45381.

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP HALKALARINDA İDEMPOTENTLERİN İNCELENMESİ

Necdet BATIR

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof.Dr.Fethi ÇALLIALP

Üye

Prof.Dr.Abdurrahim YILMAZ

Üye

Prof.Dr.İsmail TOK

Tez Kabul Tarihi

16.06.1995

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP HALKALARINDA İDEMPOTENTLERİN İNCELENMESİ

Necdet BATIR

DOKTORA TEZİ

Yönetici
Prof.Dr.Abdurrahim YILMAZ

VAN-1995

ÖZ

Bu çalışmada grup halkalarında idempotentlerle ilgili yapılan çalışmalar incelenmiş; QD_p (p:asal) ve CQ_8 grup halkalarının idempotentleri tamamen karakterize edilmiştir.

ABSTRACT

In this work, it is investigated the works on idempotents of group algebras and it is supported by two examples: the idempotents of QD_p and CQ_8

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yardımcı olan sayın hocam Prof.Dr.Abdurrahim YILMAZ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

ÖNBİLGİLER

1.0. Giriş

Bir grup cebirinin idempotentlerinin tamamını belirlemek hala bazı durumlarda açık bir problem olarak durmaktadır. Örneğin S_n, n inci dereceden simetrik grup için QS_n in idempotentleri tamamen belirlenebilmiş değildir. Bu konuda yapılan teorik çalışmaların en ileri noktasını Zalleskii-Kaplansky teoremi [Sehgal] teşkil etmekte olup; bir G grubu üzerindeki KG (karakK=0) grup cebirinin bir idempotentinin $(\neq 0,1)$ izinin 0 ile 1 arasında bir reel cebirsel sayı olduğunu ifade etmektedir. Bu teoremin bir sonucu olarak ZG de idempotent $(\neq 0,1)$ elemanların olmadığını söyleyebiliyoruz.

Eğer bir $x \in G$ için $|x| \in U(R)$ (R halkasının birimselleri) ise

$$e=(1/n)(1+x+...+x^{n-1}) \quad , \quad (n=|x|)$$

RG nin aşikar olmayan $(\neq 0,1)$ bir idempotentidir. O halde RG de aşikar olmayan idempotent olmaması için G nin $1<|x| \in U(R)$ olacak şekilde bir x elemanına sahip olmaması gereklidir.

Biz bu çalışmada grup halkalarında idempotentler ile ilgili bazı temel kavramları vererek her hangi bir p asalı için QD_p (D_p: p inci dereceden dihedral grup) ve CQ_8 (Q_8: quaternion grup) in tüm idempotentlerini belirledik. Şimdi bu çalışmada kullanılan bazı tanımları ve temel özellikleri verelim.

1.1. Tanım (Grup Halkası):

R bir değişmeli halka ve G sonlu veya sonsuz bir grup olsun. G nin R üzerine, RG ile gösterilen, grup halkası G nin elemanları üzerinde bir serbest R-modül olup, içindeki çarpma işlemi lineerlikle genişletilerek elde edilir. Buna göre RG grup halkası $g \in G$, $x_g \in R$ ve sonlu tane $x_g \neq 0$ olmak üzere $\quad x_g . g$

(a) Her $g \in G$ için $\sum x_g.g = \sum y_g.g \Leftrightarrow x_g = y_g$

(b) $\sum x_g.g + \sum y_g.g = \sum (x_g + y_g).g$

(c) $(\sum x_g.g)(\sum y_h.h) = \sum z_t.t$; $t = \sum\limits_{gh=t} x_g y_h$

(d) Her $r \in R$ için $r(\sum x_g.g) = \sum (rx_g).g$

Yukarıdaki (b) ve (c) işlemleri altında G bir asosiyatif R-cebiri olup, 1_R ve 1_G sıra ile R ve G nin birim elemanları olmak üzere RG nin birimi $1 = 1_R.1_G$ olur. Bu yüzden RG ye aynı zamanda G nin R üzerine *grup cebiri* denir.

$$\begin{cases} R \to RG \\ r \to r.1_G \end{cases} \text{ve} \begin{cases} G \to RG \\ g \to 1_R.g \end{cases}$$

injektif homomorfizmaları ile R ve G, RG deki görüntüleriyle özdeşleştirilerek, yukarıdaki (b) ve (c) deki şekli toplama ve çarpma işlemlerine dönüşürler. Bu yüzden $x_g.g$ çarpımı kısaca $x_g g$ olarak yazılır. $x = \sum x_g g \in RG$ için x in dayanağı $\mathrm{dyn}x = \{g \in G | x_g \neq 0\}$ olarak tanımlanır. dyn$x$, G nin sonlu bir alt kümesi olup $\mathrm{dyn}x = \varnothing \Leftrightarrow x = 0$ dır. $|\mathrm{dyn}x| = 1$ ise x bir monomial (tek terim) olur. Bir $0 \neq x \in RG$ nin dayanağı ile üretilen $\langle \mathrm{dyn}x \rangle \leq G$ alt grubuna x in *dayanak alt grubu* denir ve $\langle \mathrm{dyn}\, x \rangle$, G nin sonlu üretilmiş alt grubudur. Yine $0 \neq x = \sum x_g g \in RG$ için, R nin $\{x_g \in R | g \in \mathrm{dyn}x\}$ altkümesince üretilen alt halkasına x in dayanak alt halkası denir.

Grup halkalarının bazı basit özelikleri aşağıda verilmektedir. R bir birimli halka ise R de çarpmaya göre tersi olan elemanların oluşturduğu U(R) grubuna R nin *birimsel grubu* denir.

1.2. Önerme:

A bir R-cebiri ve $f: G \to U(A)$, G den A nın birimsel grubuna bir homomorfizma ise,

$$f^* : RG \to A; \quad f^*(\sum x_g g) = \sum x_g f(g)$$

dönüşümü R-cebirleri arasında bir homomorfizmadır. Ayrıca, f 1-1 (injektif) ve A, f(G) yi bir taban kabul eden bir R-serbest halka ise $RG \cong A$ izomorfizması vardır.

İspat:

RG, G yi taban kabul eden bir R-serbest modül olduğundan f, R-modüller arasında bir modül homomorfizmasıdır. $x=\sum x_g g$, $y=\sum y_g g$, RG nin herhangi iki elemanı ise

$$f^*(xy)= f^*\Big(\sum_{a,b\in G} x_a y_b ab\Big)=\sum x_a y_b f(ab)$$

$$=\sum x_a y_b f(a)f(b) =\Big(\sum_{a\in G} x_a f(a)\Big)\Big(\sum_{b\in G} y_b f(b)\Big)$$

$$= f^*(x)\, f^*(y)$$

olarak bulunur.

1.3. Sonuç:

$$\mu : RG\to R \;;\; \sum x_g g \to \sum x_g$$

dönüşümü R-cebirler arasında bir homomorfizmadır.

İspat:

1.2 önermede A=R ve $\forall g\in G$ için f(g)=1 alarak sonuç hemen görülür.

Bu sonuçdaki μ homomorfizmasının çekirdeği RG de bir ideal olup çekμ ye RG nin *ogmentasyon ideali* denir ve I(RG) veya Δ(G) ile gösterilir. Buna göre x in ogmentasyonu ogm(x) ile gösterilerek

$$\text{Çek}\mu=I(RG)=\{x=\sum x_g g\in RG \mid \text{ogm}(x)=\sum x_g=0\}$$

olup ogm:RG→R homomorfizmasına *ogmentasyon dönüşümü* denir.

$$\sum x_g g=\sum x_g(g-1)+\sum x_g$$

eşitliği gözönüne alındığında, bir R-modül olarak I(RG), $\{g-1 \mid 1\neq g\in G\}$ kümesinin elemanlarını taban kabul eden bir serbest modül olduğu hemen görülür. $e^2=e$ eşitliğini sağlayan e elamanlarına halkanın *idempotentleri* denir. 0 ve 1 birer idempotent olup bunlara *aşikar idempotentler* denir. Bunların dışındakilere de aşikar olmayan idempotentler denir. e bir idempotent ise e^2=e den e(e-1)=0 olur ki idempotentler en özel türden sıfır bölenlerdir.

A bir R-cebir ve

$$End_R(\mathrm{A})=\{f:A\to A \mid f(a+b)=f(a)+f(b) \text{ ve } f(ra)=rf(a);\ a,b\in A,\ r\in R\}$$

R nin tüm R-endomorfimalarının cebiri olsun. Her a∈A için l_a, "a ile soldan çarpma" yı göstersin;

$$\begin{array}{c} l_a: A\to A \\ x\to ax \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} \Gamma: A\to End_R(A) \\ a\to l_a \end{array}$$

ile verilen Γ fonksiyonu bir injektif homomorfizma olup, Γ ya A nın *regüler reprezentasyonu* denir.

Şimdi de A nın sonlu bir taban üzerinde R-serbest olduğunu varsayalım. a∈A için $\Gamma(a)=l_a$:A→A endomorfizması $M_n(R)$ matris halkasından bir matrisle temsil olunur. Buradaki n, A nın bir R-tabanındaki eleman sayısıdır.

Her a∈A için χ(a)=iz(Γ(a)) ile verilen χ fonksiyonuna Γ nın *karakteri* denir. Aşağıdaki önermede RG nin regüler reprezentasyonunun karakterinin ne şekilde ortaya çıktığı görülmektedir.

1.4. Önerme:

G sonlu bir grup, R değişmeli bir halka ve RG nin regüler reprezantasyonunun karakteri χ ise her $x=\sum x_g g$ ∈RG için $\chi(x)=|G|x_1$ dir.

İspat:

V=RG yi kendisine soldan çarpma lineer transformasyonları (endomorfizma) ile etkileyen bir R-modül olarak görebiliriz. V sonlu boyutlu olduğundan V ye yapılacak her taban seçimi RG nin belirli bir matris reprezentasyonunu verecektir. Daha açıkçası her taban için n=boyV=|G| olmak üzere uygun bir Γ:RG→$M_n(R)$ bire-bir homomorfizması verecektir.

Önce Γ nın V nin doğal tabanı olan G ye karşılık geldiğini varsayalım. Bu durumda her $g\in G$ için soldan g ile çarpma yapılınca tabanın (G nin) elamanlarını permütasyon yaptıracaktır. Sonuçta $\Gamma(g)$ bir *permütasyon matris* (her satır ve sütunda bir ve yalnız bir 1 bulunan ve diğer tüm elemanları 0 olan matris) olacaktır. Tabii ki $g\neq 1$ için $gy\neq y$, $\forall y\in G$ olup, $\Gamma(g)$ matrisinde esas köşegen sıfırlardan oluşacağından $iz(\Gamma(g))=0$ olacaktır. Öte yandan g=1 için $\Gamma(1)=$ birim matris olup, iz $(\Gamma(1))=n=|G|$ dır. Matrisleri izlerine dönüştüren fonksiyonlar R-lineer olduğundan, $x=\sum x_g g\in RG$ için

$$\chi(x)=iz(\Gamma(x))=\sum_g x_g\ iz\,(\Gamma(g))=x_1|G|$$

bulunarak ispat tamamlanır.

Yukarıdaki önermeden anlaşıldığı üzere, $\Gamma(x)$ in izi olan $\chi(x)$, x de birimin katsayısı olan x_1 in bir sabit (G nin mertebesi) katıdır. Bundan esinlenerek, herhangi bir G grubu için iz dediğimiz bir

$$iz : RG\to R\ ;\ iz(\sum x_g g)=x_1$$

dönüşümü tanımlanır. Grup halkasında idempotent elemanların izi aşağıdaki önermede verildiği üzere çok önemli bir özelliğe sahiptir.

1.5. Önerme:

G bir sonlu grup ve F sıfır karakteristikli bir cisim olsun. Eğer $e\in FG$ bir idempotent eleman ise

$$iz(e)=|G|^{-1}\,boy_F(e(FG))$$

dır.

İspat:

FG nin regüler reprezentasyonunun karakteri χ olsun. FG nin

$FG=e(FG)\oplus(1-e)(FG)$ olarak direkt toplam ayrışımı gözönüne alındığında, FG nin bir tabanını, e(FG) ile (1-e)(FG) direkt toplam alt uzaylarının birer tabanı seçilerek, bunların birleşimi olarak seçebiliriz. Şimdi her $y\in e(FG)$ ve her $z\in(1-e)(FG)$ için ey=y ve ez=0 olduğu gözlenerek $\chi(e)=\text{boy}_F\, e(FG)$ eşitliği elde edilir. 1.4 Önerme'den de $\chi(e)=|G|iz(e)$ olduğu dikkate alınarak $iz(e)=\text{boy}_F\,(e(FG))/|G|$ bulunur. $0 < boy_F\ (e(FG)) \leq boy_F\ (FG)=|G|$ bağıntısından, iz(e) nın 0 ile 1 veya aralarında bir rasyonel sayı olacağı açıktır.

1.6. Tanım (Asal Alt Cisim):

Bir F cisminin en küçük alt cismine F nin asal cismi denir. Eğer karak(F)=p ise F nin asal alt halkası F nin bir alt cismidir; çünkü bu Z/(p) ye izomorfiktir. Eğer karak(F)=0 ise bu durumda asal cisim Q ya izomorfiktir.

1.7. Tanım (Nilpotent Eleman):

R bir halka ve $0\neq x\in R$ olsun. Eğer $x^n=0$ olacak şekilde bir n>1 tamsayısı varsa x elemanına *nilpotent eleman* denir.

1.8. Tanım (Burulmuş Eleman):

G bir grup ve $1\neq g\in G$ olsun. Eğer bir n>1 tamsayısı için $g^n=1_G$ ise g ye *burulmuş eleman* denir.

1.9. Tanım (Sıfır Bölenler):

R bir halka ve $0\neq a\in R$ olsun. Eğer bir $0\neq b\in R$ için ab=0 ise a ya (ve b ye) bir *sıfırbölen eleman* denir.

1.10. Tanım (Birimsel Eleman):

R birimli bir halka ve $u\in R$ olsun. Eğer uv=vu=1 olacak şekilde bir $v\in R$ varsa u ya bir *birimsel eleman* denir.

1.11. Tanım (Eşlenik Elemanlar):

G bir grup ve $x,y\in G$ ise yxy^{-1} elemanına x in *y ile bir eşleniği* denir.

1.12. Tanım (Grubun Merkezi):

G bir grup olsun.

$Z(G)=\{z\in G|zg=gz, \quad \forall g\in G\}$ altgrubuna *G nin merkezi* denir.

1.13. Tanım (Grupların Serbest Çarpımı):

$\{A_i|i\in I\}$ bir gruplar ailesi olsun. $\prod_i^* A_i$ ile gösterilen ve grupların serbest çarpımı denilen bir $G=\prod_i^* A_i$ izomorfizma dışında tek olarak tanımlı ve şu özellikle bunlunur. G her bir A_i nin bir izomorfik kopyesini kapsar ve her $g\in G$ elemanı uygun bir n doğal sayısı ve $1\neq a_j \in A_{i_j}$, $i_j \neq i_{j+1}$ için $g=a_1a_2\ldots a_n$ biçiminde tek olarak yazılabilir. A_i lerin sayısı sonlu, yani k tane ise $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ların çarpımı $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ ile belirtilir.

1.14. Tanım (Bir Grubun Normal (Altnormal) Serisi): $G_0, G_1, \ldots, G_n$ bir G grubunun alt grupları olsun; öyle ki

$$1_G = G_0 \Delta G_1 \Delta G_2 \Delta \ldots \Delta G_{n-1} \Delta G_n = G$$

olsun. Bu durumda $(G_0, G_1, \ldots, G_n)$ alt gruplar dizisine G nin bir altnormal serisi denir. Eğer her bir G_i,G nin bir normal alt grubu ise bu diziye G nin *normal serisi* denir. i=1,2,...,n için G_i/G_{i-1} bölüm gruplarına da *serinin faktörleri* denir.

1.15. Tanım (Çözümlü Gruplar):

Bir G grubunun bir normal serisi var ve herbir

$$G_1/G_0, G_2/G_1, G_3/G_2, \ldots, G_n/G_{n-1}$$

faktörleri abelian bir grup ise G ye bir *çözümlü grup* denir.

1.16. Tanım (Süper Çözümlü Gruplar):

Çözümlü bir grubun tüm faktörleri devirli ise böyle bir gruba *süper çözümlü* denir.

1.17. Tanım (Çok Devirli Gruplar): Bir grubun sonlu bir altnormal serisi var ve her bir faktörü devirli ise bu gruba *çok devirli* denir.

1.18. Tanım (Çok x {Sonsuz-Devirli} Gruplar):

Sonlu alt normal serisindeki tüm faktörlerin sonsuz devirli olduğu gruptur.

1.19. Tanım (Çok Devirli x Sonlu Gruplar):

Bir G grubunun bir N çok devirli normal alt grubu var ise ve G/N sonlu ise G ye bir *çok devirli* $\times$ *sonlu grup* denir.

1.20. Tanım (Valuasyon Halkası):

K bir cisim ve R, K nın bir alt halkası olsun. Eğer her $x \in K$, $x \notin R$ için $x^{-1} \in R$ ise R ye bir *valuasyon halkası* denir. Bir tek ideali bulunan Dedekind bölgelerine de *diskret valuasyon halkası* denir.

1.21. Tanım (Projektif Modül):

R bir halka ve P bir R-modül olsun. Eğer g bir epimorfizma olmak üzere, verilen herhangi bir

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow{g} & B & \rightarrow & 0 \end{array}$$

R-modül homomorfizmaları diyagramı için gh=f olacak biçimde bir h:P→A, R-modül homomorfizması varsa P ye R halkası üzerinde bir *projektif modül* denir.

1.22. Tanım (Hirsch Sayısı):

G çok devirli x sonlu bir grup olsun. G nin faktörleri içindeki sonsuz devirli olanlarının sayısına G nin *Hirsch sayısı* denir, h(G) ile gösterilir.

1.23. Tanım (Projektif (ters) Limit):

$(I,\leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun ve şu anlamda yönlendirilmiş olsun:

Her $i \in I$ ve $j \in I$ çifti için $i \leq k$ ve $j \leq k$ olacak biçimde bir k elemanı vardır. $\{G_i | i \in I\}$ ise, I ile indekslenmiş bir kümeler (gruplar, halkalar, vs.) ailesi olsun; öyle ki

$i \le j$ oacak şekilde her $i,j \in I$ çifti için bir $f_{ij}: G_j \to G_i$ fonksiyonu (grup hom., halka hom. v.s) şu şartlara uygun olarak bulunsun:

i) $\forall i \in I$ için f_{ii} , G_i nin birim fonksiyonudur;

ii) Her $i \le j \le k \in I$ için $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$.

Böyle bir $\{G_i, f_{ij} | i, j \in I\}$ sistemine bir projektif sistem denir. Bu sistemin $G = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\, G_i$ ile gösterilen projektif limiti ise

$$\{(g_i) \in \prod_{i \in I} G_i \mid f_{ij}(g_j) = g_i, i \le j \text{ için}\}$$

olarak tanımlanır. Ailedeki her bir G_i nin bir grup (halka) olması durumunda G de bir grup (halka) olur.

2.BÖLÜM

GRUP HALKALARINDA İDEMPOTENTLER

Bu bölümde grup halkalarında idempotentler ile ilgili bazı temel özellikler verilerek, bazı grup halkalarının idempotentleri karakterize edilmiştir. Ayrıca, her idempotent eleman aynı zamanda bir sıfır bölen olduğundan grup halkalarında sıfır bölen yok diyebiliyorsak, bu halkada idempotent eleman yok anlamına gelir. Yine, bu bölümde, [Farkas-Snider] in çok devirli $\times$ sonlu gruplar için sıfır karakteristikli durumdaki sonuçlarının kar(E)=p>0 durumuna [Cliff] tarafından genişletilişlerini göreceğiz.

RG bir R halkası üzerinde bir grup halkası ise, RG nin ogmentasyon idealini $\Delta(G)$ ile gösterelim. G deki eşlenik bağıntısını $g \sim h$ $(g,h \in G)$ ile ve $a=\sum a_g g \in RG$, $g \in G$ için g nin R deki eşlenik sınıf toplamını $t_g a = \sum_{h \sim g} a_h$ ile, ve $\alpha \in M_d(RG)$ için α nın köşegen elemanlarının toplamını $iz\alpha$ ile belirtelim.

2.1. İdempotentler:

Bir R halkası için $[R,R]=\{\sum a_i b_i - b_i a_i \mid a_i, b_i \in R\}$ olarak tanımlayalım.

2.1.1. Önerme:

R halkasının karakteristiği p ise; $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$ ve $n \in Z^+$ için

$$(\sum a_i)^{p^n} = \sum a_i^{\,p^n} + \beta \quad ; \quad \beta \in [R,R]$$

olacak biçimde bir $\beta \in [R,R]$ elemanı vardır.

İspat:

$q=p^n$ olsun. Önce $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)^q = \alpha_1^q+\alpha_2^q+\ldots+\alpha_m^q+\beta$ olarak yazıldığını ve buradaki β nın, en az iki indisi farklı olan $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_q}$ kelimelerinin bir toplamı olduğunu görebiliriz. Eğer ω_1, ω_2 kelimeleri,

$$\omega_1 = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_q} \text{ ve } \omega_2 = \alpha_{i_j}\alpha_{i_{j+1}}\ldots\alpha_{i_q}\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_{j-1}}$$

biçiminde birbirinin devirsel permutasyonları ise bu halde

$\omega_1 - \omega_2 = \gamma\delta - \delta\gamma \in [R,R]$; $\gamma = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}.....\alpha_{i_j-1}$; $\delta = \alpha_{i_j}\alpha_{i_j+1}.....\alpha_{i_q}$ dır. Buna göre, mod[R,R] de bir kelimenin tüm devirsel permütasyonları eşittir. C_q devirli grubunun bu kelimeler kümesine devirsel kaydırma biçimindeki etkisini gözönüne aldığımızda; β da yer alan bir ω kelimesinin şeklen farklı permütasyonlarının sayısı, C_q deki aşikar olmayan bir yörüngenin büyüklüğüne eşit ve p ile bölünür. karak(A)=p olduğundan sonuç çıkar. Şu önerme de benzer şekilde ispatlanır.

2.1.2. Önerme:

R bir p^n asal kuvvet karakteristikli bir halka; k bir tamsayı (k≥n) ve $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$ ise $s = p^{n-1}$ için

$$(\sum a_i)^{p^k} = \beta + \sum (a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_s})^{p^{k-n+1}}$$

olacak biçimde bir $\beta \in [R,R]$ var olup, sağdaki toplam $1 \le i_j \le m$ olmak üzere tüm $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ s-lileri üzerindedir.

2.1.3. Önerme:

R bir p^n asal kuvvet karakteristikli değişmeli bir halka ve G, şu özellikte bir grup olsun:

$x \in G$ elemanı sonsuz mertebeli ve bir i için $x \sim x^{p^i}$ ise i=0 dır.

$e = \sum_{i=1}^{m} a_i g_i$, RG nin bir idempotent elemanı olsun. Eğer $x \in G$ nin mertebesi sonsuz veya p-kuvvet ise bu durumda $t_x e = 0$ dır.

İspat:

$s = p^{n-1}$ olsun. 2.1.2. önermeden her k>n tamsayısı için, $\beta \in [RG,RG]$ olmak üzere

$$e = e^{p^k} = \beta + \sum (a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_s})^{p^{k-n+1}} (g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_s})^{p^{k-n+1}}$$

olup, sağdaki toplam $1 \le i_j \le m$ olmak üzere tüm $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ s-lileri üzerindedir. $(g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_s})^{p^{k-n+1}}$ in hiçbirinin x e eşlenik olmayacak şekilde k yı yeterince büyük seçtiğimizde, $t_x\beta=0$ olacağından ıspat da tamam olur.

2.1.4. Tanım:

Bir halkada bir I ideali için $I^{\omega} = \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m$ ve $I^{\omega^{n+1}} = (I^{\omega^n})^{\omega}$ olarak tanımlıyoruz.

2.1.5. Önerme:

H bir çok-sonsuz-devirli grup ve H nin Hirsch sayısı h(H)=n olsun. Bu durumda bir K cismi için $(\Delta(H))^{\omega^n}=0$ dır.

İspat: [Sehgal, I.3.15].

2.1.6. Teorem [Cliff]:

G bir çok devirli × sonlu grup, G de yalnızca p mertebeli elemanlar var ve K, p karakteristikli bir cisim olsun. Eğer e∈KG ve $e^2=e$ ise e=0 veya 1 dir.

İspat:

Teoremi sonlu K için ispatlamak yeter; çünkü eğer $e=\sum_{i=1}^{m} a_i g_i$ $(a_i \neq 0)$ ise, [Passman 2.2.6] dan K da tüm a_i katsayılarını kapsayan bir A valuasyon halkası ve A dan GF(p) nın bir cebirsel kapanışına bir ϕ homomorfizması vardır; öyle ki $\phi(a_i)\neq 0$. Buna göre, $\sum \phi(a_i) g_i$, G nin GF(p) üzerinde tüm $\phi(a_i)$ lerce üretilen sonlu cisim üzerine kurulu grup halkasında bir idempotenttir. Şimdi K nın sonlu olduğunu varsayalım. Bu durumda, p-lokal tamsayılar $Z_{(p)}$ üzerinde dallanmamış ve sıfır karakteristikli bir R diskret valuasyon halkası vardır; öyle ki R/pR=K dır [Zariski-Sammuel II.3]. e(1-e)=0 olduğundan, e nin ogmentasyonunu 0; yani e∈Δ(G) alabiliriz. $(pR/p^nR)G$, $(R/p^nR)G$ nin bir nilpotent ideali olduğundan, [Passman 2.3.7] gereği e yi $[R/p^nR]G$ nin bir e_n idempotentine çekebiliriz. n>1 için e_n yi, e_{n+1} , e_n nin çekilmişi olmak üzere seçebiliriz. HΔG , [G:H]<∞ ve H çok-sonsuz-devirli ve e_n nın

$(R/p^nR)(G/H)$ deki görüntüsü $\bar{e}_n$ olsun. Eğer $e_n=\sum a_g g$; $a_g \in R/p^nR$, $g\in G$ ise, bu durumda

$$t_1\bar{e}_n = \sum_{g\in H} a_g = \sum_h t_h e_n$$

olup, sağdaki toplam muayyen $h\in H$ ler üzerinedir. 2.1.3. Önerme'den $h\neq 1$ için $t_h e_n=0$ olup, $t_1\bar{e}_n = t_1 e_n$ dır. $1\neq g\in G$ için $t_g e_n=0$ olup, e_n nin ogmentasyonu da 0 olduğundan, $t_1 e_n = t_1\bar{e}_n=0$ dır.

$\varepsilon= \lim \bar{e}_n \in \varprojlim (R/p^nR)(G/H)$ için $t_1\varepsilon=0$ dır; ve $\varprojlim (R/p^nR)$ sıfır karakteristikli bir tamlık bölgesi ve G/H sonlu olduğundan, $\varepsilon=0$ dır. Bunun sonucu olarak; e, $KG\rightarrow K(G/H)$ homomorfizmasının çekirdeğinde; yani $e\in KG\Delta(H)$ dır. Ancak, büyük n için,

$$e\in (KG\Delta(H))^{\omega^n} = KG(\Delta(H)^{\omega^n})$$

olup 2.1.5. Önerme'den $e=0$ bulunur.

2.1.7. Tanım (Euler karakteristiği): R bir değişmeli halka ve P sonlu üretilmiş bir projektif RG-modül olsun. Projektif modüller serbest modüllerin direkt toplamı olduğundan; $P\oplus Q$, RG-üzerine serbest olacak biçimde ve sonlu d ranklı bir projektif modül Q seçelim. $\alpha: P\oplus Q \rightarrow P\oplus Q$, P üzerine izdüşüm ise, α yı $P\oplus Q$ nın bir sıralı tabanında temsil eden bir matris $e\in M_d(RG)$ olsun. $e^2=e$ olduğu açıktır. P nin $\chi(P)$ ile belirtilen *Euler karakteristiği* $t_1 iz(e)$ olarak tanımlanır; ve bu, e den ve Q nın seçiminden bağımsızdır. H, G nin sonlu indeksli bir alt grubu ise; P nin RH ye, P_H ile belirtilen, kısıtlanışı da RH üzerine sonlu üretilmiş olup projektiftir ve $\chi(P_H)=[G:H]\chi(P)$ bağıntısı geçelidir.

2.1.8. Önerme:

R ve G, 2.1.3 Önerme'deki gibi ve $\alpha=(\alpha(i,j))\in M_d(RG)$ bir idempotent eleman olsun.
x in mertebesi sonsuz veya p-kuvvet biçiminde ise $t_x(iz\alpha)=0$ dır.

İspat: $s=p^{n-r}$ ve $X= \cup \{\alpha(i_1,i_2)\alpha(i_2,i_3)...\alpha(i_s,i_1)\}$ olsun. Buradaki bileşsim, $1 \leq i_j \leq d$ olacak biçimdeki tüm $(i_1,i_2,...,i_s)$ s-lileri üzerindedir. $Y=\{g_1g_2...g_s \mid g_i\in X,\ 1\leq i \leq s\}$, G nin sonlu bir alt kümesi olup, G üzerindeki varsayımdan, bir $y\in Y$ ve yalnızca sonlu sayıda t tamsayıları için $x \sim y^{p^t}$ dir. Bu şekildeki t lerin en büyüğü t_0 ve $k-2n+2>t_0$ olacak biçimde bir k tamsayısı alalım. $\{e(i,j)\}, M_d(RG)$ nın matris birimleri ise α nın yazılışı

$$\alpha=\sum_{i,j} \alpha(i,j)e_{ij}$$

dır. 2.1.2. Önerme'den

$$\alpha=\alpha^{p^k}=\beta+\sum(\alpha(i_1,j_1)\alpha(i_2,j_2)\ldots\alpha(i_s,j_s))^{p^{k-n+1}}(e_{i_1j_1}\ldots e_{i_sj_s})^{p^{k-n+1}}$$

olup, sağdaki toplam $1\leq i_h, j_h \leq d$ olmak üzere tüm $((i_1,j_1),\ldots,(i_s,j_s))$ s-li çiftler üzerinde $\beta\in[M_d(RG), M_d(RG)]$ dır. δ_{jk} Kronecker deltası olmak üzere $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$ ve $iz\beta=0$ oluşu kullanılarak şu eşitlik bulunur:

$$iz\alpha=\sum(\alpha(i_1,i_2)\alpha(i_2,i_3)\ldots\alpha(i_s,i_1))^{p^{k-n+1}}$$

(Toplam yine)$1\leq i_j \leq d$ olmak üzere tüm $(i_1,i_2,\ldots,i_s)$ s-lileri üzerinedir.) Bu toplamdan örnek bir terim alıp

$$\alpha(i_1,i_2)\alpha(i_2,i_3)\ldots\alpha(i_s,i_1)=\sum_{i=1}^{m} a_i g_i \in RG$$

yazılırsa

$$(\sum a_j g_j)^{p^{k-n+1}}=\gamma+\sum(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_s})^{p^{k-2n+2}}(g_{j_1}g_{j_2}\ldots g_{j_s})^{p^{k-2n+2}}$$

elde edilir. Burada $\gamma\in[RG,RG]$ ve toplam yine $1\leq j_1 \leq m$ olmak üzere tüm $(j_1,j_2,\ldots,j_s)$ s-lileri üzerinedir. k nın seçiminden $(g_{j_1}g_{j_2}\ldots g_{j_s})^{p^{k-2n+2}}$ nın x ile eşlenik olmadığı açıktır; ve $t_x(\gamma)=0$ olduğundan, $t_x(iz(\alpha))=0$ dır.

2.1.9. Önerme:

G burulmasız bir çok-devirli × sonlu grup ve K, p>0 karakteristikli bir cisim ise, KG de sıfır bölenler yoktur.

İspat: 2.1.6. Teorem'in ispatında olduğu gibi, K sonlu ve R sıfır karakteristikli bir tamlık bölgesi olmak üzere K=R/pR olduğunu varsayabiliriz. Sabit bir n>1 tamsayısı için $S=R/p^nR$ olsun. [Passman ve Snider] de bununla ilgili teoremin ifadesi şöyledir: Eğer her projektif KG-modül P ve G nin sonlu indeksli, çok-sonsuz-devirli her normal alt grubu H için $[G:H] | boy_K(P_H/\Delta(H)P_H)$ ise bu durumda KG de sıfır bölenler yoktur.

Buna göre, P bir sonlu üretilmiş projektif KG-modül ve bir $e \in M_d(KG)$ idempotent matrisi $\chi(P)=t_1(iz(e))$ olacak biçimde seçilsin. $pM_d(SG)$, $M_d(SG)$ nın bir nilpotent ideali ve

$$M_d(SG)/pM_d(SG) \cong M_d(SG/pSG) \cong M_d(KG)$$

olduğundan, [Passman 2.3.7] gereği e bir $e' \in M_d(SG)$ idempotentine çekilebilir. $S \to S/pS=K$ doğal dönüşümünün genişletilmişi $\pi: M_d(SG) \to M_d(KG)$ ise, $\pi(e')=e$ olur. $1-e' : (SG)^d \to (SG)^d$ dönüşümünün çekirdeğini verilen projektif SG-modülü P' ile gösterelim; buna göre $\chi(P')=t_1(iz(e'))$ olacaktır. $H \Delta G$, sonlu indeksli çok-sonsuz-devirli alt grup ise

$$\chi(P'_H) = [G:H]\chi(P') \qquad (*)$$

olup, $\chi(P'/\Delta(G)P') = \chi(P')$ olduğu iddiasındayız. $iz(e')=\sum a_g g \in SG$ ise, belirli $x_i \in G$ ler için

$$\chi(P'/\Delta(G)P')=\sum a_g = a_1 + \sum_{x_i} \sum_{g \sim x_i} a_g$$

dır. G, 2.1.8 Önerme'nin hipotezini sağladığından, her x_i için $\sum_{g \sim x_i} a_g=0$ ve dolayısıyla $\sum a_g = a_1 = \chi(P')$ olup, iddianın doğruluğu görülür. Aynı düşüncenin bir sonucu olarak,

$\chi(P'_H/\Delta(H)P'_H) = \chi(P'_H)$ olup (*) bağıntısı şu duruma gelir:

$$\chi(P'_H/\Delta(H)P'_H) = [G:H]\chi(P'/\Delta(G)P') \qquad (**)$$

$P'_H/\Delta(H)P'_H$ bir sonlu üretilmiş projektif S-modül olup, S lokal olduğundan, serbesttir. Ayrıca, aşağıdaki denklemlerde sağdaki elemanlar S nin elemanları olarak düşünülerek,

$$\chi(P'_H/\Delta(G)P'_H)=rank_S\,(P'_H/\Delta(H)P'_H)=boy_K(P_H/\Delta(H)P_H)$$

ve

$$\chi(P'/\Delta(G)P')=\mathrm{rank}_S\ (P'/\Delta(G)P')=\mathrm{boy}_K\ (P/\Delta(G)P)$$

dır. Buna göre (**) den

$\mathrm{boy}_K\ (P_H/\Delta(H)P_H) \equiv [G{:}H]\mathrm{boy}_K\ P/\Delta(G)P$ (Mod p^n) ve n keyfi olduğundan, buradaki denklik yerine eşitlik gelebilir. Sonuç [Farkas-Snider, Teorem 1] den çıkar.

2.1.10. Teorem [Coleman]:

R birimli bir tamlık bölgesi ve G, n mertebeli sonlu bir grup olsun. Bu durumda RG de bir $e\ (\neq 0,1)$ idempotenti var $\Leftrightarrow$ n nin bir asal böleni R de bir birimseldir.

İspat:

P bir asal, p|n=|G| ve p, R de bir birimsel olsun. P, G nin p mertebeli bir alt grubu ise $e=p^{-1}\sum_{x\in P} x$ ile tanımlı e, RG de bir idempotent olup, e≠0, e≠1 dir. Karşıt olarak; $e=\sum_{g\in G}\alpha_g g$, RG nin bir idempotent $(\neq 0,1)$ i olsun.

karak(R)=0 durumu: e yi regüler reprezentasyon altında temsil eden matris $E=(e_{ij})$ ise $e_{ii}=\alpha_1$(i=1,2,...,n) olup E nin izi (trace) $n\alpha_1$=q(=1 in E de bir özdeğer olarak katlılığıdır.) e≠0,1 olduğundan, 0<q<n dir: $n_1|n$, $q_1|q$ ve $n_1\alpha_1=q_1$ olacak biçimde aralarında asal n_1,q_1 sayıları seçelim. a,b∈Z sayıları, $an_1+bq_1=1$ olacak biçimde seçilebilir. Buradan, $(a+b\alpha_1)n_1=1$ olup, $n_1\in R$ bir birimseldir. q<n olduğundan, $n_1\neq 1$ olup, n_1 in bir asal böleninin R de bir birimsel olduğu anlaşılır.

karak(R)=p≠0 durumu: $|G|=p^r t$, (p,t)=1, r≥0; yazılır. Bir p-grubunun, p karakteristikli bir cisim üzerindeki grup halkasında bulunan her sıfır bölen elemanı bir nilpotenttir. Yukarıdaki t nin 1 olması halinde, $K=R^{-1}R$ (=R nin bölümler cismi) için aynı hüküm KG için de geçerli olacaktır. RG de bir $e\ (\neq 0,1)$ idempotenti olduğunu varsayalım. Bu durumda, e, RG de (dolayısıyla KG de) nilpotent olmayan bir sıfır bölen olur. Yukarıdaki hükümden t≠1 olmalıdır. t nin R de bir birimsel olduğu açıktır.

2.1.11. Teorem [Zalesskii]: KG deki bir idempotentin izi K nın asal cisminde kalır.

2.1.12. Teorem [Kaplansky-Passman]:

K; sıfır karakteristikli bir cisim, $e \in KG$ bir idempotent ($\neq 0,1$) ise iz(e), 0 ile 1 arasında reel bir cebirsel sayıdır.

Bu iki teorem grup halka teorisinde oldukça klasik teoremler olduğundan ispatlarını vermiyoruz.

2.1.13. Teorem:

G çok devirli $\times$ sonlu bir grup; R sıfır karakteristikli değişmeli birimli bir halka olmak üzere RG grup halkasını gözönüne alalım. Eğer R de 0 ve 1 den başka idempotentler yok ve G de birimden farklı grup elemanlarının mertebeleri R de terslenmezse RG de 0 ve 1 den farklı idempotentler yoktur.

İspat:

R yi nilpotent elemanı olmayan bir Noetherian halka olarak seçebiliriz [Sehgal-Zassenhaus]. Bu durumda R yi cisimlerin bir direkt toplamı içine yerleştirebiliriz:

$R \subseteq F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_r$; $1 \leq i \leq k$ için karak(F_i)=0 ; karak(F_{k+j}) sonludur. $R \to F_i$ doğal projeksiyonundan genişletilerek elde edilen $\pi_i : RG \to F_i G$ fonksiyonunu gözönüne alalım. e bir idempotent ise, ilk k bileşeni r/s, bir rasyonel sayı olmak üzere

$$iz(e)=e_1=(r/s,\ r/s,\ r/s,\ldots,r/s,\alpha_1,\alpha_2\ldots)$$

biçiminde yazılabilir [Sehgal-Zassenhaus]. Aynı zamanda, Zalesskii teoreminen, α_i ler sonlu cisimlere aittir. Gerektiğinde 1-e dikkate alınarak $r/s \neq 0$ varsayabiliriz. r ile s yi aralarında asal seçebileceğimizden, uygun a,b tamsayıları için ar+bs=1 yazılıp, buradan

$$\beta = ae_1 + b1_R = (1/s,\ldots,1/s, a\alpha_1 + b, a\alpha_2 + b,\ldots) \in R$$

bulunur. Her i için $a\alpha_i + b \neq 0$ varsayabiliriz; aksi halde $s\beta$ nın uygun bir kuvveti R de bir aşikar olmayan idempotent olur.

$$s\beta - 1 = (0,0,\ldots,0,s(a\alpha+b)-1,\ s(a\alpha_2+b)-1,\ldots) \in R$$

olduğu gözlenebilir. Yine aynı düşünce ile her i için, s(aα_i+b)-1=0 olup, aα_i+b=1/s ve

$$\beta=(1/s, 1/s, \ldots, 1/s)=1/s \cdot 1_R \in R$$

bulunur. s nin bir |G|-sayısı (|G| nin çarpanları arasında) olduğu gözlenerek s=1; dolayısıyla e=$(1,1,\ldots,1,\alpha_1,\alpha_2\ldots)$ olduğu ortaya çıkar. e'=1-e olsun. π_i (e') nin izi 0 olduğundan, $1 \le i \le k$ için π_i (e')=0 dır. O halde, S=$F_{k+1} \oplus \ldots \oplus F_j$ olmak üzere, e$\in$SG dir. I, R de e' nin katsayılarınca üretilen ideal ise, $I^2=I \subset S$ olup, Krull teoreminden I(1-γ)=0 olacak şekide bir $\gamma \in I$ elemanı vardır. O halde $\gamma^2=\gamma \in R$ olup; buradan, $\gamma=0$ veya $\gamma=1$ dir. $I \subset S$ olduğundan $\gamma \neq 1$ olup buradan $\gamma=0$ ve I=0 ve dolayısıyla e'=0 ve e=1 elde edilir.

Şimdi bu teoremin keyfi karakteristikli durumuna bakalım.

2.1.14. Teorem:

R, 0 ve 1 den başka idempotenti olmayan değişmeli bir halka ve karak(R)=n>0 olsun. G; mertebesi R de bir birimsel olan, hiç bir elemanı ($\neq$1) olmayan bir çok devirli × sonlu grup ise, RG grup halkasında da aşikar olmayan idempotentler yoktur.

İspat:

e$\in$RG bir idempotent ($\neq$0,1) olsun. R de idempotentler ($\neq$0,1) bulunmadığından karak(R)=p^n olacak biçimde bir p asalı vardır. R yi nil radikaline, gerekirse, bölerek R de nilpotent elemanların bulunmadığını varsayabiliriz; özellikle bu durumda karak(R)=p olur. Ayrıca R yi e$\in$RG nin sonlu tane katsayısından (halka olarak) üretilmiş; dolayısıyla Noetherian ve p karakteristikli cisimlerin bir direkt çarpımı içinde : $R \subset \prod_{i=1}^{m} F_i$ olarak yerleşmiş varsayabiliriz. Bu durumda $RG \subset \prod_{i=1}^{m} F_i$ olur. 2.1.6 Önerme'den e=$(1,1,1,\ldots,1,0,0,\ldots) \in \prod F_i G$ dır. e nin katsayılarınca üretilen ideal $I \subset R$ ise $I^2=I$ olup, Krull teoreminden (Noetherian bir halkada bir I ideali için $\bigcap_{i=1}^{\infty} I^n=(0)$ dır $\Leftrightarrow$ 1-I nın hiç bir elemanı sıfır bölen değildir.) bir $x \in I$ elemanı için I(1-x)=0 olacak şekilde bulunur. Buradan $x^2=x$ ve dolayısıyla x=0 veya x=1 ve I=R olur ki, bu mümkün olamaz; çünkü e=$(1,1,\ldots,1,0,0,\ldots) \neq (1,1,\ldots,1)$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

2.2.0. Örnekler:

Bu kısımda D_p(p:asal), p inci dereceden dihedral grup, yani

$D_p=\langle x,y|x^p=1,\ \ y^2=1,\ \ y^{-1}xy=x^{-1}\rangle$,

ve Q_8, 8. mertebeden kuaterniyon grup, yani

$Q_8=\langle x,y|x^4=1,\ x^2=y^2,\ yxy^{-1}=x^{-1}\rangle$,

olmak üzere QD_p ve CQ_8 grup halkalarının idempotentlerinin tam bir dökümü verilmiştir.

2.2.1. QD_p grup halkasının idempotentleri:

$G=D_p$ olsun. p=2 ise D_2 değişmeli olup

$$\tau:QG\to Q\oplus Q\oplus Q\oplus Q$$

$$x\to(1,-1,1,-1)$$

$$y\to(1,1,-1,-1)$$

ile verilen τ bir izomorfizma ve $QG\cong Q\oplus Q\oplus Q\oplus Q$ dır. $\alpha\in QG$ alalım. O halde $\alpha^2=\alpha \Leftrightarrow \tau(\alpha)^2=\tau(\alpha)$ olduğundan $\tau(\alpha)$, idempotent olacak şekildeki α ları belirlememiz yeterli olacaktır. Bir $\alpha=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy\in QD_2$ elemanı için

$\tau(\alpha)=a_0\tau(1)+a_1\tau(x)+a_2\tau(y)+a_3\tau(xy)=a_0(1,1,1,1)+a_1(1,-1,1,-1)+$
$a_2(1,1,-1,-1)+a_3(1,-1,-1,1)=(a_0+a_1+a_2+a_3,a_0-a_1+a_2-a_3,a_0+a_1-a_2-a_3,$
$a_0-a_1-a_2+a_3)=(\lambda,\mu,\delta,\vartheta)$

dır. Burada $\lambda,\mu,\delta,\vartheta=0$ veya 1 dir.

$$a_0+a_1+a_2+a_3=\lambda$$

$$a_0-a_1+a_2-a_3=\mu$$

$$a_0+a_1-a_2-a_3=\delta$$

$$a_0-a_1-a_2+a_3=\vartheta$$

denklem sistemi çözülürse

$$a_0=\frac{1}{4}(\lambda+\vartheta+\mu-\delta)\ ,\ a_1=\frac{1}{4}(\lambda-\vartheta-\mu+\delta)$$

$$a_2=\frac{1}{4}(\lambda-\vartheta+\mu-\delta)\ ,\ a_3=\frac{1}{4}(\lambda+\vartheta-\mu+\delta)$$

netice olarak; QD_2 nin idempotentleri

$$\frac{1}{4}[(\lambda+\vartheta+\mu-\delta)+(\lambda-\vartheta-\mu+\delta)x+(\lambda-\vartheta+\mu-\delta)y+(\lambda+\vartheta-\mu+\delta)xy]$$

elemanlarından ibarettir. Şimdi p>2 kabul edelim. ε birimin p yinci dereceden bir ilkel kökü: $\varepsilon^p=1$ olsun. $F=Q[\varepsilon+\varepsilon^{-1}]$ cismi için $QG\cong Q\oplus Q\oplus M_2(F)$ izomorfizmasını göstereceğiz. Burada $M_2(F)$, F cismi üzerinde 2x2 türdeki matris halkasıdır.

$$\tau : QG\rightarrow Q\oplus Q\oplus M_2(Q[\varepsilon])$$

$$\tau(x)=(1,1,X)\ ,\ X=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{bmatrix},\quad \tau(y)=(1,-1,Y),\ Y=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

dönüşümü, $X^p=I$, $Y^2=I$ ve $Y^{-1}XY=X^{-1}$ olduğundan iyi tanımlı bir halka homomorfizmasıdır. τ ın 1-1 olduğunu gösterelim. $\alpha\in$çek(τ) olsun. α yı

$\alpha=(a_0+a_1x+\ldots+a_{p-1}x^{p-1})+(b_0+b_1x+\ldots+b_{p-1}x^{p-1})y$ biçiminde yazıp $\tau(\alpha)=0$ ise $\alpha=0$ olduğunu görelim

$$\tau(\alpha)=\begin{bmatrix}a_0+a_1\varepsilon+\ldots+a_{p-1}\varepsilon^{p-1} & b_0+b_1\varepsilon+\ldots+b_{p-1}\varepsilon^{p-1}\\ * & *\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

eşitliğinden

$$a_0+a_1\varepsilon+\ldots+a_{p-1}\varepsilon^{p-1}=0$$
$$b_0+b_1\varepsilon+\ldots+b_{p-1}\varepsilon^{p-1}=0$$

bulunur. ε nın Q üzerindeki minimal polinomu $1+\xi+\xi^2+\ldots+\xi^{p-1}$ olduğundan $i=0,1,\ldots,p-1$ için a_i=a ve b_i=b olup, α

$$\alpha=(1+x+\ldots+x^{p-1})(a+by)$$

biçimini alır. O halde

$$0=\tau(\alpha)=(pa+pb,\ pa-pb)$$

olur. Bu da a=0, b=0 olmasını gerektirir. Yani $\alpha=0$ dır. τ örten değildir; çünkü $E=Q\oplus Q\oplus M_2(Q[\varepsilon])$ nın Q-boyutu QG ninkinden çok daha büyüktür. Şimdi

$$Z=\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon \\ 1 & -\varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

matrisi için

$$\sigma: E\to E,\quad \sigma(1,1,X)=(1,1,Z^{-1}XZ)\ \text{ ve }\ \sigma(1,1,Y)=(1,-1,Z^{-1}YZ),$$

otomorfizmasını tanımlayalım. Buna göre $\alpha\tau(x)=(1,1,Z^{-1}XZ)$ ve $\alpha\tau(y)=(1,-1,Z^{-1}YZ)$ biçiminde tanımlanan $\sigma\tau$, QG nin elemanlarını E nin içine yerleştirir. Ayrıca

$$Z^{-1}XZ=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \varepsilon+\varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad Z^{-1}YZ=\begin{bmatrix} 1 & -(\varepsilon+\varepsilon^{-1}) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

nin her ikisi $M_2(F)$ nin elemanıdır. Buna göre

$$2p=\text{boy}(QG)=1+1+4\left(\frac{p-1}{2}\right)=\text{boy}(Q\oplus Q\oplus M_2(F))$$

olduğundan $G\cong Q\oplus Q\oplus M_2(F)$ dır.

Buna göre $Q\oplus Q\oplus M_2(F)$ nin tüm idempotentlerini bulursak QG nin idempotentlerini de bulmuş oluruz; çünkü $\alpha\in QG$ için $\alpha^2=\alpha\Leftrightarrow(\sigma\tau(\alpha))^2=\sigma\tau(\alpha)$ dır. Kolaylık bakımından $\varphi=\sigma\tau$ yazalım. Bir $\alpha\in QG$ elemanı

$$\alpha=a_0+a_1x+\ldots+a_{p-1}x^{p-1}+(b_0+b_1x+\ldots+b_{p-1}x^{p-1})y=\sum_{i=0}^{p-1}a_ix^i+\sum_{i=0}^{p-1}b_ix^iy$$

biçiminde olup φ altındaki görüntüsü

$$\varphi(\alpha)=\sum_{i=0}^{p-1} a_i\varphi(x)^i+\sum_{i=0}^{p-1} b_i\varphi(x)^i\varphi(y)$$

$$=\sum_{i=0}^{p-1} a_i\,(1,1,(Z^{-1}XZ)^i\,)+\sum_{j=0}^{p-1} b_j\,(1,1,(Z^{-1}XZ)^i\,)(1,-1,(Z^{-1}YZ))$$

$$=(\sum_{i=0}^{p-1}(a_i+b_i),\ \sum_{i=0}^{p-1}(a_i-b_i),\ \sum_{i=0}^{p-1}(a_i Z^{-1}XZ)^i+b_i(Z^{-1}XZ)^i\,(Z^{-1}YZ))$$

olarak bulunur; çünkü $\varphi(x)=(1,1,(Z^{-1}XZ))$ ve $\varphi(y)=(1,-1,(Z^{-1}YZ))$ dır. O halde

$$A=\sum_{i=0}^{p-1} a_i\,,\ B=\sum_{i=0}^{p-1} b_i \qquad \text{için,}$$

$$\varphi(\alpha)=(A+B,\ A-B,\ \sum_{i=0}^{p-1} a_i\,(Z^{-1}X^i\,Z)+\sum_{i=0}^{p-1} b_i\,(Z^{-1}X^i\,Z)\,(Z^{-1}Y\,Z))$$

olur. Diğer taraftan,

$$X^i=\begin{bmatrix}\varepsilon^i & 0\\ 0 & \varepsilon^{-i}\end{bmatrix},\qquad Z^{-1}=\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}\begin{bmatrix}-\varepsilon^{-1} & \varepsilon\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$(Z^{-1}XZ)^n=Z^{-1}X^nZ=\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}\begin{bmatrix}\varepsilon^{1-n}-\varepsilon^{n-1} & \varepsilon^n-\varepsilon^{-n}\\ -\varepsilon^n+\varepsilon^{-n} & \varepsilon^{n+1}-\varepsilon^{-n-1}\end{bmatrix}$$

$$Z^{-1}YZ=\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}\begin{bmatrix}-\varepsilon^{-1} & \varepsilon\\ 0 & \varepsilon^{-1}-\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -(\varepsilon+\varepsilon^{-1})\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$(Z^{-1}XZ)^n\,(Z^{-1}YZ)=\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}\begin{bmatrix}\varepsilon^{1-n}-\varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{n-2}-\varepsilon^{-n+2}\\ -\varepsilon^n+\varepsilon^{-n} & \varepsilon^{n-1}-\varepsilon^{-n+1}\end{bmatrix}$$

oldukları basit hesaplamalarla gösterilebilir. $s(n)=\varepsilon^n-\varepsilon^{-n}$ dersek

$$(Z^{-1}XZ)^n\,(Z^{-1}YZ)=\frac{1}{s(1)}\begin{bmatrix}-s(n-1) & s(n-2)\\ -s(n) & s(n-1)\end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde

$$\varphi(\alpha)=(A+B,A-B,\sum_{n=0}^{p-1} a_n \frac{1}{s(1)}\begin{bmatrix}-s(n-1) & s(n)\\ -s(n) & s(n+1)\end{bmatrix}+\sum_{n=0}^{p-1} b_n \frac{1}{s(1)}\begin{bmatrix}-s(n-1) & s(n-2)\\ -s(n) & s(n-1)\end{bmatrix})$$

$$=(A+B,\ A-B,\frac{1}{s(1)}\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{p-1}(-a_n-b_n)s(n-1) & \sum_{n=0}^{p-1}(a_n s(n)+b_n s(n-2))\\ \sum_{n=0}^{p-1}(-a_n-b_n)s(n) & \sum_{n=0}^{p-1}(a_n s(n+1)+b_n s(n-1))\end{bmatrix})$$

bulunur. 2x2 türünde Q üzerindeki matris halkasının idempotentlerinin kümesini E ile gösterirsek,

$$E=\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ ,\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\}\cup\{\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}ad & bd\\ -ac & -bc\end{bmatrix}\ |\ a,\ b,\ c,\ d\in Q,\ \Delta=ad-bc\neq 0\}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. $\varphi(\alpha)$ nın idempotent olması için,

$$\lambda,\mu=0 \text{ veya } 1 \text{ ve } \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}\in E \text{ olmak üzere } \varphi(\alpha)=(\lambda,\mu,\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix})$$

olmasıdır. Bu ise $A+B=\lambda$, $A-B=\mu$ ve

$$\sum_{k=0}^{p-1}(a_k+b_k)s(k-1)=-c_{11}s(1)$$

$$\sum_{k=0}^{p-1}(a_k s(k)+b_k s(k-2))=c_{12}s(1)$$

$$\sum_{k=0}^{p-1}(a_k+b_k)s(k)=-c_{21}s(1)$$

$$\sum_{k=0}^{p-1}(a_k s(k+1)+b_k s(k-1))=c_{22}s(1)$$

olmasını gerektirir. A+B=λ, A-B=μ eşitliklerinden A=(λ+μ)/2 ve B=(λ-μ)/2 bulunur. Bu dört denklem sisteminde gerekli bazı düzenlemeleri yapıp, kolaylık sağlaması bakımından $a_0 = a_p$; $b_p = b_0$; $b_{p+1} = b_1$ ve $a_{p+1} = a_1$ dersek şu denklem sistemini elde ederiz:

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i = (\lambda+\mu)/2 \quad , \quad \sum_{i=0}^{p-1} b_i = (\lambda-\mu)/2$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} + b_{k+1}) s(k) = -c_{11} s(1)$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} (a_k + b_{k+2}) s(k) = c_{12} s(1)$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} (a_k + b_k) s(k) = -c_{21} s(1)$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} (a_{k-1} + b_{k+1}) s(k) = c_{22} s(1)$$

$s(k)=\varepsilon^k - \varepsilon^{-k} = \varepsilon^k - \varepsilon^{p-k}$ değerini burada yerine koyarsak,

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i = (\lambda+\mu)/2 \quad , \quad \sum_{i=0}^{p-1} b_i = (\lambda-\mu)/2$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_{p-k+1} + b_{k+1} - b_{p-k+1}) \varepsilon^k = -c_{11}\varepsilon + c_{11}\varepsilon^{p-1}$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} (a_k - a_{p-k} + b_{k+2} - b_{p-k+2}) \varepsilon^k = c_{12}\varepsilon - c_{12}\varepsilon^{p-1}$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} (a_k + b_k - a_{p-k} - b_{p-k}) \varepsilon^k = -c_{21}\varepsilon + c_{21}\varepsilon^{p-1}$$

$$\sum_{k=1}^{p-1}(a_{k-1}-a_{p-k-1}+b_{k+1}-b_{p-k+1})\varepsilon^k = c_{22}\varepsilon - c_{22}\varepsilon^{p-1}$$

elde edilir. ε un Q üzerindeki minimal polinomu $1+\xi+\xi^2+...+\xi^{p-1}$ olduğundan, k=1 için

$$\begin{aligned}
&a_0-a_2+b_0-b_2=c_{11}\\
&a_1-a_{p-1}-b_1+b_3=c_{12}\\
&a_1-a_{p-1}+b_1-b_{p-1}=-c_{21}\\
&a_0-a_{p-2}+b_2-b_0=c_{22}
\end{aligned}$$

ve k=2,3,...,p-2 için

$$\begin{aligned}
&a_{k+1}-a_{p-k+1}+b_{k+1}-b_{p-k+1}=0\\
&a_k-a_{p-k}+b_{k+2}-b_{p-k+2}\quad=0\\
&a_k-a_{p-k}+b_k-b_{p-k}\qquad=0\\
&a_{k-1}-a_{p-k-1}+b_{k+1}-b_{p-k+1}=0
\end{aligned}$$

olarak buluruz. Fakat burada; yani, son dört denklem sisteminde k yerine p-k aldığımızda denklemler değişmediğinden k=2,3,...,p-2 yerine k=2,3,...,(p-1)/2 almamız yeterlidir. Ayrıca,

$$\omega(t)=\begin{cases}1 & t=1 \text{ için}\\ 0, & t\geq 0,\ t\neq 1 \text{ için}\end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlarsak, k=1,2,...(p-1)/2 için bulunan denklem sistemleri

$$a_0+a_1+a_2+...+a_{p-1}=(\lambda+\mu)/2 \tag{1}$$

$$b_0+b_1+b_2+...+b_{p-1}=(\lambda-\mu)/2 \tag{2}$$

$$a_{k+1}-a_{p-k+1}+b_{k+1}-b_{p-k+1}=-\omega(k)c_{11} \tag{3}$$

$$a_k-a_{p-k}+b_{k+2}-b_{p-k+2}\quad=\omega(k)c_{12} \tag{4}$$

$$a_k-a_{p-k}+b_k-b_{p-k+1}\quad=-\omega(k)c_{21} \tag{5}$$

$$a_{k-1} - a_{p-k-1} + b_{k+1} - b_{p-k+1} = \omega(k)c_{22} \tag{6}$$

biçimine girer. Şimdi (3) ve (6) denklemlerini taraf tarafa çıkarırsak, k=1,2,...,(p-1)/2 için

$$(a_{k+1} + a_{p-(k+1)}) - (a_{k-1} + a_{p-(k-1)}) = -\omega(k)(c_{11} + c_{22}) \tag{7}$$

elde edilir. Burada k=1 alırsak,

$$a_2 + a_{p-2} = 2a_0 - c_{11} - c_{22} \tag{8}$$

ve sırayla k=2,3,...,(p-1)/2 alıp alt alta yazarsak

$$\begin{aligned} a_3 + a_{p-3} &= a_1 + a_{p-1} \\ a_4 + a_{p-4} &= a_2 + a_{p-2} \\ a_5 + a_{p-5} &= a_3 + a_{p-3} \\ &\;\;\vdots \\ a_{(p-1)/2} + a_{(p+1)/2} &= a_{(p-5)/2} + a_{(p+5)/2} \\ a_{(p-1)/2} + a_{(p+1)/2} &= a_{(p-3)/2} + a_{(p+3)/2} \end{aligned} \tag{9}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri biraz dikkatlice inceleyip, (8) i gözönüne alırsak,

$$a_1 + a_{p-1} = a_2 + a_{p-2} = \ldots = a_{(p-1)/2} + a_{(p+1)/2} = 2a_0 - c_{11} - c_{22} \tag{10}$$

olduğu görülür. Bu değerleri (1) de yerine yazarsak,

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1} = a_0 + (a_1 + a_{p-1}) + (a_2 + a_{p-2}) + \ldots + (a_{(p-1)/2} + a_{(p+1)/2}) = (\lambda+\mu)/2$$

veya

$$a_0 + \frac{(p-1)}{2}(2a_0 - c_{11} - c_{22}) = (\lambda+\mu)/2$$

veya

$$a_0 = \frac{1}{2p}[\lambda+\mu+(p-1)(c_{11}+c_{22})] \tag{11}$$

bulunur. Benzer şekilde (2) ve (3) denklemlerini taraf tarafa çıkararak, k=1,2,..,(p-1)/2 için

$$(b_{k+2}+b_{p-k})-(b_k+b_{p-k+2}) = \omega(k)(c_{12}+c_{21}) \tag{12}$$

bulunur. Buradan da k=1 için

$$b_3+b_{p-1} = 2b_1+(c_{12}+c_{21}) \tag{13}$$

ve sırayla k=2,3,...,(p-1)/2 alıp alt alta yazarak,

$$\begin{aligned} b_4+b_{p-2} &= b_2+b_0 \\ b_5+b_{p-3} &= b_3+b_{p-1} \\ b_6+b_{p-4} &= b_4+b_{p-2} \\ &\;\;\vdots \\ b_{(p+1)/2}+b_{(p+3)/2} &= b_{(p-3)/2}+b_{(p+7)/2} \\ b_{(p+3)/2}+b_{(p+1)/2} &= b_{(p-1)/2}+b_{(p+5)/2} \end{aligned} \tag{14}$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan

$$b_2+b_0 = b_3+b_{p-1} = b_4+b_{p-2} = \ldots = b_{(p+1)/2+}+b_{(p+3)/2} = 2b_1+c_{12}+c_{21} \tag{15}$$

olduğu kolayca görülür. Bu değerleri (2) de yerine yazarak,

$$\begin{aligned} b_0+b_1+\ldots+b_{p-1} &= b_1+(b_0+b_2)+(b_3+b_{p-1})+(b_4+b_{p-2})+\ldots+(b_{(p+1)/2}+b_{(p+3)/2} \\ &= b_1+(\frac{p-1}{2})(2b_1+c_{12}+c_{21})=(\lambda-\mu)/2 \end{aligned}$$

veya

$$b_1 = \frac{1}{2p}[\lambda-\mu-(p-1)(c_{12}+c_{21})] \tag{16}$$

bulunur. p=3 ise (11) ve (16) dan

$$a_0=(1/6)(\lambda+\mu+2(c_{12}+c_{21})), \quad b_1=(1/6)(\lambda-\mu-2(c_{12}+c_{21}))$$

dır. (4) ve (5) de k=1, p=3 olarak elde edeceğimiz denklemleri taraf tarafa toplarsak,

$$2a_1 - 2a_2 + b_0 - b_2 = c_{12} - c_{21}$$

buluruz. Yine (3) de k=1 alırsak $a_2 - a_0 + b_2 - b_0 = -c_{11}$ olur. Bu iki denklemi taraf tarafa toplayıp ve a_0 nın değerini yerine yazarak; $a_1 + a_2 = 2a_0 - c_{11} - c_{22}$ olduğunu hatırlarsak,

$$a_1=(1/6)(\lambda+\mu-2c_{11}+2c_{12}-2c_{21})$$

$$a_2=(1/6)(\lambda+\mu-2c_{22}-2c_{12}+2c_{21})$$

buluruz. (3) de (15) eşitlikleri kullanılırsa

$$b_0=(1/6)(\lambda-\mu+2c_{11}-2c_{22}+2c_{21})$$

$$b_2=(1/6)(\lambda-\mu-2c_{11}+2c_{22}+2c_{12})$$

bulunur. O halde QD_3 ün idempotentleri

$$\alpha = (1/6)\big[(\lambda-\mu+2c_{11}+2c_{22})+(\lambda+\mu-2c_{11}+2c_{12}-2c_{21})x+(\lambda+\mu-2c_{22}-$$
$$-2c_{12}+2c_{21})x^2+(\lambda-\mu+2c_{11}-2c_{22}+2c_{21})y+(\lambda-\mu-2c_{12}-2c_{21})xy+$$
$$+(\lambda-\mu-2c_{11}+2c_{22}+2c_{12})x^2y\big]$$

elemanlarından ibarettir.

Şimdi $p \geq 5$ kabul edelim. (3) denkleminde k yerine sırayla k - 1 ve k + 1 alıp taraf tarafa toplarsak, k = 2,3,..., (p-3)/2 için

$$a_k - a_{p-k} + a_{k+2} - a_{p-k+2} + b_k + b_{k+2} - b_{p-k} - b_{p-k+2} = -\omega(k-1)c_{11} \tag{17}$$

ve (4) ile (5) i taraf tarafa toplarsak, k = 1, 2,..., (p-1)/2 için

$$2a_k - 2a_{p-k} + b_k + b_{k+2} - b_{p-k} - b_{p-k+2} = \omega(k)(c_{12} - c_{21}) \tag{18}$$

olur. (17) ve (18) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak, k = 1,2,..., (p-1)/2 için

$$a_k - a_{p-k} - a_{k+2} + a_{p-k+2} = (c_{12} - c_{21})\omega(k) + \omega(k-1)c_{11}$$

buluruz. (7) den $a_{p-k} = -a_k + 2a_0 - c_{11} - c_{22}$ olduğundan bu denklem

$$2a_k - a_{k+2} + a_{p-k+2} = 2a_0 - c_{11} - c_{22} + (c_{12} - c_{21})\omega(k) + \omega(k-1)c_{11} \tag{19}$$

şeklini alır.

Şimdi (19) dan elde edilecek denklemlerin genel yapısı hakkında bir fikir edinebilmek için p = 5 ve 7 alarak elde ettiğimiz denklem sistemlerini yazarsak şu neticeleri buluruz:

$p = 5$ için $a_0 = (1/10)(\lambda + \mu + 4(c_{11} + c_{22}))$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4a_0 - 2c_{11} - 2c_{22} + c_{12} - c_{21} \\ 3a_0 - c_{11} - 2c_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_0 - c_{11} - c_{22} \\ 2a_0 - c_{11} - c_{22} \end{bmatrix}$$

$p = 7$ için , $a_0 = (1/14)(\lambda + \mu + 6(c_{11} + c_{22}))$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2a_0 - 2c_{11} - 2c_{22} + c_{12} - c_{21} \\ 3a_0 - c_{11} - 2c_{22} \\ 2a_0 - c_{11} - c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 \\ -a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_0 - c_{11} - c_{22} \\ 2a_0 - c_{11} - c_{22} \\ 2a_0 - c_{11} - c_{22} \end{bmatrix}$$

$p \geq 11$ için,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & & & \\ & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & & \\ & & . & . & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & . & . & \\ & & & & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ & & & & & -1 & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{(p-5)/2} \\ a_{(p-3)/2} \\ a_{(p-1)/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_0 - c_{11} - c_{22} + c_{12} - c_{21} \\ a_0 - c_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2a_0 - c_{11} - c_{22} \\ 2a_0 - c_{11} - c_{22} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bu katsayılar matrisini N ile gösterirsek, n=(p-1)/2 tek tamsayı ise

$$N^{-1}=\frac{1}{(2n+1)}\begin{bmatrix} n & -1 & n-1 & -2 & n-2 & -3 & \cdots & -(n-1)/2 & (n+1)/2 \\ -1 & 2n-1 & -3 & 2n-3 & -5 & 2n-5 & \cdots & n+2 & -n \\ n-1 & -3 & 3n-3 & -6 & 3n-6 & -9 & \cdots & -3(n-1)/2 & 3(n+1)/2 \\ -2 & 2n-3 & -6 & 4n-6 & -10 & 4n-4 & \cdots & 2(n+2) & -2n \\ n-2 & -5 & 3n-6 & -10 & 5n-10 & -15 & \cdots & -5(n-1)/2 & 5(n+1)/2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(n-1)/2 & n+2 & -3(n-1)/2 & 2(n+2) & -5(n-1)/2 & 3(n+2) & \cdots & (n-1)(n+2)/2 & -n(n-1)/2 \\ (n+1)/2 & -n & 3(n+1)/2 & -2n & 5(n+1)/2 & -3n & & -n(n-1)/2 & n(n+1)/2 \end{bmatrix}$$

ve n=(p-1)/2 çift tamsayı ise

$$N^{-1}=\frac{1}{(2n+1)}\begin{bmatrix} n & -1 & n-1 & -2 & n-2 & -3 & \cdots & (n+2)/2 & -n/2 \\ -1 & 2n-1 & -3 & 2n-3 & -5 & 2n-5 & \cdots & -(n-1) & n+1 \\ n-1 & -3 & 3n-3 & -6 & 3n-6 & -9 & \cdots & 3(n+2)/2 & -3n/2 \\ -2 & 2n-3 & -6 & 4n-6 & -10 & 4n-10 & \cdots & -2(n-1) & 2(n+1) \\ n-2 & -5 & 3n-6 & -10 & 5n-10 & -15 & \cdots & 5(n+2)/2 & -5n/2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n+2)/2 & -(n-1) & 3(n+2)/2 & -2(n-1) & 5(n+2)/2 & -3(n-1) & \cdots & (n-1)(n+2)/2 & -n(n-1)/2 \\ -n/2 & n+1 & -3n/2 & 2(n+1) & -5n/2 & 3(n+1) & \cdots & -n(n-1)/2 & n(n+1)/2 \end{bmatrix}$$

dır. Burada, yani N^{-1} matrisinin elemanları arasında, $a_{k,k+i-1}=ka_{1,i}-\frac{k(k-1)}{2}$ bağıntısı vardır.

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \quad ve \quad C_1=\begin{bmatrix} 2a_0-c_{11}-c_{22}+c_{12}-c_{21} \\ a_0-c_{22} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 2a_0-c_{11}-c_{22} \\ 2a_0-c_{11}-c_{22} \end{bmatrix}$$

ile gösterirsek $A=N^{-1}C_1$ eşitliğinden, k=2,4,6,...,n (veya n-1) için,

$$a_k=\frac{1}{2p}[\lambda+\mu+(p-k-1)c_{11}-(p-k+1)c_{22}-k(c_{12}-c_{21})]$$

ve

$$a_{p-k}=\frac{1}{2p}[\lambda+\mu-(p-k+1)c_{11}+(p-k-1)c_{22}+k(c_{12}-c_{21})]$$

olur; k tek tamsayıları için de; yani k=1,3,5,..,n (veya (n-1)) için,

$$a_k=\frac{1}{2p}[\lambda+\mu-(k+1)c_{11}+(k-1)c_{22}+(p-k)(c_{12}-c_{21})]$$

ve

$$a_{p-k}=\frac{1}{2p}[\lambda+\mu+(k-1)c_{11}-(k+1)c_{22}-(p-k)(c_{12}-c_{21})]$$

elde edilir. Şimdi de b_i leri belirleyelim. (4) de k yerine k-1 ve (5) de k yerine k+1 alıp taraf tarafa toplarsak,

$$a_{k+1}+a_{k-1}-a_{p-k-1}-a_{p-k+1}+2b_{k+1}-b_{p-k-1}-b_{p-k+3}=\omega(k-1)c_{12} \qquad (19)$$

ve (2) ile (3) ü taraf tarafa toplarsak, k=1,2;...(p-1)/2 için

$$a_{k+1}+a_{k-1}-a_{p-k+1}-a_{p-k-1}+2b_{k+1}-b_{p-k+1}=\omega(k)(c_{22}-c_{11}) \tag{20}$$

bulunur. (19) ile (20) eşitliklerini taraf tarafa çıkartıp (11) ifadesi dikkate alınırsa, k=1,2,...(p-1)/2 için

$$b_{p-k+3}+2b_{k+1}+b_{p-k+1}=4b_1+2c_{12}+2c_{21}-\omega(k-1)c_{12}+\omega(k)(c_{22}-c_{11}) \tag{21}$$

elde edilir.

p=5 ise $\quad b_1=(1/10)(\lambda-\mu-4(c_{12}+c_{21}))$

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4b_1+2c_{12}+2c_{21}-c_{11}+c_{21} \\ 3b_1+c_{12}+2c_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b_2 \\ -b_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2b_1+c_{12}+c_{21} \\ 2b_1+c_{12}+c_{21} \end{bmatrix}$$

p=7 ise $\quad b_1=(1/14)(\lambda-\mu-6(c_{12}+c_{21}))$

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2b_1+c_{12}+c_{21}-c_{11}+c_{22} \\ 3b_1+c_{12}+2c_{21} \\ 2b_1+c_{12}+c_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b_2 \\ -b_4 \\ -b_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2b_1+c_{12}+c_{21} \\ 2b_1+c_{12}+c_{21} \\ 2b_1+c_{12}+c_{21} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. p≥11 ise

$$
B = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ . \\ . \\ . \\ b_{(p-1)/2} \\ b_{(p+1)/2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 2b_1 + c_{12} + c_{21} - c_{11} + c_{22} \\ b_1 + c_{21} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 2b_1 + c_{12} + c_{21} \\ 2b_1 + c_{12} + c_{21} \end{bmatrix}
$$

olmak üzere (21) eşitliğinde k nın sırayla k=1,2,..,(p-1)/2 değerlerini verirsek bu eşitlik $B=N^{-1}C_2$ şeklinde yazılır. Bu ise b_i lerin şu değerlerini verir:

k=2,4,6,...(p+1)/2 (veya (p-1)/2) için

$$b_k = \frac{1}{2p}[\lambda - \mu + kc_{12} - (k-2)c_{21} - (p-k+1)(c_{11} - c_{22})]$$

ve

$$b_{p-k+2} = \frac{1}{2p}[\lambda - \mu - (k-2)c_{12} + kc_{21} + (p-k+1)(c_{11} - c_{22})];$$

k=1,3,5, ...,(p+1)/2 (veya (p-1)/2) için

$$b_k = \frac{1}{2p}[\lambda - \mu - (p-k)c_{12} + (p-k+2)c_{21} + (k-1)(c_{11} - c_{22})]$$

ve

$$b_{p-k+2} = \frac{1}{2p}[\lambda - \mu + (p-k+2)c_{12} - (p-k)c_{21} - (k-1)(c_{11} - c_{22})]$$

değerleri bulunur.

2.2.2. CQ_8 Grup Halkasının İdempotentleri:

$$Q_8=\langle x,y \mid x^4=1,\ x^2=y^2,\ yxy^{-1}=x^{-1}\rangle$$

grubunun CQ_8 grup halkası için

$$\tau : CQ_8 \to C\oplus C\oplus C\oplus C\oplus M_2(C)$$

$$\tau(x)=(1,1,-1,-1,\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix});\ \tau(y)=(1,-1,1,-1,\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix})$$

ile verilen τ nin bir izomorfizma olduğu kolayca gösterilebilir. O halde CQ_8 in idempotentleri $C\oplus C\oplus C\oplus C\oplus M_2(C)$ ninkilere karşılık gelen elemanlardır.

$$\alpha=\sum_{i=0}^{3}a_i x^i+\sum_{i=0}^{3}b_i x^i y \in CQ_8$$

elemanının τ altındaki görüntüsü:

$$\tau(\alpha)=(\sum_{i=0}^{3}(a_i+b_i),\ \sum_{i=0}^{3}(a_i-b_i),\ \sum_{i=0}^{3}(-1)^i(a_i+b_i),\ \sum(-1)^i(a_i-b_i),$$

$$\begin{bmatrix}(a_0-a_2)+(b_1-b_3)i & (-b_0+b_2)+(a_1-a_3)i\\ (b_0-b_2)+(a_1-a_3)i & (a_0-a_2)-(b_1-b_3)i\end{bmatrix})=(\lambda,\mu,\delta.\vartheta,E)$$

dır. $\tau(\alpha)$ nın idempotent olması için gerek ve yeter şart $\lambda,\mu,\delta,\vartheta=0$ veya 1 ve $E^2=E\in M_2(C)$ olmasıdır. E nin $\Delta=ad-bc\neq 0$ olmak üzere

$$E=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}ad & bd\\ -ac & -bc\end{bmatrix},\qquad a,b,c,d\in C$$

biçiminde olduğu kolayca gösterilebilir. O halde $\tau(\alpha)=(\lambda,\mu,\delta,\vartheta,E)$ eşitliğinden şu denklemler ortaya çıkar:

$$a_0+a_1+a_2+a_3+b_0+b_1+b_2+b_3=\lambda$$

$$a_0+a_1+a_2+a_3-b_0-b_1-b_2-b_3=\mu$$

$$a_0-a_1+a_2-a_3+b_0-b_1+b_2-b_3=\delta$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 - b_0 + b_1 - b_2 + b_3 = \vartheta$$

$$a_0 - a_2 + ib_1 - ib_3 = ad/\Delta$$

$$ia_1 - ia_3 - b_0 + b_2 = bd/\Delta$$

$$ia_1 - ia_3 + b_0 - b_2 = -ac/\Delta$$

$$a_0 - a_2 - ib_1 + ib_3 = -bc/\Delta$$

Bu denklem sistemini çözersek

$$a_0=(1/8)(\lambda+\mu+\delta+\vartheta+2)$$

$$a_1=(1/8)(\lambda+\mu-\delta-\vartheta)-(i/4\Delta)(bd-ac)$$

$$a_2=(1/8)(\lambda+\mu+\delta+\vartheta-2)$$

$$a_3=(1/8)(\lambda+\mu-\delta-\vartheta)+(i/4\Delta)(bd-ac)$$

$$b_0=(1/8)(\lambda-\mu+\delta-\vartheta)-(1/4\Delta)(ac+bd)$$

$$b_1=(1/8)(\lambda-\mu-\delta-\vartheta)-(i/4\Delta)(ad+bc)$$

$$b_2=(1/8)(\lambda-\mu+\delta-\vartheta)+(1/4\Delta)(ac+bd)$$

$$b_3=(1/8)(\lambda-\mu-\delta+\vartheta)+(i/4\Delta)(ad+bc)$$

değerlerini buluruz. Bunların dışında E=0 ve I e karşılık gelen merkezi idempotentler de

$a_0=(\lambda+\mu+\delta+\vartheta)/8$, $a_1=(\lambda+\mu-\delta-\vartheta)/8$, $a_2=(\lambda+\mu+\delta+\vartheta)/8$, $a_3=(\lambda+\mu-\delta-\vartheta)/8$

$b_0=(\lambda-\mu+\delta-\vartheta)/8$, $b_1=(\lambda-\mu-\delta+\vartheta)/8$, $b_2=(\lambda-\mu+\delta-\vartheta)/8$, $b_3=(\lambda-\mu-\delta+\vartheta)/8$

veya

$a_0=(\lambda+\mu+\delta+\vartheta+4)/8$, $a_1=(\lambda+\mu-\delta-\vartheta)/8$, $a_2=(\lambda+\mu+\delta-\vartheta-4)/8$, $a_3=(\lambda+\mu-\delta-\vartheta)/8$

$b_0=(\lambda-\mu+\delta-\vartheta)/8$, $b_1=(\lambda-\mu-\delta+\vartheta)/8$, $b_2=(\lambda-\mu+\delta-\vartheta)/8$, $b_3=(\lambda-\mu-\delta+\vartheta)/8$ olmak üzere

$$\alpha=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+b_0y+b_1xy+b_2x^2y+b_3x^3y$$

şeklindedir.

3. BÖLÜM

GRUP HALKALARINDA MERKEZSEL İDEMPOTENTLER

G bir grup, K bir cisim olsun. G'nin burulmuş elemanlarının kümesini T(G) ile gösterelim. T(G) nin genelde bir alt grup olmadığı bilinmektedir. Örneğin G=GL(2,K) grubunda $a=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ için $a^4=1$, $b^3=1$ olup a ve b burulmuş olduğu halde $ab=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ elemanı burulmuş değildir. Bu bölümde KG nin birimsel grubu olan U(KG) üzerine konulacak bazı koşulların T(G) yi G nin bir alt grubuna dönüştürdüğü ve KT(G) nin her idempotentinin KG de merkezsel olduğunu K nın karakteristiğinin sıfır olduğu durumda göreceğiz. karak(K) = p > 0 olduğu durum [Coelho] da incelenmiştir. Bu bölümde ortaya çıkan gözlemlerin en ilginçlerinden biri, dayanağı T(G) de olan her idempotentin KG de merkezsel olduğu durumda her $t\in T(G)$ elemanının grubun iç otomorfizmaları altında invariant birer alt grup ürettiği yanında burulmuş elemanların G de bir alt grup oluşturduğudur. Bu durum aşağıdaki önerme ile ifade edilebilir:

Önerme 1:

Dayanağı T(G) de olan her $e\in KG$ idempotenti KG de merkezsel ise şu ifadeler doğrudur:

Her $t\in G$ ve her $x\in G$ için $xtx^{-1}=t^j$ olacak biçimde pozitif bir j tamsayısı var ve T(G), G nin bir alt grubudur.

İspat: $t\in T(G)$ nin mertebesi $|t|$ ise $t^{|t|}=1$ olup $e=|t|^{-1}(1+t+t^2+\ldots+t^{|t|-1})$, KG nin bir idempotenti olup $\mathrm{dyn}(e)=\{1,t,\ldots,t^{|t|-1}\}\subset T(G)$ ve hipotezden e merkezsel, o halde her $x\in G$ için $xe=ex\Rightarrow xex^{-1}=e$ dır.

$$x\left(|t|^{-1}(1+t+t^2+\ldots+t^{|t|-1})\right)x^{-1}=|t|^{-1}(1+xtx^{-1}+xt^2x^{-1}+\ldots+xt^{|t|-1}x^{-1})$$

$$=|t|^{-1}(1+t+t^2+\ldots+t^{|t|-1})$$

yazılışından $xtx^{-1} = t^j$ olacak şekilde bir j pozitif tamsayısı vardır. $t_1, t_2 \in T(G)$ için

$$(t_1t_2)^2 = t_1t_2t_1t_2 = t_1t_2t_1^{-1}t_1^2t_2 = t_2^jt_1^2t_2$$

ve benzer şekilde $(t_1t_2)^r = t_2^{j_r}t_1^rt_2$ ve $r = |t_1|$ için $(t_1t_2)^r = t_2^{j_r}t_2 = t_2^{j_r+1} \in <t_2>$

olup $s = |t_2|$ için $(t_1t_2)^{rs} = 1 \Rightarrow t_1t_2 \in T(G)$ ve T(G), G nin bir alt grubu; hatta bir normal altgrup olur.

Önerme 2:

F, sıfır karakteristikli bir cisim olsun. Bu durumda FQ_8 grup halkasında merkezsel olmayan idempotentler yoktur $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ denkleminin F de aşikar olmayan çözümü yoktur.

İspat:

S bir bölümlü halka veya $S \cong M_2(F)$, F üzerinde 2 x 2 matrislerin halkası, olmak üzere

$$FQ_8 \cong F \oplus F \oplus F \oplus F \oplus S$$

veya $FQ_8 \cong F \oplus F \oplus F \oplus F \oplus F1 \oplus Fi \oplus Fj \oplus Fk$ olduğu bilinmektedir. Buna göre FQ_8 de merkezsel olmayan bir idempotent bulunur $\Leftrightarrow S \cong M_2(F)$ olmalı; yani S de nilpotent elemanlar bulunmalıdır. Sonuç [Sehgal, 4. ch. 1.13] den çıkarılabilir.

Şimdi ön hazırlıklarımızı bazı basit gözlemler ile tamamlayacağız. $F \subset L$ sıfır karakteristikli iki cisim, H sonlu abelian bir grup olsun. Yine $\{e_i\}_{1 \le i \le m}$ ve $\{f_j\}_{1 \le j \le n}$ elemanları FH ve LH grup halkalarının

$$FH = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_m$$

$$LH = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n$$

dekompozisyonlarına karşılık gelen idempotent elemanlarının kümeleri olsunlar. Katsayıları FH den LH ye genişlettiğimizde FH nin her basit A_i bileşeni LH nin bazı

$\{B_{j_i}\}$ bileşenlerinin bir toplamı olur. Bu durumda da $e_r \neq e_s$ verildiğinde $e_r = \sum f_{j_r}$, ve $e_s = \sum f_{j_s}$ yazarız, burada e_r ve e_s nin ortak bir toplananı yoktur. Çünkü eğer $0 \neq f_1$ gibi ortak bir toplananları olsaydı

$$e_r = f_1 + f_2 + \ldots + f_r \quad , \quad e_s = f_1 + f_2' + \ldots + f_r'$$

yazılışından $f_1 e_r = f_1^2 = f_1$ ($f_i f_j = 0, j \neq i$ için çünkü $A_i \cap A_j = 0, B_i \cap B_j = 0$) ve benzer şekilde $f_1 e_s = f_1 e_r = 0$ olduğundan $f_1 = 0$ çıkar ki bu bir çelişkidir. O halde e_r ve e_s nin ortak bir terimi olduğu durumda $e_r = e_s$ olacağı açıktır.

Teorem:

K sıfır karakteristikli bir cisim ve T=T(G) bir G grubunun burulmuş elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda KG'nın, dayanağı T de kalan her idempotenti merkezseldir $\Leftrightarrow$

a) Her $t \in T$ ve her $x \in G$ için $xtx^{-1} = t^j$ olacak şekilde bir $j > 1$ tamsayısı vardır. Üstelik merkezsel olmayan her $t \in T$ elemanı için K da birimin $|t|$ mertebeli hiç bir kökü yoktur.

b) T ya abelian ya da: A her elemanı tek mertebeli bir abelian grup, E elementer abelian 2-grup; Q_8, 8 mertebeli kuaterniyon grubu olmak üzere $T = AxExQ_8$ biçimindedir. Ayrıca, K nin bir Ω cebirsel kapanışında, bir $a \in A$ için $|\xi|=|a|$ olacak biçimde birimin her ξ kökü için $K(\xi)$ cismi $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ denkleminin (0,0,0) dışındaki bir çözümünü kapsamaz.

İspat:

Önce dayanağı T de kalan bir idempotentin merkezsel olduğunu varsayıp (a) ve (b) nin doğruluğunu görelim. (a) ifadesinin ilk kısmı önerme 1 de gösterildi. Yani her $t \in T$ ve her $x \in G$ için $xtx^{-1} = t^j$ olacak şekilde bir t pozitif tamsayısı vardır. $j = 1 + k|t|$, $k \in N$, için, $xtx^{-1} = t \Leftrightarrow t \in Z(G)$ olduğundan $j \not\equiv 1 (Mod|t|)$ dır. $< t >$ abelian bir grup olduğundan indirgenemez representasyonlarının tümünün derecesi 1 olup K<t> grup halkası, cisimlerin bir direkt toplamı olarak

$$\phi: K\langle t\rangle \cong K_1 \oplus \ldots \oplus K_s = K(\xi_1) \oplus \ldots \oplus K(\xi_s)$$

biçiminde yazılabilir. Burada ξ_i ler birimin bir kökü olup en az birisi, örneğin ξ_1 ; $|t|$ mertebesindendir; çünkü,

$$\phi(t)=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s) \text{ ise } t^{|t|}=1$$

olduğundan $(\xi_1^{|t|},\xi_2^{|t|},\ldots,\xi_s^{|t|})=(1,1,\ldots,1)$ dır.

Yani her i = 1, 2, ..., s için $\xi_i^{|t|}=1 \Leftrightarrow |\xi_i| \mid |t|$ ve her bir ξ_i nin mertebesi $|t|$ nin öz bölenleri olsaydı $\phi(t)$ nin mertebesi $|t|$ ye eşit olamazdı. KT nin her idempotenti KG de merkezsel olduğundan her $x \in G$ ile eşlenik olma fonksiyonu bir $\theta: K<t> \cong K<t>$ otomorfizması tanımlar, θ nın her bir $K_i, 1 \le i \le s$ basit bileşeni üzerindeki etkisi de $\theta_i: K_i \cong K_i$ otomorfizmasını belirler.

$$K_i = K(\xi_i) = \left\{a_0 + a_1\xi_i + a_2\xi_i^2 + \ldots + a_{k_i-1}\xi_i^{k_i-1} \middle| a_i \in K, |\xi_i| = k_i\right\}$$

olduğundan her bir K_i, K nın $\overline{K_i}$ ile belirttiğimiz bir izomorf görüntüsünü kapsar. Otomorfizma, genişleten eleman yani ξ_i ler üzerinde etkili olduğundan $\overline{K_i}$ ler θ_i ler altında sabit kalırlar. $xtx^{-1}=t^j$ olduğundan $\theta_1(\xi_1)=\xi_1^j=\xi_1$ ve dolayısıyla $\xi_1 \notin K$ dır. O halde K birimin $|t|$ mertebesinde bir kökünü kapsamaz. Önerme 1 den T nin tüm alt grupları normaldır. Tüm alt grupları normal olan bir grubun abelian ya da $T = AxExQ_8$ biçiminde olduğu iyi bilinen bir gerçektir [Hall, Thm 12.5.4]. Buna göre T nin abelian olmadığı durumda bir $a \in A$ elemanı alalım. İspatın girişinde olduğu gibi ξ_i ler birimin kökleri ve $|\xi_i|=|a|$ olmak üzere

$$K<a> = K_1 \oplus \ldots \oplus K_t, \quad K_i = K(\xi_i)$$

yazalım. K (ξ_i), K <a> grup halkasında izomorfik olarak kapsandığından

$$K(\xi_i) \subset K<a> \Rightarrow K(\xi_1)Q_8 \subset (K<a>)Q_8 = K(<a> xQ_8)$$

olup $K(<a>xQ_8), K(\xi_1)Q_8$ halkasının bir izomorf görüntüsünü kapsar ve hipotezden $K(\xi_1)Q_8$ ın tüm idempotentleri merkezseldir. O halde sonuç önerme 2 den çıkar.

Şimdi (a) ile birlikte (b) de T nin G de bir abelian alt grup olduğunu varsayalım. $e \in KT$ bir idempotent olsun. e nin KG de merkezsel olduğunu göstereceğiz. $\text{dyn}(e)=\{t_1,t_2,\ldots,t_m\}$ ise $e\in K<t_1,t_2,\ldots,t_m>=K<\text{dyn}(e)>$ dır. Burada <dyn(e)>, e nin dayanağının G de ürettiği alt grup olup tüm üretenler sonlu mertebeli olduğundan sonludur. Dolayısıyla e sonlu bir grubun grup halkasında yeralmaktadır. Bu yüzden T yi sonlu $|T|=\lambda$ olarak düşünebiliriz. Ayrıca KT nin her idempotenti ilkel idempotentlerin bir toplamı olduğundan tartışmamızı e nin kendisinin ilkel olduğu duruma indirgeyebiliriz; çünkü e nin ilkel bileşenleri grup halkasında merkezsel olduğu takdirde e nin kendisinin de merkezde olacağı açıktır. T yi sonlu varsaydığımızdan elemanlarının mertebeleri de sonlu alacağından T nin üssü, T nin tüm elemanlarını birime dönüştüren en küçük pozitif tamsayısı olarak belirlidir. ζ, T nin üssü mertebesinden, birimin bir ilkel kökü olsun. Buna göre $e\in KT\subset K(\zeta)T$ idempotenti $K(\zeta)T$ nin ilkel idempotentlerinin bir toplamı olarak yazılabilir. f bunlardan birisi olsun: e=f+...

$$K(\zeta)=\{a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots+a_{\mu-1}\zeta^{\mu-1}\mid a_i\in K\}$$

cisim genişlemesinin her K-otomorfizması $\sigma\in \text{Aut}K(\zeta)$,

$$K(\zeta)T=\{\alpha_1t_1+\ldots+\alpha_\lambda t_\lambda \mid \alpha_j\in K(\zeta);\, t_j\in T, 1\le j\le\lambda\}\subset KG$$

nın bir $\overline{\sigma}$ otomorfizmasına

$$\overline{\sigma}(\alpha_1t_1+\ldots+\alpha_\lambda t_\lambda)=\sigma(\alpha_1)t_1+\ldots+\sigma(\alpha_\lambda)t_\lambda$$

biçiminde genişletilebilir. Bu şekildeki otomorfizmalar içinden f de hesaplandığında farklı görüntüler verenleri $I=\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_r$ ile gösterelim.

$e^*=\phi_1(f)+\ldots+\phi_r(f)$ olsun. $e^*=e$ olduğunu göstereceğiz. Önce her i = 1, 2, ..., r için $\phi_i(f)$ nın KT de birer idempotent olduğunu görelim: f bir idempotent olduğundan $\phi_i(f)$ homomorfik görüntülerinin de birer idempotent olduğu aşikardır. $\phi_i(f)=g_1+g_2$; $g_i^2=g_i$, $g_1g_2=0$, $i=1$, 2 olduğu durumda

$$f=\phi_i^{-1}(g_1+g_2)=\phi_i^{-1}(g_1)+\phi_i^{-1}(g_2) \text{ ve } \phi_i^{-1}(g_1)\phi_i^{-1}(g_2)=\phi_i^{-1}(g_1g_2)=0$$

ifadesi f nin ilkelliğine aykırıdır. O halde $\phi_i(f)$ler birer ilkel idempotenttir. $i\neq j$ için $\phi_i(f)\phi_j(f)=0$ olduğundan

$$(e^*)^2=(\phi_1(f)+\ldots+\phi_r(f))(\phi_1(f)+\ldots+\phi_r(f))=$$

$$= (\phi_1(f)+\ldots+\phi_r(f)) = e^* = f+\phi_2(f)+\ldots+\phi_r(f)$$

olup e^* elemanı da bir idempotenttir. $\phi_1 = I$ birim otomorfizma olduğundan f hem e hem de e^* da birer toplanan olarak gözükmektedir. Teoremden önceki gözlemden, $e^* \in KT$ idempotentinin de ilkel olduğunu görürsek, $e^* = e$ olduğu gösterilmiş olur. e^*ın KT de ilkel olduğunu görmek için önce e^* ın katsayılarının K da olduğuna bakalım. ϕ , K(ζ) nın herhangi bir K-otomorfizması olsun, ve ϕ nin K(ζ)T ye genişlemesini $\overline{\phi}$ ile gösterelim. O zaman $\overline{\phi}(e^*) = \sum_{i=1}^{r} \overline{\phi}.\phi_i(f) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i(f) \Rightarrow e^* \in KT$ dır. Çünkü her i = 1, 2, ..., r için $\overline{\phi}.\phi_i$ ler de f de farklı değerler alır. Çünkü eğer $i \neq j$ için $\overline{\phi}.\phi_i(f) = \overline{\phi}.\phi_j(f)$ olsa $\phi_i(f) = \phi_j(f)$ olur ki bu ϕ_i lerin seçimine aykırı düşer. O halde

$$\{\phi.\phi_i\}_{1\leq i\leq r} = \{\phi_i\}_{i\leq 1\leq r}$$

dır.

Şimdi de e^* ın KT de ilkel olduğunu görelim. $e^* = e_1 + e_2; e_1, e_2 \in KT$ dik idempotentler olarak yazalım. e_1 ve e_2 yi K(ζ)T nin ilkel dik idempotentlerinin toplamı olarak yazdığımızda e_1 ve e_2 nin ortak terimi olmayacaktır. Bu yüzden, gerekirse yeniden sıralayarak

$$e_1 = \phi_i(f)+\ldots+\phi_{l-1}(f) \quad \text{ve} \quad e_2 = \phi_l(f)+\ldots+\phi_r(f)$$

biçimindeyazabiliriz. $e_1 \in KT$ olduğundan tüm K-otomorfizmaları altında sabit kalır. Özel olarak

$$e_1 = \phi_l(e) = \phi_l.\phi_1(f)+\ldots+\phi_l.\phi_{l-1}(f)$$

fakat $\phi_l.\phi_1(f) = \phi_l(f)$ olduğundan e_1 ve e_2 nin ortak bir toplananı ortaya çıkar ki bu bir çelişkidir. O halde $e^* = e$ dır.

$x \in G$ herhangi bir eleman olsun; ve T yi devirli grupların bir direkt çarpımı olarak $T = <t_1> x \ldots x <t_s>$ biçiminde yazalım. Her k = 1, 2,..., s için $xt_k x^{-1} = t_k^j$ olacak biçimde pozitif bir j tamsayısının bulunduğu (a) da verilmişti. Sonlu grup halkalarında ilkel idempotentlerin biçimini veren teoremlerden birisi [Isaacs, Thm 2.12] gereği

$$f = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T} \chi(t^{-1})t$$

olduğu bilinmektedir. Burada χ, T nin, değeri $K(\zeta)$ cisminde olan bir indirgenemez karakteridir. Buna göre

$$e = e^{*} = \sum_{i=1}^{r} \phi_i(f) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i\Big(\frac{1}{|T|}\sum_{t\in T} \chi(t^{-1})t\Big)$$

olup

$$xex^{-1} = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\Big(\sum_{i=1}^{r} \phi_i(\chi(t^{-1}))(xtx^{-1})\Big) = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\Big(\sum_{i=1}^{r} \phi_i(\chi(t^{-1}))\Big)t^{j}$$

dır. e nin merkezsel olduğunu görmek için $xex^{-1} = e$; dolayısıyla her $t \in T$ için

$$\sum_{i=1}^{r} \phi_i(\chi(t)) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i(\chi(t^{j}))$$

olduğunu göstermek yeterlidir. T abelian ve $K(\zeta)$, T nin bir açılım cismi (splitting field) olduğundan $\chi(t)$ birimin bir ilkel kökü olup bu ilkel kökün mertebesi T nin üssü (expT)'nü böler. O halde $\chi(t) = \xi$; ζ nın bir kuvvetidir. (a) dan t nin merkezsel olmadığı durumda $\zeta \notin K$ olup $K(\zeta)$ nın bir K-otomorfizmasını $\phi(\zeta) = \zeta^{j}$ olacak şekilde tanımlayıp bu otomorfizmayı $K(\zeta)T$ nin bir K-otomorfizmasına bilinen şekilde genişletebiliriz. Bu otomorfizmayı $\overline{\phi}$ ile gösterelim. $\{\phi_i\}_{1\le i\le r} = \{\phi_i \circ \overline{\phi}\}_{1\le i\le r}$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{r} \phi_i(\chi(t)) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i(\zeta) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i \circ \overline{\phi}(\zeta) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i(\zeta^{j}) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i(\chi(t^{j}))$$

olup istediğimiz sonuca ulaşırız.

Son durum olarak (a) ve (b) sağlansın ve T nin abelian olmadığını varsayalım. Önceden olduğu gibi T nin sonlu olduğunu varsayabiliriz. Yine ζ birimin $|\zeta| = \exp(A)$ mertebeden bir ilkel kökü olsun. Bu durumda AxE abelian bir grup olduğundan $K(AxE) = \bigoplus_i K_i$, tümü $K(\zeta)$ cisim genişlemesi içinde yer alan K_i cisimlerinin bir direkt toplamı olarak yazabiliriz. O halde

$$KT = K(AxExQ_8) \cong K(AxE)Q_8 \cong \bigoplus_i K_i Q_8$$

olup, hipotezden $x^2+y^2+z^2=0$ denkleminin bu K_i cisimlerinin hiçbirinde aşikar olmayan çözümü yoktur. O halde Önerme 2 den K_iQ_8 ın idempotentleri KT de merkezsel olup bunun sonucu olarak başlangıçta ele aldığımız e idempotenti bu merkezsel idempotentlerin bazılarının toplamı olduğundan e de merkezseldir. Bu e nin KT de merkezselliğini göstermek için herhangi bir $x \in G$ alalım. Bunun için K_iQ_8 biçimindeki her bileşendeki her bir idempotentin x ile yer değiştiğini görmek yeterlidir. Bunun içir K_i nin birimini μ_i ile gösterelim. μ_i, K_i (AxE) de idempotent olduğundan her $x \in G$ ile yer değiştiğinden μ_i ler KG de merkezseldir. O halde K_iQ_8 deki idempotentler bu grup halkasının basit bileşenlerine karşılık gelen idempotentlerin aynısı olup bunların açık bir dökümü 1.bölümün sonunda verilmişti.

$$Q_8 = \langle a,b \mid a^4=1, a^2=b^2 \text{ , } bab^{-1}=a^3 \rangle$$

olduğuna göre bu idempotentler:

$$e_1 = \frac{\mu_i}{8}(1+a+a^2+a^3+b+ab+a^2b+a^3b)$$

$$e_2 = \frac{\mu_i}{8}(1+a+a^2+a^3-b-ab-a^2b-a^3b)$$

$$e_3 = \frac{\mu_i}{8}(1-a+a^2-a^3+b-ab+a^2b-a^3b)$$

$$e_4 = \frac{\mu_i}{8}(1-a+a^2-a^3-b+ab-a^2b+a^3b)$$

$$e_5 = \frac{\mu_i}{2}(1-a^2)$$

dır. (a) dan $xax^{-1}=a$ veya $xax^{-1}=a^3$ ve yine $xbx^{-1}=b$ veya $xbx^{-1}=a^2b$ dır. Bütün bu durumlarda yukarıdaki idempotentler merkezsel olup sonuç olarak e nin kendisi de merkezseldir.

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılan bazı tanımlar ve özellikler kısaca verilmiştir.

İkinci bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda grup halkalarında idempotentler ve idempotentler ile olan ilişkisinden dolayı sıfır bölen elemanlarla ilgili yapılan bazı temel çalışmalar verilmiştir. İkinci kısımda da bu çalışmaları destekleyici nitelikte olan bazı grup halkaları (QD_p ve CQ_8)nın idempotentleri tamamen karekterize edilmiştir.

Üçüncü bölümde grup halkalarında merkezsel idempotentlerle ilgili bazı özellikler verilmiştir.

SUMMARY

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, some basic definitions and properties used in the other chapters are given without details.

The second chapter also consists of two sections. In the first one, some fundamental works done on idempotents and zero divisors (due to its relationship to idempotents) of group rings are given. In the second one this work was suported by two examples: QD_p and CQ_8.

In the third chapter, some properties of central idempotents of group rings are given.

KAYNAKLAR

CLIFF, G.H., "Zero divisors and idempotents in group rings", Can.J.Math., Vol.XXXII, No:3, 1980, 596-602.

CLIFF, G.H., SEHGAL, S.K., "On the trace of an idempotent in a group ring", Proc. A.M.S., 62 (1979), 11-14.

COELHO, S.P., MILIES, C.P., "A note on central idempotents in group rings", Proc. the Edinburg Math. Soc. (1988), 31, 211-215.

COLEMAN, D.B., "Idempotents in group rings", Proc. A.M.S., 17 (1966), 1-2.

HALL, M., The Theory of Groups (Macmillan, Newyork, 1959).

ISAACS, I.M., Character Theory of Finite Groups, Academic Press, Newyork, (1976).

FARKAS, D.R., and SNIDER, R.L., "K_0 and Noetherian group rings", J.Algebra, 42 (1976), 192-198.

PASSMAN, D.S., The Algebraic Structure of Group Rings, John Wiley and Sons Inc, 1977.

SEHGAL, S.K., Topics in Group Rings, Marcel Dekker, Newyork, 1979.

SEHGAL, S.K., ZASSENHAUS, H. J., "Group rings without nontrival idempotents", Arch. Mat. 28 (1977), 278-380.

ZALESKII, A., "On a problem of Kaplansky", Dokl. Akad. Nauk. SSSR 203 (1972), 749-754.

ZARISKI, O., SAMUEL, P., Commutative Algebra, Vol 1, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1958.

ÖZGEÇMİŞ

1959 yılında Pınarbaşı-Kayseri'de doğdu. Orta öğrenimini 1977 yılında Kayseri'de tamamladı. 1984 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nü bitirdi ve aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1985-86 yıllarında askerlik hizmetini yedek subay olarak bitirdi. 1988-89 yıllarında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans (M.Sc) eğitimini bitirdi. Halen Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.