28471

*YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ*
*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ*
*MATEMATİK ANABİLİM DALI*

# *FRECHET UZAYLARI VE HOLOMORFİK FONKSİYONLAR ÜZERİNE*

*Cahit PESEN*

*YÜKSEK LİSANS TEZİ*

*Yönetici : Yrd.Doç.Dr. Yılmaz ALTIN*

*VAN-1993*

***YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ***
***FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ***
***MATEMATİK ANABİLİM DALI***

# *FRECHET UZAYLARI VE HOLOMORFİK FONKSİYONLAR ÜZERİNE*

***Cahit PESEN***

***YÜKSEK LİSANS TEZİ***

***Jüri Üyeleri***

***Başkan***
Prof. Dr. İsmail TOK

***Üye***
Y. Doç. Dr. Yılmaz Altın

***Üye***
Y. Doç. Dr. Hasan DALGIN
H. Dalgın

***Tez Kabul Tarihi***

***..../...1993***

## İÇİNDEKİLER


Önsöz ..................................................

Özet .................................................. i

Summary .................................................. ii

Giriş .................................................. iii

Bölüm 1. Ön Bilgiler .................................. 1

1.1. Topolojik Uzaylar .......................... 1

1.2. Metrik Uzaylar .......................... 3

1.3. Normlu Uzaylar .......................... 6

1.4. Banach Uzayları .......................... 11

1.5. Hilbert Uzayları .......................... 14

1.6. $\ell_p$ Uzayları .......................... 16

Bölüm 2. Ölçüm Uzayları .................................. 20

2.1. Ölçülebilir Uzaylar .......................... 20

2.2. Ölçülebilir Fonksiyonlar .......................... 24

2.3. Ölçüm Uzayı .......................... 27

2.4. $\mathcal{L}^p$ Uzayları .......................... 33

2.5. $L^p$ Uzayları .......................... 40

Bölüm 3. Frechet Uzayları .................................. 43

3.1. Fréchet Uzayları .......................... 43

3.2. Holomorfik Fonksiyonlar .......................... 46

3.3. Fréchet Türevleri .......................... 47

3.4. Chebyshev Polinomları .......................... 48

Kaynaklar .................................................. 53

Teşekkür .................................................. 54

# ÖNSÖZ

Bu çalışmadaki ilk bölümde temel bilgileri teşkil eden topolojik uzaylar, Banach uzayları, Hilbert uayları ve $\ell_p$ uzayları verilmiştir.

İkinci bölümde, bir Banach uzayı olan $L^p$ uzayının anlaşılması için ilk önce ölçülebilir uzaylar, ölçülebilir fonksiyonlar, ölçüm uzayları ve $\mathcal{L}^p$ uzayları verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Fréchet uzaylarına ayrılmış, bunun yanında Fréchet türevi holomorfik fonksin ve Chebyshev polinomları tanıtılmıştır.

# ÖZET

Herhangi bir Banach uzayı bir Fréchet uzayıdır.

Bu çalışmada reel Banach uzayı üzerinde homojen polinomları tanımlayarak bu polinomların türevlerine ilişkin bazı sonuçların ispatları verilecektir.

Bu çalışma üç bölümden ibaret olup ilk bölümde çalışmamız için gerekli olan temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ilk önce ölçüm uzaylarına ilişkin sonuçlar incelenerek birer Banach uzayı olan $L^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ uzayları tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde ise Fréchet uzayları tanımı verilerek bu uzaylar üzerinde tanımlı olan homojen polinomların türevleri incelenmiştir.

## SUMMARY

Any Banach space is a Fréchet space. In this study the homogenous polynomials on the Banach space will be defined, andthe proofs of some results corcerning the derivatives of these polynomials will be given.

This study consists of three parts; In the first part, the essential information necessary for our study is given. In the second part, the results concerning measure spaces are examined and $L^{p}$ spaces which are Banach spaces are introduced.

In the third part the Fréchet spaces are defined, and the homogenous derivatives of homogenous polynomials described on the mentioned spaces are examined.

# GİRİŞ

Herhangi bir tam metrik uzay kavramı yakınsaklık ve Cauchy dizisi ile yakından ilgilidir. Dolayısıyle bir Fréchet uzayı tam metrik uzay ve yerel konveks bir uzay olup, Banach uzayları Fréchet uzaylarıdır. Bu uzaylara en muşahhas örnek olarak k mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip olan konveks fonksiyonların $\mathcal{C}^k$ uzayı verilebilir.

Bu çalışmamızda Fréchet uzayları özellikle de reel Banach uzayı üzerinde homojen polinomları tanımlayarak bu polinomlara ilişkin sonuçların ispatları verilecektir.

Çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde temel bilgileri teşkil eden topolojik uzaylar, metrik uzaylar, normlu uzaylar, Banach uzayları, Hilbert uzayları, $\ell_p$ uzayları verilmiştir.

İkinci bölümde ölçüm uzayı ile ilgili özellikler incelenmiştir. Daha sonra Banach uzayının daha iyi anlaşılması için $\mathcal{L}^p$ ve $L^p$ uzaylarının tanımları verilerek bu uzaylara ilişkin temel özellikler detaya girilmeksizin verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Fréchet uzaylarına ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra bu uzaylar üzerinde tanımlı homojen polinomların türevlerine ilişkin sonuçlar verilmiştir. Son olarakta holomorfik ve Chebyshev polinomlarının özelikleri ispatlanmıştır.

# 1. ÖN BİLGİLER

## 1.1. Topolojik Uzaylar

**1.1.1. Tanım:** X boş olamayan bir küme ve X' in altkümelerinin bir **U** sınıfı verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa **U** sınıfına X üzerinde bir **topoloji** ve **(X,U)** ikilisine de bir **topolojik uzay** denir.

T1. $X, \emptyset \in U$

T2. Her $i=1,2,...,n$ için $A_i \in U$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in U$ dır.

T3. Her $i \in I \neq \emptyset$ için $A_i \in U$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in U$ dır.

Bu çalışmada **(X,U)** topolojik uzayını kısaca X ile göstereceğiz.

**1.1.2. Tanım:** Boş kümeden farklı bir X kümesi ile X'in bütün altkümelerinin $\mathcal{D}$ sınıfı verilsin. $\mathcal{D}$ sınıfı Tanım 1.1.1.' in şartlarını sağlıyor ise $\mathcal{D}$ sınıfına X üzerindeki discrete topoloji denir. $(X,\mathcal{D})$ uzayına da **discrete topolojik uzay** denir.

**1.1.3. Tanım:** **(X,U)** topolojik uzayı verilsin. U'nun elemanlarının herbiri bu topolojik uzayın bir **açık kümesidir** denir.

**1.1.4. Tanım:** Bir topolojik uzaydaki açık kümelerin tümleyenlerine o topolojik uzayın **kapalı kümeleri** denir.

**1.1.5. Tanım:** X topolojik uzayının bir noktası x olsun. x noktasını içeren bir A açık altkümesinin her N üstkümesine x noktasının **komşuluğu** denir.

**1.1.6. Tanım:** **(X,U)**, **(Y,V)** iki topolojik uzay, $f:X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $f(x_0)$'ın her $N'$ komşuluğunun f altındaki ters görüntüsü $x_0$'ın bir komşuluğu ise, f fonksiyonuna $x_0$ noktasında **süreklidir** denir.

**1.1.7. Tanım:** X ve Y iki topolojik uzay ve f:X—>Y fonksiyonu verilsin. Eğer Y'nin herbir açık altkümesinin f altındaki ters görüntüsü X'in bir açık altkümesi ise f fonksiyonuna X üzerinde **süreklidir** denir.

**1.1.8. Örnek:** (X,$\mathcal{P}$) discrete topolojik uzayı ile herhangi bir (Y,V) topolojik uzayı verilsin. Bu durumda X'den Y'ye tanımlı her fonksiyon süreklidir.

**1.1.9. Tanım:** X ve Y topolojik uzayları verilsin. Eger f:X—>Y fonksiyonu birebir, üzerine, sürekli ve $f^{-1}$ ters fonksiyonu da sürekli ise f fonksiyonuna **homeomorfizma'dır** denir.

Bu durumda X ve Y uzaylarına **homeomorf uzaylar** denir.

**1.1.10. Teorem:** X, Y ve Z topolojik uzayları verilsin. Eğer f:X—>Y ve g:Y—>Z fonksiyonları sürekli ise

$$h=gof:X \longrightarrow Z$$

tanımlı olan bileşke fonksiyonu da süreklidir.[6]

**1.1.11. Teorem:** X ve Y topolojik uzayları ile f:X—>Y fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler aralarında denktirler:

i) f süreklidir.

ii) Y'nin herbir açık altkümesinin f altındaki ters görüntüsü X'in bir açık altkümesidir.

iii) Y'nin herbir kapalı altkümesinin f altındaki ters görüntüsü X'in bir kapalı altkümesidir. [1]

## 1.2. Metrik Uzaylar

**1.2.1. Tanım:** $\emptyset \neq X$ kümesi ile bir $d:X\times X \longrightarrow IR$ fonksiyonu ve-verilsin. Eğer her $x,y,z \in X$ için aşağıdaki şartlar sağlanı-yorsa d' ye X üzerinde bir **metrik** ve (X,d) ikilisine bir **metrik uzay** denir.

M1. $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

M2. $d(x,y) = d(y,x)$ (Simetri özelliği)

M3. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (Üçgen eşitsizliği)

**1.2.2. Tanım:** (X,d) metrik uzayı ile elemanları X'den alınan bir $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi verilsin. Eğer

$$(n \longrightarrow \infty) \text{ iken } d(x_n,x') \longrightarrow 0$$

olacak şekilde bir $x' \in X$ elemanı mevcut ise $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi (X,d) metrik uzayında **yakınsaktır** denir.

**1.2.3. Tanım:** X bir metrik uzay olsun. X'deki herbir dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X'e **Kompakt küme denir.**

**1.2.4. Tanım:** (X,d) metrik uzayı ile elemanları X'den alınan bir $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi verilsin. Eğer,

$$(m,n \longrightarrow \infty) \text{ iken } d(x_n,x_m) \longrightarrow 0$$

oluyorsa $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisine (X,d) de bir **Cauchy dizisi** denir.

**1.2.5. Tanım:** (X,d) metrik uzayı verilsin. (X,d) uzayındaki herbir $(x_n)_{n\geq 1}$ Cauchy dizisi X'in bir $x' \in X$ elemanına yakınsı-yor ise (X,d) metrik uzayına **tam metrik uzay** denir.

**1.2.6. Örnek:** IR, gerçel sayılar kümesi olmak üzere

$d:IR\times IR \longrightarrow IR$,

$$d(x,y) = |x-y|$$

ile tanımlı d fonksiyonu IR'de bir metriktir. Bu metriğe alışılmış metrik veya mutlak değer metriği denir. Böylece (IR,d) ikilisi bir metrik uzaydır. Üstelik (IR,d) bir tam metrik uzaydır.

**1.2.7. Örnek:** $x=(x_1,x_2)\in IR^2$ ve $y=(y_1,y_2)\in IR^2$ olmak üzere,

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{2} (x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

ile verilen $d:IR^2 \times IR^2 \longrightarrow IR$ fonksiyonu, $IR^2$'de bir metriktir. Gerçekten, bu fonksiyonun Tanım 1.2.1'in şartlarını sağladığı gösterilebilir.

M1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$

$$d(x,y) = 0 \iff \left[\sum_{i=1}^{2} (x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

$$d(x,y) = 0 \iff \sum_{i=1}^{2} (x_i-y_i)^2 = 0$$

$$\iff (x_1-y_1)^2 = 0 \text{ , } (x_2-y_2)^2 = 0$$

$$\iff (x_1-y_1) = 0 \text{ , } (x_2-y_2) = 0$$

$$\iff x_1 = y_1, \; x_2 = y_2$$

$$\iff (x_1,x_2) = (y_1,y_2)$$

$$\iff x = y$$

M2. $d(x,y) = d(y,x)$

1/2

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2\right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{2}(y_i-x_i)^2\right]^{1/2} = d(y,x)$$

M3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{2}(x_i-z_i+z_i-y_i)^2\right]^{1/2} \text{(Minkowski eşitsizliği)}$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{2}(x_i-z_i)^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{2}(z_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

**1.2.8. Tanım:** $(X,d)$ ve $(Y,\rho)$ metrik uzayları ile $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu ve $x_o \in X$ noktası verilsin. $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $x \in X$ için

$$d(x,x_o) < \delta \text{ iken } \rho(f(x),f(x_o)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_o, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $x_o$ da **süreklidir** denir. f, x'in her noktasında sürekli ise f, x üzerinde süreklidir denir.

## 1.3. Normlu Uzaylar

**1.3.1. Tanım:** $(A,o,*)$ iki işlemli cebirsel yapısı verilsin.

i) $(A,o)$ bir değişmeli grup,

ii) $*$'ın birleşme özeliği var,

iii) $*$'ın $o$ üzerinde soldan ve sağdan dağılma özellikleri

varsa $(A,o,*)$ cebirsel yapısına **halka** denir.

Değişmeli bir halkada, sıfır eleman çıkarıldıktan sonra geriye kalan elemanlar bir grup oluşturuyorsa bu halkaya bir **cisim** denir.

**1.3.2. Tanım:** L boş olmayan küme ve F bir cisim olsun. Ayrıca,

$$+ : L\times L \longrightarrow L$$

$$. : F\times L \longrightarrow L$$

fonksiyonları tanımlı olsun. L kümesini yukarıda tanımlı olan işlemlere göre donatalım. Eğer her $x,y,z\in L$ ve her $\lambda,\mu \in F$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise L'ye F üzerinde tanımlı bir **lineer(veya vektör) uzay** denir:

L1. $x+y = y+x$ (Değişme özelliği)

L2. $x+(y+z) = (x+y)+z$ (Birleşme özelliği)

L3. Her $x\in L$ için $x+\theta = \theta+x = x$ olacak şekilde bir tek $\theta\in L$ elemanı vardır. (Birim elemanın varlığı)

L4. Her $x\in L$ için $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde bir tek $(-x)\in L$ elemanı vardır. (Ters elmanın varlığı)

L5. $1.x=x$ olacak şekilde bir $1\in F$ elemanı vardır.

L6. $\lambda(x+y)= \lambda x+ \lambda y$

L7. $(\lambda+\mu)x = \lambda x+\mu x$

L8. $(\lambda\mu)x= \lambda(\mu x)$

Eğer F=IR veya $\mathbb{C}$ ise L'ye gerçel (veya kompleks) lineer uzay denir.

**1.3.3. Tanım:** L hem bir lineer uzay ve hemde topolojik uzay olsun. L'deki toplama ve skalerle çarpma işlemleri L'deki topolojiye göre sürekli ise L'ye **topolojik vektör uzayı** denir.

**1.3.4. Tanım:** L, F üzerinde bir vektör uzayı ve B, L'nin bir altkümesi olsun. B'nin elemanları lineer bağımsız ve B, L'yi geriyorsa B'ye F üzerinde L'nin bir **tabanı** denir.

**1.3.5. Tanım:** L bir lineer uzay ve $A\subset L$ olsun. Her $x,y\in A$ için

$$M=\{\ z\in L:z=\alpha x+(1-\alpha)y\ ,\ 0\leq\alpha\leq 1\ \}\subset A$$

oluyorsa A'ya **konveks** denir. Buradaki M'nin, uç noktaları x ve y olan kapalı bir doğru parçası olduğu açıktır.

**1.3.6. Tanım:** Eğer konveks cümlelerden ibaret E'deki komşulukların bir tabanı varsa E topolojik uzayı, bir **yerel konveks uzaydır** denir.

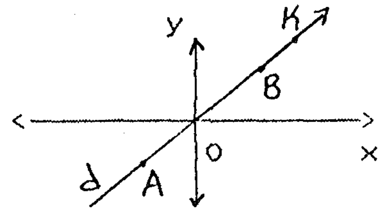
**1.3.7. Tanım:** F cismi üzerinde tanımlanan bir L lineer uzayı ile $\emptyset\neq M\subset L$ altkümesi verilsin. Eğer her $x,y\in M$ ve her $\lambda,\mu\in F$ için,

$$\lambda x+\mu y\ \in M$$

oluyor ise M, F üzerinde bir vektör uzayıdır ve M uzayına L'nin **alt vektör uzayı** denir.

**1.3.8. Örnek:** Başlangıç noktasından geçen her doğru $IR^2$'nin bir alt uzayıdır. Gerçekten,

xoy düzlemi, $IR^2$ uzayını temsil etsin. Orjin noktasından geçen herhangi bir d doğrusunu alalım.




d' nin, $IR^2$'nin bir alt uzayı olması için $A,B \in d$ verildiğinde $\lambda,\mu \in IR$ skalerler için $\lambda A+\mu B \in d$ olmalıdır.

$$A = (x_1,y_1) \ , \ B = (x_2,y_2) \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} K = \lambda A+\mu B &= \lambda(x_1,y_1) + \mu(x_2,y_2) \\ &= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_2, \mu y_2) \\ &= (\lambda x_1+\mu x_2 \ , \ \lambda y_1+\mu y_2) \end{aligned}$$

olur.

d'nin denklemi $y=mx$ şeklindedir. A,B noktaları d üzerinde olduğundan bu noktaların koordinatları $y=mx$ denklemini ayrı ayrı sağlarlar. Yani $y_1 = mx_1$ ve $y_2 = mx_2$ yazılabilir. K'nın, d üzerinde olması için K'nın koordinatları $y=mx$ denklemini sağlamalıdır. Yani $K=(x_3,y_3)$ ise $y_3 = mx_3$ olmalıdır.

$$x_3 = \lambda x_1 + \mu x_2$$

$$y_3 = \lambda y_1 + \mu y_2$$

burada $y_1 = mx_1$ , $y_2 = mx_2$ alalım.

$$y_3 = \lambda(mx_1) + \mu(mx_2)$$

$$y_3 = m(\lambda x_1 + \mu x_2)$$

$$y_3 = mx_3 \text{ olduğundan}$$

$\lambda A+\mu B=K$ noktası d doğrusu üzerindedir.

$A,B \in d$ ve $\lambda,\mu \in IR$ için $\lambda A+\mu B \in d$ olduğundan d, $IR^2$'nin bir alt uzayıdır.

**1.3.9. Tanım:** Aynı F cismi üzerinde tanımlı L ve P lineer uzayları ile bir $f: L \longrightarrow P$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $u, v \in L$ ve her $\lambda, \mu \in F$ için

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

eşitliği sağlanır ise, f fonksiyonuna bir **lineer dünüşüm** denir.

**1.3.10. Tanım:** $b_1, b_2, \ldots, b_n$ katsayıları ve c sabiti F'nin elmanı olmak üzere,

$$L(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n + c$$

olarak tanımlanan lineer forma F cismi üzerinde tanımlı **n-değişkenli bir lineer form** denir. Eğer c=o ise bu forma homojendir denir.

**1.3.11. Tanım:** E, F cismi üzerinde normlu uzay olsun. Eğer, $x_1, \ldots, x_n \in E$ ve $\sigma(n)$ doğal sayıların herhangi permutasyanu olmak üzere

$$L(x_1, \ldots, x_n) = L(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

ise $L: E^n \longrightarrow F$ tanımlı olan n-lineer formuna **simetrik n-lineer form** denir.

**1.3.12. Tanım:** N bir lineer uzay ve $\|.\|: N \longrightarrow IR$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyor ise bu fonksiyona N üzerinde bir **norm** ve $(N, \|.\|)$ ikilisine de bir **normlu uzay** denir.

Norlu uzayı kısaca N ile göstereceğiz.

N1. $x \in N$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

zayları ile bir $f:L \longrightarrow P$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $u,v \in L$ ve her $\lambda, \xi \in F$ için

$$f(\lambda u+\xi v) = \lambda f(u)+\xi f(v)$$

eşitliği sağlanır ise, f fonksiyonuna bir **lineer dünüşüm** denir.

**1.3.10. Tanım:** $b_1, b_2, \ldots, b_n$ katsayıları ve c sabiti F'nin elmanı olmak üzere,

$$L(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1x_1+\ldots+b_nx_n+c$$

olarak tanımlanan lineer forma F cismi üzerinde tanımlı **n-değişkenli bir lineer form** denir. Eğer c=o ise bu forma homojendir denir.

**1.3.11. Tanım:** E, F cismi üzerinde normlu uzay olsun. Eğer, $x_1, \ldots, x_n \in E$ ve $\sigma(n)$ doğal sayıların herhangi permutasyanu olmak üzere

$$L(x_1, \ldots, x_n) = L(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

ise $L:E^n \longrightarrow F$ tanımlı olan n-lineer formuna **simetrik n-lineer form** denir.

**1.3.12. Tanım:** N bir lineer uzay ve $\|.\|: N \longrightarrow IR$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyor ise bu fonksiyona N üzerinde bir **norm** ve $(N, \|.\|)$ ikilisine de bir **normlu uzay** denir.

Norlu uzayı kısaca N ile göstereceğiz.

N1. $x \in N$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \iff x=\theta$

N2. Her $x \in N$ ve $\lambda$ skaleri için

$$\|x\| = |\lambda| \|x\|$$

N3. Her $x,y \in N$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**1.3.13.Örnek:** $\|x\| = |x|$ ile tanımlanan $\|.\|: \mathbb{C} \longrightarrow IR$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde bir normdur. Yani $(\mathbb{C},\|.\|)$ ikilisi bir normlu uzaydır. Gerçekten,

$x=a+ib,\ y=c+id \in \mathbb{C}$ alalım.

N1. $\|x\| = 0 \iff x = \theta$

$$\begin{aligned}
\|x\| = 0 &\iff |x| = \theta \\
&\iff |a+ib| = \theta \\
&\iff (a^2+b^2)^{1/2} = \theta \\
&\iff a^2 = \theta \text{ ve } b^2 = \theta \\
&\iff a = \theta,\ b = \theta \\
&\iff x = (\theta,\theta) \\
&\iff x = \theta
\end{aligned}$$

N2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\| &= |\lambda x| \\
&= |\lambda| |x| \\
&= |\lambda| \|x\|
\end{aligned}$$

N3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= |x+y| \\
&\leq |x| + |y| \qquad \text{(Üçgen eşitsizliğinden)} \\
&= \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ olur.

**1.3.14. Tanım:** N normlu uzayı ve elemanları N'den alınan bir $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi verilsin. Eğer,

$$(n \longrightarrow \infty) \text{ iken } \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

olacak şekilde bir $x \in N$ elemanı varsa $(x_n)_{n\geq 1}$ bir **yakınsak dizisidir** denir.

**1.3.15.Önerme:** Eğer $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi bir $x$ değerine yakınsıyor ise o zaman $x$ tektir.[7]

**1.3.16. Tanım:** N bir normlu uzay ve elemanları N'den alınan bir $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi verilsin.

$$(m,n \longrightarrow \infty) \text{ iken } \|x_m - x_n\| \longrightarrow 0$$

oluyor ise $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisine **Cauchy dizisi** denir.

**1.3.17. Önerme:** Her yakınsak $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.[7]

**1.3.18. Önerme:**

$$\text{Bir } (x_n)_{n\geq 1} \text{ Cauchy dizisidir} \iff \lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0 \text{ dır.}$$

[7]

**1.3.19. Tanım:** N normlu uzayı verilsin. $(x_n)_{n\geq 1}$ , N' nin elemanlarından alınan bir Cauchy dizisi olsun. Eğer

$$(n \longrightarrow \infty) \text{ iken } \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

olacak şekilde bir $x \in N$ elemanı varsa, N'ye **tam normlu uzay** denir.

## 1.4. Banach Uzayları

**1.4.1. Tanım:** N bir normlu uzay ve elemanları N'den alınan bir $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisi verilsin. Eğer,

$(m,n \longrightarrow \infty)$ iken $\|x_m - x_n\| \longrightarrow 0$ olması durumunda

$(n \longrightarrow \infty)$ iken $\|x_n - x'\| \longrightarrow 0$ olacak şekilde bir

$x' \in N$ elemanı varsa, N'ye **Banach uzayı** denir.

Eğer N, gerçel(veya kompleks) tam normlu uzay ise N'ye gerçel(veya kompleks) Banach uzayı denir.

**1.4.2. Teorem:** $IR^n = \{x: x=(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in IR\}$ kümesi

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

normuna göre bir gerçel Banach uzayıdır. [8]

**1.4.3. Örnek:** X,Y Banach uzayı ve $\|.\|: X\times Y \longrightarrow IR$ fonksiyonu $\|(x,y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ ile tanımlansın. Eğer XxY uzayı bu norm ile donatılırsa XxY de bir Banach uzayıdır. Gerçekten,

Önce $\|(x,y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ fonksiyonunun XxY üzarinde bir norm olduğunu gösterelim. Bunun için Tanım 1.3.12'in şartlarının sağlandığını gösterelim.

N1. $\|(x,y)\| = 0 \iff (x,y) = \theta_{X\times Y}$

$$\begin{aligned} \|(x,y)\| = 0 &\iff \max(\|x\|, \|y\|) = 0 \\ &\iff \|x\| = 0,\ \|y\| = 0 \quad (X,\ Y \text{ normlu uzay}) \\ &\iff x = \theta_X,\ y = \theta_Y \\ &\iff (x,y) = \theta_{X\times Y} \end{aligned}$$

N2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

$$\begin{aligned} \|\lambda(x,y)\| = \|(\lambda x, \lambda y)\| &= \max(\|\lambda x\|, \|\lambda y\|) \\ &= \max(|\lambda| \|x\|, |\lambda| \|y\|) \end{aligned}$$

(X,Y normlu uzay olduğundan)

$$=|\lambda|\max(\|x\|,\|y\|)$$

$$=|\lambda|\,\|(x,y)\|$$

N3. $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|=\|x_1+x_2,y_1+y_2)\|$$

$$=\max(\|x_1+x_2\|,\|y_1+y_2\|)$$

(X, Y normlu uzay olduğundan)

$$\leq \max(\|x_1\|\|x_2\|,\|y_1\|\|y_2\|)$$

$$= \max(\|x_1\|,\|y_1\|)+\max(\|x_2\|,\|y_2\|)$$

$$= \|(x_1,y_1)\|+\|(x_2,y_2)\|$$

Böylece verilen fonksiyon XxY üzerinde bir normdur. XxY uzayının bir Banach uzayı olması için XxY'nin bu norma göre tam uzay olduğunu gösterelim.

X bir Banach uzayı olduğu için X' den alınan her Cauchy dizisinin limiti yine X'e aittir.

X tam ise $(x_n)\in X$ verildiğinde

$$(m,n\longrightarrow\infty) \text{ iken } \|x_m-x_n\| \longrightarrow 0 \qquad (1\text{-}1)$$

$$(n\longrightarrow\infty) \text{ iken } \|x_n-x'\| \longrightarrow 0 \qquad (1\text{-}2)$$

olacak şekilde $x'\in X$ vardır.

Y tam ise $(y_n)\in Y$ verildiğinde

$$(m,n\longrightarrow\infty) \text{ iken } \|y_m-y_n\| \longrightarrow 0 \qquad (1\text{-}3)$$

$$(n\longrightarrow\infty) \text{ iken } \|y_n-y'\| \longrightarrow 0 \qquad (1\text{-}4)$$

olacak şekilde $y'\in Y$ vardır.

Önce XxY'de bir Cauchy dizisi seçelim. $(x_n)$ ve $(y_n)$ sırasıyla X ve Y'de birer Cauchy dizisi ise $(x_n,y_n)$ dizisi

$X \times Y$'de bir Cauchy dizisidir. Bunun doğruluğu görmek için,

$$(m,n \longrightarrow \infty) \text{ iken } \|(x_m,y_m)-(x_n,y_n)\| \longrightarrow 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\|(x_m-x_n),(y_m-y_n)\| = \max(\|x_m-x_n\|,\|y_m-y_n\|) \longrightarrow \max(0,0)=0$$
(1-1 ve 1-3 den)

olduğundan $(m,n \longrightarrow \infty)$ iken $\|(x_m,y_m)-(x_n,y_n)\| \longrightarrow 0$ olur.

Şimdi bu Cauchy dizisinin $X \times Y$'de bir noktaya yakısadığını gösterelim. Yani $X \times Y$'deki $(x_n,y_n)$ Cauchy dizisinin $(x',y') \in X \times Y$ noktasına yakınsadığını gösterelim. Bu durum

$$(n \longrightarrow \infty) \ \|(x_n,y_n)-(x',y')\| \longrightarrow 0 \text{ olması ile mümkündür.}$$

$$\|(x_n,y_n)-(x',y')\| = \|(x_n-x'),(y_n-y')\|$$
$$= \max(\|x_n-x'\|,\|y_n-y'\|) \longrightarrow \max(0,0) \ (n \longrightarrow \infty)$$
(1-2 ve 1-4'den)

olduğundan $(n \longrightarrow \infty)$ iken $\|(x_n,y_n)-(x',y')\| \longrightarrow 0$ olur. Buna göre $X \times Y$'deki $(x_n,y_n)$ Cauchy dizisi $(x',y') \in X \times Y$ noktasına yakınsamaktadır. O halde $X \times Y$ normlu uzayı bir tam uzaydır.

Bu durumda $X \times Y$ verilen norma göre bir Banach uzayıdır.

## 1.5. Hilbert Uzayları

**1.5.1. Tanım:** X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $<,>: X \times X \longrightarrow F$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise bu fonksiyona **iç çarpım(veya iç çarpım fonksiyonu)** denir.

I1. $x,y \in X$ için $<x,y> = \overline{<y,x>}$ ($F=IR$ ise $<x,y>=<y,x>$ olur.)

I2. $x,y,z \in X$ ve $\lambda,\mu \in F$ için

$<\lambda x+\mu y,z> = \lambda<x,z>+\mu<y,z>$

I3. $x \in X$ için $<x,x> \geq 0$ ve $<x,x>=0 \Leftrightarrow x=0$

İç çarpım fonksiyonu ile donatılan X uzayına **iç çarpım**

**uzayı** denir. İç çarpım uzayını $(X,<,>)$ veya kısaca X ile göstereceğiz.

**1.5.2. Örnek:** $\|.\|:X \longrightarrow IR$ fonksiyonu, iç çarpım yardımıyla

$$\|x\|=(<x,x>)^{1/2}$$

olarak tarif edilebilir. d,

$$d(x,y)=\|x-y\|=(<x-y,x-y>)^{1/2}$$

ile tanımlı fonksiyon bir metriktir. Gerçekten,

M1. $d(x,y)=0 \iff \|x-y\|=0$

$$\iff (<x-y,x-y>)^{1/2}=0$$

$$\iff <x-y,x-y>=0$$

$$\iff x-y=0$$

$$\iff x=y$$

M2. $d(x,y)=\|x-y\|=(<x-y,x-y>)^{1/2}$

$$=(<-(y-x),-(y-x)>)^{1/2}$$

$$=((-1)(-1)<y-x,y-x>)^{1/2}$$

$$= (<y-x,y-x>)^{1/2} = \|y-x\|=d(y,x)$$

M3. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

$d(x,y)=\|x-y\|=\|x-z+z-y\|\leq\|x-z\|+\|z-y\|$ (N3'den)

$$= (<x-z,x-z>)^{1/2} +(<z-y,z-y>)^{1/2}$$

$$= d(x,z)+d(z,y)$$

olur.

**1.5.3. Örnek:** $x,y\in IR^n$ için $<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ile verilen

$<,>: IR^n \times IR^n \longrightarrow IR$ fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur. Ve $(IR,<,>)$ de bir iç çarpım uzayıdır. Gerçekten,

I1. $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in IR^n$ için

$$<x,y>=<y,x>$$

I2. $<\lambda x+\mu y,z> = \lambda<x,z>+\mu<y,z>$

$$<\lambda x+\mu y,z>=\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+\mu y_i)z_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i z_i+\mu y_i z_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i z_i + \sum_{i=1}^{n}\mu y_i z_i$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i z_i + \mu\sum_{i=1}^{n}y_i z_i=\lambda<x,z>+\mu<y,z>$$

I3. $<x,x>\geq 0$

$$<x,x> = \sum_{i=1}^{n}x_i x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \geq 0$$

**1.5.4. Tanım:** iç çarpım yardımıyla tarif edilen d metriğine göre, X iç çarpım uzayı tam ise X'e **Hilbert uzayı** denir. Demekki Hilbert uzayları iç çarpım metriğine göre tam olan Banach uzaylarıdır.

**1.5.5. Örnek:** $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in IR^n$ olmak üzere $<,>: IR^n \times IR^n \longrightarrow IR$

$$<x,y>=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$

olarak tanımlanırsa $IR^n$ bir Hilbert uzayı olur.

## 1.6. $\ell_p$ Uzayları

**1.6.1. Tanım:** $p\geq 1$ sabit bir gerçel sayı olsun. $\ell_p$ uzayındaki herbir eleman,

$$|x_1|^p + |x_2|^p + \dots$$

toplamı yakınsak, yani

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \quad (p \geq 1 \text{ ve sabit}) \qquad (1-5)$$

olacak şekilde bir $x=(x_i)=(x_1,x_2,\dots)$ dizisidir. Diğer bir ifadeyle, $p\geq 1$ olmak üzere $\ell_p$ uzayı

$$\{\, x=(x_i) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \,\}$$

şeklinde tanımlanır. (1-5) 'i gerçekleyen dizilerden yalnız ca gerçel olanlarını alırsak gerçel $\ell_p$ uzayı' nı kompleks olanlarını alırsak kompleks $\ell_p$ uzayı' nı elde ederiz.

$\ell_p$ uzayının $p=2$ özel haline karşılık gelen uzay ise $\ell_2$ Hilbert dizi uzayı' dır.

**1.6.2. Tanım:** $p>1$ olsun ve $q$' yu

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (1-6)$$

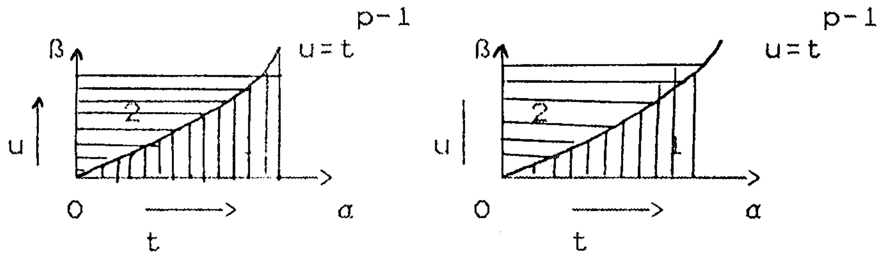
eşitliği ile tanımlayalım. Bu durumda

$$1=\frac{p+q}{pq} \quad , \; pq=p+q \; , \; (p-1)(q-1)=1$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $1/(p-1)=q-1$ olup $u=t^{p-1}$ eşitliği $t=u^{q-1}$ sonucunu verir. $\alpha$ ve $\beta$ herhangi iki pozitif sayı olsun. Aşağıdaki şekilde görülen dikdörtgenin alanı $\alpha.\beta$ olduğundan, integrasyon yoluyla

$$\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} t^{p-1}\,dt + \int_0^{\beta} u^{q-1}\,du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe **Young Eşitsizliği** denir.




**1.6.3. Tanım:** $p \geq 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ , her $i=1,\ldots,n$ $a_i \geq 0$ ve $b_i \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} . \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

eşitsizliğine **Hölder Eşitsizliği** denir.

**1.6.4. Tanım:** Tanım 1.6.3'den $p=2$ ise $q=2$ olur. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2} . \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliğine, toplama ilişkin, **Couchy-Schwarz Eşitsizliği** denir.

**1.6.5. Tanım:** $p \geq 1$ , $x=(x_i) \in \ell_p$ , $y=(y_i) \in \ell_p$ olsun. Bu durumda

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

şeklinde ifade edilen eşitsizliğe **Minkowski Eşitsizliği** denir.

# 2.ÖLÇÜM UZAYLARI

## 2.1.Ölçülebilir Uzaylar

X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{A}$, X'in tüm altkümelerinin kümesi olsun. Bu $\mathcal{A}$ kümesine aynı zamanda X üzerinde tanımlı sınıf da denir.

**2.1.1.Tanım:** Eğer $\mathcal{A}$ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $\mathcal{A}$'ya X üzerinde tanımlı σ-cebir denir.

i) $X\in\mathcal{A}, \emptyset\in\mathcal{A}$

ii) Her $A\in\mathcal{A}$ ise $A^c\in\mathcal{A}$

iii) $\{A_i\}_{i\in I} \neq \emptyset$ , $\mathcal{A}$ içindeki kümelerin sayılabilir bir dizisi ise $\bigcup_{i\in I} A_i\in\mathcal{A}$ dır.

Bu şekilde oluşan $(X,\mathcal{A})$ ikilisine ölçülebilir uzay ve $\mathcal{A}$'nın elemanlarına da ölçülebilir kümeler denir.

**2.1.2.Önerme:** $(X,\mathcal{A})$ ve $(Y,\mathcal{B})$ iki ölçülebilir uzay olsun. Bu durumda $f:X \longrightarrow Y$ herhangi bir fonksiyon ise

$$\mathcal{A}_1 = \{f^{-1}(B):B\in\mathcal{B}\}$$

sınıfı bir σ-cebirdir. Üstelik $\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}$ dır.

**İspat:** Bunun için $\mathcal{A}_1$'nin Tanım 2.1.1'in şartlarını sağlandığı gösterilecektir.

i) $\mathcal{B}$ σ-cebir olduğu için $f^{-1}(Y)$ ve $f^{-1}(\emptyset)$ $\mathcal{A}_1$ sınıfının içinde oldukları açıktır.

ii) Her $A\in\mathcal{A}_1$ ise $A^c\in\mathcal{A}_1$ olduğu araştırılacaktır. $A\in\mathcal{A}_1$ ise $B\in\mathcal{B}$ olmak üzere $A=f^{-1}(B)$ alınsın. Bu durumda

$$A^c=X-A=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B)=f^{-1}(Y-B)=f^{-1}(B^c)$$

yazılır. $\mathcal{B}$ σ-cebir olduğu için $B^c \in \mathcal{B}$ dir. Dolayısıyla her $A \in \mathcal{A}_1$ için $A^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}_1$ olur.

iii) $\{A_i\}_{i\in I} \neq \emptyset$, $\mathcal{A}_1$ içindeki kümelerin sayılabilir bir dizisi ise $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}_1$ olduğu gösterilecektir.

Her $i \in I$ için $A_i \in \mathcal{A}_1$ elemanı, $B_i \in \mathcal{B}$ olmak üzere $A_i = f^{-1}(B_i)$ şeklinde yazılır. Buradan da $\bigcup_i A_i = \bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcup_i B_i)$ olur. Dolayısıyla $\{B_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{B}$ içindeki kümelerin sayılabilir bir dizisi iken $\bigcup_i B_i \in \mathcal{B}$ oldugundan $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{A}_1$'nın bir σ-cebir oldugu görülür.

**2.1.3. Önerme:**

i) X üzerinde tanımlı boş olmayan tüm σ-cebirlerin herhangi bir kesişim ailesi bir σ-cebirdir.

ii) i) şıkkıyla elde edilen σ-cebir en küçük σ-cebirdir.

[4]

**2.1.4. Tanım:** $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay olsun. Ve Önerme 2.1.3 'ün ışığı altında X üzerinde tanımlı olan ve $\mathcal{A}$'yı içeren en küçük sınıfa üretilmiş sınıf denir. Kısaca $\sigma(\mathcal{A})$ ile gösterilir. $\sigma(\mathcal{A})$, Tanım 2.1.1'in şartlarını sağlarsa $\sigma(\mathcal{A})$'ya $\mathcal{A}$'yı içeren enküçük σ-cebir denir.

**2.1.5. Tanım:** X=IR bir topolojik uzay olsun. IR 'nin tüm açık (veya kapalı) veya (yarı açık) aralıkları tarafından üretilen sınıf Tanım 2.1.1'in şartlarını sağlıyor ise bu sınıfa **Borel σ-cebir** denir ve $\mathcal{B}(IR)$ ile gösterilir. $(IR, \mathcal{B}(IR))$ ikilisine de topolojik ölçülebilir uzay denir.

**2.1.6. Önerme:** $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve $(E_n)_{n\geq 1}$, $\mathcal{A}$ içindeki elemanların sayılabilir kümeler dizisi olsun. Bu durumda

i) $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ ise $\lim\limits_{n} \uparrow E_n = \sup\limits_{n\geq 1} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ dır.

ii) $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$ ise $\lim\limits_{n} \downarrow E_n = \inf\limits_{n\geq 1} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ dır.

iii) $\limsup\limits_{n} E_n \in \mathcal{A}$ .

iv) $\liminf\limits_{n} E_n \in \mathcal{A}$ .

v) Eğer $(E_n)_{n\geq 1}$ yakınsak kümeler dizisi ise, $\lim\limits_{n} E_n \in \mathcal{A}$ dır.

**İspat:** Tanım 2.1.1'den hemen görülür.

**2.1.7.Önerme:** $\mathcal{A}$ bir $\sigma$-cebir olmak üzere $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve A, X'ın boş olmayan bir sabit altkümesi olsun. Bu durumda

$$\mathcal{A}_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\}$$

sınıfı A üzerinde tanımlı $\sigma$-cebirdir.

**İspat:** Bunun için $\mathcal{A}_A$ sınıfının Tanım 2.1.1'in şartlarını sağladığı gösterilecektir.

i) A, X'in altkümesi ve $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere $A \cap A = A \in \mathcal{A}_A$ dır. $\emptyset \in \mathcal{A}$ olduğundan $\emptyset = A \cap \emptyset \in \mathcal{A}_A$ dır.

ii) $D \in \mathcal{A}_A$ ise $B \in \mathcal{A}$ olmak üzere $D = A \cap B$ biçiminde yazılır. O halde $D^c = A \setminus D = A \setminus A \cap B = A \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = A \cap B^c$ ve $B^c \in \mathcal{A}$ olduğundan $D^c = A \cap B^c \in \mathcal{A}_A$ olur.

iii) $\{D_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{A}_A$ içindeki kümelerin sayılabilir bir dizisi ise bu durumda her i için $B_i \in \mathcal{A}$ olmak üzere $D_i = A \cap B_i$ yazılır. Buradan da $\bigcup\limits_{i} D_i = \bigcup\limits_{i} (A \cap B_i) = A \cap (\bigcup\limits_{i} B_i)$ ve $\bigcup\limits_{i} B_i \in \mathcal{A}$ dır. Öyleyse $\bigcup\limits_{i} D_i \in \mathcal{A}_A$

dır. Sonuç olarak, $\mathcal{A}_A$ $\sigma$-cebir olur.

**2.1.8. Tanım:** Önerme 2.1.7'nin ışığı altında elde edilen $(A, \mathcal{A}_A)$ ikilisine $(X, \mathcal{A})$ 'nın **alt-ölçülebilir uzayı denir.**

**2.1.9.Önerme:** $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$'nın her elemanı yine $\mathcal{A}$ içindeki başka bir ayrık kümeler dizisi cinsinden yazılabilir.

**İspat:** $A \in \mathcal{A}$ olsun. Öyleki $\{A_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{A}$ içinde sayılabilir kümeler dizisi olmak üzere $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ dir. Bu durumda $\mathcal{A}$ içinde $\{B_i\}_{i\in I}$ sayılabilir kümeler dizisi bulunabilir ki bu durumda her $i$ için $B_i \subset A_i$ ve $\bigcup_i A_i = \bigcup_i B_i$ dir. $\{B_i\}_{i\in I}$ kümeler dizisi aşağıdaki biçimde tümevarım yöntemi ile oluşturulabilir. $i=0$ için, $B_0=A_0$ denilsin. Bu durumda $B_1=A_1\setminus A_0$ olmak üzere $B_0\cap B_1=\emptyset$ dır. Çünkü $B_0\cap B_1 = A_0\cap(A_1\cap A_0^c) = A_0\cap A_0^c\cap A_0\cap A_1=\emptyset$ ve $B_1\subset A_1$ dır. $i>1$ olmak üzere $B_i=A_i\setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} A_j$ olduğu varsayılsın. Açıktır ki

$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{i=0}^{n} B_i$ , her $i$ için $B_i\subset A_i$ ve her $i\neq j$ için $B_i\cap B_j=\emptyset$ dır.

Şimdi de $i=n+1$ durumuna bakılacaktır. Açıktır ki $(B_n)_{n\geq 1}$ dizisinin yukarıdaki tanımından her $n$ için $B_n\subset A_n$ dır. Üstelik,

$$B_n\cap B_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\cap\left(A_{n+1}\setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\cap A_{n+1}\right)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\cap\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)^c\right)= \bigcup_{i=0}^{n} A_i\cap\emptyset=\emptyset$$

olur. Ayrıca

$$\bigcup_{i=0}^{n+1} B_i = \bigcup_{i=0}^{n} B_i \cup B_{n+1} = \bigcup_{i=0}^{n} A_i \cup B_{n+1} = \bigcup_{i=0}^{n} A_i \cup \left(A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$$

$$= \bigcup_{i=0}^{n} A_i \cup (A_{n+1} \cap (\bigcup_{i=0}^{n} A_i)) = \bigcup_{i=0}^{n} A_i \cup A_{n+1} \cap (\bigcup_{i=0}^{n} A_i \cup (\bigcup_{i=0}^{n} A_i))$$

$$= \bigcup_{i=0}^{n} A_i \cup A_{n+1} = \bigcup_{i=0}^{n+1} A_i$$

bulunur. Bu her n için alınırsa istenen çıkar.

## 2.2. Ölçülebilir Fonksiyonlar

Bu kesimde ölçülebilir fonksiyonları tanımlıyacağız ve onların bazı temel özelliklerini inceliyeceğiz.

**2.2.1. Tanım:** $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. Eğer $f:A \longrightarrow [-\infty,+\infty]$ fonksiyonu her t gerçel sayısı için,

$$\{x \in A:\ f(x) > t\}$$

kümesi $\mathcal{A}$'ya ait ise f fonksiyonuna **$\mathcal{A}$-ölçülebilir fonksiyon** denir.

**2.2.2. Önerme:** $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve A, $\mathcal{A}$'ya ait X'in bir altkümesi olsun. $f:A \longrightarrow [-\infty,+\infty]$ fonksiyonu için aşağıdaki şartlar denktirler:

i) f ölçülebilirdir.

ii) Her t gerçel sayısı için $\{x \in A: f(x) \geq t\}$ kümesi $\mathcal{A}$'ya aittir.

iii) Her t gerçel sayısı için $\{x \in A: f(x) < t\}$ kümesi $\mathcal{A}$ 'ya aittir.

iv) Her t gerçel sayısı için $\{x \in A: f(x) \leq t\}$ kümesi $\mathcal{A}$ 'ya aittir.[4]

**2.2.3. Tanım:** $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ topolojik ölçülebilir uzayı üzerinde tanımlı her f fonksiyonu ölçülebilir ise f'ye **Borel ölçülebilir fonksiyon** denir.

**2.2.4. Tanım:** $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ iki ölçülebilir uzay ve $f:(X_1, \mathcal{A}_1) \longrightarrow (X_2, \mathcal{A}_2)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $A_2 \in \mathcal{A}_2$ için $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$ ise f'ye ölçülebilir fonksiyon denir.

**2.2.5. Önerme:** $f:(X_1, \mathcal{A}_1) \longrightarrow (X_2, \mathcal{A}_2)$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$ olmasıdır. [4]

**2.2.6. Sonuç:** Her sürekli f fonksiyonu ölçülebilirdir. [4]

**2.2.7. Sonuç:** $f:IR^d \longrightarrow IR$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda her gerçel t sayısı için $A=\{x \in IR^d : f(x)<t\}$ kümesi açıktır.

**İspat:** Bu A kümesi kolayca gösterilirki bir Borel kümesidir. f fonksiyonu da sürekli olduğundan f fonksiyonu Borel ölçülebilirdir. Bu ise A'nın açık olduğunu gösterir.

**2.2.8.Sonuç:** I, IR'nin bir alt aralığı ve $f:I \longrightarrow IR$ azalan olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her gerçel t sayısı için $\{x \in IR : f(x)<t\}$ kümesi bir Borel kümesidir. Bu durumda f Borel ölçülebilirdir. [4]

**2.2.9.Tanım:** $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay olsun. $A \in \mathcal{A}$ için

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \in A \\ 0 \ , & x \in A^c \end{cases}$$

ile tanımlı olan fonksiyona A'nın karakteristik fonksiyonu denir.

**2.2.10. Tanım:** $a_i \in IR$, $A_i \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$$

fonksiyonuna bir basit fonksiyon denir.

**2.2.11. Önerme:** $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve B, X'in bir altkümesi olsun. Bu durumda B'nin karakteristik fonksiyonu olan $\chi_B$'nin $\mathcal{A}$-ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart $B\in\mathcal{A}$ olmasıdır.[4]

**2.2.12.Önerme:** $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay, $f:X\longrightarrow[-\infty,+\infty]$ bir basit fonksiyon ve $\alpha_1,..,\alpha_n$, f'nin aldığı değerler olsun. Bu durumda f'nin $\mathcal{A}$-ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart $i=1,...,n$ için $\{x\in X:f(x)=\alpha_1\}\in\mathcal{A}$ olmasıdır.[4]

**2.2.13. Önerme:** (X, ) bir ölçülebilir uzay, A $\mathcal{A}$'ya ait X'in bir altkümesi ve $f,g:A\longrightarrow[-\infty,+\infty]$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\{x\in A:f(x)<g(x)\}$$

$$\{x\in A:f(x)\leq g(x)\}$$

ve $$\{x\in A:f(x)=g(x)\}$$

kümeleri $\mathcal{A}$'ya aittir.[4]

**2.2.14. Önerme:** $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay, A $\mathcal{A}$'ya ait X'in bir altkümesi ve $\{f_n\}$, A üzerinde tanımlı genişletilmiş gerçel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

i) $\sup\limits_n f_n$ ve $\inf\limits_n f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

ii) $\limsup\limits_n f_n$ ve $\liminf\limits_n f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

iii) $\lim\limits_n f_n$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

[4]

**2.2.15. Önerme:** $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay, A $\mathcal{A}$'ya ait X'in bir altkümesi, f ve g A üzerinde gerçel değerli ölçülebilir fonksiyonlar ve $\alpha$ bir gerçel sayı olsun. Bu durumda,

$\alpha f$ , $f+g$ , $f-g$ , $f.g$ , $f/g$ , $|f|$ , $f^+$ , $f^-$ ,$\min(f,g)$ ve $\max(f,g)$ fonksiyonları ölçülebilirdir. ($f/g$'nin değerinde $\{x\in A:g(x)=0\}$ dır).[4]

**2.2.16. Önerme:** $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay, $A$ $\mathcal{A}$'ya ait X'in bir altkümesi ve $f:A\longrightarrow[0,+\infty]$ tanımlı bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x\in A$ için

1) $f_1(x)\leq f_2(x)\leq \ldots$

2) $f(x)=\lim\limits_{n} f_n(x)$

olacak şekilde A üzerinde tanımlı gerçel değerli basit ölçülebilir fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisi vardır.[4]

**2.2.17. Önerme:** $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve A, $\mathcal{A}$'ya ait X'in bir altkümesi olsun. Bir $f:A\longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki şartlar denktir.

i) f, $\mathcal{A}$-ölçülebilirdir.

ii) IR'nin her açık U altkümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi $\mathcal{A}$'ya aittir.

iii) IR'nin her kapalı C altkümesi için $f^{-1}(C)$ kümesi $\mathcal{A}$'ya aittir.

iv) IR'nin her Borel B altkümesi için $f^{-1}(B)$ kümesi $\mathcal{A}$'ya aittir.

[4]

## 2.3.Ölçüm Uzayı

**2.3.1. Tanım:** $(X,\mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve genişletilmiş pozitif gerçel sayılar kümesi $\overline{\mathbb{R}}^+=[0,+\infty]$ verilsin. Eğer her $A\in\mathcal{A}$

için bir tek $\mu(A)$ vardır.Öyleki $\mu(A)$ sonlu pozitif bir gerçel sayı veya $+\infty$ olabilir ise

$$\mu:(X,\mathcal{A})\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}^{+}$$

tanımlanan fonksiyonuna küme fonksiyonu denir.

**2.3.2. Tanım:** $\mu:(X,\mathcal{A})\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}^{+}$ küme fonksiyonuna pozitif ölçüm veya soyut ölçüm denir veya kısaca ölçüm denir. Eğer

i) $\mu(\emptyset)=0$

ii) $\{A_i\}_{i\in I\neq\emptyset}$, $\mathcal{A}$ içindeki ayrık kümelerin bir dizisi yani

her $i\neq j$ için $A_i\cap A_j=\emptyset$ ve $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{A}$ ise

$$\mu(A)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A)$$

dır. Buna $\mu$'nün $\sigma$-toplamsallık özelliği de denir.

**2.3.3. Sonuç:** Tanım 2.3.1'in ii) şıkkında $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i\in\mathcal{A}$ olarak alınırsa $\mu(A)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$ elde edilir. Bu durumda $\mu$'ye sonlu toplamsaldır denir. Eğer $\mu$ $\sigma$-toplamsal ise $\mu$ sonlu toplamsaldır. Fakat bunun tersi doğru değildir.

**İspat:** Önerme 2.1.9'dan, $i=1,2,\ldots,n$ için $B_i=A_i$ ve $i\geq n+1$ için $B_i=\emptyset$ olmak üzere $(B_i)_{i\geq 1}$ ayrık kümeler dizisi tanımlansın ve her $i$ için $B_i\subset A_i$ ve $\bigcup_i B_i=\bigcup_i A_i$ dir. Buradan da

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\cup\bigcup_{n+1}^{\infty} B_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)+\sum_{n+1}^{\infty}\mu(B_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$$

elde edilir. Tersi doğru değildir. Örneğin,

$A=(0,1]$ kümesi üzerinde $0\leq a\leq b\leq 1$ olmak üzere

$$\mu((a,b] = \begin{cases} b-a & , a\neq 0 \\ \infty & , a=0 \end{cases}$$

biçiminde küme fonksiyonunu tanımlıyalım. Açıktır ki $\mu$ küme fonksiyonu Tanım 2.3.1'in şartlarını sağlar. Dolayısıyla bir ölçümdür.

$(A_n)_{n\geq 1} = ((\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}])_{n\geq 1}$, A'nın ayrık altkümelerinin bir dizisi için $A=\bigcup_n A_n$ dir. Bu durumda

$$\infty=\mu(A)\neq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})= \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n+1})=1$$

dir.

**2.3.4. Tanım:** $(X,\mathcal{A},\mu)$ üçlüsüne soyut ölçüm uzayı veya kısaca ölçüm uzayı denir. Burada $(x,\mathcal{A})$ ölçülebilir uzayı, $\mu$' de $(X,\mathcal{A})$ üzerinde tanımlı bir ölçümdür.

**2.3.5. Tanım:** $(IR,\mathcal{B}(IR))$ topolojik ölçülebilir uzay olsun.

$$\lambda: (IR,\mathcal{B}(IR)) \longrightarrow \overline{IR}^{+}$$

$$\lambda([a,b))= \begin{cases} b-a & , a\neq b \text{ ise} \\ 0 & , a=b \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan küme fonksiyonu $(IR,\mathcal{B}(IR))$ topolojik ölçülebilir uzay üzerinde tanımlı bir ölçümdür. Buna aralığın uzunluğu veya Lebesgue ölçümü de denir. $(IR,\mathcal{B}(IR),\mu)$ üçlüsüne topolojik ölçüm uzayı denir.

**2.3.6. Önerme:** $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. Bu durumda,

i) Her $A,B\in\mathcal{A}$ için $A\subset B$ ise $\mu(A)<\mu(B)$ dir.

ii) Her $A,B\in\mathcal{A}$ için $A\subset B$ ve $\mu(A)<\infty$ ise $\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$

dır.

iii) Her $A,B\in\mathcal{A}$ için $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$ dır.

iv) Her $A,B\in\mathcal{A}$ için $\mu(A\Delta B)=\mu(A)+\mu(B)-2\mu(A\cap B)$ dır.

v) $\{A_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{A}$ içindeki sayılabilir kümelerin bir dizisi ise $\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A\right)\leq\sum_{i=0}^{\infty}\mu(A)$ dir.

Eğer $\{A_i\}_{i\in I}$'ler ikişer ikişer ayrık kümeler dizisi ise eşitsizlik bir eşitlik olur.

vi) $\{A_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{A}$ içinde ikişer ikişer ayrık kümelerin dizisi ve $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\in\mathcal{A}$ ise $\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)\geq\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i)$ olur.

vii) $A\in\mathcal{A}$ ise $\{A_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{A}$ içinde sayılabilir kümeler dizisi olmak üzere $A\subset\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ ve $\mu$ $\sigma$-toplamsal ise $\mu(A)\leq\sum_{i=0}^{\infty}\mu(A_i)$ dir.

[4]

**2.3.7. Tanım:** $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı olsun.

i) Eğer $\{A_n\}_{n\in I}$ artan kümeler dizisi , $\bigcup_n A_n\in\mathcal{A}$

$\mu(\lim_n A_n)=\lim_n\uparrow\mu(A_n)=\sup_n\mu(A_n)=\mu(\bigcup A_n)$ ise $\mu$'ye artan süreklilik özelliğine sahiptir veya altan süreklidir denir.

ii) Eğer $\{A_n\}_{n\in I}$ azalan kümeler dizisi, $\bigcap_n A_n\in\mathcal{A}$, bir $n_o$ vardır. Öyleki $n>n_o$, $\mu(A_n)<\infty$ olduğundan

$$\mu(\lim_n A_n)=\lim_n\downarrow\mu(A_n)=\inf_n\mu(A)=\mu(\bigcap_n A_n)$$

ise $\mu$'ye azalan süreklilik özelliğine sahiptir veya üstten süreklidir denir.

iii) Eğer alttan ve üstten sürekli ise $\mu$'ye süreklidir denir.[4]

**2.3.8. Önerme:** $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçüm uzayı olsun.

i) Eğer $\{A_n\}_{n\in I}$ , $\mathcal{A}$ içinde artan kümeler dizisi ise

$$\lim_n \mu(A_n)=\mu(\bigcup_n A_n)$$

dir.

ii) Eger $\{A_n\}_{n\in I}$, $\mathcal{A}$ içinde azalan kümeler dizisi ve bazı n'ler için $\mu(A_n)<\infty$ ise $\lim_n \mu(A_n)=\mu(\bigcap_n A_n)$ dir. [4]

**2.3.9.Önerme:** $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. Aşağıdaki özellikler aralarında denktir.

i) $\mu$ pozitif bir ölçümdür.

ii) $\mu$ artan süreklilik özelliğine sahiptir. Yani $\{A_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{A}$ içinde artan kümeler dizisi, $\bigcup_n A_n\in\mathcal{A}$ ise

$$\mu(\lim_n\uparrow A_n)=\lim_n\uparrow\mu(A_n)=\sup_n \mu(A_n)=\mu(\bigcup_n A_n)$$

dir.

iii) $\mu$ azalan süreklilik özelliğine sahiptir. Yani $\{A_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{A}$ içinde azalan kümeler dizisi ve bazı n'ler içinde $\mu(A_n)<\infty$ ise

$$\mu(\lim_n\downarrow A_n)=\lim_n\downarrow\mu(A_n)=\inf_n \mu(A_n)=\mu(\bigcap_n A_n)$$

olur.

iv) $\mu$, $\emptyset$'de üstten süreklidir. Yani $\{A_i\}_{n\in I}$, $\mathcal{A}$ içinde azalan kümeler dizisi için $\bigcap_n A_n\in\mathcal{A}$ ve $\bigcap_n A_n=\emptyset$ ise

$$\mu(\lim_n\downarrow A_n)=\lim_n\downarrow\mu(A_n)=\mu(\bigcap_n A_n)=\mu(\emptyset)=0$$

dır.[4]

**2.3.10.Tanım:** Bir $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçüm uzayı verilsin. Eğer $B\in\mathcal{A}$ ve $B\not\subset A$ ve $\mu(A)=0$ olduğunda $A\in\mathcal{A}$ oluyor ise $\mu$'ye tam ölçüm denir.

**2.3.11. Önerme:** Bir $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçüm uzayı verilsin. $(A,\mathcal{A}_A)$, $(X,\mathcal{A})$'nın bir alt ölçülebilir uzayı olsun. Bu durumda

$$\mu_A:(A,\mathcal{A}_A)\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}^+ \quad , \quad \mu_A(A\cap B)=\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$$

küme fonksiyonu ile donatılan $(A,\mathcal{A}_A,\ \mu_A)$ uzayı bir ölçüm uzayıdır. Burada A, pozitif ölçümlü X'in bir altkümesidir.

**İspat:** Önerme 2.1.7'den $(A,\mathcal{A}_A)$ ikilisinin bir ölçülebilir uzay olduğu görüldü. Şimdi

$$\mu_A(A\cap B)=\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$$

ile tanımlı olan $\mu_A$ küme fonksiyonu bir ölçüm olduğu görülecektir. $\mu_A(A\cap\emptyset)=\ \mu_A(\emptyset)=0$ olduğu açıktır. Her i için $B_i\in\mathcal{A}$ olmak üzere $(A\cap B_i)_{i\in I}$, $\mathcal{A}_A$ için sayılabilir ayrık kümeler dizisi ise

$$\mu_A(\bigcup_i(A\cap B_i)) = \sum_{i\in I}\mu_A(A\cap B_i)$$

dir. Gerçekten,

$$\mu_A(\bigcup_i(A\cap B_i)) =\frac{\mu_A(\bigcup_i(A\cap B_i))}{\mu(A)} \qquad \mu \text{ ölçüm olduğu için}$$

$$=\sum_{i\in I}\frac{\mu(A\cap B_i)}{\mu(A)} = \sum_{i\in I}\mu_A(A\cap B_i)$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(A,\mathcal{A}_A,\ \mu_A)$ bir ölçüm uzayıdır.

**2.3.12. Tanım:** Önerme 2.3.11 ışığı altında elde edilen $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ ya $(X, \mathcal{A}, \mu)$'nün alt ölçüm uzayı denir. $\mu_A$ küme fonksiyonu $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay üzerinde bir şartlı ölçümdür.

**2.3.13. Tanım:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı verilsin. Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A)=0$ ise $A$'ya sıfır ölçümlü küme veya $\mu$-ihmal edilebilir küme denir.

**2.3.14. Tanım:** Eğer bir $P(x)$ önermesi, sıfır ölçümlü bir küme dışında, her $x$ için geçerli ise hemen hemen heryerde (h.h.h) geçerlidir denir.

## 2.4. $\mathcal{L}^p$ Uzayları

**2.4.1. Tanım:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı üzerinde tanımlı

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$ basit fonksiyonu verilsin. Burada

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ler negatif olmayan gerçel sayılar ve her $i$ için $A_i \in \mathcal{A}$ ve $i=j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ dır. Eğer her $i$ için $a_i \neq 0$ olmak üzere $\mu(A_i) < \infty$ ise $f$'ye $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üzerinde **integrallenebilir fonksiyon** denir. Ve $f$'nin integrali ,

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

ile verilir. integrallenebilir basit fonksiyonların kümesini $\ell$ ile göstereceğiz.

**2.4.2. Önerme:** $f$ basit fonksiyonu integralinin değeri $f$'nin gösterimine bağlı değildir.

**İspat:** Önerme 2.1.9'dan $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ yazılır. Eğer

$A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ise $a_i = b_j$ olup, bu durumda

$$\int f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_j) = \int f$$

olur. Tanım gereği $\int f d\mu$ elde edilir. Bu ise integrali, f'nin gösterimine bağlı olmadığını gösterir.

**2.4.3. Önerme:** $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı, f ve g $\mathcal{J}_+$'ya ait ve $\alpha$ negatif olmayan bir reel sayı olsun. Bu durumda,

a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$

b) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ ve

c) Her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ ise $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ olur.

[4]

**İspat:** $a_1,\ldots,a_m$ negatif olmayan reel sayılar ve $A_1,\ldots,A_m$ X' in $\mathcal{A}$'ya ait ayrık alt cümleleri, $b_1,\ldots,b_n$ negatif olmayan reel sayılar ve $B_1,\ldots,B_n$ X'in $\mathcal{A}$'ya ait ayrık alt cümleleri olmak üzere $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ olduğunu farzedelim.

Önerme 2.1.9 gereği $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ yazılır. Bu durumda

$$\int \alpha f d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha a_i \mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = \alpha \int f d\mu$$

ve

$$\int (f+g)d\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_i+b_j)\mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i\mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_j\mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j\mu(B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu$$

yazılır. Ve buradan a) veb) şıklarının ispatı görülür.

Şimdi her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ olduğunu farzedelim. O halde $g-f$ , $\mathcal{S}_+$ 'ya aittir ve böylece,

$$\int g d\mu = \int (f+(g-f))d\mu$$

$$= \int f d\mu + \int (g-f)d\mu \geq \int f d\mu$$

yazılır. Ve c) şıkkıda ispatlanmış olur.

**2.4.4. Önerme:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı, $f \in \mathcal{S}_+$ ve her $x \in X$ için $f(x) = \lim_n f_n(x)$ olmak üzere $\{f_n\}$, $\mathcal{S}_+$ 'deki fonksiyonların azalmayan bir dizisi olsun. Bu durumda,

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$$

olur.[4]

**2.4.5. Önerme:** Bir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı verilsin. Ayrıca $f: X \longrightarrow [0,+\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\{f_n\}$, her $x \in X$ için $f(x) = \lim f_n(x)$ olacak şekilde $\mathcal{S}_+$ 'daki fonksiyonların azalmayan bir dizisi olsun. O zaman

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$$

olur.[4]

**2.4.6. Önerme:** Bir $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçüm uzayı verilsin. Ayrıca f ve g X üzerinde ölçülebilir gerçel değerli fonksiyonlar ve $\alpha$ da negatif olmayan bir reel sayı olsun. Bu durumda,

a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$

b) $\int (f+g)\, d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ ve

c) Her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ ise $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

olur. [4]

**2.4.7. Tanım:** X üzerinde $f:X \longrightarrow [-\infty,+\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\int f^{+} d\mu$ ve $\int f^{-} d\mu$ nün herikiside sonlu ise f ye integrallenebilir fonksiyon denir. Ve f'nin inteğrali de

$$\int f d\mu = \int f^{+} d\mu - \int f^{-} d\mu$$

olarak tanımlanır.

**2.4.8. Uyarı:** $\int f^{+} d\mu$ ve $\int f^{-} d\mu$ nin enaz biri sonlu ise f'nin integrali vardır denir. Ve yine bu durumda

$$\int f d\mu = \int f^{+} d\mu - \int f^{-} d\mu$$

olarak tanımlanır. Bazen $\int f d\mu$ nün yerine ya $\int f(x)\mu(dx)$ yada $\int f(x) d\mu(x)$ yazılır.

**2.4.9. Tanım:** $f: X \longrightarrow [-\infty,+\infty]$ $\mathcal{A}$-ölçülebilir ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $f\chi_A$ fonksiyonu integralenebiliyor ise f'ye A üzerinde integralenebilirdir denir. Ve f nin A üzerindeki integrali $\int_A f = \int f\chi_A d\mu$ olarak tanımlanır.

X üzerinde integrallenebilen bütün gerçel değerli fonksiyonların kümesini $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu,IR)$ (veya bazen kısaca $\mathcal{L}^1$ ) olarak tanımlarız.

**2.4.10. Sonuç:** $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu,IR)$, bir vektör uzayıdır ve integral $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu,IR)$ üzerinde bir lineer fonksiyoneldir. [4]

**2.4.11. Lemma:** Bir $(X,\mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı verilsin ve $f_1, f_2, g_1, g_2$ X üzerinde $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ olacak şekilde negatif olmayan gerçel değerli integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu = \int g_1 d\mu - \int g_2 d\mu$$

olur.

**İspat:** $f_1$, $f_2$, $g_1$, ve $g_2$ fonksiyonları $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ eşitliğini sağladığından aynı zamanda $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$ eşitliğini de sağlar ve dolaysıyla

$$\int f_1 d\mu + \int g_2 d\mu = \int g_1 d\mu + \int f_2 d\mu$$

olur. Buradaki bütün integrallerin değerleri sonlu olduğundan

$$\int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu = \int g_1 d\mu - \int g_2 d\mu$$

yazılır.

**2.4.12. Önerme:** Bir $(X,\mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı verilsin. Ayrıca f ve g X üzerinde integrallenbilen gerçel değerli fonksiyonlar ve $\alpha$ da bir gerçel sayı olsun. Bu durumda,

a) $\alpha f$ ve $f+g$ integrallenebilir.

b) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$,

c) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

d) Her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ ise $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ olur.

[4]

**2.4.13. Önerme:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f \in \mathcal{L}^1$ olsun. Bu durumda

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

olur.[4]

**ispat:** f ve $|f|$ nin integrallenebilir olduğundan

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^{+} d\mu - \int f^{-} d\mu\right| \leq \int f^{+} d\mu + \int f^{-} d\mu = \int |f| d\mu$$

olup ilk ve son terimlerden

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

eşitsizliginin sağlandığı görülür.

**2.4.14. Önerme:** Bir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı verilsin. Ayrıca f ve g X üzerinde $\mathcal{A}$-ölçülebilir genişletilmiş gerçel fonksiyonlar olmak üzere $\overset{3}{h\text{-}x}$ için $f(x) = g(x)$ olsun. O halde ya $\int f d\mu$ yada $\int g d\mu$ varsa herikisi de vardır. ve $\int f d\mu = \int g d\mu$ olur.

[4]

**2.4.15. Önerme:** Bir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı verilsin. $A \in \mathcal{A}$ olsun.

$$\int f d\mu = 0 \iff f = 0 \ h^{3}$$
$$\iff \mu(A) = 0 \ h^{3}$$

[4]

**2.4.16. Tanım:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $1 \leq p < +\infty$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}^{p}(X, \mathcal{A}, \mu, K)$, ($K = IR$ veya $\mathbb{C}$), $|f|^{p}$ integrallenebilir olacak şekilde $f: X \longrightarrow K$ bütün $\mathcal{A}$-ölçülebilir fonksiyonların kümesine p.mertebeden integrallenebilir K değerli fonksiyonlar kümesi denir.

**2.4.17.Önerme:** Eğer $\alpha \in K$ ve $f \in \mathcal{L}^{p}(X, \mathcal{A}, \mu, K)$ ise $\alpha f \in \mathcal{L}^{p}(X, \mathcal{A}, \mu, K)$ dır. Üstelik, eğer f ve g $\mathcal{L}^{p}(X, \mathcal{A}, \mu, K)$ ye ait ise $f+g \in \mathcal{L}^{p}(X, \mathcal{A}, \mu, K)$ dır. [4]

**2.4.18.Tanım:** Önerme 2.4.17'nin ışığı altında $\mathcal{L}^{p}(X, \mathcal{A}, \mu, K)$ K üzerinde bir vektör uzayıdır denir. [4]

**2.4.19. Tanım:** $\{x \in X: |f(x)| > M\}$ yerel $\mu$- ihmal edilebilir olacak şekilde negatif olmayan bir M sayısı varsa $(X, \mathcal{A}, \mu, K)$ cümlesine yerel sınırlı olan $f: X \longrightarrow K$ bütün -ölçülebilir fonksiyonların yerel sınırlı fonksiyon kümesi denir.

**2.4.20. Önerme:** $\mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu, K)$ bir vektör uzayıdır. [4]

sık sık $\mathcal{L}^{p}(X, \mathcal{A}, \mu)$ yi $\mathcal{L}^{p}(X, \mathcal{A}, \mu, K)$ yerine kullanacağız.

**2.4.21. Önerme:** Eğer $f \in \mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise bu durumda $\{x \in X: |f(x) \geq \| f \|_{\infty}\}$ yerel $\mu$-ihmal edilebilirdir. Üstelik $\{M_n\}$, $\| f \|_{\infty} = \lim\limits_{n} M_n$ ve her n için yerel $\mu$-ihmal edilebilir olan $\{x \in X: |f(x)| > M_n\}$ olacak şekilde gerçel sayıların artmayan bir dizisi ise $\{x\in X: |f(x)| \geq \| f \|_\infty \}$ kümesi $\{x\in X: |f(x)| > M_n\}$ kümelerinin birleşimidir. Ve böylece yerel μ-ihmal edilebilirdir. [4]

**2.4.22. Önerme (Hölder eşitsizliği)**

$(X,\mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $1 \leq p \leq +\infty$ , $1 \leq q \leq +\infty$

ve $1/p + 1/q = 1$ olsun. Eğer $f\in\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A}, \mu)$ ve $g\in\mathcal{L}^q(X,\mathcal{A}, \mu)$

ise f.g, $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A}, \mu)$ ye aittir. Ve

$$\int |fg|d\mu \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

sağlanır. [4]

**2.4.23. Önerme (Minkowski eşitsizliği)**

$(X,\mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm ve $1 \leq p \leq +\infty$ olsun. Eğer f ve g

$\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A}, \mu)$ 'ye ait ise

$$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

dır. [4]

**2.4.24. Önerme:** Her $p\in[1,\infty)$ olmak üzere $\|.\|_p : \mathcal{L}^p_K(x) \longrightarrow IR$

$\| f \|_p = ( \int |f|^p )^{1/p}$ ile tanımlı fonksiyon bir yarınormdur.

$(\mathcal{L}^p_K(.) , \| . \|_p)$ bir normlu uzaydır. [4]

## 2.5. $L^p$ Uzayları.

**2.5.1. Tanım:** $(X,\mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı verilsin. $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A}, \mu)$

ye ait olan f fonksiyonlardan ve $\| f \|_p = 0$ eşitliğini sağlıyor ve $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ 'ye ait olan fonksiyonlardan oluşan $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ nin altkümesini $\mathcal{N}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ ile gösterilir.

$$\mathcal{N}^p=\{ f\in\mathcal{L}^p : f=0 \ \mu\text{-h}^3 \}$$

ile de gösterilir. Bu durumda eğer $1\leq p<+\infty$ ise $\mathcal{N}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ hemen hemen heryerde sıfıra eşit olan X üzerinde p mertebeden integrallebilir fonksiyonlardan ibarettir. Eğer $p = +\infty$ ise $\mathcal{N}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ hemen hemen heryerde yerel olarak sıfıra eşit olan p mertebeden integrallenebilir fonksiyonlardır.

**2.5.2. Önerme:** $\mathcal{N}^p(X,\mathcal{A},\mu)$, $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ vektör uzayının bir lineer alt uzayıdır. [4]

**2.5.3. Sonuç:** $f,g\in\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ için $f\sim g$ olması için gerek ve yeter şart f-g'nin $\mathcal{N}^p(X,\mathcal{A},\mu)$'ye ait olmasıdır.[4]

**2.5.4. Uyarı:** Sonuç 2.5.3'te ifade edilen "$\sim$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.[4]

**2.5.5. Tanım:** $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ uzayı, $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)/\mathcal{N}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ bölümü ile ifade edilir. Yani,

$$L^p(X,\mathcal{A},\mu) = \frac{\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)}{\mathcal{N}^p(X,\mathcal{A},\mu)}$$

şeklinde ifade edilir. Diğer bir deyişle $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$, $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ deki $\mathcal{N}^p(X,\mathcal{A},\mu)$'nün $\sim$ denklik bağıntısıyla oluşturulan denklik sınıflarının kolleksiyonudur. $L^p$'nin elemanları $<f>$ biçiminden ifade edilir.

**2.5.6.Önerme:** $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ üzerinde $\|<f>\|_p=\|f\|_p=(\int |f|^p d\mu)^{1/p}$

vasitasıyla $\|.\|_p$ fonksiyonunu tanımlayabiliriz. $\|.\|_p$, $L^p(X,\mathcal{A}, \mu)$ üzerinde bir normdur.[4]

Bazen $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A}, \mu)$ ve $L^p(X,\mathcal{A}, \mu)$ için aynı semboller kullanılır.

**2.5.7.Sonuç:** $(X,\mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. $L^2(X,\mathcal{A}, \mu,IR)$ üzerinde $(<f>, <g>) = \int fgd\mu$ şeklinde bir iç çarpım tanımlanır. Ve iç çarpım ile norm, $L^2(X,\mathcal{A}, \mu, IR)$ üzerinde yerel normdur.[4]

**2.5.8. Teorem:** $(X,\mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $1 \leq p \leq +\infty$ olsun. Bu durumda $L^p(X,\mathcal{A}, \mu)$ $\|.\|_p$ normu altında tamdır. Üstelik $L^p(X,\mathcal{A}, \mu)$ bir Banach uzayıdır.[4]

**2.5.9. Önerme:** $(X,\mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $1 \leq p \leq +\infty$ olsun. $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$'deki basit fonksiyonlar $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$'nin bir yoğun alt uzayını oluştururlar. Böylece de $L^p$'nin bir yoğun alt uzayını belirtirler.[4]

# 3. FRÉCHET UZAYLARI

## 3.1. Frechet Uzayları

**3.1.1. Tanım:** Aşağıdaki özellikleri sağlayan Topolojik vektör uzayına bir Fréchet uzayı denir.

a) Metriklenebilir.

b) Tamdır.

c) Yerel konvekstir.

Frechet uzayını kısaca F-uzayı şeklinde göstereceğiz.

**3.1.2. Önerme:** Bir F-uzayının herhangi kapalı altuzayı indirgenmiş topolojiye göre bir F-uzayıdır.[9]

**3.1.3. Önerme:** İki F-uzayının çarpımı bir F-uzayıdır.[9]

**3.1.4. Önerme:** Bir F-uzayı mod $a$'ya göre kapalı alt uzayının bölümü bir F-uzayıdır.[9]

**3.1.5. Sonuç:** Sonlu boyutlu Hausdorff uzayı ve Banach uzayı bir F-uzayıdır.[9]

**3.1.6. Tanım:** $IR^n$ n-uzayı verilsin. n-uzayındaki değişkenler $x=(x_1,\dots,x_n)$ ve $y=(y_1,\dots,y_n)$ şeklinde ifade edilir.

$j=1,\dots,n$ olmak üzere $\dfrac{\partial(.)}{\partial x_j}$, $x_j$ değişkenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevini gösterir. $p=(p_1,\dots,p_n)$ ise

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}$$

olur. $p=(p_1,\dots,p_n)$ ise $|p|=p_1+\dots+p_n$ p'nin uzunluğudur. Kompleks değerli $\emptyset(x)$ fonksiyonları $IR^n$'nin bir $\Omega$ açık altkümesi üzerinde tanımlanabilir. $\Omega$'da tanımlı bir $f$ komples fonksiyonu $\mathcal{E}^k$ $(k\geq 1)$ tanıtmaktadır. Eğer $f$ k mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip ise $f \in \mathcal{C}^k$ olur.

$k=0,1,2,\ldots$ olmak üzere $f \in \mathcal{C}^k$ ise $f \in \mathcal{C}^\infty$ olur. Böyle fonksiyona sonsuz türevlenebilir fonksiyon denir.

$0 \le k \le \infty$ olmak üzere $\Omega$ içindeki $\mathcal{C}^k$ fonksiyonları kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Ve $\mathcal{C}^k(\Omega)$ ile gösterilir.

**3.1.7. Örnek:** $\mathcal{C}^k(\Omega)$ bir F-uzayıdır. Gerçekten,

$$|f|_{m,K} = \sup_{|p| \le m} \left( \sup_{x \in K} |(\partial/\partial x)^p f(x)| \right)$$

ailesi $\mathcal{C}^k$ için bir yarı-normdur. Burada K, $\Omega$'nın herhangi bir kompakt altkümesidir. Kompakt olan bir küme üzerinde sürekli olan her fonksiyon sınırlıdır. Dolayısıyle eğer f bir $\mathcal{C}^k$ fonksiyonu ise ve $m \le k$ olan bir tamsayı ise $|f|_{m,K}$'lar sonludur. Böylece k sonlu ise $m=k$ alınır. Eğer k sonlu değilse m pozitif tam sayılarının dizisi üzerinde değişen sayı olarak alınır.

$f \rightsquigarrow |f|_{m,K}$ yarı-normları ile $\mathcal{C}^k(\Omega)$ üzerinde topoloji tanımlanır. Bu topoloji $\mathcal{C}^k$-topolojisi olarak adlandırılır.

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ bir lokal konvekstir.

**3.1.8. Lemma:** $\Omega$, $IR^n$'nin bir açık altkümesi olsun. Aşağıdaki iki özellikli $\Omega$'nın $K_1, K_2, \ldots, K_r, \ldots$ kompakt altkümesinin bir dizisi vardır.

a) Her $j=1,2,\ldots,K_j$ ler $K_{j+1}$ 'in içinde içerilir.

b) $K_j$ kümelerinin birleşimi $\Omega$'ya eşittir.

[9]

3.1.9. Sonuç:

i) Kompleks düzlem tamdır.

ii) $A\subset IR^n$ ve A üzerinde bir g fonksiyonuna düzgün olarak yakınsayan A içindeki sürekli fonksiyonların bir $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ dizisi verilsin. O halde g, A içinde süreklidir.

iii) A, n-uzayının bir açık altkümesi ve A içinde fonksiyonlarının $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ dizisi verilsin. A içinde $g_n$'nin bir g fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığını ve birinci mertebeli $\partial g_n/\partial x_j$ kısmi türevleri $j=1,2,\ldots,n$ olmak üzere $g^{(j)}$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığını farz edelim. O halde her j için $g^{(j)} = \partial g/\partial x_j$ dir. Üstelik $g\in\mathcal{C}^1$ dir.

[9]

Şimdi $\mathcal{C}^k(\Omega)$'nın tamlığını gösterelim. $\mathcal{C}^k(\Omega)$'nın topolojisinin tanımından dolayı her $x\in\Omega$ için $f_n(x)$ sayıları kompleks düzlemde bir Cauchy dizisi oluştururlar. Yani, $m\leq k$ olan herhangi tamsayı ve $\Omega$'nin herhangi K kompakt altkümesi için $\varepsilon>0$ sayısı verilsin.

$$\text{her } n,m\geq N(\varepsilon) \text{ olduğundan } |f_n-f_m|_{m,K}<\varepsilon$$

olacak şekilde $N(\varepsilon)$ sayısı vardır. m=0 ve K={x} almak sonuç için yeterlidir. Sonuç 3.1.9'un i) şıkkından $f_n(x)$ kompleks sayılar dizisi f(x) gibi bir limite sahiptir. Açıktır ki $\Omega$ içinde $x\longrightarrow f(x)$ bir fonksiyondur. $\Omega$'nın her kompakt altkümesi içinde $f_n(x)$ f'ye düzgün olarak yakınsar. $\Omega$'nın herhangi bir noktasının uygun bir komşuluğunun bu küme olarak alırsak sonuç 3.1.9'un ii) şıkkından f, $\Omega$'da sürekli olur. Eğer k=0 ise sonuç açıktır. k>0 ise $f_n$, $\mathcal{C}^k(\Omega)$ içinde bir Cauchy dizisi olduğundan j=1,...,n olmak üzere $\partial f_n/\partial x_j$ birinci mertebeli kısmi türevler $\mathcal{C}^{k-1}(\Omega)$ içinde bir Cauchy dizisi oluştururlar. $k<\infty$ olduğunu farz edelim. k üzerinde tüme varım yöntemi uygulanarak her j için $\partial f_n/\partial x_j$ $\mathcal{C}^{k-1}$ fonksiyonuna yakınsar. Sonuç 3.1.9'un iii) şıkkından bu fonksiyon $x_j$ 'ye göre f'nin türevi olmalıdır Eğer $k=\infty$ ise $f_n$ $\mathcal{C}^k(\Omega)$ içinde $\mathcal{C}^k(\Omega)$'nın f elemanına yakınsadığı gösterilir.

## 3.2. Holomorfik Fonksiyonlar

Bu kısımda Holomorfik fonksiyonların temel bazı özellikleri verilecektir. Genel durumda "holomorfik" 'in kullanışlı en az iki doğal tanımı vardır.Biri "zayıf" ve biri "kuvvetli" dir. Eğer değerler bir Frechet uzayında olduğu kabul edilirse fonksiyonların benzer sınıfları tanımlanır.

**3.2.1. Tanım:** $\Omega$, $\mathbb{C}$ 'de bir açık kümle ve X bir kompleks topolojik vektör uzayı olsun.

a) Eğer her $\Lambda \in X^*$ için $\Lambda f$ adi anlamda holomorfik ise bir $f:\Omega \longrightarrow X$ fonksiyonu $\Omega$'da **zayıf holomorfik fonksiyon denir.**

b) Eğer her $z \in \Omega$ için

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

mevcut ise $f:\Omega \longrightarrow X$ fonksiyonu **kuvvetli holomorfiktir denir.**

**3.2.2. Uyarı:** Tanım 3.2.1'de elde edilen $\Lambda$ fonksiyonellerin sürekliliğinden görülür ki her kuvvetli holomorfik fonksiyon zayıf holomorfiktir. X bir Fréchet uzayı olduğu zaman karşıtı doğrudur.[8]

### 3.3. Fréchet Türevi

**3.3.1. Tanım:** X ve Y'nin Banach uzayları olduğunu kabul edelim. $\Omega$, x'in bir açık altkümesi ve $F:\Omega \longrightarrow Y$ fonksiyonu ve $a \in \Omega$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|F(a+x)-F(a)-\Lambda x\|}{\|x\|} = 0$$

olacak şekilde $\Lambda \in \mathcal{B}(X,Y)=\{\Lambda : X \longrightarrow Y$ sınırlı lineer dönüşüm $\}$ varsa bu durumda $\Lambda$'ya a'da F'nin **Fréchet türevi denir.** Ve $(DF)_a$ ile gösterilir.

**3.3.2. Tanım:** Eger her $a \in \Omega$ için $(DF)_a$ mevcut ise $\Omega$'den $\mathcal{B}(X,Y)$ içine $a \longrightarrow (DF)_a$ ile tanımlı bir sürekli fonksiyon ise F'ye $\Omega$ içinde sürekli olarak türevi alınabilir denir.

**3.3.3 Tanım( C[a,b] Fonksiyon Uzayı )**

$C[a,b]=\{f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli$\}$ ([a,b] üzerinde tanımlı tüm gerçel değerli sürekli fonksiyonların kümesini) C[a,b] ile gösterilir.

Bu küme üzerinde,

$$d(x,y) = \max_{t \in J} |x(t)-y(t)|$$

ile tanımlanan metriği gözönüne alırsak, C[a,b] uzayı bir metrik uzay olur. C[a,b]'nin her bir noktası bir fonksiyon ol duğundan bu uzay bir fonksiyon uzayıdır.

**3.3.4. Önerme:** $C[a,b]$ uzayı alışılmış şekilde tanımlanan

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t) \qquad (\alpha\in IR)$$

cebirsel işlemleri altında gerçel bir vektör uzayı olur.

**İspat:** $x$ ve $y$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve gerçel değerli fonksiyonlar ve $\alpha$ gerçel bir sayı olmak üzere, $x+y$ ve $\alpha x$ fonksiyonları da $[a,b]$ üzerinde sürekli ve gerçel değerli birer fonksiyondur.

## 3.4. Chebyshev Polinomları

**3.4.1. Tanım:** Eğer $x(t_j)-y(t_j)$, ardışık $t_j$ noktalarında sırasıyla $+\|x-y\|$, $-\|x-y\|$ değerlerine sahip ise $t_0<t_1<\ldots<t_k$ olmak üzere $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde $t_0,t_1,\ldots,t_k$ noktalarının kümesine $x-y$'ye göre bir alternatif küme denir.

**3.4.2. Tanım(Haar şartı):** Gerçel $C[a,b]$ uzayının sonlu boyutlu bir $Y$ alt uzayı, her $y\in Y$, $y\neq 0$, $[a,b]$'de en fazla $n-1$ sıfıra sahip ise Haar şartı sağlar denir. Bu durumda $\dim Y=n$ dir.

**3.4.3. Lemma(En iyi yaklaşım)**

$Y$, Tanım 3.4.2 şartını sağlayan gerçel $C[a,b]$ uzayının bir alt uzayı ve $x\in C[a,b]$ verilsin. $\dim Y=n$ olan $x-y$'ye göre $n+1$ noktalarının bir alternatif kümesi var olacak şekilde $y\in Y$ verilsin. O halde $y$, $Y$'nin dışındaki $x$ noktasına en iyi düzgün yaklaşımdır.[5]

**3.4.4. Önerme:**

$$y_j(t)=t^j \qquad j=0,\ldots,n-1 \qquad (3\text{-}1)$$

olmak üzere $Y$'nin dışında=ger$\{y_0,\ldots,y_{n-1}\}$

$$x(t)=t^{n} \qquad n\in\mathbb{N} \text{ sabit} \qquad (3\text{-}2)$$

ile tanımlı $x\in C[-1,1]$'in yaklaşımıdır.

İspat: Aşikar olarak buradaki maksat, derecesi n'den daha küçük bir gerçel y polinomuyla [-1,1] üzerinde x'e yaklaşmak istememizdir. Böyle bir polinom

$$y(t)=\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\ldots+\alpha_0$$

ile verilir. Bu durumda $z=x-y$ için

$$z(t)=t^{n}-(\alpha_{n-1}t^{n-1}+\alpha_{n-2}t^{n-2}+\ldots+\alpha_0)$$

yazılır. Ve $\|z\|$ mümkün olduğu kadar küçük olacak şekilde y'yi bulmak istiyoruz. Dikkat edelim ki $\|z\|=\|x-y\|$ x'den y'ye uzaklıktır. Son formülden z en büyük dereceden terimin katsayısı 1 olan n-inci dereceden polinomdur. Bu durumda verilen ilk problemimiz aşağıdakilerden birine denktir. n-inci dereceden ve en büyük dereceden terimin katsayısı 1 olan bütün polinomlar arasında [-1,1] üzerinde en küçük max.sapmaya sahip z polinomunu bulalım.Eğer $0\leq\theta\leq\pi$ olmak üzere $t=\cos\theta$ ise bu durumda t, [-1,1]aralığı üzerinde -1,+1 değerlerini alır. $[0,\pi]$ üzerinde, $\cos n\theta$ ile tanımlı fonksiyon n+1 dış noktaya sahiptir.

Eğer $t=\cos\theta$'da bir polinom gibi $\cos n\theta$'yı yazabilirsek Lemma 3.4.3'den $\cos n\theta$ problemimizin çözümüne yardımcı olabilir.Gerçekten, bu yapılabilir; $\beta_{nj}$ ler sabit olmak üzere

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^{n}\theta+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{nj}\cos^{j}\theta \qquad (n=1,2,\ldots) \quad (3\text{-}3)$$

formundaki bir gösterimin var olduğunu tümevarım yoluyla ispat edilebilir.

**İspat:** n=1 için bu doğrudur. Farz edelimki herhangi n için doğrudur. n+1 için sağlandığını gösterelim. cos için toplama formülü

$$\cos(n+1)\theta=\cos n\theta.\cos\theta-\sin n\theta.\sin\theta$$

$$\cos(n-1)\theta=\cos n\theta.\cos\theta+\sin n\theta.\sin\theta$$

şeklinde verilir. Her iki taraf üzerinde toplama ile

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta.\cos\theta \qquad (3\text{-}4)$$

bulunur. Dolayısıyla tümevarım hipotezi ile

$$\cos(n+1)\theta=2\cos n\theta.\cos\theta-\cos(n-1)\theta$$

$$=2\cos\theta\Big(2^{n-1}\cos^{n}\theta+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{nj}\cos^{j}\theta$$

$$-2^{n-2}\cos^{n-1}\theta-\sum_{j=0}^{n-2}\beta_{n-1,j}\cos^{j}\theta$$

$$\cos(n+1)\theta=2^{n}\cos^{n+1}\theta+\sum_{j=0}^{n}\beta_{n-1,j}\cos^{j}\theta$$

yazılabilir.Ve ispat tamamlanır.

**3.4.5. Tanım:**

i) $T_n(t)=\cos n\theta, \quad \theta=\arccos t \quad (n=0,1,...)$ (3-5)

ile tanımlı fonksiyonlara n-inci dereceden **birinci tip Chebyshev Polinomları denir.**

ii) $U_n(t) = [\sin(n+1)\theta]/\sin\theta \quad (n=1,2,....)$

ile tanımlanan polinoma **ikinci tip Chebyshev Polinomları denir.**

**3.4.6. Uyarı:** (3-3)'teki en büyük dereceli terimin katsayısı 1 değildir.Fakat $2^{n-1}$ dır. [5]

**3.4.7. Teorem(Chebyshev Polinomları)**

$$\tilde{T}_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n.\text{arccost})\quad(n\geq 1)$$

ile tanımlı polinom $[-1,1]$ üzerinde sıfırdan en küçük max. sapma değerine sahiptir. Bu kısımda başladığımız yaklaşım problemini hatırlıyalım.

$$y(t)=x(t)-\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)\qquad(3\text{-}6)$$

ile tanımlanan $y$, (3-1) de verilen $y_j$ ile

$Y$'nin dışı= ger$\{y_0,\ldots,y_{n-1}\}$ $x(t)=t^n$ ile tanımlı $x\in C[-1,1]$ fonksiyonuna en iyi düzgün yaklaşımdır. (3-6)'de en yüksek $t^n$ kuvveti çıkar ve böylece $t$' de $y$' nin derecesi $n-1$'i aşmaz.

Eğer ilk terimi $\beta_n t^n$ ile verilen $n$ dereceli bir $x$ gerçel polinomu ve $y$ alt dereceli bir polinom olmak üzere $[-1,1]$ üzerinde $x$'e en iyi yaklaşım ise bu durumda $x=\beta_n\tilde{x}$ yazabiliriz ve $\tilde{x}$ $t^n$ gibi en yüksek dereceli terimine sahiptir. Teorem 3.4.7'den $y$

$$\frac{1}{\beta_n}(x-y)=\tilde{T}_n$$

ifadesini sağlamalıdır. Böylece

$$y(t)=x(t)-\frac{\beta_n}{2^{n-1}}T_n(t)$$

olur. Bu (3-6)'ü genelleştirmedir.

**3.4.8. Örnek:** Birinci tip Chebyshev Polinomlarının aşikar ifadeleri aşağıda gösterildiği şekilde elde edilebilir. $T_0(t)=\cos 0=1$ ve ayrıca $T_1(t)=\cos\theta=t$ olsun. (3-5),

$$T_{n+1}(t)+T_{n-1}(t)=2tT_n(t)$$

şeklinde yazılabileceğini (3-5) formülü gösterir.

$$T_{n+1}(t)=2tT_n(t)-T_{n-1}(t) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

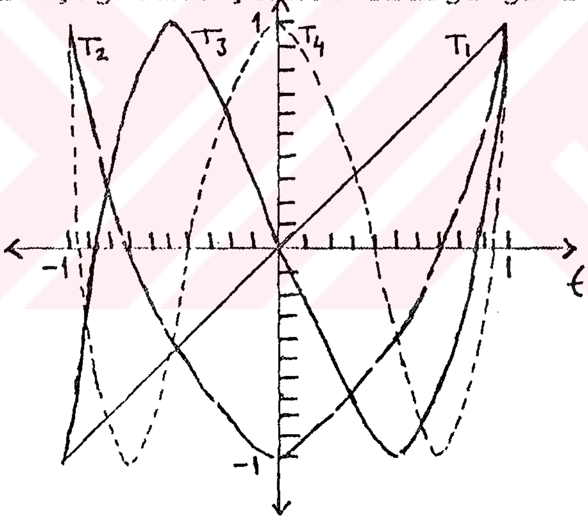
formülü ardısıra

$$T_0(t)=1 \quad , \quad T_1(t)=t$$

$$T_2(t)=2t^2-1 \quad , \quad T_3(t)=4t^3-3t$$

$$T_4(t)=8t^4-8t^2+1 \quad , \quad T_5(t)=16t^5-20t^3+5t$$

vs. ifadelerini aşağıdaki şekide olduğu gibi gösterilir.




Genel formül, çift n için $[n/2]=n/2$ ve tek n için $[n/2]=(n-1)/2$ olmak üzere

$$T_n(t)=\frac{n}{2}\sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j\frac{(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}(2t)^{n-2j} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

olur.

## KAYNAKLAR


1. ASLIM G. Genel Topoloji. Ege Üniv. Basımevi, 1988
2. BAYRAKTAR M. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniv. Fen-Edebiyat Fak. Yayınları, 1987
3. BOZHÜYÜK M.E. Genel Topoloji'ye Giriş. Atatürk Üniv. Basımevi. Erzurum, 1984
4. COHN D.L Measure theory Birkhäuser. Boston, 1980
5. KREYSZİG E. İntroductory Functional Analysis With Appilications. John Wiley and Sons. New York,1978
6. LİPSCHUTZ S. General Topology. McGRAW-HILL. Sydney, 1965
7. MADDOX I.J. Elements of Functional Analysis. Cambridgett the University Press,1970
8. RUDİN W. Fonctional Analysis. New Delhi, 1973
9. TREVES F. Topological Vectar Spaces, Distributions and Kernels New York. London, 1967

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisansmam boyunca yardım ve desteklerinden dolayı Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ALTIN'a ve tezimin hazırlanmasında büyük emekleri geçen Sayın Hocam Prof. Dr. İsmail TOK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.