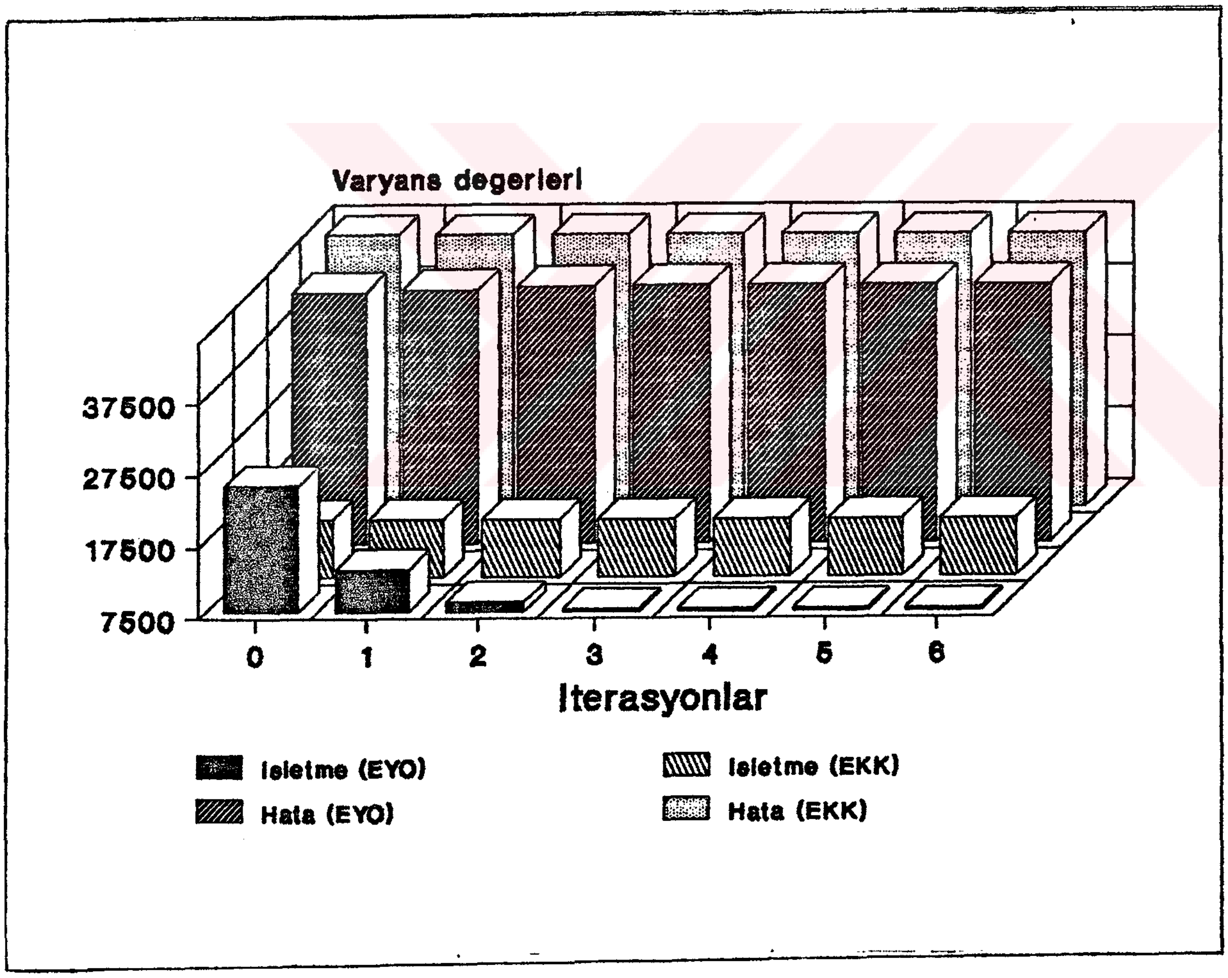
İterasyonlar	İşletme	Hata
1	25106.23	42410.41
3	7874.44	43449.83
6	7945.27	43437.46
Fark (6-1)	-17160.96	1027.46
Oran (6/1)	0.32	1.02

Karışık modelde, EYO yöntemi ile tahminlenen hata varyansı EKK yöntemi ile tahminlenenden daha küçük olduğu gözlenmiştir (Şekil 3). Ayrıca hata ile beraber işletme faktörünün de şansa bağlı kabul edilmesi durumunda, EYO

[3] Tablodaki E.Y.O. değerleri 6. iterasyona aittir.

yönteminde ilk iterasyondan başlamak üzere işletmenin varyansının giderek azalma gösterdiği gözlenmiştir (Şekil 3, Çizelge 3).

Karışık model sonuçlarından anlaşılacağı üzere şansa bağlı faktörlere ait varyans unsurlarının hatasını belirlemede EYO' nun daha iyi olduğu görülmektedir. Çünkü, EKK yöntemi, yapağı veriminin varyansını belirlemede sadece



Şekil 3. Karışık Model İçin İşletme ve Hata Varyanslarının EYO ve EKK Sonuçları.

hatayı [V(Y) = V($_\varepsilon$)] dikkate almaktadır. Diğer bütün faktörleri sabit kabul ettiğinden bunların yapağı verimi için varyans oluşturmayacağını varsaymaktadır. EYO yöntemi ise bağımlı değişkene ait varyansı, V(Y) = V(Zu + e) şeklinde kabul ederek işletmenin de yapağı veriminde varyans oluşturduğunu dikkate almaktadır. Karışık modelin sözkonusu olduğu durumlarda Henderson-III yönteminden faydalanılarak şansa bağlı etkilere ait varyans-kovaryans tahmini yapılabilmektedir. Ancak uygulama güçlüğü başta olmak üzere parametre etkinliği ve başka sebeblerden dolayı EYO' ya tercih edilememektedir (22).

Karışık modelde EYO' nun EKK' ya üstünlüğü olmasına karşın, EYO' nun karışık modelde kullanılmasını sınırlayan unsurlar bulunmaktadır. Çünkü modelde çok fazla sabit faktörün bulunması durumunda EYO tahminleyicileri sapmasız olmamaktadır. Zira EYO yöntemi ile hata varyansı,

$$\sigma^2_\varepsilon = (Y'Y - B'X'Y - U'Z'Y)/N$$

şeklinde hesaplamaktadır. Paycada bulunan N değeri toplam gözlem sayısıdır. σ^2_ε tahmin edilirken sabit faktörlere ait etkilerin fazla olduğu karışık modellerde EYO yerine Restricted Maximum Likelihood (REML) önerilmektedir. Zira REML yönteminde hata varyansı,

$$\sigma^2_\varepsilon = (Y'Y - U'Z'Y)/(N - P)$$

şeklinde tahmin edilmektedir (25). Burada P sabit etkilerin değerini ifade eder. Görüldüğü gibi REML yönteminde sabit etkilere ait serbestlik derecesi dikkate alındıktan sonra σ^2_ε ' yi tahmin etmektedir. Bu sebebden dolayı REML' in daha sapmasız olduğu varsayılmaktadır (22, 25, 26).

ÖZET

Bu çalışmada, şansa bağlı, sabit ve karışık modellere En Yüksek Olabilirlik (EYO) ve En Küçük Kareler (EKK) yöntemleri uygulanarak, tahminlenen parametreler etkinlikleri bakımından karşılaştırılmıştır.

Çalışmada, Van yöresinde çeşitli işletmelerde yetiştirilen Karakaş kuzularının 1991 yılına ait yapağı verimiyle ilgili kayıtlar kullanılmıştır.

Faktörlerin sabit olması durumunda her iki yöntemin çözümü aynı olmuştur. Ancak şansa bağlı faktörlerde (hata dahil) EYO yöntemi ile tahminlenen varyans dağerleri daha küçük bulunmuştur. İterasyon sayısı arttıkca şansa bağlı faktörlerin varyansı düşmüştür. Karışık modelde EYO yönteminin tahminlediği varyanslar daha küçük bulunmuştur. Bu nedenle sabit ve şansa bağlı etkilerin bağımlı değişkeni birlikte etkilemesi durumunda tahminlerin daha sapmasız olması için EYO yöntemi EKK yöntemine tercih edilmelidir.

SUMMARY

Comparing of the Maximum Likelihood (ML) and the Least Squares (LS) Methods in Terms of Varyans Components at Unequal Number of Observation in Subclasses.

In this study, The parameter estimator, ML and LS methods, in case of random, fixed and mixed model conditions have been compared in respect of the efficiency of the estimated parametors.

In this study, the records concerning grasy fleece weight of the Karakas lambs grown in various rural farms around Van in 1991 have been used.

When factors were fixed, the solution of both methods were observed to be same. But random factors (including the error) variance value estimated by ML metod was found to be lower. The variation of random factors was decreased in case of the number of iteration increased. In the mixed model, the variances which are estimated by ML method were found to be lower. Therefore, when random and fixed effects together affect dependent variable, in order to get a more unbiase estimator, ML method should be preferred to LS method.

LİTERATÜR LİSTESİ

1. Vanlı, Y. ve Yıldız, N. 1977. Altsınıf Sayıları Farklı Deneme Planlarında En Küçük Kareler Analizi. W.R. Harvey (1960)'dan Tercüme. Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Yayınları. No:494, Erzurum.

2. Steel, R.G.D. and Torrie, J.H. (1960). Prensiples and Procedures of Statistics. Mc Graw Hill Book Co. New York.

3. Graybill, A.F., 1961. An İntroduction to Linear Statistical Models. Volume I. Mc Graw Hill Book Co. İNC. New York.

4. Muluk, Z., Toktamıs, Ö., Kurt, S., Karacaoğlu, E., 1985. Deney Düzenlemede İstatistiksel Yöntemler. C. R. Hicks (1973)'den Tercüme. Akademi Matbaası, Ankara.

5. Öztürk, A., 1980. Tahminleme Metodları. Ege Üniv. Ziraat Fakültesi. İzmir-Bornova

6. Yıldız, N. ve Bircan, H., 1989. Uygulamalı İstatistik. Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Erzurum.

7. Gill, J. (1978). Design and Analysis of Experiments in the Animal and Medical Sciences. Vol:1,2,3. The Iowa State University Press.Ames,Iowa, U.S.A

8. Kempthorne, O. (1952). The Design and Analysis of Experiments. Jhon Wiley Sons.Inc., New York, London, Sydney, Toronto.

9. İnal, H.C. ve Günay, S., 1982. Olasılık ve Matematiksel İstatistik. H.Ü. Fen Fak. Yay. No:16

10. Cochran, W.G., 1943. Analysis of Variance for Percentages Based on Unequal Numbers. J.Am.Stat.Ass. 38: 287-301

11. Bulmer, M.G., 1980. The Matematical Theory of Quantitative Genetics. Lecturer in Biomathematics,University of Oxford. Clarendon Press. Oxford.

12. Moralı, S., 1973. İstatistik Teorisine Giriş. Alexander M. Mood and Franklin G. Graybill (1945)'den Tercüme. İ.T.Ü. Kütüphanesi. Sayı:971

13. Neter, J. and Wasserman, W. Applied Linear Statistical Models. Regression, Analysis of Variance, and Experimental Designs.

14. Yıldız, N. ve Bircan, H., 1991. Araştırma ve Deneme Metotları. Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Erzurum.

15. Searle, S. R., 1991. C. R. Henderson, The Statistician; and His Contributions to Variance Components Estimation. J. Dairy Sci. 74:4035-4044.

16. Karataş, Ş., 1974. Hayvancılıkta Araştırma Metodları. C.R. Henderson, G.E. Dickerson, E.W. Crampton, I.L. Lindahl 'dan Tercüme. Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Yayınları. No:162, Erzurum.

17. Henderson, C.R. 1953. Estimation of Variance and Covariance Components. Biometrics., Vol.26(2):226-251.

18. Henderson, C.R. 1948. Estimation of General, Spesific and Maternal Combining Abilities in Crosses Among Inbred Lines of Swine. Iowa State College. Doktora Tezi.

19. Henderson, C.R. 1986. Recent Developments in Variance and Covariance Estimation. J.Anim.Sci. 63:208-216.

20. Bek, Y., Kayaalp, G. T., Cebeci, Z., 1992. Kısıtlanmış Maksimum Olabilirlik (REML) Yöntemi ile Varyans Unsurlarının Tahmini. Devlet İst. Ens. Ankara.

21. Kennedy, B. W., 1981. Variance Component Estimation and Prediction of Breeding Values. Can. j. Genet. Cytol. 23: 565-578.

22. Harville, D.A. 1977. Maximum Likelihood Approaches to Variance Component Estimation and to Related Problems. J.Am.Stat. Assoc. Vol. 72, No.358:320-340.

23. Weisberg, S. 1985. Applied Linear Regression. Second Edition. University of Minnesota St. Paul, Minnesota.

24. Freeman, A.E., 1979. Components of Variance: Their History, Use, and Problems in animal breeding. To be Presented at: Variance Components and Animal Breedind; a Conferans in Honor of C.R. Henderson, July 16-17, 1979, Cornell University, Ithaca, New York.

25. Scheaffer, L., 1988. Ders Notları. Univ. of Guelph, Guelph, Ontario - Canada.

26. Hensen, J., 1991. Linear Model Methods Ders Notları. University of Minnesota.

27. Kennedy, B.W., 1991. C.R. Henderson: The Unfinished Legacy. J.Dairy Sci.74:4067-4081.

28. Anderson, R.D., 1979. On the History of Variance Component Estimation. To be Presented at: Variance Components and Animal Breeding; a Conferans in Honor of C.R. Henderson, July 16-17, 1979, Cornell University, Ithaca, New York.

29. Searle, S.R., 1979. Maximum Likelihood and Minumum Variance Estimation of Variance Components. To be Presented at: Variance Components and Animal Breedind; a Conferans in Honor of C.R. Henderson, July 16-17, 1979, Cornell University, Ithaca, New York.

30. Harvey, W.R., 1990. User's Guide for LSMLMW and MIXMDL PC - 2 Version. Ohio State Univ, Ohio.

31. Federer, W.T., 1977. Experimental Design. Theory and Aplication. Oxford and Ibh Publishing Co.

32. Yates, F. (1934). The Analysis of Multiple Classifications with Unequal Numbers in the Different Subclasses. J.Am.Stat.Assoc. 29:51-66.

33. Federer, W.T. and Zelen, M., 1966. Analysis of Multifactor Classifications with Unequal Numbers of Observation. Biometrics, September 1966.

34. Grossman, M. and Gall, G.A.E., 1968. Covariance Analysis with Unequal Numbers: Component-Estimation in Quantitative Genetics. Biometrics, March 1968.

35. Kaygalp, G.T., Cebeci, Z., Bek, Yüksel. 1992. Henderson I, Herderson 2 ve Henoerson 3 Yöntemi ile Varyans Unsurlarının Tahmini. Çukurova Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi, 7, 1:113-128

36. Harvey, W.R., 1964. Computing Procedures for a Generalized Least Squares Analysis Program. Colorado State University, Colorado, July.

37. Karataş, Ş. 1967. Atatürk Üniversitesi Merinos Sürüsünde Bazı Parametreler ve Tahmin Metodları. Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Zirai Araştırma Enstitüsü Araştırma Bülteni. No: 20, Erzurum.

38. Swallow, W.H. and Monahan, J.F. 1984. Monte Carlo Comperison of ANOVA, MIVQUE,REML, and ML Estimators of Variance Components. Technometrics. Vol.26,No.1 1:47-57.

39. Hoeschele, I. 1988. A note on Local Maxima in

Maximum Likelihood, Restricted Maximum Likelihood, and Bayesian Estimation of Variance Components. J. Stat. Comput. Simul. Vol.33, pp:149-160.

40. Quass, R.L., 1979. Sampling Variances of the MIVQUE and Metod 3 Estimators of the Sire Component of Variance: A Numerical Comparison. To be Presented at: Variance Components and Animal Breeding; a Conferans in Honor of C.R. Henderson, July 16-17, 1979, Cornell University, Ithaca, New York.

41. Sas User's Guide: Basic. Sas Institute Inc., Carry, NC USA.

42. Johnson, R.A. and Wichern, D.W., 1988. Applied Multivariate Statistical Analysis. Prentice-Hall, Inc. USA.

43. Altın, T., 1992. Akkaraman Kuzularının Yapağı Özelliklerini Etkileyen Bazı Çevre Faktörleri ve Bu Özellikler bakımından Fenotipik Parametreleri. Doktora Tezi. Yüzüncü Yıl Üniv. Ziraat Fak. Zootekni Böl. Van.

44. Rich,D.K., 1979. Estimation of Variance Components Using Residuals: Some Empirical Evidence. To be Presented at: Variance Components and Animal Breeding; a Conferans in Honor of C.R. Henderson, July 16-17, 1979, Cornell University, Ithaca, New York.