45401

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# DALGA TEORİSİNİN ZAMANA GÖRE PERİYODİK PROBLEMLERİ İÇİN FARK ŞEMALARI

Aytekin GÜLLE

DOKTORA TEZİ

YÖNETİCİ
Prof. Dr. İsmail TOK

VAN-1995

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# DALGA TEORİSİNİN ZAMANA GÖRE PERİYODİK PROBLEMLERİ İÇİN FARK ŞEMALARI

Aytekin GÜLLE

DOKTORA TEZİ

JÜRİ ÜYELERİ

BAŞKAN

Prof.Dr. Gabil M. AMİRALİYEV

ÜYE
Prof. Dr. Abdurrahim YILMAZ

ÜYE
Doç. Dr. Bülent KARAKAŞ

Tez Kabul Tarihi
8 / 11 / 1995

VAN-1995

## ÖZ

Bu çalışmada dalga teorisinin zamana göre periyodik problemleri için uygun baz fonksiyonları ve kalan terimi integral şeklinde olan interpolasyon kuadratur kuralları kullanılarak üç katlı fark şeması kurma prosesi sunulmuş, yaklaşık çözümün hatasının değerlendirilmesi yapılmıştır.

## ABSTRACT

In this study, for periodic problems with respect to time of wave theory, presented to the process three-level difference schemes is constructed by the method of integral identities with the use of fitting basis functions and interpolating quadrature rules and remainder term in integral form. Error of difference solution is estimated.

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışma süresince göstermiş oldukları yakın ilgi ve yardımlarından dolayı saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. İsmail TOK'a ve Prof. Dr. Gabil M. AMİRALİYEV'e teşekkür ve saygılarımı sunarım.

# İÇİNDEKİLER

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Bu çalışmada adi diferensiyel denklem ve dissipative terime sahip dalga denklemi için zamana göre periyodik sınırdeğer problemlerinin nümerik çözümü için fark şemalarının kurulması ve bunların nitelik özelliklerinin incelenmesi sunulmuştur.

Bu tip denklemlerin matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin bir çok alanlarında ortaya çıktığı iyi bilinmektedir. Bunlar iletişim hatları, plazmalardaki elektron plazma dalgaları ve iyon akustik dalgaları ve başka fiziksel modelleri hakkında yapılan çalışmalarda kullanılırlar. (Bullough 1980, Longren 1978, Ikezi 1978).

Zamana göre periyodik olan bu tür problemlerin nümerik çözümleri oldukça az incelenmiştir (Amiraliyev 1988).

Ele alınan problemler için üç katlı fark şeması sunulmaktadır. Bu şemalar cebirsel baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral formunda olan interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuştur. Kurulmuş fark şemalarının kararlılığı ve yakınsama şartları incelenmiş ve her bir durum için yakınsama hızı değerlendirilmiştir.

Ayrıca incelenen bu tip problemlerin kesin çözümünün varlığı, tekliği ve düzgünlüğü bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. (Leopold, H., 1985, Webb, G.F., 1980).

İki bölümde incelediğimiz zamana göre periyodik problemler aşağıdaki şekildedir.

$$Lu \equiv u'' + a(t)u' + b(t)u = f(t)\ , \quad o<t<T$$

$$u(0)=u(T)$$

$$u'(0)=u'(T)$$

ve

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_1\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] + L_0 u = f(x,t),$$

$$(x,t) \in D=(0,\ell)x(0,T],$$

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0,$$

$$u(x,0)=u(x,T),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,T).$$

Burada

$$L_1\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right) + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$L_0 u = -\frac{\partial}{\partial x}\left(c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + d(x,t)u$$

ve a,b,c,d,f fonksiyonları yeterince düzgündürler.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde gerekli ön bilgiler ve notasyonlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde (3.1)-(3.3) zamana göre periyodik problemi için fark şemasının kuruluşu ve kurulmuş şemanın kararlılığı, yakınsaklığı ispatlanmış, yakınsama hızı değerlendirilmiştir.

Dördüncü bölümdc (4.1)-(4.4) zamana göre periyodik problemi için de üçüncü bölümde belirtilen incelemeler tekrarlanmış, hatanın değerlendirilmesi verilmiştir.

Ek bölümde alınan teorik sonuçlar örnek üzerinde değerlendirilmiştir. Bu denetimler QBASIC proğramlama diliyle, her kattaki değerlerin bulunması kovma yöntemiyle yapılmıştır.

# 2. BÖLÜM

## ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda ihtiyaç duyduğumuz ve kullanacağımız bazı özdeşlikleri ve eşsizlikleri ispatsız olarak vereceğiz.

### 2.1. Bazı İnterpolasyon Kuadratur Formülleri

Fark şemalarının kurulması ve incelenmesinde aşağıdaki kuadratur formüllerini kullanacağız (Krılov, Babkov and Manastırnıy 1976):

$$\int_a^b p(x)f'(x)dx=f(a;b)\int_a^b p(x)dx+R(f), \tag{2.1}$$

$$R(f)=-\int_a^b dx\,p'(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(x,\xi)d\xi, \qquad n=1 \text{ veya } 2.$$

$$K_s(x,\xi)=T_s(x-\xi)-(b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s, \qquad s=0,1,$$

$$f(a;b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$T_s(\lambda)=\frac{\lambda^s}{s!},\lambda\geq 0;\ T_s(\lambda)=0,\ \lambda<0.$$

$$\int_a^b p(x)f(x)dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b p(x)dx+R^*(f) \tag{2.2}$$

$$R^*(f)=\int_a^b dx\ p(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi)K^*_{n-1}(x,\xi)d\xi+(n-1)f(a;b)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)p(x)dx,$$

n=1 veya 2

$$K^*_s(x,\xi)=T_s(x-\xi)-T_s\left(\frac{a+b}{2}-\xi\right)+(b-a)^{-1}(b-\xi)^s\left(\frac{a+b}{2}-x\right), \quad s=0,1.$$

## 2.2. Diferensiyel ve İntegral Eşitsizliğin Fark Benzeri

**Lemma 2.1.** (Amiraliyev, G.M., 1988). $\delta(t)\geq 0$ olmak üzere,

$$\overline{\omega}_\tau=\left\{t_j=j\tau,\ j=\overline{0,M},\ \tau=T/M\right\}$$

gibi bir şebeke için

$$\delta_{tK}\leq c_0\delta_K+c_1\delta_{K-1}+\rho_K,\quad K=1,2,\ldots M,$$

$$\delta(0)\leq\lambda\delta(T)+\vartheta\ \text{ ve }\ \lambda\geq 0,\ \vartheta=\text{sabit},$$

$$1-\tau c_0>0,\ K=1,2,\ldots,M,$$

$$\lambda<\exp\left[-\tau\sum_{i=1}^{M}\frac{c_0+c_1}{1-\tau c_0}\right]$$

ise o zaman,

$$\delta_K\leq\begin{cases}\left(1-\lambda\exp\left[\dfrac{(c_0+c_1)T}{1-\tau c_0}\right]\right)^{-1}\left\{\vartheta+\lambda\dfrac{\tau}{1-\tau c_0}\displaystyle\sum_{i=1}^{M}|\rho_i|\exp\left[\dfrac{(c_0+c_1)t_{M-i}}{1-\tau c_0}\right]\right\}\cdot\\ \exp\left[\dfrac{(c_0+c_1)t_K}{1-\tau c_0}\right]+\dfrac{\tau}{1-\tau c_0}\displaystyle\sum_{i=1}^{K}|\rho_i|\exp\left[\dfrac{(c_0+c_1)t_{K-i}}{1-\tau c_0}\right];\ 1+\tau c_1>0\ \text{ ise},\\ \tau|\rho_K|/(1-\tau c_0);\ 1+\tau c_1\leq 0\ \text{ ise}\end{cases}$$

dir.

## 2.3. Kullanılan Bazı Notasyonlar

$$\|f\|=\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2},$$

şebeke fonksiyonları için,

$$y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \; y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h},$$
$$y_{\bar{x}x} = \frac{y_x - y_{\bar{x}}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$
$$y_{\overset{0}{x}} = \frac{1}{2}\left(y_x + y_{\bar{x}}\right) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

$$(y, \vartheta) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \vartheta_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}$$

$$\|y\|_c = \max_{x_i \in \overline{\omega}_h} |y(x_i)|, \; \overline{\omega}_h = \{x_i = ih, \; h > 0, \; i = 0, 1, \ldots, N; \; h = \ell / N\}$$

$C^m(\overline{D})$: D bölgesinde tanımlı x 'e ve t 'ye göre m-inci dereceden karışık, sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi.

$$\mu\text{-eşitsizliği} : |a.b| \le \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2, \quad \mu > 0.$$

# 3. BÖLÜM

## ADİ DİFERENSİYEL DENKLEME AİT PERİYODİK PROBLEM İÇİN FARK ŞEMASININ İNCELENMESİ

### 3.1. Fark Şemasının Kurulması

(3.1)-(3.3) zamana göre periyodik problemi için fark şemasının kuruluşu verilir; ayrıca kurulmuş fark şemasının kararlılığı, yakınsaklığı ispatlanır ve kesin çözümün gerekli düzgünlük şartları dahilinde yaklaşık çözümün kesin çözüme yakınsama hızı değerlendirilir.

$$Lu \equiv u''+a(t)u'+b(t)u=f(t), \tag{3.1}$$

$$0<t<T,$$

$$u(0)=u(T), \tag{3.2}$$

$$u'(0)=u'(T) \tag{3.3}$$

şeklindeki problemi inceleyelim.

(3.1)-(3.3)'de $a(t)\geq\alpha>0$, $b(t)\geq 0$, $f(t)$ yeteri kadar düzgün ve T periyotlu fonksiyonlardır.

(3.1)-(3.3) problemine fark yöntemini uygulamak için $[0,T]$'de

$$\omega_\tau=\left\{t_j=j\tau,\ j=1,2,\ldots,M-1,\ \tau=T/M\right\}$$

şebekesini alalım. Eğer (3.1)'de $t=t_j$ alıp bu noktadaki türevlerin değerleri uygun sonlu farklarla değiştirilirse,

$$u_{\bar{t}t,j}+a(t_j)u_{\overset{\circ}{t},j}+b(t_j)u_j+R_j=f_j \tag{3.4}$$

şeklinde klasik bir bağıntı alınır. Burada,

$$R_j = -\left(a(t_j)R_1 + R_2\right) = -\left[a(t_j)\frac{\tau^2}{6}u'''(\xi_1) + \frac{\tau^2}{12}u^{iv}(\xi_2)\right] \qquad (3.5)$$

dir. ($\xi_1, \xi_2$ Taylor açılımından gelen aralık noktalarıdır.)

Şimdi de (3.3) şartının yaklaşımına bakalım.

$$u(t_{M-1}) = u(t_M) - \tau u'(t_M) + \frac{\tau^2}{2}u''(t_M) - \frac{\tau^3}{3!}u'''(\eta_1), \ t_{M-1} \le \eta_1 \le t_M$$

$$u(t_{M+1}) = u(t_M) + \tau u'(t_M) + \frac{\tau^2}{2}u''(t_M) + \frac{\tau^3}{3!}u'''(\eta_2), \ t_M \le \eta_2 \le t_{M+1}$$

şeklindeki Taylor açılımlarından yararlanarak kolayca görülür ki,

$$u_{\bar{t},M} = u'(t_M) - \frac{\tau}{2}u''(t_M) + \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_1)$$

$$u_{t,0} = u'(t_0) + \frac{\tau}{2}u''(t_0) + \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_2)$$

dir. (3.1)'den yararlanarak,

$$u_{\bar{t},M} + \frac{\tau}{2}\left[-a(t_M)u'_M - b(t_M)u_M + f_M\right] = u'(t_M) + \frac{\tau^2}{2}u'''(\eta_1)$$

$$u_{t,0} - \frac{\tau}{2}\left[-a(t_0)u'_0 - b(t_0)u_0 + f_0\right] = u'(t_0) + \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_2)$$

bulunur. Periyodiklik şartlarından dolayı son iki bağıntıdan,

$$u_{t,0} - \frac{\tau}{2}\left[-a(t_0)u'_0 - b(t_0)u_0 + f_0\right] - \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_2)$$

$$= u_{\bar{t},M} + \frac{\tau}{2}\left[-a(t_M)u'_M - b(t_M)u_M + f_M\right] - \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_1)$$

ve

$$\frac{u_{t,0}-u_{\bar{t},M}}{\tau}+a(t_M)u'_M+b(t_M)u_M-f_M-\frac{\tau}{6}\left[u'''(\eta_2)-u'''(\eta_1)\right]=0 \tag{3.6}$$

yazılabilir.

$$u'(t_M)=u_{\overset{\circ}{t},M}-\frac{\tau^2}{6}u'''(\theta),\ (t_{M-1}\leq\theta\leq t_{M+1})$$

olduğunu dikkate alırsak $u_1=u_{M+1}$ yüklenir ve ayrıca $\frac{u_{t,0}-u_{\bar{t},M}}{\tau}=u_{\bar{t}t,M}$ aşikar ifadesi (3.6) denkleminde yazılırsa

$$u_{\bar{t}t,M}+a(t_M)u_{\overset{\circ}{t},M}+b(t_M)u_M+R_M=f_M \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada

$$R_M=-a(t_M)\frac{\tau^2}{6}u'''(\theta)-\frac{\tau}{6}\left[u'''(\eta_2)-u'''(\eta_1)\right] \tag{3.8}$$

dir. (3.4) ve (3.7)'deki kalan terimler atılırsa (3.1)-(3.3) problemi için şöyle bir fark şeması verilebilir.

$$\ell y\equiv y_{\bar{t}t}+a(t)y_{\overset{\circ}{t}}+b(t)y=f,\ \ t\in\omega_\tau^+, \tag{3.9}$$

$$y(0)=y(T), \tag{3.10}$$

$$y(1)=y(T+\tau). \tag{3.11}$$

Burada $\omega_\tau^+=\omega_\tau\cup\{t=T\}$ dir.

### 3.2. Yaklaşık Çözümün Hatasının Değerlendirilmesi

Yaklaşık çözümün hatasının değerlendirilmesi için aşağıdaki Lemma'yı verelim.

**Lemma 3.1.** $0 < \alpha \le a(t) \le a^*$, $0 < \beta \le b(t) \le b^*$ ve $\bar{a}_* \le a'(t) \le \bar{a}^* \le 0$, $\bar{b}_* \le b'(t) \le \bar{b}^* \le 0$, olmak üzere yaklaşık çözümün $z = y - u$ hatası için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$|z_t|^2 + |\hat{z}|^2 + |z|^2 \le C\tau \sum_{i=1}^{M} |R_i|^2 \exp(-C_1 t_{M-i}), \qquad t \in \omega_\tau \tag{3.12}$$

Burada ve sonraki kısımlarda $C, C_i$ (i=1,2,...), $\tau$'ya bağlı olmayan sabitlerdir.

**İspat.** $z = y - u$ diyelim, y=z+u 'yu fark denkleminde yerine yazarsak,

$$\ell z \equiv z_{\bar{t}t} + a(t) z_{\overset{\circ}{t}} + b(t) z = R, \quad t \in \omega_\tau^+, \tag{3.13}$$

$$z(0)=z(T), \tag{3.14}$$

$$z(1)=z(T+\tau) \tag{3.15}$$

elde edilir. $R_j = f_j - \ell u_j$ yaklaşım hatası $j=1,2,\dots,M-1$ değerlerinde (3.5) ve $j=1,2,\dots,M$ değerlerinde ise (3.8) ile verilir.

Çözümün değerlendirilmesi için

$$\ell z(z_t + \lambda z) = R(z_t + \lambda z)$$

özdeşliğiyle başlayalım. Burada $\lambda > 0$ daha sonra seçilecek olan reel parametredir.

$$z_{\bar{t}t} z_t + \lambda z_{\bar{t}t} z + a z_{\overset{\circ}{t}} z_t + \lambda a z_{\overset{\circ}{t}} z + b z_t z + \lambda b z z = z_t R + \lambda z R \tag{3.16}$$

Bunun için keyfi $\vartheta$ şebeke fonksiyonu için doğru olan aşağıdaki bağıntıları dikkate alalım.

$$\vartheta_{\bar{t}t} \vartheta_t = \frac{1}{2}(\vartheta_t^2)_{\bar{t}} + \frac{1}{2}\tau \vartheta_{\bar{t}t}^2,$$

$$\lambda \vartheta_{\bar{t}t} \vartheta = \lambda(\vartheta_t \vartheta)_{\bar{t}} - \lambda \vartheta_{\bar{t}}^2,$$

$$a \vartheta_{\overset{\circ}{t}} \vartheta_t = a \vartheta_t^2 - \frac{\tau}{4}(a \vartheta_t^2)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{4} a_{\bar{t}} \vartheta_{\bar{t}}^2 - \frac{\tau^2}{4} a \vartheta_{\bar{t}t}^2,$$

$$\lambda a\vartheta_{\overset{\circ}{t}}\vartheta=\frac{\lambda}{4}\left[a\left(\hat{\vartheta}^2+\vartheta^2\right)\right]_{\bar{t}}-\frac{\lambda}{4}a_{\bar{t}}\left(\vartheta^2+\check{\vartheta}^2\right)-\frac{\lambda}{4}\tau^2\left(a\vartheta_t^2\right)_{\bar{t}}+\frac{\lambda}{4}\tau^2 a_{\bar{t}}\vartheta_{\bar{t}}^2,$$

$$b\vartheta_t\vartheta=\frac{1}{2}\left(b\hat{\vartheta}^2\right)_{\bar{t}}-\frac{1}{2}b_{\bar{t}}\vartheta^2-\frac{\tau}{2}b\vartheta_t^2.$$

Bu değerleri (3.16) eşitliğinde yerlerine yazalım.

$$\left\{\frac{1}{2}z_t^2+\lambda z_t z-\frac{\tau}{4}az_t^2+\frac{\lambda}{4}a\left(\hat{z}^2+z^2\right)-\frac{\lambda}{4}\tau^2 az_t^2+\frac{1}{2}b\hat{z}^2\right\}_{\bar{t}}\le\lambda z_{\bar{t}}^2-az_t^2$$

$$-\frac{\tau}{4}a_{\bar{t}}z_{\bar{t}}^2-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a_{\bar{t}}z_{\bar{t}}^2+\frac{\tau}{2}bz_t^2+\mu_1 z_t^2+\frac{\lambda}{4}a_{\bar{t}}\left(z^2+\check{z}^2\right)+\frac{1}{2}b_{\bar{t}}z^2-\lambda bz^2+\lambda\mu_2 z^2$$

$$+\left(\frac{1}{4\mu_1}+\frac{\lambda}{4\mu_2}\right)R^2.$$

Şimdi de şu çevrimleri kullanırsak,

$$-a\vartheta_t^2=-\check{a}\,\vartheta_{\bar{t}}^2-\tau\left(a\vartheta_t^2\right)_{\bar{t}},$$

$$\frac{\tau}{2}b\vartheta_t^2=\frac{\tau}{2}\check{b}\,\vartheta_{\bar{t}}^2+\frac{\tau^2}{2}\left(b\vartheta_t^2\right)_{\bar{t}},$$

$$\mu_1\vartheta_t^2=\mu_1\vartheta_{\bar{t}}^2+\mu_1\tau\left(\vartheta_t^2\right)_{\bar{t}},$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{4}a-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a+\tau a-\frac{\tau^2}{2}b-\mu_1\tau\right)z_t^2+\lambda z_t z+\left(\frac{\lambda a}{4}+\frac{b}{2}\right)\hat{z}^2+\frac{\lambda}{4}az^2\right\}_{\bar{t}}$$

$$\le\left(\lambda-\check{a}-\frac{\tau}{4}a_{\bar{t}}-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a_{\bar{t}}+\frac{\tau}{2}\check{b}+\mu_1\right)z_{\bar{t}}^2+\left(\frac{\lambda}{4}a_{\bar{t}}+\frac{1}{2}b_{\bar{t}}-\lambda b+\lambda\mu_2\right)z^2+\frac{\lambda}{4}a_{\bar{t}}\check{z}^2$$

$$+\left(\frac{1}{4\mu_1}+\frac{\lambda}{4\mu_2}\right)R^2$$

elde edilir.

Ayrıca sağdaki ikinci terimin yarısını üçüncü terime ekleyerek,

$$\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{4}a-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a+\tau a-\frac{\tau^2}{2}b-\mu_1\tau\right)z_t^2+\lambda z_t z+\left(\frac{\lambda a}{4}+\frac{b}{2}\right)\hat{z}^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\lambda a}{4}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\lambda}{4}a_t+\frac{1}{2}b_t-\lambda b+\lambda\mu_2\right)\right]z^2\right\}_t$$

$$\leq\left(\lambda-\check{a}-\frac{\tau}{4}a_t-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a_t+\frac{\tau}{2}\check{b}+\mu_1\right)z_t^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4}a_t+\frac{1}{2}b_t-\lambda b+\lambda\mu_2\right)z^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}a_t+\frac{\lambda}{4}\check{a}_t+\frac{1}{2}\check{b}_t-\lambda\check{b}+\lambda\mu_2\right)\check{z}^2+\left(\frac{1}{4\mu_1}+\frac{\lambda}{4\mu_2}\right)R^2 \tag{3.17}$$

şeklinde yazalım.

$$\delta(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{4}a-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a+\tau a-\frac{\tau^2}{2}b-\mu_1\tau\right)z_t^2+\lambda z_t z+\left(\frac{\lambda a}{4}+\frac{b}{2}\right)\hat{z}^2+$$

$$+\left[\frac{\lambda a}{4}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\lambda}{4}a_t+\frac{1}{2}b_t-\lambda b+\lambda\mu_2\right)\right]z^2 \tag{3.18}$$

şeklinde bir şebeke fonksiyonu tanımlayalım. $\delta(t)$'yi aşağıdan ve yukarıdan değerlendirelim.

$$\delta(t)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{4}a^*-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a^*+\tau\alpha-\frac{\tau^2}{2}b^*-\mu_1\tau-\lambda\mu_3\right)z_t^2+\left(\frac{\lambda\alpha}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\hat{z}^2+$$

$$+\left[\frac{\lambda\alpha}{4}-\frac{\lambda}{4\mu_3}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*+\frac{1}{2}\bar{b}^*-\lambda\beta+\lambda\mu_2\right)\right]z^2 \tag{3.19}$$

$$\delta(t)\leq\left(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{4}\alpha-\frac{\lambda}{4}\tau^2\alpha+\tau a^*-\frac{\tau^2}{2}\beta-\mu_1\tau+\lambda\mu_3\right)z_t^2+\left(\frac{\lambda a^*}{4}+\frac{b^*}{2}\right)\hat{z}^2+$$

$$+\left[\frac{\lambda a^*}{4}+\frac{\lambda}{4\mu_3}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\bar{a}_*+\frac{1}{2}\bar{b}_*-\lambda b^*+\lambda\mu_2\right)\right]z^2. \tag{3.20}$$

Şimdi (3.17)'nin sağ tarafını yukarıdan şöyle değerlendirelim.

$$\left(\lambda-\alpha-\frac{\tau}{4}\bar{a}_*-\frac{\lambda}{4}\tau^2\bar{a}_*+\frac{\tau}{2}b^*+\mu_1\right)z_i^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*+\frac{1}{2}\bar{b}^*-\lambda\beta+\lambda\mu_2\right)z^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\bar{a}^*+\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*+\frac{1}{2}\bar{b}^*-\lambda\beta+\lambda\mu_2\right)\check{z}^2+\left(\frac{1}{4\mu_1}+\frac{\lambda}{4\mu_2}\right)R^2. \qquad (3.21)$$

(3.19)'un sağ tarafındaki katsayıları;

$$A_1=\frac{1}{2}-\lambda\mu_3-\frac{\tau}{4}a^*-\frac{\lambda}{4}\tau^2a^*+\tau\alpha-\frac{\tau^2}{2}b^*-\mu_1\tau,$$

$$A_2=\frac{\lambda\alpha}{4}+\frac{\beta}{2},$$

$$A_3=\frac{\lambda\alpha}{4}-\frac{\lambda}{4\mu_3}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*+\frac{1}{2}\bar{b}^*-\lambda\beta+\lambda\mu_2\right),$$

(3.20)'nin sağ tarafındaki katsayıları;

$$B_1=\frac{1}{2}+\lambda\mu_3-\frac{\tau}{4}\alpha-\frac{\lambda}{4}\tau^2\alpha+\tau a^*-\frac{\tau^2}{2}\beta-\mu_1\tau,$$

$$B_2=\frac{\lambda a^*}{4}+\frac{b^*}{2},$$

$$B_3=\frac{\lambda a^*}{4}+\frac{\lambda}{4\mu_3}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\bar{a}_*+\frac{1}{2}\bar{b}_*-\lambda b^*+\lambda\mu_2\right),$$

(3.21)'in katsayılarını da;

$$D_1=\alpha-\lambda-\mu_1+\frac{\tau}{4}\bar{a}_*+\frac{\lambda}{4}\tau^2\bar{a}_*-\frac{\tau}{2}b^*,$$

$$D_2=\frac{1}{2}\left(\lambda\beta-\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*-\frac{1}{2}\bar{b}^*-\lambda\mu_2\right),$$

$$D_3=\frac{1}{2}\left(\lambda\beta-\frac{\lambda}{2}\bar{a}^*-\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*-\frac{1}{2}\bar{b}^*-\lambda\mu_2\right)$$

şeklinde adlandıralım

Şimdi gösterelim ki lemmadaki şartlar dahilinde yeteri kadar küçük $\tau$ için $A_i > 0$, $D_i > 0$, $i=1,2,3$ seçilebilir. Bunun için, kolayca görülebilir ki

$$\frac{1}{2} - \lambda\mu_3 > 0, \tag{3.22}$$

$$\frac{\lambda\alpha}{2} + \beta > 0, \tag{3.23}$$

$$\alpha - \frac{1}{\mu_3} > 0, \tag{3.24}$$

$$\alpha - \lambda - \mu_1 > 0, \tag{3.25}$$

$$\lambda\beta - \frac{\lambda}{4}\bar{a}^* - \frac{1}{2}\bar{b}^* - \lambda\mu_2 > 0, \tag{3.26}$$

$$\lambda\beta - \frac{\lambda}{2}\bar{a}^* - \frac{\lambda}{4}\bar{a}^* - \frac{1}{2}\bar{b}^* - \lambda\mu_2 > 0 \tag{3.27}$$

şartlarının sağlanması yeterlidir.

$\lambda>0$ olduğundan aşikardır ki (3.23) her zaman sağlanır. $\mu_2$'nin yeteri kadar küçük seçimiyle $(\mu_2 < \beta)$, (3.26) ve (3.27) sağlanır. Kolayca görülebilir ki.

$$\lambda < \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha^{-1} < \mu_3 < \frac{1}{2\lambda} \quad \text{ve} \quad \mu_1 < \alpha - \lambda$$

seçimiyle (3.22), (3.24) ve (3.25) şartları da sağlanacaktır.

Böylece (3.17)'den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\delta_i \le -D_1 z_i^2 - D_2 z^2 - D_3 \overset{\vee}{z}^2 + \rho \le -\min\left\{\frac{D_1}{B_1}, \frac{D_2}{B_2}, \frac{D_3}{B_3}\right\}\left(B_1 z_i^2 + B_2 z^2 + B_3 \overset{\vee}{z}^2\right) + \rho$$

veya

$$\delta_i \leq -C_1 \check{\delta} + \rho.$$

Burada

$$C_1 = \min\left\{\frac{D_1}{B_1}, \frac{D_2}{B_2}, \frac{D_3}{B_3}\right\} > 0 \quad \text{ve} \quad \rho = \left(\frac{1}{4\mu_1} + \frac{\lambda}{4\mu_2}\right) R^2$$

dir.

Son olarak periyodik şarta sahip diferensiyel eşitsizliğin fark benzerini uygularsak,

$$\delta_K \leq \left[1 - \exp(-C_1 T)\right]^{-1} \left\{\tau \sum_{i=1}^{M} |\rho_i| \exp(-C_1 t_{M-i})\right\} . \exp(-C_1 t_K) +$$

$$+ \tau \sum_{i=1}^{K} |\rho_i| \exp(-C_1 t_{K-i}), \; K=1,2,\ldots,M$$

şeklinde bir eşitsizlik alınabilir. Buradan da lemmanın ispatı görülür.

Şimdi kaydedeceğimiz Uyarı, Lemma 3.1'in daha genel halidir. Daha doğrusu b(t), a'(t) ve b'(t) 'nin işaretlerine konmuş olan şartların kaldırılmış halidir. Lemma 3.1 'deki a 'nın dışındaki katsayılara olan şartlar şöyle olsun:

$$b_* \leq b(t), \; \bar{a}_* \leq a'(t) \leq \bar{a}^* \; \text{ ve } \; \bar{b}_* \leq b'(t) \leq \bar{b}^*$$

**UYARI 3.1.** Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın

$$\frac{\lambda_0 \alpha}{2} + b_* > 0,$$

$$\lambda_0 b_* - \frac{\lambda_0}{4} \aleph - \frac{1}{2} \bar{b}^* > 0.$$

Burada $\lambda_0 < \frac{\alpha}{2}$ ve $\aleph = \max\left(\bar{a}^*, 3\bar{a}^*\right)$ dır. O zaman (3.12) şeklinde değerlendirme doğru olacaktır. Bunun doğruluğu Lemma 3.1 'deki ispata benzer olarak görülebilir.

Böylece alınan sonuçlara dayanarak şöyle bir teorem verilebilir.

**Teorem 3.1.** $u \in C^4$ olmak üzere Lemma 3.1 veya Uyarı 3.1'deki şartlar sağlanırsa o zaman (3.9)-(3.11) fark probleminin çözümü $\omega_\tau^+$'da (3.3)'ün çözümüne yakınsar ve yakınsama hızı için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$|z_t| + |\hat{z}| + |z| \le C\tau^2 \tag{3.28}$$

**İspat.** Bu değerlendirmenin ispatı direkt olarak (3.12)'den alınır. Bunun için (3.12)'nin sağ tarafının $O(\tau^2)$ şeklinde olduğunu göstermek yeterlidir. (3.5) ve (3.8) dikkate alınırsa,

$$C\tau\sum_{j=1}^{M}|R_j|\exp(-C_1 t_{M-i}) \le C\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|a(t_j)\frac{\tau^2}{6}u'''(\theta) + \frac{\tau^2}{12}u^{IV}(\xi)\right| +$$

$$+C\tau\left|a(t_M)\frac{\tau^2}{6}u'''(\theta) + \frac{\tau}{6}\left(u'''(\eta_2) - u'''(\eta_1)\right)\right| \tag{3.29}$$

yazılabilir.

$u \in C^4$ olduğundan (3.29)'un sağındaki her iki terimin de $O(\tau^2)$ hızına sahip olduğu aşikardır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

# 4. BÖLÜM

# KUVVETLİ DİSSİPATİVE TERİME SAHİP DALGA DENKLEMİ İÇİN FARK ŞEMALARI

## 4.1. Fark Şemasının Kurulması

Bu bölümde aşağıdaki problem için fark şemaları incelenecektir.

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$

$$+\ d(x,t)u=f(x,t), \tag{4.1}$$

$$(x,t)\in D=(0,\ell)\times(0,T],$$

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0, \tag{4.2}$$

$$u(x,0)=u(x,T), \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,T). \tag{4.4}$$

Burada a,b,c,d ve f verilmiş yeteri kadar düzgün ve T-periyodik fonksiyonlardır. Ayrıca, $0<\alpha\le a(x,t)\le a^*$, $0\le b_*\le b(x,t)\le b^*$, $0<c_*\le c(x,t)\le c^*$, $0\le d_*\le d(x,t)\le d^*$ ve $\bar{a}_*\le a'(x,t)\le \bar{a}^*$, $\bar{b}_*\le b'(x,t)\le \bar{b}^*$, $\bar{c}_*\le c'(x,t)\le \bar{c}^*$, $\bar{d}_*\le d'(x,t)\le \bar{d}^*$ 'dir.

Problemi fark yöntemiyle çözmek için D bölgesinde $\omega_{h\tau}=\omega_h\times\omega_\tau$ şebekesini kuralım, öyle ki

$$\omega_h=\{x_i=ih,\ i=1,2,\dots,N-1,\ h=\ell/N\},$$
$$\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=1,2,\dots,M-1,\ \tau=T/M\}$$

ve $\bar{\omega}_h=\omega_h\cup\{x=0,\ell\}$ , $\omega_\tau^+=\omega_\tau\cup\{t=T\}$ dir.

(4.1)-(4.4) fark problemi için fark şemasının kurulması iki aşamadan oluşacaktır. Önce $\{\varphi_i(x)\}$ baz fonksiyonları uygulanarak bir yarım diskret fark bağıntısı alınacak, daha sonra da $\{\varphi_j(t)\}$ baz fonksiyonlarının uygulanmasıyla tam diskret fark şeması alınmış olacaktır.

Şimdi,

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu\varphi_i(x)dx = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x,t)\varphi_i(x)dx \tag{4.5}$$

denkliğiyle başlayalım. Buradaki baz fonksiyonları şu şekildedir.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) \equiv \dfrac{x - x_{i-1}}{h} & , \quad x_{i-1} < x < x_i, \\ \varphi_i^{(2)}(x) \equiv \dfrac{x_{i+1} - x}{h} & , \quad x_i < x < x_{i+1}, \\ 0 & , \quad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases}$$

$$i=1,2,\dots,N-1$$

(4.5) denkliğindeki her bir integralin değerinin, sonlu farklarla yaklaşımını verelim. Bu işlemlerde kalan terimlerin yazılışlarında (2.1), (2.2) formüllerinden yararlanacağız.

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\varphi_i(x)dx = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t) + R_i^{(1.1)}(t) \tag{4.6}$$

$$R_i^{(1.1)}(t) = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}(\xi,t)K_1^*(x,\xi)d\xi$$

$$= h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \aleph_i(\xi)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}(\xi,t)d\xi$$

Burada

$$\aleph_i(\xi)=\frac{1}{2}(x_i-\xi)^2\left[\frac{1}{3h}(\xi-x_i)+1\right]+\frac{(x_{i+1}-\xi)^2}{6h}-hT_1(x_i-\xi)$$

dir. a katsayılı terim için şöyle yazalım.

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\varphi_i(x)dx=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\varphi_i'(x)dx$$

$$=h^{-2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}dx-h^{-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}dx$$

$$=-\left(\left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}a(x,t)dx\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x}}\right)_{x,i}+\left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\frac{\partial}{\partial x}a(x,t)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}(\xi,t)K_1^*(x,\xi)d\xi\right)_{x,i}$$

$$=-\left(\left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}a(x,t)dx\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x}}\right)_{x,i}+\left(R_i^*(t)\right)_{x,i} \tag{4.7}$$

$$R_i^*(t)=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\frac{\partial}{\partial x}a(x,t)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}(\xi,t)K_1^*(x,\xi)d\xi$$

Şimdi (4.7)'nin sağ tarafının birinci terimindeki integral için (2.2)'yi uygulayarak şöyle yazalım

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}a(x,t)dx=a(x_{i-0,5},t)+R_i^{**}(t), \tag{4.8}$$

$$R_i^{**}(t)=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}a(\xi,t)K_1^*(x,\xi)d\xi=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi_i(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}a(\xi,t)d\xi$$

Burada,

$$\psi_i(\xi)=\frac{1}{2}(x_i-\xi)^2-hT_1(x_{i-0.5}-\xi)$$

dir. Böylece (4.7) ve (4.8)'den,

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\varphi_i(x)dx=-\left(a(x_{i-0,5},t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x}}\right)_{x,i}+\left(R^{(0.1)}(t)\right)_{x,i}$$

$$R_i^{(0.1)}(t)=R_i^{*}(t)+R_i^{**}(t).\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x},i}$$

elde edilir. Şimdi üçüncü integrale geçelim.

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\varphi_i(x)dx=b(x_i,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t)+R_i^{(1.2)}(t),$$

$$R_i^{(1.2)}(t)=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b(\xi,t)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t)\right)K_i^{*}(x,\xi)d\xi$$

$$=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\aleph_i(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b(\xi,t)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t)\right)d\xi$$

Şimdi de ikinci terim için yapılan işlemlere benzer işlemler sonucunda,

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi_i(x)dx=-\left(c(x_{i-0,5},t)u_{\bar{x}}\right)_{x,i}+\left(R^{(0.2)}(t)\right)_{x,i} \qquad (4.9)$$

elde edilir. Burada

$$R_i^{(0.2)}(t)=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\frac{\partial}{\partial x}c(x,t)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi,t)K_1^{*}(x,\xi)d\xi+\left(h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi_i(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}c(\xi,t)d\xi\right)u_{\bar{x},i}$$

dir. (4.5)'deki beşinci terime gelince,

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}d(x,t)u\varphi_i(x)dx=d(x_i,t)u(x_i,t)+R_i^{(1.3)}(t), \qquad (4.10)$$

$$R_i^{(1.3)}(t)=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(d(\xi,t)u(\xi,t)\right)K_1^{*}(x,\xi)d\xi$$

$$=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\aleph_i(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(d(\xi,t)u(\xi,t)\right)d\xi$$

dir. Son olarak (4.5)'in sağ tarafı için de benzer işlemlerle,

$$h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x,t)\varphi_i(x)dx = f(x_i,t)+R_i^{(1.4)}(t), \tag{4.11}$$

$$R_i^{(1.4)}(t) = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi,t)K_i^*(x,\xi)d\xi$$

$$= h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \aleph_i(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi,t)d\xi$$

elde edilir.

Böylece (4.6)-(4.11)'i (4.5)'de dikkate alırsak,

$$\ell_h u_i(t) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t) - \left(a(x_{i-0,5},t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x}}\right)_{x,i} + b(x_i,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t) - \left(c(x_{i-0,5},t)u_{\bar{x}}\right)_{x,i} +$$

$$+d(x_i,t)u(x_i,t) = f(x_i,t) - R_i(t), \tag{4.12}$$

$$i=1,2,\ldots N-1\ ,\quad t\in(0,T],$$

$$R_i(t) = \left(R^{(0)}(t)\right)_{x,i} + R_i^{(1)}(t)$$

bulunur. Burada

$$R_i^{(0)}(t) = R_i^{(0.1)}(t) + R_i^{(0.2)}(t) \qquad \text{ve} \qquad R_i^{(1)}(t) = R_i^{(1.1)}(t) + R_i^{(1.2)}(t) + R_i^{(1.3)}(t) - R_i^{(1.4)}(t)$$

dir.

Şimdi $\omega_\tau$ 'da yaklaşım almak için (4.12)'de $\varphi_j(t)$ baz fonksiyonlarından yararlanarak aşağıdaki bağıntıyla başlayalım.

$$\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \ell_h u_i(t)\varphi_j(t)dt = \tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(x_i,t)\varphi_j(t)dt - \tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} R_i(t)\varphi_j(t)dt \tag{4.13}$$

Burada,

$$\varphi_j(t) \equiv \begin{cases} \varphi_j^{(1)}(t) \equiv \dfrac{t - t_{j-1}}{\tau} & , \ t_{j-1} < t < t_j, \\ \varphi_j^{(2)}(t) \equiv \dfrac{t_{j+1} - t}{\tau} & , \ t_j < t < t_{j+1}, \\ 0 & , \ t \notin (t_{j-1}, t_{j+1}), \end{cases}$$

$$j=1,2,\ldots,M-1$$

dir. Baz fonksiyonlarının özelliğine göre kolayca görülebilir ki,

$$\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t)\varphi_j(t)dt = u^j_{\bar{t}t,i}$$

dir. (4.13)'deki $R_i$'nin dışındaki terimlere uygun yaklaşım kuralları uygularsak, şöyle bir tam diskret fark bağıntısı yazılabilir.

$$\ell u_i^j \equiv u^j_{\bar{t}t,i} - \left(a(x_{i-0,5},t_j)\left(u^j_{\overset{\circ}{t}\bar{x}}\right)\right)_{x,i} + b(x_i,t_j)u^j_{\overset{\circ}{t},i} - \left(c(x_{i-0,5},t_j)u^j_{\bar{x}}\right)_{x,i} + d(x_i,t_j)u(x_i,t_j)$$

$$= f(x_i,t_j) - R_i^j, \tag{4.14}$$

$$i=1,2,\ldots,N-1 \ ; \ j=1,2,\ldots,M-1.$$

Burada,

$$R_i^j = \left(R^{(0)}\right)^j_{x,i} + \left(R^{(1)}\right)^j_i \tag{4.15}$$

$$R_i^{j(0)} = \tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\varphi_j(t)R_i^{(0)}(t)dt + \left\{a(x_{i-0,5},t_j)u^j_{\overset{\circ}{t}\bar{x},i} - \tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\left(a(x_{i-0,5},t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x}}\right)\varphi_j(t)dt\right\} +$$

$$+\left\{c(x_{i-0,5},t_j)u^j_{\bar{x},i} - \tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}c(x_{i-0,5},t)u_{\bar{x}}\varphi_j(t)dt\right\},$$

$$R_i^{j(1)} = \tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\varphi_j(t)R_i^{(1)}(t)dt + \left\{\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} b(x_i,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t)\varphi_j(t)dt - b(x_i,t_j)u^j_{\overset{\circ}{t},i}\right\} +$$

$$+\left\{\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} d(x_i,t)u(x_i,t)\varphi_j(t)dt - d(x_i,t_j)u(x_i,t_j)\right\} + \left\{f(x_i,t_j) - \tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(x_i,t)\varphi_j(t)dt\right\}.$$

Şimdi kolayca görülebilir ki (4.1)-(4.4) problemindeki başlangıç verileri yeteri kadar düzgün ise $R^{(o)}$ ve $R^{(1)}$ 'in lokal hataları $0(h^2+\tau^2)$ olacaktır.

$$\left|R_i^{j(0)}\right|, \left|R_i^{j(1)}\right| = 0(h^2+\tau^2)$$

Örneğin b 'li terim için bunu gösterelim. Önce (2.2) uygulanırsa,

$$\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} b(x_i,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t)\varphi_j(t)dt = b(x_i,t_j)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) +$$

$$+\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} dt\varphi_j(t)\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(b(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial t}(x,\xi)\right)K_1^*(t,\xi)d\xi$$

elde edilir. Burada sağ taraftaki birinci terimi fark türeviyle değiştirirsek,

$$\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} b(x_i,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t)\varphi_j(t)dt = b(x_i,t_j)u^j_{\overset{0}{t},i} +$$

$$+\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(b(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial t}(x,\xi)\right)\aleph_j(\xi)d\xi - b(x_i,t_j)\frac{\tau^2}{6}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x,\xi)$$

yazılabilir. Buradan da aşikardır ki, $\frac{\partial^2 b}{\partial t^2}\in C(\overline{D})$ ve $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\in C(\overline{D})$ ise lokal hata $0(h^2+\tau^2)$ dir.

Şimdi ise (4.4) şartının yaklaşımına geçelim. Önceki baz fonksiyonlarına ilave olarak şöyle bir baz fonksiyonu ele alalım

$$\varphi_0(t) \equiv \begin{cases} \varphi_0^{(1)}(t) \equiv \dfrac{t_1 - t}{\tau} & , t_0 < t < t_1, \\ \varphi_0^{(2)}(t) \equiv \dfrac{t - t_{M-1}}{\tau} & , t_{M-1} < t < t_M, \\ 0 & , t \notin (t_0,t_1)\cup(t_{M-1},t_M). \end{cases}$$

(4.12) yarım diskret bağıntısını $\varphi_0(t)$ ile çarparak (0,T) aralığında integre edersek,

$$\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}\ell_h u_i\varphi_0^{(1)}(t)dt+\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}\ell_h u_i\varphi_0^{(2)}(t)dt=\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}f\,\varphi_0^{(1)}(t)dt+\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}f\,\varphi_0^{(2)}(t)dt-$$

$$-\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}R_i(t)\varphi_0^{(1)}(t)dt-\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}R_i(t)\varphi_0^{(2)}(t)dt \qquad (4.16)$$

olacaktır.

(4.4) şartından yararlanarak,

$$\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_M}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t)\varphi_0(t)dt=\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t)\varphi_0^{(1)}(t)dt+\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t)\varphi_0^{(2)}(t)dt$$

$$=\tau^{-1}\left(-\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_0)+u_{\bar{t},1}\right)+\tau^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_M)-u_{\bar{t},M}\right)$$

$$=\tau^{-1}\left(u_{\bar{t},1}-u_{\bar{t},M}\right)$$

$$=u_{\bar{t}t,M} \qquad (4.17)$$

yazılabilir. Burada $u(x_i,t_1)=u(x_i,t_{M+1})$ periyodiklik şartı dikkate alınmıştır. Şimdi (4.16)'daki diğer terimler için katsayıların t 'ye göre periyodikliği dikkate alınarak aşağıdaki yaklaşımları yazabiliriz

$$-\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}\left(a(x_{i-0,5},t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x}}\right)_{x,i}\varphi_0^{(1)}(t)dt-\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}\left(a(x_{i-0,5},t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x}}\right)_{x,i}\varphi_0^{(2)}(t)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\left(a(x_{i-0,5},t_0)u^{O}_{t\bar{x}}\right)_{x,i}-\frac{1}{2}\left(a(x_{i-0,5},t_M)u^{M}_{t\bar{x}}\right)_{x,i}+\left(R^{(0.1)}(x_i,t_M)\right)_x$$

$$=-\left(a(x_{i-0,5},t_M)u^{M}_{\overset{0}{t\bar{x}}}\right)_{x,i}+\left(R^{(0.1)}(x_i,t_M)\right)_x, \qquad (4.18)$$

$$R^{(0.1)}(x_i,t_M)=\frac{1}{2}a(x_{i-0,5},t_0)u^{O}_{t\bar{x}}-\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}a(x_{i-0,5},t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x}}\varphi_0^{(1)}(t)dt+$$

$$+\frac{1}{2}a\left(x_{i-0,5},t_M\right)u^M_{\bar{t}\bar{x}}-\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}a\left(x_{i-0,5},t\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{x}}\varphi_0^{(2)}(t)dt.$$

b 'li terim için,

$$\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}b\left(x_i,t\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t)\varphi_0^{(1)}(t)dt+\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}b\left(x_i,t\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t)\varphi_0^{(2)}(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}b\left(x_i,t_0\right)u^{O}_{t}+\frac{1}{2}b\left(x_i,t_M\right)u^M_{\bar{t}}+R^{(1.1)}\left(x_i,t_M\right)$$

$$=b\left(x_i,t_M\right)u^M_{\overset{0}{t}}+R^{(1.1)}\left(x_i,t_M\right), \tag{4.19}$$

$$R^{(1.1)}\left(x_i,t_M\right)=\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}b\left(x_i,t\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t)\varphi_0^{(1)}(t)dt-\frac{1}{2}b(x_i,t_0)u^{O}_{t}+\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}b(x_i,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t)\varphi_0^{(2)}(t)dt-$$

$$-\frac{1}{2}b\left(x_i,t_M\right)u^M_{\bar{t}}$$

yazılabilir. Yine c 'li terim için de,

$$-\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}\left(c\left(x_{i-0,5},t\right)u_{\bar{x}}\right)_{x,i}\varphi_0^{(1)}(t)dt-\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}\left(c\left(x_{i-0,5},t\right)u_{\bar{x}}\right)_{x,i}\varphi_0^{(2)}(t)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\left(c\left(x_{i-0,5},t_0\right)u_{\bar{x}}\right)_{x,i}-\frac{1}{2}\left(c\left(x_{i-0,5},t_M\right)u_{\bar{x}}\right)_{x,i}+\left(R^{(0.2)}\left(x_i,t_M\right)\right)_{x,i}$$

$$=-\left(c\left(x_{i-0,5},t_M\right)u_{\bar{x}}\right)_{x,i}+\left(R^{(0.2)}\left(x_i,t_M\right)\right)_{x}, \tag{4.20}$$

$$R^{(0.2)}\left(x_i,t_M\right)=\frac{1}{2}c\left(x_{i-0,5},t_0\right)u_{\bar{x}}-\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}c\left(x_{i-0,5},t\right)u_{\bar{x}}\varphi_0^{(1)}(t)dt+$$

$$+\frac{1}{2}c\left(x_{i-0,5},t_M\right)u_{\bar{x}}-\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}c\left(x_{i-0,5},t\right)u_{\bar{x}}\varphi_0^{(2)}(t)dt$$

bulunur. d 'li terim için ise,

$$\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1}d\left(x_i,t\right)u\left(x_i,t\right)\varphi_0^{(1)}(t)dt+\tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M}d\left(x_i,t\right)u\left(x_i,t\right)\varphi_0^{(2)}(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}d\left(x_i,t_0\right)u\left(x_i,t_0\right)+\frac{1}{2}d\left(x_i,t_M\right)u\left(x_i,t_M\right)+R^{(1.2)}\left(x_i,t_M\right)$$

$$= d(x_i, t_M)u(x_i, t_M) + R^{(1.2)}(x_i, t_M), \tag{4.21}$$

$$R^{(1.2)}(x_i, t_M) = \tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1} d(x_i, t)u(x_i, t)\varphi_0^{(1)}(t)dt - \frac{1}{2}d(x_i, t_0)u(x_i, t_0) + \tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M} d(x_i, t)u(x_i, t)\varphi_0^{(2)}(t)dt -$$

$$-\frac{1}{2}d(x_i, t_M)u(x_i, t_M)$$

elde edilir. Şimdi de $f$'li terim için şöyle yazabiliriz

$$\tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1} f(x_i, t)\varphi_0^{(1)}(t)dt + \tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M} f(x_i, t)\varphi_0^{(2)}(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}f(x_i, t_0) + \frac{1}{2}f(x_i, t_M) + R^{(1.3)}(x_i, t_M)$$

$$= f(x_i, t_M) - R^{(1.3)}(x_i, t_M), \tag{4.22}$$

$$R^{(1.3)}(x_i, t_M) = \frac{1}{2}f(x_i, t_0) - \tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1} f(x_i, t)\varphi_0^{(1)}(t)dt + \frac{1}{2}f(x_i, t_M) - \tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M} f(x_i, t)\varphi_0^{(2)}(t)dt$$

Böylece (4.16)-(4.22) bağıntılarını (4.16)'da dikkate alırsak $t=t_M$ noktasına uygun olan şöyle bir fark bağıntısı alınmış olur

$$u_{\bar{t}t}^M - \left(a(x_{i-0,5}, t_M)u_{\overset{\circ}{t}\bar{x}}^M\right)_{x,i} + b(x_i, t_M)u_{\overset{\circ}{t}}^M - \left(c(x_{i-0,5}, t_M)u_{\bar{x}}^M\right)_{x,i} + d(x_i, t_M)u(x_i, t_M)$$

$$= f(x_i, t_M) - R_i^M, \tag{4.23}$$

$$R_i^M = \left(R^{M(0)}\right)_{x,i} + R_i^{M(1)}, \tag{4.24}$$

$$R_i^{M(0)} = R^{(0.1)}(x_i, t_M) + R^{(0.2)}(x_i, t_M) + \tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1} \varphi_0^{(1)}(t)R_i^{(0)}(t)dt + \tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M} \varphi_0^{(2)}(t)R_i^{(0)}(t)dt,$$

$$R_i^{M(1)} = \sum_{k=1}^{3} R^{(1.k)}(x_i, t_M) + \tau^{-1}\int_{t_0}^{t_1} \varphi_0^{(1)}(t)R_i^{(1)}(t)dt + \tau^{-1}\int_{t_{M-1}}^{t_M} \varphi_0^{(2)}(t)R_i^{(1)}(t)dt.$$

Burada kolayca görülebilir ki yeteri kadar düzgünlük şartları dahilinde $R_i^{M(0)}, R_i^{M(1)}$ terimlerinin her biri $0(h^2+\tau)$ biçimine sahiptir. Sonuç olarak yaklaşım hataları için

$$\left|R^{(0)}\right|, \left|R^{(1)}\right| \le C\left(h^2+\tau^2\right), \quad (x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau,$$

$$\left|R^{M(0)}\right|, \left|R^{M(1)}\right| \le C\left(h^2+\tau\right), \quad x\in\omega_h \tag{4.25}$$

yazılabilir.

Böylece (4.14) ve (4.23) bağıntılarına dayanarak (4.1)-(4.4) problemi için şöyle bir fark şeması verilebilir

$$\ell y \equiv y_{\bar{t}t} - \left(a(x-h/2,t)y_{\overset{\circ}{t}\bar{x}}\right)_x + b(x,t)y_{\overset{\circ}{t}} - \left(c(x-h/2,t)y_{\bar{x}}\right)_x +$$

$$+d(x,t)y(x,t) = f(x,t), \tag{4.26}$$

$$(x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau^{-},$$

$$y(0,t)=y(\ell,t)=0 \quad , \ t\in\overline{\omega}_\tau,$$

$$y(x,0)=y(x,T) \quad , \ x\in\overline{\omega}_h,$$

$$y(x,\tau)=y(x,T+\tau) \quad , \ x\in\overline{\omega}_h.$$

**4.2. Yaklaşık Çözümün Hatasının Değerlendirilmesi**

Şimdi ise yaklaşık çözümün hatasının değerlendirilmesine geçelim. $z=y-u$ alırsak hata için şöyle bir fark problemi alınabilir

$$\ell z = R, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau^+$$
$$z(0,t) = z(\ell,t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau,$$
$$z(x,0) = z(x,T), \quad x \in \overline{\omega}_h,$$
$$z(x,\tau) = z(x,T+\tau), \quad x \in \overline{\omega}_h.$$

Burada R yaklaşım hatası (4.15) ve (4.24) formülleriyle verilir.

**Lemma 4.1.** Aşağıdaki şart dahilinde,

$$\lambda_0\left(c_* + \frac{\ell^2}{8}d_* - \frac{1}{4}\aleph_0 - \frac{\ell^2}{32}\aleph_1\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{c}^* + \bar{d}^*\right) > 0, \tag{4.27}$$

öyle ki burada

$$\lambda_0 < \frac{4}{\ell^2}\alpha + \frac{b_*}{2} \quad \text{ve} \quad \aleph_0 = \max\left(\bar{a}^*, 3\,\bar{a}^*\right),\ \aleph_1 = \max\left(\bar{b}^*, 3\,\bar{b}^*\right)$$

olup fark probleminin hatası için aşağıdaki değerlendirme doğru olacaktır

$$\|z_t\|^2 + \|\hat{z}_{\bar{x}}\|^2 + \|z\|^2 \le C\tau \sum_{i=1}^{M}\left(\left\|R_i^{(0)}\right\|^2 + \left\|R_i^{(1)}\right\|^2\right)\exp(-C_1 t_{M-i}),\ t \in \omega_\tau^-. \tag{4.28}$$

Burada C ve $C_1$ , h ve $\tau$ 'ya bağlı olmayan pozitif sabitlerdir.

**İspat.** İspat sürecine aşağıdaki özdeşlikle başlayalım

$$(\ell z, z_t + \lambda z) = \left(\left(R_i^{(0)}\right)_x + R_i^{(1)}, z_t + \lambda z\right).$$

Burada $\lambda>0$ daha sonra seçilecek olan reel parametredir. Bu özdeşliği açık olarak şöyle yazalım

$$(z_{\bar{t}t}, z_t) - \left(\left(a z_{\overset{0}{t}\bar{x}}\right)_x, z_t\right) + \left(b z_{\overset{0}{t}}, z_t\right) - \left((c z_{\bar{x}})_x, z_t\right) + (dz, z_t) + (z_{\bar{t}t}, \lambda z) -$$

$$-\left(\left(az_{\overset{0}{t\bar{x}}}\right)_x,\lambda z\right)+\left(bz_{\overset{0}{t}},\lambda z\right)-\left((cz_{\bar{x}})_x,\lambda z\right)+(dz,\lambda z)$$

$$=-\left(R_j^{(0)},z_{t\bar{x}}+\lambda z_{\bar{x}}\right)+\left(R_i^{(1)},z_t+\lambda z\right). \qquad (4.29)$$

(4.29)'daki terimlerin herbirini aşağıdaki şekilde çevirelim

$$(z_{\bar{t}t},z_t)=\frac{1}{2}\left(\|z_t\|^2\right)_{\bar{t}}+\frac{1}{2}\tau\|z_{\bar{t}t}\|^2 \quad ,$$

$$-\left(\left(az_{\overset{0}{t\bar{x}}}\right)_x,z_t\right)=\left(az_{\overset{0}{\bar{x}t}},z_{\bar{x}t}\right)=(az_{\bar{x}t},z_{\bar{x}t})-\frac{\tau}{4}\left[(az_{\bar{x}t},z_{\bar{x}t})\right]_{\bar{t}}+\frac{\tau}{4}(a_{\bar{t}}z_{\bar{x}\bar{t}},z_{\bar{x}\bar{t}})-$$

$$-\frac{\tau^2}{4}(az_{\bar{x}\bar{t}t},z_{\bar{x}\bar{t}t}),$$

$$\left(bz_{\overset{0}{t}},z_t\right)=(bz_t,z_t)-\frac{\tau}{4}\left[(bz_t,z_t)\right]_{\bar{t}}+\frac{\tau}{4}(b_{\bar{t}}z_{\bar{t}},z_{\bar{t}})-\frac{\tau^2}{4}(bz_{\bar{t}t},z_{\bar{t}t}),$$

$$-\left((cz_{\bar{x}})_x,z_t\right)=(cz_{\bar{x}},z_{\bar{x}t})=\frac{1}{2}\left[(c\hat{z}_{\bar{x}},\hat{z}_{\bar{x}})\right]_{\bar{t}}-\frac{1}{2}(c_{\bar{t}}z_{\bar{x}},z_{\bar{x}})-\frac{\tau}{2}(cz_{\bar{x}t},z_{\bar{x}t}),$$

$$(dz,z_t)=\frac{1}{2}\left[(d\hat{z},\hat{z})\right]_{\bar{t}}-\frac{1}{2}(d_{\bar{t}}z,z)-\frac{\tau}{2}(dz_t,z_t),$$

$$\lambda(z_{\bar{t}t},z)=\lambda\left[(z_t,z)\right]_{\bar{t}}-\lambda\|z_{\bar{t}}\|^2,$$

$$-\lambda\left(\left(az_{\overset{0}{t\bar{x}}}\right)_x,z\right)=\lambda\left(az_{\overset{0}{\bar{x}t}},z_{\bar{x}}\right)=\frac{\lambda}{4}\left[(a\hat{z}_{\bar{x}},\hat{z}_{\bar{x}})+(az_{\bar{x}},z_{\bar{x}})\right]_{\bar{t}}-\frac{\lambda}{4}(a_{\bar{t}}z_{\bar{x}},z_{\bar{x}})-$$

$$-\frac{\lambda}{4}\left(a_{\bar{t}}\check{z}_{\bar{x}},\check{z}_{\bar{x}}\right)-\frac{\lambda}{4}\tau^2\left[(az_{\bar{x}t},z_{\bar{x}t})\right]_{\bar{t}}+\frac{\lambda}{4}\tau^2(a_{\bar{t}}z_{\bar{x}\bar{t}},z_{\bar{x}\bar{t}}),$$

$$\lambda\left(bz_{\overset{0}{t}},z\right)=\frac{\lambda}{4}\left[(b\hat{z},\hat{z})+(bz,z)\right]_{\bar{t}}-\frac{\lambda}{4}(b_{\bar{t}}z,z)-\frac{\lambda}{4}\left(b_{\bar{t}}\check{z},\check{z}\right)-\frac{\lambda}{4}\tau^2\left[(bz_t,z_t)\right]_{\bar{t}}+$$

$$+\frac{\lambda}{4}\tau^2(b_{\bar{t}}z_{\bar{t}},z_{\bar{t}}),$$

$$-\lambda\left((cz_{\bar{x}})_x,z\right)=\lambda(cz_{\bar{x}},z_{\bar{x}}),$$

$$\left|\left(R_i^{(1)}, z_t\right)\right| \le \mu_1 \|z_t\|^2 + \frac{1}{4\mu_1}\left\|R_i^{(1)}\right\|^2,$$

$$\left|\left(R_i^{(1)}, \lambda z\right)\right| \le \lambda\mu_2 \|z\|^2 + \frac{\lambda}{4\mu_2}\left\|R_i^{(1)}\right\|^2,$$

$$\left(\left(R_i^{(0)}\right)_x, z_t + \lambda z\right) = -\left(R_i^{(0)}, z_{t\bar{x}}\right) - \lambda\left(R_i^{(0)}, z_{\bar{x}}\right) \le \left\|R_i^{(0)}\right\| \left\|z_{t\bar{x}}\right\| + \lambda\left\|R_i^{(0)}\right\| \left\|z_{\bar{x}}\right\|$$

$$\le \mu_4 \|z_{\bar{x}t}\|^2 + \lambda\mu_4 \|z_{\bar{x}}\|^2 + \frac{1+\lambda}{4\mu_4}\left\|R_i^{(0)}\right\|^2.$$

Şimdi bunları (4.29)'da yerlerine yazalım

$$\left\{\frac{1}{2}\|z_t\|^2 - \frac{\tau}{4}(az_{\bar{x}t}, z_{\bar{x}t}) - \frac{\tau}{4}(bz_t, z_t) + \frac{1}{2}(c\hat{z}_{\bar{x}}, \hat{z}_{\bar{x}}) + \frac{1}{2}(d\hat{z}, \hat{z}) + \lambda(z_t, z) + \frac{\lambda}{4}\left[(a\hat{z}_{\bar{x}}, \hat{z}_{\bar{x}}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (az_{\bar{x}}, z_{\bar{x}})\right] - \frac{\lambda}{4}\tau^2(az_{\bar{x}t}, z_{\bar{x}t}) + \frac{\lambda}{4}\left[(b\hat{z}, \hat{z}) + (bz, z)\right] - \frac{\lambda}{4}\tau^2(bz_t, z_t)\right\}_{\bar{t}} \le -(az_{\bar{x}t}, z_{\bar{x}t}) -$$

$$-\frac{\tau}{4}(a_{\bar{t}} z_{\bar{x}\bar{t}}, z_{\bar{x}\bar{t}}) - (bz_t, z_t) - \frac{\tau}{4}(b_{\bar{t}} z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) + \frac{1}{2}(c_{\bar{t}} z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}) + \frac{\tau}{2}(cz_{\bar{x}t}, z_{\bar{x}t}) + \frac{1}{2}(d_{\bar{t}} z, z) +$$

$$+\frac{\tau}{2}(dz_t, z_t) + \lambda\|z_{\bar{t}}\|^2 + \frac{\lambda}{4}(a_{\bar{t}} z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}) + \frac{\lambda}{4}\left(a_{\bar{t}}\, \check{z}_{\bar{x}}, \check{z}_{\bar{x}}\right) - \frac{\lambda}{4}\tau^2(a_{\bar{t}} z_{\bar{x}\bar{t}}, z_{\bar{x}\bar{t}}) + \frac{\lambda}{4}(b_{\bar{t}} z, z) +$$

$$+\frac{\lambda}{4}\left(b_{\bar{t}}\, \check{z}, \check{z}\right) - \frac{\lambda}{4}\tau^2(b_{\bar{t}} z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) - \lambda(cz_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}) - \lambda(dz, z) + \mu_1\|z_t\|^2 + \lambda\mu_2\|z\|^2 + \mu_4\|z_{\bar{x}t}\|^2 +$$

$$+\lambda\mu_4\|z_{\bar{x}}\|^2 + \left(\frac{1}{4\mu_1} + \frac{\lambda}{4\mu_2}\right)\left\|R_i^{(1)}\right\|^2 + \frac{1+\lambda}{4\mu_4}\left\|R_i^{(0)}\right\|^2. \tag{4.30}$$

Burada yeteri kadar küçük $\tau$ için,

$$\frac{1}{2}\tau\|z_{\bar{t}t}\|^2 - \frac{\tau^2}{4}(az_{\bar{x}\bar{t}t}, z_{\bar{x}\bar{t}t}) - \frac{\tau^2}{4}(bz_{\bar{t}t}, z_{\bar{t}t}) \ge 0$$

olduğunu ve

$$-(bz_t, z_t) = -\left(\check{b}\, z_{\bar t}, z_{\bar t}\right) - \tau\left[(bz_t, z_t)\right]_{\bar t} ,$$

$$\frac{\tau}{2}(dz_t, z_t) = \frac{\tau}{2}\left(\check{d}\, z_{\bar t}, z_{\bar t}\right) + \frac{\tau^2}{2}\left[(dz_t, z_t)\right]_{\bar t} ,$$

$$\mu_1\|z_t\|^2 = \mu_1\|z_{\bar t}\|^2 + \mu_1\tau\left[\|z_t\|^2\right]_{\bar t} ,$$

$$-(az_{\bar x t}, z_{\bar x t}) = -\left(\check{a}\, z_{\bar x \bar t}, z_{\bar x \bar t}\right) - \tau\left[(az_{\bar x t}, z_{\bar x t})\right]_{\bar t},$$

$$\frac{\tau}{2}(cz_{\bar x t}, z_{\bar x t}) = \frac{\tau}{2}\left(\check{c}\, z_{\bar x \bar t}, z_{\bar x \bar t}\right) + \frac{\tau^2}{2}\left[(cz_{\bar x t}, z_{\bar x t})\right]_{\bar t},$$

$$\mu_4\|z_{\bar x t}\|^2 = \mu_4\|z_{\bar x \bar t}\|^2 + \mu_4\tau\left[\|z_{\bar x t}\|^2\right]_{\bar t},$$

bağıntılarını dikkate alırsak,

$$\Bigg\{\left(\left\{\frac{1}{2} + \frac{3\tau b}{4} - \frac{\lambda}{4}\tau^2 b - \frac{\tau^2}{2}d - \mu_1\tau\right\} z_t, z_t\right) + \left(\left\{\frac{3\tau}{4}a - \frac{\lambda}{4}\tau^2 a - \frac{\tau^2}{2}c - \mu_4\tau\right\} z_{\bar x t}, z_{\bar x t}\right) + \lambda(z_t, z) +$$

$$+\left(\left\{\frac{1}{2}c + \frac{\lambda}{4}a\right\}\hat z_{\bar x}, \hat z_{\bar x}\right) + \left(\frac{\lambda}{4}az_{\bar x}, z_{\bar x}\right) + \left(\left\{\frac{d}{2} + \frac{\lambda}{4}b\right\}\hat z, \hat z\right) + \left(\frac{\lambda}{4}bz, z\right)\Bigg\}_{\bar t} \le \Bigg(\Bigg\{-\check{b} -$$

$$-\frac{\tau}{4}b_{\bar t} + \frac{\tau}{2}\check{d} + \lambda - \frac{\lambda}{4}\tau^2 b_{\bar t} + \mu_1\Bigg\} z_{\bar t}, z_{\bar t}\Bigg) + \left(\left\{-\check{a} - \frac{\tau}{4}a_{\bar t} + \frac{\tau}{2}\check{c} - \frac{\lambda}{4}\tau^2 a_{\bar t} + \mu_4\right\} z_{\bar x \bar t}, z_{\bar x \bar t}\right) +$$

$$+\left(\left\{\frac{1}{2}c_{\bar t} + \frac{\lambda}{4}a_{\bar t} - \lambda c + \lambda\mu_4\right\} z_{\bar x}, z_{\bar x}\right) + \left(\frac{\lambda}{4}a_{\bar t}\, \check{z}_{\bar x}, \check{z}_{\bar x}\right) + \left(\left\{\frac{1}{2}d_{\bar t} + \frac{\lambda}{4}b_{\bar t} - \lambda d + \lambda\mu_2\right\} z, z\right) + \left(\frac{\lambda}{4}b_{\bar t}\, \check{z}, \check{z}\right)\Bigg\} +$$

$$+\left(\frac{1}{4\mu_1} + \frac{\lambda}{4\mu_2}\right)\left\|R_i^{(1)}\right\|^2 + \frac{1+\lambda}{4\mu_4}\left\|R_i^{(0)}\right\|^2 . \tag{4.31}$$

Şimdi (4.31)'in sağ tarafındaki üçüncü terimin yarısını dördüncü terime, beşinci terimin yarısını da altıncıya ekleyelim

$$\Bigg\{\left(\left\{\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{4}b-\frac{\lambda}{4}\tau^2 b-\frac{\tau^2}{2}d-\mu_1\tau\right\}z_t, z_t\right)+\left(\left\{\frac{3\tau}{4}a-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a-\frac{\tau^2}{2}c-\mu_4\tau\right\}z_{\bar{x}t}, z_{\bar{x}t}\right)+\lambda(z_t, z)+$$

$$+\left(\left\{\frac{1}{2}c+\frac{\lambda}{4}a\right\}\hat{z}_{\bar{x}}, \hat{z}_{\bar{x}}\right)+\left(\left[\frac{\lambda a}{4}-\frac{\tau}{2}\left\{\frac{1}{2}c_{\bar{i}}+\frac{\lambda}{4}a_{\bar{i}}-\lambda c+\lambda\mu_4\right\}\right]z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}\right)+\left(\left\{\frac{d}{2}+\frac{\lambda}{4}b\right\}\hat{z}, \hat{z}\right)+$$

$$+\left(\left[\frac{\lambda b}{4}-\frac{\tau}{2}\left\{\frac{1}{2}d_{\bar{i}}+\frac{\lambda}{4}b_{\bar{i}}-\lambda d+\lambda\mu_2\right\}\right]z, z\right)\Bigg\}_{\bar{i}} \le \left(\left\{-\check{b}-\frac{\tau}{4}b_{\bar{i}}+\frac{\tau}{2}\check{d}+\lambda-\frac{\lambda}{4}\tau^2 b_{\bar{i}}+\mu_1\right\}z_{\bar{i}}, z_{\bar{i}}\right)+$$

$$+\left(\left\{-\check{a}-\frac{\tau}{4}a_{\bar{i}}+\frac{\tau}{2}\check{c}-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a_{\bar{i}}+\mu_4\right\}z_{\bar{x}\bar{i}}, z_{\bar{x}\bar{i}}\right)+\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{1}{2}c_{\bar{i}}+\frac{\lambda}{4}a_{\bar{i}}-\lambda c+\lambda\mu_4\right\}z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}\right)+\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{\lambda}{2}a_{\bar{i}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\check{c}_{\bar{i}}+\frac{\lambda}{4}\check{a}_{\bar{i}}-\lambda\check{c}+\lambda\mu_4\right\}\check{z}_{\bar{x}}, \check{z}_{\bar{x}}\right)+\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{1}{2}d_{\bar{i}}+\frac{\lambda}{4}b_{\bar{i}}-\lambda d+\lambda\mu_2\right\}z, z\right)+\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{\lambda}{2}b_{\bar{i}}+\frac{1}{2}\check{d}_{\bar{i}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\lambda}{4}\check{b}_{\bar{i}}-\lambda\check{d}+\lambda\mu_2\right\}\check{z}, \check{z}\right)+\left(\frac{1}{4\mu_1}+\frac{\lambda}{4\mu_2}\right)\left\|R_i^{(1)}\right\|^2+\frac{1+\lambda}{4\mu_4}\left\|R_i^{(0)}\right\|^2. \qquad (4.32)$$

Buradan,

$$\delta(t)=\left(\left\{\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{4}b-\frac{\lambda}{4}\tau^2 b-\frac{\tau^2}{2}d-\mu_1\tau\right\}z_t, z_t\right)+\left(\left\{\frac{3\tau}{4}a-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a-\frac{\tau^2}{2}c-\mu_4\tau\right\}z_{\bar{x}t}, z_{\bar{x}t}\right)+\lambda(z_t, z)$$

$$+\left(\left\{\frac{1}{2}c+\frac{\lambda}{4}a\right\}\hat{z}_{\bar{x}}, \hat{z}_{\bar{x}}\right)+\left(\left[\frac{\lambda a}{4}-\frac{\tau}{2}\left\{\frac{1}{2}c_{\bar{i}}+\frac{\lambda}{4}a_{\bar{i}}-\lambda c+\lambda\mu_4\right\}\right]z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}\right)+\left(\left\{\frac{d}{2}+\frac{\lambda}{4}b\right\}\hat{z}, \hat{z}\right)+$$

$$+\left(\left[\frac{\lambda b}{4}-\frac{\tau}{2}\left\{\frac{1}{2}d_{\bar{i}}+\frac{\lambda}{4}b_{\bar{i}}-\lambda d+\lambda\mu_2\right\}\right]z, z\right)$$

şeklinde bir şebeke fonksiyonu tanımlayalım. $\delta(t)$ 'yı aşağıdan ve yukarıdan şöyle değerlendirelim

$$\delta(t)\ge\left(\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{4}b_*-\frac{\lambda}{4}\tau^2 b^*-\frac{\tau^2}{2}d^*-\mu_1\tau-\lambda\mu_3\right)\|z_t\|^2+$$

$$+\left(\frac{3\tau}{4}\alpha-\frac{\lambda}{4}\tau^2 a^*-\frac{\tau^2}{2}c^*-\mu_4\tau\right)\|z_{\bar{x}t}\|^2+\left(\frac{c_*}{2}+\frac{\lambda\alpha}{4}\right)\|\hat{z}_{\bar{x}}\|^2+\left(\frac{d_*}{2}+\frac{\lambda b_*}{4}\right)\|\hat{z}\|^2+$$

$$+\left\{\frac{8}{\ell^2}\left[\frac{\lambda\alpha}{4}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\bar{c}^*}{2}+\frac{\lambda\,\bar{a}^*}{4}-\lambda c_*+\lambda\mu_4\right)\right]+\left[\frac{\lambda b_*}{4}-\frac{\lambda}{4\mu_3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\bar{d}^*}{2}+\frac{\lambda\,\bar{b}^*}{4}-\lambda d_*+\lambda\mu_2\right)\right]\right\}\|z\|^2. \tag{4.33}$$

Burada (4.33)'ün ikinci ve dördüncü terimleri pozitif yapılabildiğinden ihmal edilerek yeteri kadar küçük $\tau$ için,

$$\delta(t)\geq\left(\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{4}b_*-\frac{\lambda}{4}\tau^2 b^*-\frac{\tau^2}{2}d^*-\mu_1\tau-\lambda\mu_3\right)\|z_t\|^2+\left(\frac{c_*}{2}+\frac{\lambda\alpha}{4}\right)\|\hat{z}_{\bar{x}}\|^2+$$

$$+\left\{\frac{8}{\ell^2}\left[\frac{\lambda\alpha}{4}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\bar{c}^*}{2}+\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*-\lambda c_*+\lambda\mu_4\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\lambda b_*}{4}-\frac{\lambda}{4\mu_3}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\bar{d}^*}{2}+\frac{\lambda\,\bar{b}^*}{4}-\lambda d_*+\lambda\mu_2\right)\right]\right\}\|z\|^2 \tag{4.34}$$

elde edilir. Kolayca görülebilir ki Lemma 4.1 'in şartlarının sağlanması halinde,

$$\frac{1}{2}-\lambda\mu_3>0,$$

$$\frac{8}{\ell^2}\alpha+b_*-\frac{1}{\mu_3}>0$$

şeklinde eşitsizlikler elde edilebilir. Böylece $\delta(t)$ şebeke fonksiyonu için şöyle bir değerlendirme doğru olacaktır.

$$\delta(t)\geq C\left(\|z_t\|^2+\|\hat{z}_{\bar{x}}\|^2+\|z\|^2\right),\quad C>0\,. \tag{4.35}$$

Ayrıca $\delta(t)$'nin,

$$\delta(t)\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{4}b^{*}-\frac{\lambda}{4}\tau^{2}b_{*}-\frac{\tau^{2}}{2}d_{*}-\mu_{1}\tau+\lambda\mu_{3}\right)\|z_{t}\|^{2}+$$

$$+\left(\frac{3\tau}{4}a^{*}-\frac{\lambda}{4}\tau^{2}\alpha-\frac{\tau^{2}}{2}c_{*}-\mu_{4}\tau\right)\|z_{\bar{x}t}\|^{2}+\left(\frac{c_{*}}{2}+\frac{\lambda}{4}a^{*}\right)\|\hat{z}_{\bar{x}}\|^{2}+$$

$$+\left[\frac{\lambda a^{*}}{4}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\bar{c}_{*}}{2}+\frac{\lambda}{4}\bar{a}_{*}-\lambda c^{*}+\lambda\mu_{4}\right)\right]\|z_{\bar{x}}\|^{2}+\left(\frac{d^{*}}{2}+\frac{\lambda b^{*}}{4}\right)\|\hat{z}\|^{2}+$$

$$+\left[\frac{\lambda b^{*}}{4}+\frac{\lambda}{4\mu_{3}}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\bar{d}_{*}}{2}+\frac{\lambda}{4}\bar{b}_{*}-\lambda d^{*}+\lambda\mu_{2}\right)\right]\|z\|^{2} \qquad (4.36)$$

yukarıdan değerlendirmesi için,

$$\|z_{t}\|^{2}\leq\frac{\ell^{2}}{8}\|z_{\bar{x}t}\|^{2},\ \|\hat{z}\|^{2}\leq\frac{\ell^{2}}{8}\|\hat{z}_{\bar{x}}\|^{2},\ \|z\|^{2}\leq\frac{\ell^{2}}{8}\|z_{\bar{x}}\|^{2}$$

imbedding eşitsizlikleri gereğince şöyle yazalım

$$\delta(t)\leq B_{1}\|z_{\bar{x}t}\|^{2}+B_{2}\|\hat{z}_{\bar{x}}\|^{2}+B_{3}\|z_{\bar{x}}\|^{2}\ . \qquad (4.37)$$

Burada

$$B_{1}=\frac{\ell^{2}}{8}\max\left(0,\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{4}b^{*}-\frac{\lambda}{4}\tau^{2}b_{*}-\frac{\tau^{2}}{2}d_{*}-\mu_{1}\tau+\lambda\mu_{3}\right)+\frac{3\tau}{4}a^{*}-\frac{\lambda}{4}\tau^{2}\alpha-\frac{\tau^{2}}{2}c_{*}-\mu_{4}\tau,$$

$$B_{2}=\frac{\ell^{2}}{8}\max\left(0,\frac{d^{*}}{2}+\frac{\lambda b^{*}}{4}\right)+\frac{c_{*}}{2}+\frac{\lambda}{4}a^{*},$$

$$B_{3}=\frac{\ell^{2}}{8}\max\left(0,\left[\frac{\lambda b^{*}}{4}+\frac{\lambda}{4\mu_{3}}-\frac{\tau}{2}\left\{\frac{\bar{d}_{*}}{2}+\frac{\lambda}{4}\bar{b}_{*}-\lambda d^{*}+\lambda\mu_{2}\right\}\right]\right)+\frac{\lambda a^{*}}{4}-\frac{\tau}{2}\left\{\frac{\bar{c}_{*}}{2}+\frac{\lambda}{4}\bar{a}_{*}-\lambda c^{*}+\lambda\mu_{4}\right\}.$$

$B_1, B_2$ ve $B_3$ ifadelerinin yeteri kadar küçük $\tau$ için pozitif olduğu aşikardır.

Şimdi de (4.32) eşitsizliğinin sağ tarafını yukarıdan şöyle değerlendirelim

$$\leq\left(-b_*-\frac{\tau}{4}\bar{b}_*+\frac{\tau}{2}d^*+\lambda-\frac{\lambda}{4}\tau^2\bar{b}_*+\mu_1\right)\|z_t\|^2+\left(-\alpha-\frac{\tau}{4}\bar{a}_*+\frac{\tau}{2}c^*-\frac{\lambda}{4}\tau^2\bar{a}_*+\mu_4\right)\|z_{\bar{x}t}\|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\bar{c}^*+\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*-\lambda c_*+\lambda\mu_4\right)\|z_{\bar{x}}\|^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\bar{a}^*+\frac{1}{2}\bar{c}^*+\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*-\lambda c_*+\lambda\mu_4\right)\left\|\check{z}_{\bar{x}}\right\|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\bar{d}^*+\frac{\lambda}{4}\bar{b}^*-\lambda d_*+\lambda\mu_2\right)\|z\|^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\bar{b}^*+\frac{1}{2}\bar{d}^*+\frac{\lambda}{4}\bar{b}^*-\lambda d_*+\lambda\mu_2\right)\left\|\check{z}\right\|^2+$$

$$+\left(\frac{1}{4\mu_1}+\frac{\lambda}{4\mu_2}\right)\left\|R_i^{(1)}\right\|^2+\frac{1+\lambda}{4\mu_4}\left\|R_i^{(0)}\right\|^2 . \tag{4.38}$$

Yine önceki eşitsizlikte olduğu gibi,

$$\|z_{\bar{t}}\|^2\leq\frac{\ell^2}{8}\|z_{\bar{x}t}\|^2,\ \|z\|^2\leq\frac{\ell^2}{8}\|z_{\bar{x}}\|^2,\ \left\|\check{z}\right\|^2\leq\frac{\ell^2}{8}\left\|\check{z}_{\bar{x}}\right\|^2$$

eşitsizlikleri gereğince şöyle yazalım

$$\leq -D_1\|z_{\bar{x}t}\|^2-D_2\|z_{\bar{x}}\|^2-D_3\left\|\check{z}_{\bar{x}}\right\|^2+\left(\frac{1}{4\mu_1}+\frac{\lambda}{4\mu_2}\right)\left\|R_i^{(1)}\right\|^2+\frac{1+\lambda}{4\mu_4}\left\|R_i^{(0)}\right\|^2 \tag{4.39}$$

Burada

$$D_1=\frac{\ell^2}{8}\min\left(0,b_*+\frac{\tau}{4}\bar{b}_*-\frac{\tau}{2}d^*-\lambda+\frac{\lambda}{4}\tau^2\bar{b}_*-\mu_1\right)+\alpha+\frac{\tau}{4}\bar{a}_*-\frac{\tau}{2}c^*+\frac{\lambda}{4}\tau^2\bar{a}_*-\mu_4\ ,$$

$$D_2=\frac{\ell^2}{8}\min\left(0,\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}\bar{d}^*-\frac{\lambda}{4}\bar{b}^*+\lambda d_*-\lambda\mu_2\right\}\right)+\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}\bar{c}^*-\frac{\lambda}{4}\bar{a}^*+\lambda c_*-\lambda\mu_4\right\}\ ,$$

$$D_3=\frac{\ell^2}{8}\min\left(0,\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}d^*-\frac{3\lambda}{4}\bar{b}^*+\lambda d_*-\lambda\mu_2\right\}\right)+\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}\bar{c}^*-\frac{3\lambda}{4}\bar{a}^*+\lambda c_*-\lambda\mu_4\right\}.$$

Buradan kolayca görülür ki lemmadaki (4.27) şartı dahilinde yeteri kadar küçük seçilen $\mu_1$, $\mu_2$ için,

$$\alpha+\frac{\ell^2}{8}(b_*-\lambda-\mu_1)>0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\lambda_0 c_*-\frac{1}{2}\overset{-*}{c}-\frac{\lambda_0}{4}\aleph_0\right)+\frac{\ell^2}{16}\left(\lambda_0 d_*-\frac{1}{2}\overset{-*}{d}-\frac{\lambda_0}{4}\aleph_1\right)>0$$

eşitsizlikleri sağlanır. Dolayısıyla $D_i>0$, $(i=1,2,3)$ dir.

Böylece (4.37) ve (4.39) dikkate alınarak (4.32)'den şöyle bir eşitsizlik alınacaktır

$$\delta_{\bar{t}}\leq -D_1\|z_{\bar{x}t}\|^2-D_2\|z_{\bar{x}}\|^2-D_3\left\|\overset{\vee}{z}_{\bar{x}}\right\|^2+\rho$$

$$\leq -\min\left\{\frac{D_1}{B_1},\frac{D_2}{B_2},\frac{D_3}{B_3}\right\}\left(B_1\|z_{\bar{x}t}\|^2+B_2\|z_{\bar{x}}\|^2+B_3\left\|\overset{\vee}{z}_{\bar{x}}\right\|^2\right)+\rho$$

veya

$$\delta_{\bar{t}}\leq -C_1\overset{\vee}{\delta}+\rho.$$

Burada

$$C_1=\min\left\{\frac{D_1}{B_1},\frac{D_2}{B_2},\frac{D_3}{B_3}\right\}>0 \quad \text{ve} \quad \rho=\left(\frac{1}{4\mu_1}+\frac{\lambda}{4\mu_2}\right)\left\|R_i^{(1)}\right\|^2+\frac{1+\lambda}{4\mu_4}\left\|R_i^{(0)}\right\|^2$$

dir.

Periyodik şarta sahip diferensiyel eşitsizliğin fark benzerini uygularsak,

$$\delta_K \le \left[1-\exp(-C_1T)\right]^{-1}\left\{\tau\sum_{i=1}^{M}|\rho_i|\exp(-C_1t_{M-i})\right\}\exp(-C_1t_K)+\tau\sum_{i=1}^{K}|\rho_i|\exp(-C_1t_{K-i}),$$

$$K=1,2,\ldots,M$$

şeklinde bir eşitsizlik alınabilir. Buradan da (4.35) dikkate alınarak lemmanın ispatı görülür.

Böylece alınan sonuçlara dayanarak şöyle bir teorem verilebilir.

**Teorem 4.1.** $u \in C^5(\overline{D})$ olmak üzere Lemma 4.1 'deki şartlar dahilinde (4.26) fark probleminin çözümü $\omega_h \times \omega_\tau^-$ 'da (4.4)'ün çözümüne yakınsar ve yakınsama hızı için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\|z_t\|+\|\hat{z}_{\bar{x}}\|+\|z\| \le C\left(h^2+\tau^2\right),\quad t \in \omega_\tau^+.$$

**İspat.** Bu değerlendirmenin ispatı direkt olarak Lemma 4.1 'deki (4.28) eşitsizliği ve (4.25)'den alınır. Gerçekten (4.28)'in sağ tarafı için şöyle yazabiliriz

$$C\tau\sum_{j-1}^{M}\left(\left\|R_j^{(0)}\right\|+\left\|R_j^{(1)}\right\|\right)\exp(-C_1t_{M-i}) \le C\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left\|R_j^{(0)}\right\|+\left\|R_j^{(1)}\right\|\right)+C\tau\left(\left\|R^{M(0)}\right\|+\left\|R^{M(1)}\right\|\right).$$

Bu da (4.25) ile birlikte teoremin doğruluğunu gösterir.

# EK BÖLÜM

## ÖRNEK VE PROĞRAM

### ÖRNEK

(4.1)-(4.4) problemi çin alınmış teorik sonuçlar aşağıdaki örnek için denetlenmiştir:

$$f(x,t)=\pi^2 \sin \pi x e^{\sin 2\pi t}\left(4\cos^2 2\pi t - 4\sin 2\pi t + 2\pi \cos 2\pi t + 1\right),$$

$$a(x,t)=1 \;,\; b(x,t)=0 \;,\; c(x,t)=1 \;,\; d(x,t)=0,$$

$$T=1 \;,\; \ell=1.$$

Uygun problemin kesin çözümü aşağıdaki gibi verilir

$$u(x,t)=\sin\pi x.\, e^{\sin 2\pi t}.$$

İşlemler için (4.26) denklemi esas alınarak şöyle bir iterasyon prosesi uygulanmıştır:

$$y^{(n+1)}_{\bar{t}t,i} - \left(A y^{(n+1)}_{\overset{0}{t}\bar{x}}\right)_x + B y^{(n+1)}_{\overset{0}{t}} - \left(C y^{(n+1)}_{\bar{x}}\right)_x + D y^{(n+1)} = f, \tag{1}$$

$$y^{(n+1)}(0,t) = y^{(n+1)}(\ell,t) = 0\,,$$
$$y^{(n+1)}(x,0) = y^{(n)}(x,T),$$
$$y^{(n+1)}(x,\tau) = y^{(n)}(x,T+\tau),$$

$n=0,1,2,\ldots$ , $y^{(0)}(x,T)$ ve $y^{(0)}(x,T+\tau)$ keyfi fonksiyonlar.

Kovma metodundan yararlanarak (1) algoritması şöyle uygulanmıştır

$$K_i y^{j+1}_{i-1} - L_i y^{j+1}_i + M_i y^{j+1}_{i+1} = -F_i \tag{2}$$

$$i=1,2,\dots,N-1 \;,\; j=1,2,\dots,M.$$

Burada

$$K_i=\frac{A_i^{j(n+1)}}{2h^2\tau},$$

$$L_i=\frac{1}{\tau^2}+\frac{A_{i+1}^{j(n+1)}}{2h^2\tau}+\frac{A_i^{j(n+1)}}{2h^2\tau}+\frac{B_i^{j(n+1)}}{2\tau},$$

$$M_i=\frac{A_{i+1}^{j(n+1)}}{2h^2\tau},$$

$$F_i=-\frac{A_i^{j(n+1)}}{2h^2\tau}y_{i-1}^{(j-1)(n+1)}+\frac{C_i^{j(n+1)}}{h^2}y_{i-1}^{j(n+1)}+\left(-\frac{1}{\tau^2}+\frac{A_{i+1}^{j(n+1)}}{2h^2\tau}+\frac{A_i^{j(n+1)}}{2h^2\tau}+\frac{B_i^{j(n+1)}}{2\tau}\right)y_i^{(j-1)(n+1)}+$$

$$+\left(\frac{2}{\tau^2}-\frac{C_{i+1}^{j(n+1)}}{h^2}-\frac{C_i^{j(n+1)}}{h^2}-D_i^{j(n+1)}\right)y_i^{j(n+1)}-\frac{A_{i+1}^{j(n+1)}}{2h^2\tau}y_{i+1}^{(j-1)(n+1)}+\frac{C_{i+1}^{j(n+1)}}{h^2}y_{i+1}^{j(n+1)}+f_i^j.$$

Uygulanan kovma yöntemi şu şekildedir

$$\alpha_{i+1}=\frac{M_i}{L_i-K_i\alpha_i}, \quad i=1,2,\dots,N-1 \;;\; \alpha_1=0,$$

$$\beta_{i+1}=\frac{F_i+K_i.\beta_i}{L_i-K_i\alpha_i}, \quad i=1,2,\dots,N-1 \;;\; \beta_1=0,$$

$$y_i^{j+1}=\alpha_{i+1}y_{i+1}^{j+1}+\beta_{i+1} \;,\; i=N-1,\; N-2,\dots,1,0 \;;\; y_N^{j+1}=0.$$

Bu örnek için bir QBASIC proğramı hazırlanmış ve IBM 'de daha etkin bellek kullanımıyla yapılmıştır. Varılan bazı sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir. H ve TO sırayla h ve $\tau$ adımlarını göstermektedir.

```
DIM ALFA(25), BETA(25), Y(25, 25), U(25, 25)
DEFDBL A-D, F, H, P-Q, T-U, X-Y
INPUT H, TO, N, M, K
PI = 3.141592653589793#
DEF FNA (X, T) = 1
DEF FNB (X, T) = 0
DEF FNC (X, T) = 1
DEF FND (X, T) = 0
DEF FNF (X, T) = PI * PI * SIN(PI * X) * EXP(SIN(2 * PI * T)) *
(4 * ((COS(2 * PI * T)) ^ 2 - SIN(2 * PI * T)) +
2 * PI * COS(2 * PI * T) + 1)
DEF FNU (X, T) = SIN(PI * X) * EXP(SIN(2 * PI * T))
L = 1
REM KESIN COZUMUN HESAPLANMASI
FOR J = 0 TO M + 1
T = J * TO
FOR I = 0 TO N
X = I * H
U(I, J) = FNU(X, T)
NEXT I: NEXT J
REM YAKLASIK COZUMUN HESABI
REM SINIR SARTLARININ BELIRLENMESI
FOR J = 0 TO M + 1
Y(0, J) = 0: Y(N, J) = 0
NEXT J
FOR I = 1 TO N - 1
Y(I, M) = 1.5
Y(I, M + 1) = 1.5
Y(I, 0) = Y(I, M)
Y(I, 1) = Y(I, M + 1)
NEXT I
REM KOVMA YONTEMININ UYGULANMASI
1 FOR J = 1 TO M
T = TO * J: ALFA(1) = 0: BETA(1) = 0
FOR I = 1 TO N - 1
X = I * H
X1 = (I + 1) * H
H1 = 2 * H * H * TO
H2 = H * H
TO1 = 2 * TO
TO2 = TO * TO
REM ***
A1 = FNA(X1, T) / H1: A2 = FNA(X, T) / H1
C1 = FNC(X, T) / H2:  C2 = FNC(X1, T) / H2
B1 = FNB(X, T) / TO1
D1 = FND(X, T)
REM KOVMA KATSAYILARI
AI = A2
BI = A1
CI = (1 / TO2 + A1 + A2 + B1)
REM ***
Q1 = -A2 * Y(I - 1, J - 1)
Q2 = (-1 / TO2 + A1 + A2 + B1) * Y(I, J - 1)
Q3 = -A1 * Y(I + 1, J - 1)
Q4 = C1 * Y(I - 1, J)
Q5 = (2 / TO2 - C1 - C2 - D1) * Y(I, J)
Q6 = C2 * Y(I + 1, J)
F1 = FNF(X, T)
FI = Q1 + Q2 + Q3 + Q4 + Q5 + Q6 + F1
C3 = CI - AI * ALFA(I)
ALFA(I + 1) = BI / C3
BETA(I + 1) = (FI + AI * BETA(I)) / C3
NEXT I
FOR I = N - 1 TO 0 STEP -1
```

```
    Y(I, J + 1) = ALFA(I + 1) * Y(I + 1, J + 1) + BETA(I + 1)
    NEXT I: NEXT J
    IF H = TO THEN
       O = 1: S = 1
       GOSUB 3
       GOTO 4
    ELSE
       IF H = TO / 2 THEN
          O = 2
          S = 1
          N = N / 2
          GOSUB 3
          N = N * 2: GOTO 4
       ELSE
            IF H / 2 = TO THEN
               O = 1
               S = 2
               M = M / 2
               GOSUB 3
               M = M * 2: GOTO 4
            ELSE
               LPRINT "BU VERI YAZDIRILAMAZ"
            END IF
       END IF
    END IF
4   L = L + 1
    IF K = L THEN 2
    FOR I = 1 TO N - 1
    Y(I, 0) = Y(I, M)
    Y(I, 1) = Y(I, M + 1)
    NEXT I
    GOTO 1
2   END
3   LPRINT
    LPRINT
    A6$ = "H=#.##      TO=#.##      ##. ADIM"
    LPRINT USING A6$; H; TO; L
    LPRINT
    B6$ = "(X, T)        U(I,J)       Y(I,J)       N. HATA    "
    LPRINT B6$
    B7$ = "----------- ----------- ----------- -----------"
    LPRINT B7$
    B8$ = "(#.##, #.##) ##.######## ##.######## ##.########"
    LPRINT
    FOR J = 0 TO M + 1
    T = S * J * TO
    FOR I = 0 TO N
    X = O * I * H
    D = O * I: P = S * J
    IF I = J THEN
       IF U(D, P) <> 0 THEN
          XNH = ABS((U(D, P) - Y(D, P)) / U(D, P))
       ELSE
          XNH = 0
       END IF
    LPRINT USING B8$; X; T; U(D, P); Y(D, P); XNH
    END IF
    NEXT I: NEXT J
    RETURN
```

H=0.20 TO=0.20 2. ADIM

| (X, T) | U(I,J) | Y(I,J) | N. HATA |
|---|---|---|---|
| (0.00, 0.00) | 0.00000000 | 0.00000000 | 0.00000000 |
| (0.20, 0.20) | 1.52144859 | 1.62402220 | 0.06741838 |
| (0.40, 0.40) | 1.71189931 | 1.69450952 | 0.01015819 |
| (0.60, 0.60) | 0.52836548 | 0.04990643 | 0.90554563 |
| (0.80, 0.80) | 0.22708063 | 0.17314443 | 0.23752006 |
| (1.00, 1.00) | 0.00000000 | 0.00000000 | 1.00000000 |

H=0.10 TO=0.20 2. ADIM

| (X, T) | U(I,J) | Y(I,J) | N. HATA |
|---|---|---|---|
| (0.00, 0.00) | 0.00000000 | 0.00000000 | 0.00000000 |
| (0.20, 0.20) | 1.52144859 | 1.62822550 | 0.07018108 |
| (0.40, 0.40) | 1.71189931 | 1.64643916 | 0.03823832 |
| (0.60, 0.60) | 0.52836548 | 0.03595371 | 0.93195296 |
| (0.80, 0.80) | 0.22708063 | 0.14401708 | 0.36578880 |
| (1.00, 1.00) | 0.00000000 | 0.00000000 | 1.00000000 |

## KAYNAKLAR

AMİRALİYEV, G.M., 1991, On Difference Schemes for Problems of the Theory of Dispersive Waves, Soviet Math. Dokl. Vol. 42, No:2, 235-238.

AMİRALİYEV, G.M., 1988, Towards the Numerical Solution of the Periodical On Time Problem for Pseudo-Parabolic Equation, Numerical methods of Analysis BAKU State University, 3-8.

BULLOUGH, R.K. and CAUDREY, P.J., 1980, Solitons, New York, 1-13.

DODD, R.K., EILBECK, J.C., GIBBON, J.B., MORRIS, H.C., 1982, Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press Inc. London.

GUO-BEN-YO, MANORANJAN, V.S., 1983, A Spectral Method for Solving the RLW Equations, SİAM, j. Numer, Anal. V.5, p.307-318.

IKEZI, H., 1978, Experiments on Solitons in Plasmas, Solitons in Action, Academic Press, 152-170.

KRILOV, V.I., BABKOV, V.V. and MONASTIRNIY, P.I., 1976, Hesaplama Yöntemleri, Vol.1, Nauka, Moskova (Rusça).

LAGNESE, J.L., 1972, General Boundary-Value Problems for Differential Equations of Sobolev Type, SIAM J. Math. Anal. V.3, 105-119.

LARKIN, N.A., NOVIKOV, V.A. and YANENKOV, N.N., 1980, Nonlinear Equations of Variable Type, Nauko, Novosibirsk (Russian).

LEBEDEV, V.I., 1957, The method of Difference for the Equations of Sobolev Type, Dokl. Acad. Sci. USSR, V.114, No.6, 1166-1169.

LEOPOLD, H., 1985, Periodic Solutions to A One-Dimensional Strongly Nonlinear Wave Equation with Strong Dissipation, Czechosl. Math. J. V.35, (110). p.278-293.

LONNGREN, K.E., 1978, Observation of Solitons on Nonlinear Dispersive Transmission Lines, Soliton in Action, Academic Press. 127-148.

MEMMEDOV, Y.C., 1980, Eşitsizlikler Hakkında Teoremler, İlim, Aşkabad, (Rusça).

SAMARSKI, A.A., 1984, Theory of Difference Schemes, German Translate of 1. st ed. Geest and Portig Leipzig.

SAMARSKI, A.A. and GULIN, A.V., 1989, Sayısal Yöntemler, Nauko, Moskova (Rusça).

SOBOLEV, C.L., 1954, About New Problems in Mathematical Physics, Izv. Acad. Sci. USSR, Mathematics, 18, No.1, 3-50.

WEBB, G.F., 1980, Existence and Asymptotic Behavior for a Strongly Damped Nonlinear Wave Equation, Can. j. Math., v.32, No.3, p.631-643.

## ÖZET

Bu çalışmada dissipative dalga teorisinin zamana göre periyodik problemlerinin sonlu farklar yöntemiyle nümerik çözümü araştırılmıştır. Bu tip denklemler matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin çeşitli alanlarında kullanılmaktadır.

Bu çalışma dört bölüm ve bir de ek bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümü olup problem tanıtılmıştır.

İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan formüller ve notasyonlar ispatsız olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde adi diferensiyel denkleme ait periyodik problem için fark şemasının kurulması ve matematiksel araştırmaları yapılmıştır.

Dördüncü bölümde kuvvetli dissipative terime sahip dalga denklemi için fark şemasının kurulması ve de matematiksel araştırmaları yapılarak yaklaşık çözüm verilmiş ve yaklaşık çözümün $0(h^2+\tau^2)$ yakınsamasına sahip olduğu ispatlanmıştır.

Ek bölümde elde edilen teorik sonuçlar bir örnek üzerinde denetlenmiş ve çalışmaya QBASIC proğramlama dilinde bir proğramla bilgisayar desteği sağlanmıştır. Proğram çıktısı tablo haline sunulmuştur.

## SUMMARY

In this study, the numerical solution of the periodic problem with regard to time for dissipative wave theory by finite difference method was investigated. The equations of this type arise in many areas of mathematical physics and fluid mechanics.

This work consists of four chapters and an appendix.

In the first chapter, the problem has been introduced.

In the second chapter, some notations and basic formulas without proof has been presented.

In the third chapter, for periodic problem of ordinary differential equation, difference schemes construction and mathematical researches were done.

In the fourth chapter, for wave equation with strong dissipative term. difference schemes is contructed, mathematical researches are done and approximation error is presented that the approximation is $0(h^2 + \tau^2)$ has been proved.

In the appendix, theoretical results are controlled on the example and are computed in QBASIC Programming Language. Some output of this program is given by a table.

## ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Elazığ'da doğdu. İlköğrenimini İzmir'in Ödemiş kazasının Yenişehir Köyünde, orta ve lise tahsilini de Elazığ'da tamamladı. 1986 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1987 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 1989 yılında yine Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans proğramını bitirdi ve 1990 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktora proğramına başladı. Evli ve iki çocuk babasıdır.