T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

REGÜLER HALKALARDA İDEMPOTENT ÇARPIMLARIN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan: Kamil ARI

Yönetici: Prof.Dr. Abdurrahim YILMAZ

VAN-1996

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

REGÜLER HALKALARDA İDEMPOTENT ÇARPIMLARIN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan: Kamil ARI

JÜRİ ÜYELERİ

BAŞKAN

Prof. Dr. Abdurrahim YILMAZ

ÜYE

Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ

ÜYE

Yrd. Doç. Dr. Muammer YILDIZ

TEZ KABUL TARİHİ

21/06/1996

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmamıza kaynak oluşturan genel tanımlar ve özelikler; ikinci bölümde yine çalışmamıza kaynak oluşturan (von Neumann) regüler, sağ self-injektif halkalar, halka tipleri ve boyut fonksiyonlarıyla ilgili tanımlar, önermeler ve teoremler detaya girilmeden verilmiştir.

Üçüncü bölüm dört kesimden oluşmaktadır. İlk kesimde idempotent matrislerin çarpımlarının bir kısa özeti verilmiştir. İkinci kesimde bu idempotent matrislerin çarpım sonuçlarının bir genişlemesi olarak, regüler (von Neumann) halkalarda idempotentlerin çarpımları incelenmiştir. Üçüncü ve dördüncü kesimde sırasıyla ünit-regüler halkalar ve sağ self-injektif halkalarda idempotent çarpımlarının bir karakterizasyonu verilmiştir.

SUMMARY

This work consists of three chapters.

In the first and the second chapters, the general definitions properties, propositions and theorems related to regular (von Neumann), right self-injektive rings, ring types and dimension functions, both of which constitutes the origin of our work, are given vithout going into details.

The third chapter consists of four sections. In the first section, a brief study of products of idempotent matrices is performed. In the second section, products of idempotents are searched in regular rings as extensions of results of products of idempotent matrices. In the third and fourth sections, a characterization of products of idempotents are given in unit-regular rings and right self-injektive rings.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda bana rehberlik eden Prof. Dr. Abdurrahim YILMAZ'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1. ÖNBİLGİLER

1.1. Halkalar ve İdealler

1.1.1. Tanım: R boş olmayan bir küme ve R üzerinde $+: (a,b)\to a+b$, $.: (a,b)\to a.b$ şeklinde tanımlı toplama ve çarpma işlemleri verilmiş olsun.

(i) $(R,+)$ bir değişmeli grup;

(ii) Her $a,b,c\in R$ için,

$$a.(b.c)=(a.b.).c$$

(iii) Her $a,b,c\in R$ için,

$$a.(b+c)=a.b+a.c$$

$$(a+b).c=a.c+b.c$$

özelikleri sağlanırsa $(R,+,.)$ üçlü yapısına bir **halka** denir ve kısaca R ile gösterilir.

$\forall a,b\in R$ için $a.b=b.a$ ise R halkasına bir **değişmeli halka** denir.

R de $a.1_R=1_R.a=a$ olacak şekilde bir $1_R\in R$ varsa R ye bir **birimli halka** ve 1_R elemanına da R nin **birimi** denir.

1.1.2. Tanım: R bir halka ve $0\neq a\in R$ olsun. $ab=0$ $(ba=0)$ olacak şekilde bir $b\in R$ varsa a ya bir **sol sıfır bölen (sağ sıfır bölen)** denir. Aynı zamanda a hem sağ hem de sol sıfır bölen ise a ya **sıfır bölen** denir.

1.1.3. Tanım: R birimli bir halka ve $0\neq a\in R$ olsun. $ba=1_R$ $(ab=1_R)$ olacak şekilde bir $b\in R$ varsa b ye a nın bir **sol tersi (sağ tersi)** ve a ya **sol tersinir (sağ tersinir)** eleman denir. a hem sol tersinir hem de sağ tersinir ise a ya bir **tersinir eleman** ya da **ünit** eleman denir.

1.1.4. Tanım: D birimli bir halka olsun. D nin sıfır olmayan her elemanı tersinir ise D ye bir **bölümlü halka** denir. Değişmeli bir bölümlü halkaya bir **cisim** denir.

1.1.5. Tanım: R bir halka olsun. R nin boş olmayan bir I altkümesi R deki işlemlere göre bir halka ise I ye R nin bir **althalkası** denir.

1.1.6. Tanım: I, R halkasının bir alt halkası olsun. Her $x \in I$ ve her $r \in R$ için $xr \in I$ ($rx \in I$) ise I ya R nin bir **sağ (sol) ideali** denir. I hem bir sol ideal ve hem de bir sağ ideal ise I ya R nin **iki-yönlü ideali** veya kısaca **ideali** denir, $I \leq R$ ile belirtilir.

1.1.7. Tanım: R bir halka ve $X \subseteq R$ olsun. R nin X i kapsayan bütün (sol) ideallerinin kümesi $\{A_i: i \in I\}$ ise $\bigcap_{i \in I} A_i$ bir ideal olup, buna R nin X tarafından **üretilen** (sol) **ideali** denir ve $< X >$ ile gösterilir. X in elemanlarına $< X >$ idealinin **üreteçleri** denir. $X=\{x\}$ ise $< X >$ idealine x tarafından üretilen **esas ideal** denir ve $< x >$ ile gösterilir. $X=\varnothing$ ise $< X > = 0$ dır. Her ideali esas ideal olan bir halkaya bir **esas ideal halkası** denir.

1.1.8. Tanım: R bir halka ve P, R nin bir ideali olsun. $P \neq R$ ve her $A,B \leq R$ idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ ise P ye R nin bir **asal ideali** denir.

1.1.9. Tanım: R halkasında M bir ideal (sol ideal) olsun. $M \leq N \leq R$ iken ya $N=M$ ya da $N=R$ ise M ye R nin bir **maksimal ideali** denir.

1.1.10. Tanım: R bir halka olsun. (0) bir asal ideal ise R ye **asal** bir halka denir.

1.1.11. Tanım: R bir halka ise R nin tüm asal ideallerinin arakesiti P(R) ye R nin **asal radikali** denir. R nin asal idealleri yoksa $P(R)=R$ dir. $P(R)=0$ ise R ye **yarı asal** bir halka denir.

1.1.12. Tanım: R halkasının bir S altkümesi için $r(S,R)=\{a \in R: Sa=0\}$ ve $\ell(S,R) = \{a \in R: aS=0\}$ ye S nin, sıra ile, **sağ ve sol sıfırlayıcıları** denir.

1.1.13. Tanım: R bir halka olsun. R de (0) ve R den başka ideal yoksa R ye bir **basit halka** denir.

1.1.14. Tanım: R'nin tüm maksimal ideallerinin kesişimine R nin **Jacobson Radikali** denir ve J(R) ile gösterilir.

Örneğin, $J(Z)=0$ ve $J(F[x])=(x)$, $J(F)=0$

1.1.15. Tanım: R bir halka olsun. $J(R)=0$ ise R ye bir **yarı basit** halka, $J(R)=R$ ise R ye bir **radikal halka** denir.

1.2. İdempotentler ve Peirce Ayrışımı

1.2.1. Tanım: R bir halka olsun. $e^2=e$ olacak şekilde bir $e\in R$ elemanına bir **idempotent** denir. e ve f idempotentler olsun. $ef=0$ ise e ile f ye dik idempotentler denir. $f=1-e$, e ye dik bir idempotent olup f ye e nin **dik tümleyeni** denir.

Her elemanı idempotent olan halkaya bir **Boolean halka** denir. 0 ve 1 aşikar idempotentlerdir.

1.2.2. Örnek: $0\leq t\leq n$ ve N bir (n-t)xt matris, M bir tx(n-t) matris ise;

$$E=S[M,N,t]=\begin{bmatrix} -MN & M \\ -(NMN+N) & NM+I_{n-t} \end{bmatrix}$$

matrisleri nxn matris halkasının tüm idempotentlerini tanımlar. (Barnett and Camillo 1994).

1.2.3. Tanım: $e\in R$ ve $e^2=e$ olsun. e aşikâr olmayan iki dik idempotentin toplamı şeklinde yazılamaz ise e ye bir **ilkel idempotent** denir.

1.2.4. Önerme (Peirce Ayrışımı): R birimli bir halka olsun. $e^2=e\in R$ ve $f^2=f\in R$ ve $f=1-e$, e nin dik tümleyeni ise;

(i) $R=eR\oplus fR$, R nin sağ ideal direkt toplam ayrışımı,

(ii) $R=Re\oplus Rf$, R nin sol ideal direkt toplam ayrışımı,

(iii) $R=eRe\oplus eRf\oplus fRe\oplus fRf$ R nin Peirce ayrışımıdır. eRe ile fRf de e ve f birimlerdir.

$eRe=\{r\in R \mid er=r=re\}$, $fRf=\{r\in R \mid fr=r=rf\}$ (Lam 1991).

1.2.5. Uyarı: eRe, R nin bir althalkasıdır, ancak ideali değildir. Çünkü $\lambda\in R$ için $\lambda(ere)\notin eRe$ dir.

1.2.6. Önerme: $e=e^2\in R$ bir merkezi idempotenttir ($e\in Z(R)$) $\Leftrightarrow$ $eRf=fRe=0$ dır. (Lam 1991)

1.2.7. Önerme: R bir halka ve e ile f, R de idempotent elemanlar olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $eR\cong fR$, sağ R-modüller olarak,

(ii) $Re\cong Rf$ sol R-modüller olarak,

(iii) $e=ab$ ve $f=ba$ olacak şekilde $a \in eRf$ ve $b \in fRe$ vardır.

(iv) $e=ab$ ve $f=ba$ olacak şekilde $a,b \in R$ vardır.

e ile f bu şartlardan herhangi birini sağlar ise e ile f ye izomorfik idempotentler denir ve $e \cong f$ şeklinde gösterilir (Lam 1991).

2. REGÜLER HALKALAR

2.1. Modüller

2.1.1. Tanım: R bir halka ve A bir toplamsal değişmeli grup olsun. A üzerinde bir $R \times A \rightarrow A$, $(r,a) \rightarrow ra$ sol (skalar) çarpımı tanımlansın. Her $a,b \in A$ ve her $r,s \in R$ için,

(i) $r(a+b)=ra+rb$,

(ii) $(r+s)a=ra+sa$,

(iii) $(rs)\,a=r(sa)$,

ise A ya bir **sol R-modül** denir.

R birimli ve her $a \in A$ için $1_R a=a$ ise A ya bir birimsel sol R-modül denir.

R bölümlü halka ise birimsel sol R-modüllere R üzerinde birer **sol vektör uzayı** denir.

2.1.2. Tanım: R bir halka olsun. A bir R-modül ve A nın boş olmayan bir altkümesi B olsun.

(i) B, A nın bir altgrubu,

(ii) Her $b \in B$ ve $r \in R$ için $rb \in B$,

ise B ye A nın bir **altmodülü** denir. R bir bölümlü halka ise B ye A nın bir altuzayı denir.

2.1.3. Tanım: A ve B iki R-modül olsun. Eğer bir $f:A \rightarrow B$ fonksiyonu her $a,b \in A$ ve $r \in R$ için,

(i) $f(a+b)=f(a)+f(b)$,

(ii) $f(ra)=rf(a)$,

şartlarını sağlarsa f ye A dan B ye bir **R-modül homomorfizması** ya da kısaca **R-homomorfizma** denir. Eğer f 1-1 ise f ye **R-monomorfizma,** f örten ise f ye **R-epimorfizma** denir. Eğer f 1-1 ve örten R-homomorfizma ise, f ye R-izomorfizma denir. R bölümlü halka ise R-homomorfizmasına bir **lineer dönüşüm** denir.

2.1.4. Tanım: A bir R modül olsun. Eğer A,B nin bir alt modülüne izomorf ise A,B modülüne **altizomorf** denir ve $A \lesssim B$ ile belirtilir.

Herhangi bir A modülü ve α kardinali için A nın α kopyasının direkt toplamı, αA ile belirtilir.

2.1.5. Tanım: I bir indeks kümesi, $\{A_i \mid i \in I\}$ bir R-modüller ailesi ise $\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i) | i \in I\}$ direkt çarpım kümesi de bir R-modül olup buna $\{A_i : i \in I\}$ ailesinin **direkt çarpım** modülü denir. $A_i \leq \prod_{i\in I} A_i$ olduğu açıktır. $\bigoplus_{i\in I} A_i = \{(a_i) \in \prod_{i\in I} A_i : a_i = 0$ en çok sonlu tane i hariç$\}$ ile verilen altküme $\prod_{i\in I} A_i$ nin bir altmodülü olup buna $\{A_i : i \in I\}$ ailesinin **direkt toplamı** denir.

2.1.6. Tanım: A,B,C R-modüller ve $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ R-homomorfizmaları olsun. Çek g=Imf olması durumunda yukardakine bir **tam** dizi denir.

2.1.7. Tanım: P,A,B, R-modüller olsun. $A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$ dizisi tam olmak üzere R-modül homomorfizmalarının herhangi bir diyagramı verilmiş olsun: Her f: P→B homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (gh=f) olacak şekilde bir h: P→A, R-modül homomorfizması varsa P ye bir **projektif modül** denir.

2.1.8. Tanım: J,A,B R-modüller olsun. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B$ dizisi tam olmak üzere R-modül homomorfizmalarının herhangi bir diyagramı verilmiş olsun: Her f: A →J homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ($hg=f$) olacak şekilde bir $h:B\to J$, R-modül homomorfizması varsa J ye bir **injektif modül** denir.

2.1.9. Tanım: R bir halka olsun. Her $x\in R$ için $xyx=x$ olacak şekilde bir $y\in R$ varsa R ye bir **(von Neumann) regüler halka** denir.

2.1.10. Tanım: A bir regüler halka üzerinde sonlu üretilmiş projektif bir modül olsun. A nın tüm sonlu üretilmiş altmodüllerinin kümesi L (A) ile gösterilsin. Buna göre $L(R_R)$,R nin tüm esas sağ ideallerini belirtir.

2.1.11. Teorem: Bir regüler halka üzerinde $A_1\oplus\ldots\oplus A_n\cong B_1\oplus\ldots\oplus B_k$ sonlu üretilmiş projektif modüller olsun. Bu durumda $j=1, \ldots, k$ için $A_{1j}\oplus\ldots\oplus A_{nj}\cong B_j$ olacak şekilde, $i=1, \ldots, n$ için $A_i=A_{i1}\oplus\ldots\oplus A_{ik}$ ayrışımları vardır. (Goodearl 1979)

2.1.12. Sonuç: $A_1\oplus\ldots\oplus A_n \lesssim B_1\oplus\ldots\oplus B_k$ bir regüler halka üzerinde sonlu üretilmiş projektif modüller olsun.

(i) $1\le j\le k$ için, $A_{1j}\oplus\ldots\oplus A_{nj}\lesssim B_j$ olacak şekilde $1\le i\le n$ için, $A_i=A_{i1}\oplus\ldots\oplus A_{ik}$ ayrışımları vardır.

(ii) $1\le i\le n-1$ için, $A_i\cong B_{1i}\oplus\ldots\oplus B_{ki}$ ve $A_n\lesssim B_{1n}\oplus\ldots\oplus B_{kn}$ olacak şekilde $1\le j\le k$ için, $B_j=B_{i1}\oplus\ldots\oplus B_{in}$ ayrışımları vardır. (Goodearl 1979)

2.1.13. Önerme: R bir regüler halka, $J\le R$ bir sağ ideal olup A, sonlu üretilmiş bir projektif sağ R-modül olsun. Buna göre $A=AJ\Leftrightarrow$ bir n pozitif tamsayısı için, $A\lesssim nJ$ dir (Goodearl 1979).

2.1.14. Sonuç: R bir regüler halka, H ve J, R nin sağ idealleri olsun ve H nin sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. O zaman $H\le RJ$ dir $\Leftrightarrow$ bir n pozitif tamsayısı için, $H\lesssim nJ$ dir (Goodearl 1979).

2.1.15. Tanım: R bir regüler halka olsun. R de tüm idempotentler merkezi ise R ye bir **değişmeli regüler halka** denir.

2.1.16. Tanım: R bir halka ve $a \in R$ olsun. $a=aua$ olacak şekilde R nin bir u ünit elemanı varsa a ya R nin bir **ünit-regüler** elemanı denir.

2.1.17. Tanım: R bir halka olsun. R nin tüm elemanları ünit-regüler elemanlar ise R ye bir **ünit regüler halka** denir.

2.1.18. Teorem: $T=End_R(A)$ halkası regüler olacak şekilde A bir sağ R-modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) T ünit-regülerdir.

(ii) $A_1 \cong A_2$ olmak üzere $A=A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$ ise $B_1 \cong B_2$ dir.

(iii) $\forall x \in T$ için çek $x \cong$ yançek x dir.

(iv) $eT \cong fT$ olacak şekilde $e^2=e$, $f^2=f \in T$ ise $(1-e)T \cong (1-f)T$ dir. (Goodearl 1979)

2.1.19. Teorem: R regüler bir halka olsun. Bu durumda R ünit-regüler bir halkadır $\Leftrightarrow$ tüm sonlu üretilmiş A,B,C projektif sağ R-modüller için, $A \oplus B \cong A \oplus C \Rightarrow B \cong C$ dir. (Goodearl 1979)

2.1.20. Sonuç: R bir ünit-regüler halka olsun. A,B,C R üzerinde sonlu üretilmiş projektif sağ modüller olsun. $A \oplus B \lesssim A \oplus C$ ise $B \lesssim C$ olur. (Goodearl 1979)

2.1.21. Sonuç: R bir ünit-regüler halka olsun. A, R üzerinde sonlu üretilmiş bir projektif sağ modül ise, $End_R(A)$ ünit-regüler halkadır. (Goodearl 1979)

2.1.22. Tanım: A bir modül olsun. A kendinin bir direkt toplananına izomorf değil ise A ya bir **direkt sonlu (von Neumann-Sonlu)** modül denir. Denk bir ifadeyle, A direkt sonlu modüldür $\Leftrightarrow$ $A \oplus B \cong A$ olması ancak, $B=0$ için mümkündür. Aksi halde A **direkt sonsuz** yani, $A \cong B$ ve $C \neq 0$ olmak üzere $A=B \oplus C$ dir.

2.1.23. Önerme: Bir A sağ R-modülü direkt sonludur $\Leftrightarrow$ her $x,y \in End_R(A)$ için $xy=1$ iken $yx=1$ dır. (Goodearl 1979)

2.1.24. Tanım: R bir halka olsun. Her $x,y \in R$ için $xy=1$ iken $yx=1$ oluyorsa R ye **direkt sonlu** halka denir.

Örneğin, V sonlu boyutlu bir F-uzay; $R=End_F V$ ise R direkt sonludur. $V=F\{v_1, v_2, \ldots\}$ sonsuz boyutlu ise;

$$
\begin{array}{llll}
x: & v_1 \to 0 & \qquad y: & v_1 \to v_2 \\
 & v_2 \to v_1 & & v_2 \to v_3 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & v_n \to v_{n-1} & & v_n \to v_{n+1} \\
 & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

ile tanımlı eşlemeler V ye lineerlikte genişletilerek elde edilen x ve y endomorfizmaları için $xy=1$, $yx \neq 1$ olup R direkt sonsuzdur.

2.1.25. Önerme: R bir ünit-regüler halka ise tüm sonlu üretilmiş projektif R-modüller direkt sonludur. Sonuç olarak her n için $M_n(R)$ direkt sonludur. (Goodearl 1979)

2.1.26. Tanım: R bir halka ve M bir sol ya da sağ R-modül olsun. M nin tüm altmodüllerinin ailesi sırasıyla, artan zincir kuralı veya azalan zincir kuralını sağlar ise, M ye **noetherian** veya **artinian** denir.

2.1.27. Tanım: A bir (sol) R-modül olsun. A nın sıfırlayıcısı 0 ise A ya bir **sadık modül** denir. R nin basit, sadık, sırasıyla, sol ve sağ modülü varsa R ye **sol** ya da **sağ ilkel** bir halka denir.

2.1.28. Tanım: I, R nin bir ideali olsun. R/I bölüm halkası sırasıyla, sol ya da sağ ilkel ise I ya **sol** ya da **sağ ilkel** ideal denir.

2.1.29. Teorem: İlkel bölüm halkaları artinian olacak şekilde R bir regüler halka ise, R ünit-regüler halkadır. (Goodearl, 1979)

2.1.30. Tanım: $x \in R$ bir nilpotent eleman olsun. $x^n=0$ olacak şekilde en küçük n doğal sayısına x in **nilpotentlik indeksi** denir. R halkasında, iki-yönlü bir J idealinin indeksi, J nin tüm nilpotent elemanlarının indekslerinin supremumudur. Bu supremum sonlu ise J ye **sınırlı indekse** sahip bir ideal denir.

2.1.31. Teorem: n bir pozitif tamsayı ve R en çok n indeksli bir regüler halka olsun. R/P (bir halka olarak) ayrışamaz olacak şekilde P, R nin bir öz iki-yönlü ideali olsun. Bu durumda, bir $k \leq n$ pozitif tamsayısı ve bir D bölümlü halka için, $R/P \cong M_k(D)$ dir. (Goodearl 1979)

2.1.32. Sonuç: R, sınırlı indekse sahip bir regüler halka ise, R ünit-regülerdir. (Goodearl, 1979)

2.1.33. Tanım: R bir regüler halka olsun. Her $x,y \in R$ için $xR \lesssim yR$ ya da $yR \lesssim xR$ oluyorsa R ye **karşılaştırma aksiyomunu** sağlar denir. Başka bir ifade ile, R karşılaştırma aksiyomunu sağlayan regüler bir halkadır $\Leftrightarrow$ herhangi $e^2=e$, $f^2=f \in R$ için ya $st=e$ ya da $ts=f$ olacak şekilde $s \in eRf$ ve $t \in fRe$ vardır.

2.1.34. Önerme: R karşılaştırma aksiyomunu sağlayan regüler bir halka olsun. A ile B sonlu üretilmiş projektif sağ R-modüller ise, ya $A \lesssim B$ ya da $B \lesssim A$ dır. (Goodearl, 1979).

2.1.35. Sonuç: A, bir regüler R halkası üzerinde sonlu üretilmiş projektif bir sağ modül olsun. R karşılaştırma aksiyomunu sağlar ise, $End_R(A)$ halkası da karşılaştırma aksiyomunu sağlar. (Goodearl 1979)

2.1.36. Tanım: R herhangi bir halka ise R deki tüm merkezi idempotentlerin kümesini B(R) ile gösteriyoruz. B(R), $e \wedge f = ef$, $e \vee f = e+f-ef$ işlemleri altında bir halka olup B(R) bir **Boolean Cebirdir.**

2.1.37. Tanım: Bir R halkasının BS(R) ile gösterilen **Boolean tayfı (spectrum)** B(R) Boolean cebirinin tayfıdır. Yani, B(R) de kapalı kümeler herhangi bir $X \subseteq B(R)$ için $\{M \in BS(R): X \subseteq M\}$ olacak şekilde B(R) yi topolojilendirdiğimizde BS(R), B(R) nin tüm maksimal M idaeller ailesi olmaktadır. Ayrıca BS(R) kompakt, hausdorff, tamamen bağlantısız bir uzaydır.

2.1.38. Tanım: R regüler bir halka olsun. Her $x,y \in R$ için, $exR \lesssim eyR$ ve $(1-e)yR \lesssim (1-e)xR$ olacak şekilde $e \in B(R)$ varsa R ye **genel karşılaştırma aksiyomunu** sağlar denir.

2.1.39. Teorem: R, genel karşılaştırma aksiyomunu sağlayan direkt sonlu regüler bir halka ise, R bir ünit-regüler halkadır. (Goodearl, 1979)

2.2. Regüler Sağ Self-İnjektif Halkalar ve Regüler Halka Tipleri

2.2.1. Tanım: R_R modülü injektif ise, yani $A \subseteq B$ olacak şekildeki her A,B R-modüller ve her $f: A \to R$, R-homomorfizmaları için f nin bir $g: B \to R$ genişlemesi olması durumunda, R ye bir **sağ self-injektif** halka denir.

2.2.2. Tanım: R herhangi bir halka ve A bir R-modül olsun. $RA \neq 0$ ise A ya **singüler olmayan** injektif halka modülü denir.

2.2.3. Teorem: R bir regüler halka ise, aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) R sağ self-injektiftir.

(ii) Tüm sonlu üretilmiş singüler olmayan sağ R-modüller projektiftir.

(iii) Tüm sonlu üretilmiş singüler olmayan sağ R-modüller injektiftir.

2.2.4. Sonuç: R regüler sağ self-injektif bir halka olsun. A herhangi bir sonlu üretilmiş singüler olmayan sağ R-modül ise $End_R(A)$ da regüler ve sağ self-injektif bir halkadır. (Goodearl, 1979)

2.2.5. Tanım: Bir bölümlü halka üzerinde herhangi bir sağ (sol) vektör uzayının tüm lineer dönüşümlerinin halkasına, **sağ (sol) tam lineer halka** denir.

2.2.6. Tanım: R, herhangi bir halka olsun. R nin bütün minimal sağ (sol) ideallerinin toplamına R nin **soclesi** denir ve $soc(R_R)$ ya da $soc({}_RR)$ şeklinde gösterilir. Eğer böyle hiçbir minimal sağ (sol) ideal yoksa $soc(R_R)=0$ dır.

2.2.7. Teorem: R sıfır olmayan bir halka olsun. R bir sağ tam lineer halkaya izomorftur $\Leftrightarrow$ R asal, sağ self-injektif bir halka ve $soc(R_R) \neq 0$ dır. (Goodearl, 1979)

2.2.8. Teorem: R regüler, sağ self-injektif bir halka ve A ile B singüler olmayan injektif sağ R-modüller olsun. Bu durumda $Ae \lesssim Be$ ve $B(1-e) \lesssim A(1-e)$ olacak şekilde, $e \in B(R)$ vardır. (Goodearl, 1979)

2.2.9. Sonuç: Her regüler, sağ self-injektif halka genel karşılaştırma aksiyomunu sağlar. (Goodearl, 1979)

2.2.10. Tanım: R regüler sağ self-injektif bir halka ve bir $e=e^2\in R$ olsun. 0, e ye dik olacak şekilde R nin tek merkezi idempotenti ise, e ye **sadık (faithful)** idempotent denir.

2.2.11. Örnek: R bir asal halka olsun. Bu durumda $B(R)=\{0,1\}$ olup R nin sıfır olmayan her idempotenti sadıktır.

2.2.12. Tanım: $e^2=e\in R$ olsun. eRe althalkasının direkt sonlu; veya buna denk olarak eR sağ idealinin direkt sonlu olması durumunda e ye R nin bir **direkt sonlu idempotenti** denir. R regüler sağ self-injektif bir halka olsun. R sıfır olmayan direkt sonlu merkezi idempotentler kapsamaz ise, R ye bir **sırfi (purely) sonsuz** halka denir.

2.2.13. Tanım: R regüler sağ self-injektif bir halka olsun. R, sadık değişmeli bir idempotent kapsar ise, R ye **Tip I** şartını sağlar denir. R, Tip I şartını sağlar ve direkt sonlu bir halka ise R ye **Tip I_f** ve R TipI şartını sağlar ve sırfi sonsuz halka ise R ye **Tip I_∞** denir.

2.2.14. Örnek: D bir bölümlü halka ve V, D üzerinde sonlu-boyutlu bir sağ vektör uzayı olsun. Tip I_f şartını sağlayan bir R asalı, $R=End_D(V)$ olup, $End_D(V)$ sonlu-boyutlu bir tam lineer halkadır. Tip I_∞ şartını sağlayan R asal halkası da sonsuz-boyutlu bir tam lineer halkadır.

2.2.15. Önerme: R regüler, asal ve sağ self-injektif bir halka olsun. Bu durumda, R Tip I dendir $\Leftrightarrow$ R bir sağ tam lineer halkaya izomorftur. (Goodearl 1979)

2.2.16. Tanım: R regüler ve sağ self-injektif bir halka olsun. R, sadık direkt sonlu bir idempotent kapsar; ancak sıfır olmayan değişmeli idempotentler kapsamaz ise R ye **Tip II** şartını sağlar denir. R Tip II şartını sağlayan bir halka ve sırasıyla direkt sonlu ya da sırfi sonsuz ise R ye **Tip II_f** ya da **Tip II_∞** şartını sağlayan halka denir.

2.2.17. Örnek: Tip II den basit, ünit-regüler sağ ve sol self-injektif bir halka vardır.

F_1, F_2, ..., cisimlerini seçip, her n için $R_n=M_{n_i}(F_n)$ yi ve $R=\prod R_n$ yi yazalım. Her R_n, ünit-regüler ve self-injektif halka olduğundan R de ünit-regüler ve self-injektif halkadır. M, $\oplus R_n$ yi kapsayan R nin iki-yönlü bir maksimal ideali olsun. R/M nin bir basit ünit-regüler halka olduğunu görebiliriz (R, direkt sonlu, regüler, sağ self-injektif bir halka ve P R nin bir asal ideali olsun. R/P bir sağ self-injektif halkadır $\Leftrightarrow$ P, R nin bir maksimal iki-yönlü idealidir [Goodearl 1979]). Buna göre R/M de sağ ve sol-injektiftir.

Bir k pozitif tamsayı alalım. Her n=k, k+1, ..., için $e_{1n}, \ldots, e_{kn} \in R_n$ dik idempotentler vardır; öyle ki $e_{1n}+\ldots+e_{kn}=1$ ve her $e_m R_n \cong e_m R_n$ olur. Her i=1,...,k ve her n=1,...,k-1 için $e_{in}=0$ alarak, $e_1, \ldots, e_k \in R$ dik idempotentler elde ederiz, öyle ki $1-(e_1+\ldots+e_k)$, $R_1 x \ldots x R_{k-1}$ in birim elemanlarıdır ve her $e_i R \cong e_j R$ olur. $\oplus R_n \leq M$ olduğundan, o halde $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_k \in R/M$ dik idempotentler buluruz; öyleki $\bar{e}_1+\ldots+\bar{e}_k=1$ dir ve her $\bar{e}_i(R/M) \cong \bar{e}_j(R/M)$ olur. Böylece, R/M, çifter çifter izomorfik k tane sağ ideallerin bir direkt toplamıdır.

Her k için bu sağlandığından, R/M nin artinian olamayacağını görürüz ki, buradan (Goodearl, 1979) R/M Tip I den değildir. O halde R/M, sadık değişmeli idempotentleri kapsamaz. Bununla birlikte R/M basit halka olduğundan, R/M de tüm sıfır olmayan idempotentler sadıktır. Böylece R/M, sıfır olmayan değişmeli idempotentleri kapsamaz. Madem ki 1, R/M de bir sadık direkt sonlu idempotenttir, öyle ise R/M TipII den bir halka olduğu sonucuna varırız.

2.2.18. Tanım: R regüler, sağ self-injektif bir halka olsun. R sıfır olmayan direkt sonlu idempotentleri kapsamaz ise, R ye **Tip III** şartını sağlar denir.

2.2.19. Örnek: Tip III ten basit, regüler ve sağ self-injektif halkalar vardır.

V, bir F cisminde sonsuz-boyutlu bir vektör uzayı, $Q=End_F(V)$ ve $M=\{x\in Q: boy_F(xV)<boy_F(V)\}$ olsun. Verilen bir $x\in Q-M$ için, $boy_F(xV)=boy_F(V)$ yazarız ve $xV\cong V$ dır, ki buradan $xQ\cong Q_Q$ dır. Sonuç olarak her $x\in Q-M$ için, $QxQ=Q$ olduğu görülür, böylece Q/M bir basit regüler halkadır. Şimdi R, Q/M in maksimal sağ bölüm halkası olsun. R basit, regüler ve sağ self-injektif bir halka olduğu görülür. V, sonsuz-boyutlu olduğundan,

$V \cong 2V$ dir ki buradan $Q_Q \cong 2Q_Q$ olur ve sonuç olarak $R_R \cong (Q_Q) \otimes_Q ({}_Q R_R) \cong (2Q_Q) \otimes_Q ({}_Q R_R) \cong 2R_R$ dır. Bu yüzden R, direkt sonsuzdur. R, basit halka olduğundan, her $0 \neq x \in R$ için $(xR)_R$, (Goodearl, 1979) direkt sonsuzdur.O halde R, sıfır olmayan direkt sonlu idempotentleri kapsamaz.

2.2.20. Tanım: M bir modül olsun. $i: M \to Q$, bir esas monoformizma ($i(M) \cap N \neq 0$ her $N < Q$) olacak şekilde bir Q injektif modülü varsa Q ya, M nin bir **injektif zarfı (hull)** denir ve E(Q) ile gösterilir.

2.2.21. Teorem: R regüler ve sağ self-injektif bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R sırfi sonsuz bir halkadır.

(ii) $\exists\ n \geq 2$ için, $nR_R \lesssim R_R$ dir.

(iii) Tüm pozitif n tamsayılar için, $nR_R \cong R_R$ dir.

(iv) $E(\aleph_0 R_R) \cong R_R$ dir. (Goodearl 1979)

2.2.22. Önerme: R herhangi regüler ve sağ self-injektif bir halka olsun. Bu durumda R direkt sonlu bir halka ve sırfi sonsuz bir halkanın tek türlü bir direkt çarpımıdır (Goodearl 1979).

2.2.23. Teorem: A ile B, R halkasında singüler olmayan injektif sağ modüller ve n bir pozitif tam sayı olsun.

(i) $nA \lesssim nB$ ise, $A \lesssim B$ dir.

(ii) $nA \cong nB$ ise, $A \cong B$ dir. (Goodearl 1979)

2.3. Boyut Fonksiyonları

2.3.1. Tanım: μ fonksiyonu aşağıdaki iki temel özeliği sağlar ise μ ye bir **boyut fonksiyonu** denir.

(i) $A \lesssim B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$,

(ii) $\mu(A \oplus B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2.3.2. Önerme: R regüler, sağ self-injektif bir halka; $M \in BS(R)$ ve A ile B singüler olmayan injektif sağ R-modüller olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır.

(i) Tüm n pozitif tamsayılar için, $\mu_M(nA)=\mu_M(A)$,

(ii) Bir $e \in B(R)-M$ için, $Ae \lesssim Be$ ise $\mu_M(A) \leq \mu_M(B)$,

(iii) $\mu_M(A \oplus B)=\text{mak}\{\mu_M(A), \mu_M(B)\}$ dir. (Goodearl 1979)

2.3.3. Uyarı: A ile B direkt sonsuz modüller ise 2.3.1. (i)nin karşıtı $\mu(A) \leq \mu(B)$ iken $A \lesssim B$ olur. Çünkü μ, direkt sonsuz, singüler olmayan injektif modüllerin izomorfizma sınıflarını tam olarak tanımlar.

2.3.4. Sonuç: R regüler sağ self-injektif bir halka ve A ile B singüler olmayan injektif sağ R-modüller olsun. B bir sırfi sonsuz modül ise;

(i) $A \lesssim B \Leftrightarrow$ her $M \in BS(R)$ için, $\mu_M(A) \leq \mu_M(B)$

(ii) $A \cong B \Leftrightarrow$ her $M \in BS(R)$ için, $\mu_M(A)=\mu_M(B)$ dir. (Goodearl 1979)

2.3.5. Tanım: xR, R nin bir esas sağ ideali olsun. xR idealinin herhangi yR tümleyeni ($R=xR \oplus yR$) için, μ-yanboy$(xR)=\mu(yR)$ ile belirli boyuta xR nin **μ-yanboyutu** denir.

2.3.6. Önerme: R asal, regüler ve sağ self-injektif bir halka olsun. Bu durumda;

(i) Her α kardinali için, $H(\alpha)=\{x \in R: \mu_{\{0\}}(xR) \leq \alpha\}$ kümesi R nin iki-yönlü bir idealidir.

(ii) H, R nin herhangi bir iki-yönlü ideali ise bir α kardinali için $H=H(\alpha)$ dır. (Goodearl 1979)

2.3.7. Tanım: R regüler, sağ self-injektif bir halka, $M \in BS(R)$ ve A singüler olmayan injektif bir sağ R-modül olsun. Buna göre

$$\mu_M(A)=\begin{cases} 0; & \text{eğer bir } e \in B(R)-M \text{ için } Ae=0 \text{ ise,} \\ \min\left\{ \text{sonsuz } \alpha \text{ kardinali} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{bir } e \in B(R)-M \text{ için} \\ Ae \text{ ikişerli alt modüllerin } (\neq 0)\, \alpha \text{ lı} \\ \text{direkt toplamını kapsamaz} \end{array} \right\}; & \end{cases}$$

eğer $\forall e \in B(R)-M$ için $Ae \neq 0$ ise,

μ ye **sonsuz boyut fonksiyonu** denir.

2.3.8. Örnek: R bir cisim ve A sıfır olmayan bir R-vektör uzay olsun. $[A:R]<\infty$ ise : $B(R)=\{0,1\}$, $M=\{0\}$; $B(R)-M=\{1\}$ olduğundan bu durumda $e=1$ olup, $Ae=A\neq 0$ ve A sonlu boyutlu olduğundan Ae, hiçbir sonsuz α kardinali için α lı direkt toplam kapsamaz. Yani $\mu_{\{0\}}(A)=\aleph_0$ dır. $[A:R]=\beta$ sonsuz ise: $A=\bigoplus_{i\in I} R\upsilon_i$, $|I|=\beta$ olup A, $\beta<\alpha$ için α lı direkt toplam kapsamaz ve $\mu_{\{0\}}(A)$, bu β dan büyük α kardinallerinin en küçüğü; yani $\mu_{\{0\}}(A)=\beta^+$ dır.

Bu örnekte şu sezilebilir: $\aleph_0$ dışındaki kardinal limitler μ_M değeri olarak ortaya çıkmaz. Bu sezgi R nin asal olduğu durumda doğru olabilir. (Goodearl, 1979) Ancak genelde her sonsuz kardinal bir μ_M değeri olarak gözükebilir.

2.3.9. Örnek: γ herhangi bir sonsuz kardinal ise, bir değişmeli, regüler, self-injektif R halkası ve singüler olmayan bir injektif R-modül A vardır; öyle ki bir $M\in BS(R)$ için $\mu_M(A)=\gamma$ dır.

$\gamma=\aleph_0$ ise, R yi bir cisim seçip $A=R_R$ yazalım; öyle ki $\mu_{\{0\}}(A)=\gamma$ dır. Eğer γ limit olmayan bir kardinal ise β gibi bir sonsuz kardinal vardır; öyle ki γ, β nın ardışığıdır. Bu durumda R cisim ve A, R üzerinde β-boyutlu bir vektör uzayı olarak seçebiliriz, öyle ki $\mu_{\{0\}}(A)=\gamma$ dır.

Şimdi, γ nın bir sayılamaz limit kardinal olduğunu varsayalım ve $X,\alpha<\gamma$ olacak şekildeki bütün sonsuz kardinallerin kümesi olsun. Her $\alpha\in X$ için bir F_α cismi seçelim ve $R=\prod_{\alpha\in X} F_\alpha$ yazalım. Yine her $\alpha\in X$ için F_α üzerinde α boyutlu bir V_α vektör uzayı seçelim ve $A=\prod_{\alpha\in X} V_\alpha$ yazalım. Bu A singüler olmayan bir injektif R-modüldür.

Her $\beta\in X$ için $e(\beta)\in B(R)$ yi $\alpha<\beta$ için $e(\beta)_\alpha=0$ ve tüm $\alpha\geq\beta$ için $e(\beta)_\alpha=1$ olarak tanımlayalım. $\beta\leq\beta'$ iken $1-e(\beta)\leq 1-e(\beta')<1$ olduğunu gözönüne alarak $\{1-e(\beta) \mid \beta\in X\}$ kümesinin B(R) nin bir öz idealini ürettiğini görebiliriz. Sonuç olarak, bir $M\in BS(R)$ vardır; öyle ki tüm $1-e(\beta)$ lar $\in M$; böylece her $\beta\in X$ için $e(\beta)\notin M$ dir.

Her V_α nın boyutu $=\alpha<\gamma$ olduğundan, A nın sıfır olmayan çifter çifter izomorfik γ lı altmodüllerinin direkt toplamını kapsamadığını görürüz. O halde $\mu_M(A)\leq\gamma$ dır. Her $e\in B(R)-M$ için $Ae\neq 0$ olduğundan $\mu_M(A)\geq\aleph_0$ dır. Şimdi, eğer $\mu_M(A)<\gamma$ ise bir $\beta\in X$ için $\mu_M(A)=\beta$ olup bir $e\in B(R)-M$ vardır;

öyle ki Ae sıfır olmayan çifter çifter izomorfik β lı altmodüllerin direkt toplamını kapsamaz. Her $\alpha \geq \beta$ için $\beta V_\alpha \cong V_\alpha$ olduğu gözlenerek $E(\beta Ae(\beta)) \cong Ae(\beta)$ ve sonuç olarak $\beta Ae(\beta)e \lesssim Ae$ altizomorfizması olduğu görülür. Madem ki, Ae sıfır olmayan ikişer ikişer izomorfik β lı altmodüllerin direkt toplamını kapsamaz; öyleyse $Ae(\beta)e=0$ ve buradan $e(\beta)e=0$ olduğu görülür. $e(\beta) \notin M$ ve $e \notin M$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $\mu_M(A)=\gamma$ dır.

2.3.10. Tanım: L bir tam latis ve her $a \in L$ ve tüm lineer sıralı $\{b_i\} \subseteq L$ altkümeleri için, $a \wedge (\vee b_i) = \vee (a \wedge b_i)$ ise L latisine **üst sürekli latis** ve L tam, $a \vee (\wedge b_i) = \wedge (a \vee b_i)$ ise **alt sürekli latis** denir. L hem üst hem de alt sürekli bir latis ise L ye bir **sürekli latis** denir.

2.3.11. Tanım: R regüler bir halka olsun. L (R_R) üst sürekli ise R ye **sağ sürekli** ve L $({}_R R)$ üst sürekli ise R ye **sol sürekli** denir.

$L(R_R)$, $L({}_R R)$ ye anti-izomorfik olduğundan R nin sol sürekli olması için gerek ve yeter şart $L(R_R)$ nin alt sürekli olmasıdır. Eğer R hem sağ sürekli hem de sol sürekli halka ise R ye bir **sürekli regüler** halka denir.

2.3.12. Teorem: Regüler bir R halkası sağ sürekli halkadır $\Leftrightarrow$ R halkası değişmeli sürekli regüler bir halka ve regüler, sağ self injektif bir halkanın bir direkt çarpımına izomorftur. (Goodearl 1979)

2.3.13. Tanım: R regüler bir halka olsun. R halkasında aşağıdaki koşulları sağlayan bir $N:R \rightarrow [0,1]$, fonksiyonuna **rank fonksiyonu** denir.

(i) $N(1)=1$.

(ii) Her $x,y \in R$ için, $N(xy) \leq N(x)$ ve $N(xy) \leq N(y)$.

(iii) Her $e,f \in R$ dik idempotentleri için, $N(e+f)=N(e)+N(f)$.

(iv) Her $0 \neq x \in R$ için $N(x)>0$.

$x \in R$ ise $x=0 \Leftrightarrow N(x)=0$ dır.

(iv) koşulu eksik olursa N ye bir **yarı-rank fonksiyonu** denir.

2.3.14. Önerme: R, bir regüler halka ve N, R de bir yarı-rank fonksiyonu olsun. $N(e) \neq 0$ olacak şekilde $e=e^2 \in R$ ise,

(i) eRe halkasında $P(x)=N(x)/N(e)$ ile verilen P bir yarı-rank fonksiyonu tanımlar.

(ii) e merkezi idempotent ise R de $Q(x)=N(ex)/N(e)$ ile verilen Q bir yarı-rank fonksiyonu tanımlar.

(iii) $N(e)=1$ ise her $x \in R$ için $N(ex)=N(x)$ dir. (Goodearl 1979)

2.3.15. Sonuç: R karşılaştırma aksiyomunu sağlayan regüler direkt sonlu basit bir halka olsun. Bu durumda,

(i) R halkasında bir tek N rank fonksiyonu vardır.

(ii) $x,y \in R$ için, $xR \lesssim yR \Leftrightarrow N(x) \leq N(y)$.

(iii) $xR \cong yR \Leftrightarrow N(x)=N(y)$. (Goodearl 1979)

3. İDEMPOTENT ÇARPIMLARI

3.1. İdempotent Matrislerin Çarpımları

3.1.1. Tanım: R bir halka olsun. $M_n(R)=\{(a_{ij}): a_{ij}\in R,\ 1\leq i,\ j\leq n\}$ kümesi matris toplama ve matris çarpma altında bir halka olup, buna R üzerinde nxn **matris halkası** denir.

3.1.2. Tanım: A ve B bir F cismi üzerinde nxn matrisler olsun. Eğer $B=P^{-1}AP$ olacak şekilde nxn terslenir bir P matrisi varsa B, A ya **benzer** denir ve $A\sim B$ şeklinde gösterilir.

3.1.3. Teorem: Her singüler(kare) matris idempotent matrislerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: E idempotent bir matris, P singüler olmayan bir matris ise $P^{-1}EP$ de idempotenttir. Teoremin ispatı iki basamakta yapılacaktır.

I. Üçgensel matrislere benzer matrisler için ispat: İspatı matrisin derecesi n üzerinde tümevarımla yapacağız. Bunun için teoremin, derecesi n-1 olan singüler matrisler için doğru olduğunu varsayalım ve A derecesi n olan singüler bir matris olsun. A singüler olduğundan elemanter sütun işlemleriyle A ilk sütunu sıfır olan bir üst üçgensel matrise benzer hale getirebilir ve bunun sonucu olarak bu son matris T, (n-2). dereceden bir matris olmak üzere şöyle ayrıştırılabilir.

$$\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & X & \alpha \\ \hdashline 0 & T & Y \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right].$$

T singüler ise

$$\begin{bmatrix} T & Y \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

matrisi de singüler dir, ve tümevarım hipotezinden

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & Y \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

olup, bu matrisi idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & T & Y\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & X & \alpha\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & X & \alpha\\ 0 & T & Y\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

Eşitliğinde sağdaki son matris idempotenttir, ilk matris tümevarımdan idempotentlerin bir çarpımı olduğundan A da bu idempotentlerin bir çarpımıdır. T singüler değilse

$$Z=XT^{-1} \text{ için } B=\begin{bmatrix}0 & X & 0\\ 0 & T & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda B matrisi tümevarım hipotezinden idempotent matrislerin çarpımı olarak yazılır. Buna göre:

(i) $ZY=\alpha+\lambda$ ise

$$F=\begin{bmatrix}0 & Z & \lambda+\alpha\\ 0 & I & Y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

matrisi idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılır ve

$$E=\begin{bmatrix}0 & Z & 0\\ 0 & I & 0\\ 1 & -Z & 1\end{bmatrix}$$

idempotent olan E matrisiyle X=ZT değişimi kullanılarak

$$EFB=\begin{bmatrix}0 & Z & 0\\ 0 & I & 0\\ 1 & -Z & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & Z & \lambda+\alpha\\ 0 & I & Y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & X & 0\\ 0 & T & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & X & \alpha\\ 0 & T & Y\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=A$$

ve A matrisi idempotent matrislerin çarpımı olarak yazılır.

(ii) $ZY-\alpha=k\neq 0$ ise

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\lambda/k & (\lambda/k)Z & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & I & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. E ve F matrisleri idempotentler olup $X=ZT$ değişimini de kullanarak;

$$EFB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\lambda/k & (\lambda/k)Z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & I & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & X & \alpha \\ 0 & T & Y \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = A$$

idempotent matrislerin çarpımı olarak bulunur. Sonuç, derecesi 2 olan matrisler için de doğrudur. $\alpha \neq 0$ için,

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda/k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve $\alpha=0$ için,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

idempotent matrislerin çarpımı olarak yazılır.

II. Genel Durumda Ispat

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_i & b_i & c_i & \dots & z_i \end{bmatrix}$$

bir $n_i \times n_i$ kare matris olmak üzere her A matrisi (van der Waerden, 1950).

$$A \sim \mathrm{diag}\{C_1, \ldots, C_k\}$$

olarak yazılabilir. A singüler olduğundan C_i blok matrislerinden en az biri örneğin; C_k singüler olup bu durumda $a_k=0$ dır. $n_i = 1$ ise $C_i = [a_i]$ olur. Bu indirgeme işlemi her cisim üzerinde yapılabilir.

$$E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

ve $1 \le i \le n-1$ için I_t, t dereceden birim matris olup

$$E_i = \left[\begin{array}{c:cc:c} I_{i-1} & \multicolumn{2}{c:}{0} & 0 \\ \hdashline & 1 & 1 & \\ 0 & & & 0 \\ & 0 & 0 & \\ \hdashline 0 & \multicolumn{2}{c:}{0} & I_{n-i-1} \end{array}\right]$$

olsun. Bu durumda herhangi bir matrisin soldan E_i ile çarpımında bu matrisin (i+1). satırı i. satıra eklenir ve (i+1). satırı sıfıra indirgenir.

E_i matrislerinin idempotent olduğu açıktır.

$$N = E_{n-1}\, E_{n-2} \ldots E_1\, E_0$$

olsun. Bu durumda

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

$i \le k$ için $r_i = \sum_{j=1}^{i-1} n_j$ olsun ve $i<k$ için,

$$F_i = \left[\begin{array}{c|ccccccc|c} I_{r_i} & & & & 0 & & & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 & \\ & a_i & b_i & . & . & . & z_i & 0 & \\ \hline 0 & & & & 0 & & & & I_{n-r_{i+1}-1} \end{array}\right]$$

olsun. Bu durumda herbir i için F_i idempotenttir.

$B=NF_1F_2 \ldots F_{k-1}$ ise, son satır dışında A ile aynı olup B nin son satırı sıfırdır.

$$G = \left[\begin{array}{c|cccccccc} I_{r_k} & & & & 0 & & & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ & b_k & c_k & d_k & . & . & . & z_k & 0 \end{array}\right]$$

olsun. Buna göre $a_k=0$ olduğundan, $GB=A$ ve G bir idempotent matristir. Böylece A matrisi

$$A=GE_{n-1}\, E_{n-2} \ldots E_1\, E_0 F_1 F_2 \ldots F_{k-1}$$

şeklinde idempotent matrislerin çarpımı olarak yazılır.

3.1.4. Örnek: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi idempotent matrislerin bir çarpımı olarak şöyle yazılabilir.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1^2 = E_1 \text{ dir.}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2^2 = E_2 \text{ dir.}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3^2 = E_3 \text{ dir.}$$

$$A = E_1E_2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Regüler Halkalarda İdempotent Çarpımları

3.2.1. Önerme: R asal, regüler ve sağ self-injektif bir halka olsun. a,b $\in$R için, $\mu(aR)=\mu(bR)$ ise RaR=RbR dir. (O'Meara 1986)

3.2.2. Önerme: R regüler bir halka ve $eR \precsim (1-e)R$ olacak şekilde bir $e=e^2 \in R$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x \in eRe$ elemanı R halkasının idempotentlerinin bir çarpımı olarak ifade edilir.

İspat: $eR \precsim (1-e)R$ olduğundan, $yz=e$ olmak üzere $y \in eR(1-e)$ ve $z \in (1-e)Re$ vardır. $x \in eRe$, $y \in eR(1-e)$ ve $z \in (1-e)Re$ için $x=er_1e$, $y=er_2(1-e)$ ve $z=(1-e)r_3e$ ve r_1, r_2, $r_3 \in R$ olsun. $[e+xy]^2=(e+xy)(e+xy)=e^2+exy+xye+xyxy$

$= e+xy$ dir.

Ayrıca

$[1-e]^2 = (1-e)(1-e) = 1-e-e+e^2=1-e$ ve

$[e+z]^2 = (e+z)(e+z) = e^2+ez+ze+z^2=e+z$ dir. Buna göre, $[e+xy]$, $[1-e]$ ve $[e+z]$ terimleri idempotentler olmak üzere r_1, r_2, $r_3 \in R$ için,

$[e+xy][1-e][e+z]=[e+(er_1e)(er_2(1-e))][1-e][e+(1-e)r_3e]$

$= [e-e^2+(er_1e)(er_2(1-e)) - (er_1e)(er_2(1-e))e][e+(1-e)r_3e]$

$= [(er_1e)(er_2(1-e))][e+(1-e)r_3e]$

$= (er_1e)(er_2(1-e))e + (er_1e)(er_3(1-e))(1-e)r_3e$

$= (er_1e)er_3(1-e)(1-e)r_3e$

$=e\,r\,e = x$ idempotentlerin bir çarpımıdır.

3.2.3. Açıklama: R regüler bir halka ve $a \in R$ olduğunu varsayalım. $b \in R$ için $a = aba$ ise, $e=ab$ ile $f=ba$ elemanları birer idempotent olup, $eR \cong fR$ olacak şekilde $aR=eR$ ve $Ra=Rf$ eşitlikleri vardır. Aynı zamanda herhangi bir $e,f \in R$ idempotent çifti için, $eR \cong fR$ (sağ R-modüller olarak) $\Leftrightarrow$ bir $y \in eRf$ ve $z \in fRe$ için, $yz=e$ ve $zy=f$ ifadeleri vardır (1.2.7. Önerme).

3.2.4. Direkt Sonlu I_f, II_f Halka Tipleri: Aşağıdaki teorem, 3.1.3. Teoremin sonucunun (Erdos, 1967) bir genişlemesi olarak; direkt sonlu, asal, regüler ve sağ self-injektif bir halkada idempotent çarpımlarını veren elemanların bir karakterizasyonudur.

3.2.5. Teorem: R karşılaştırma aksiyomunu sağlayan direkt sonlu, basit, regüler bir halka ve $1 \neq a \in R$ olsun. Bu durumda a, idempotentlerin bir çarpımıdır $\Leftrightarrow$ a birimsel olmayan bir elemandır.

İspat: a idempotentlerin bir çarpımı ise, $a \neq 1$ olduğundan a nın birimsel olmadığı açıktır.

Teoremin karşıtı için 2.3.15 Sonuçtan, R nin tek bir N rank fonksiyonu vardır. Tüm n pozitif tamsayılar (her R) için, n üzerine tümevarımla

$N(a) \leq (n-1)/n \Rightarrow a$, idempotentlerin bir çarpımı

olduğunu göstereceğiz. $n=1$ için $a=0$ olduğundan yukardaki hüküm doğrudur. Sonucun bir n (her R) için ve $N(a) \leq n/(n+1)$ nin doğru olduğunu varsayalım. $a \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. $N(a)=r$ ve bir $e=e^2 \in R$ için $aR=eR$ olsun. $N(e)=N(a)=r$ olduğu görülür. $A=eRe$, $b=ae$, $c=a(1-e)$ olsun.

$$bA=fA \ , \ Ab=Ag$$

eşitlikleri olacak şekilde, $f=f^2 \in A$ ve $g=g^2 \in A$ alalım. 2.1.39.Teoremden, karşılaştırma aksiyomunu sağlayan direkt sonlu ve regüler bir R halkası ünit-regüler olduğundan, R ünit-regülerdir ve böylece 2.1.21. Sonuçtan, A da ünit-regülerdir. $gA \cong fA$ oluşundan 2.1.19. Teoremden, $(e-g)A \cong (e-f)A$ olduğu görülür. Böylece $b+d$, A halkasının bir birimseli olacak şekilde $d \in (e-f)A(e-g)$ vardır. $u=b+d \in A$ ve $v \in A$, u nun tersi olsun.

$$[e+vc]^2=[e+ere\ a(1-e)]\ [e+ere\ a(1-e)]$$

$$= [e+ere\ a(1-e)]=[e+vc]$$

ve

$$[g+(1-e)]^2 = [g+(1-e)]\,[g+(1-e)]=[g+(1-e)]$$

olmak üzere,

$$a=b+c=((b+d)+c)\,(g+(1-e))$$

$$= u\,[e+vc]\,[g+(1-e)]$$

olarak a, idempotentlerin bir çarpımıdır. Bu yüzden her $u\in A$ nın R nin idempotentlerinin bir çarpımı olduğunu göstermek yeterlidir.

$eR\lesssim(1-e)R$ ise, 3.2.2.Önermeden u, idempotentlerin bir çarpımıdır ve ispat tamamlanır. R karşılaştırma aksiyomunu sağladığından $(1-e)R\lesssim eR$ olduğunu kabul edebiliriz. e_1, e_2, A nın dik idempotentleri olmak üzere

$$e=e_1+e_2$$

olarak yazalım; öyle ki $e_2R\cong(1-e)R$ dir. $wx=e_2$ olacak şekilde $w\in e_2R(1-e)$ ve $x\in(1-e)Re_2$ elemanlarını seçelim. $a_1=ue_1$ olsun. 2.1.35. Sonuçtan A halkası da karşılaştırma aksiyomunu sağlayan direkt sonlu, basit, regüler bir halka olduğu görülür. N_1, R nin tek rank fonksiyonu olsun, $N(e_2)=N(1-e)=1-N(e)=1-r$ olmak üzere $e=e_1+e_2$ olduğundan, $N(e_1)=N(e)-N(e_2)=r-(1-r)=2r-1$ olur. Böylece 2.3.14. Önermeden

$$N_1(e_1)=N(e_1)/N(e)=(2r-1)/r \text{ dir.}$$

Şimdi, $r\leq n/(n+1)\Rightarrow(2r-1)/r\leq(n-1)/n$ dır, ki buradan $N_1(a_1)\leq N_1(e_1)=(2r-1)/r\leq(n-1)/n$ dir. O halde,

$$N_1(a_1)\leq(n-1)/n$$

bulunur. A=eRe halkasının bir elemanı olan $a_1\in A$ ya tümevarım hipotezini uygulayarak bir takım $f_i\in eRe$ idempotentleri için,

$$a_1 = f_1 f_2 \ldots f_m$$

olarak idempotentlerin bir çarpımını bulabiliriz. Bu durumda,

$[f_1+(1-e)]^2=[f_1+1(1-e)]$, $[f_2+(1-e)]^2=[f_2+(1-e)]$, ..., $[f_m+(1-e)]^2=[f_m+(1-e)]$ olmak üzere,

$a_1+(1-e)=[f_1+(1-e)][f_2+(1-e)] \ \ldots \ [f_m+(1-e)]$ olarak $a_1+(1-e)$, idempotentlerin bir çarpımıdır. Ayrıca $[e+uw]^2 = [e+uw]$ ve $[e+x]^2=[e+x]$ olmak üzere,

$$u=[e+uw]\,[a_1+(1-e)]\,[e+x]$$

olduğundan u, idempotentlerin bir çarpımı olarak vardır. Böylece, tümevarım hipotezini kullanarak a, R nin bir birimsel elemanı değil ise, $N(a)<1$ dir ve bundan dolayı bir n için $N(a)\leq(n-1)/n$ dir. O halde a idempotentlerin bir çarpımıdır.

3.2.6. Sonuç: Q direkt sonlu, asal, regüler ve sağ self-injektif bir halka ve $1\neq a\in Q$ olsun. Bu durumda a, idempotentlerin bir çarpımıdır $\Leftrightarrow$ a bir birimsel eleman değildir. (O'Meara, 1986)

3.2.7. Sonuç: D bir bölümlü halka ve n pozitif tamsayı olsun. Bir $a\in M_n(D)$, öz ($\neq 1$) idempotentlerin bir çarpımıdır$\Leftrightarrow$ a bir singüler matristir. (Erdos 1967; Dawlings 1981)

3.2.8. Genel Durum: Bu kısımda Q halkasını asal, regüler, sağ self-injektif bir halka olarak alacağız. M, Q nun (tek) maksimal ideali ve $x\in Q$ için, $\overline{x}=x+M\in Q/M$ olsun. 2.1.14. Sonuçtan Q direkt sonsuz olduğunda, $\overline{x}\neq\overline{0}\Leftrightarrow xQ\cong Q$ dır.

3.2.9. Önerme: $e=e^2\in Q$ ve $f=f^2\in Q$ olsun. $\overline{(1-f)Q}\not\subseteq\overline{eQ}$ ise, $eQf\subseteq gQg$ ve $\overline{1-g}\neq\overline{0}$ olmak üzere bir $g=g^2\in Q$ vardır.

İspat: f_1, $h\in Q$ için,

$$(1-f)Q=((1-f)Q\cap eQ)$$

ve

$$(1-e)Q=((1-e)Q\cap[(1-f)Q+eQ])\oplus hQ$$

eşitliklerini yazalım. Bu durumda

$$Q=eQ+(1-e)Q$$
$$= eQ\oplus hQ\oplus f_1Q$$

dir. Ayrıca $gQ=eQ\oplus hQ$ ve $(1-g)Q=f_1Q$ olacak şekilde $g=g^2\in Q$ olsun. $eQ\subseteq gQ$ ve $(1-g)Q\subseteq(1-f)Q$ olup buradan $eQf\subseteq gQg$ dir. $\overline{1-g}=\overline{0}$ ise

$\overline{f_1 Q} = \overline{0}$ ve $\overline{(1-f)Q} = \overline{(1-f)Q \cap eQ}$ dir. Bu eşitlikler $\overline{(1-f)Q} \subseteq \overline{eQ}$ çelişkisini verir; o halde $\overline{1-g} \neq 0$ olur.

3.2.10. Önerme: J, Q nun (iki-yönlü) bir ideali olsun. Her $x \in J$ için, $x \in gQg$ olmak üzere bir $g=g^2 \in J$ vardır.

İspat: $xQ=eQ$ ve $Qx=Qf$ olacak şekilde $e=e^2 \in Q$ ve $f=f^2 \in Q$ olsun. 3.2.9. Önermede olduğu gibi $gQ=eQ \oplus hQ$ olacak şekilde, $g=g^2 \in Q$ yi oluşturalım. Bu durumda $hQ \cap (1-f)Q=0$ ise $hQ \lesssim fQ \subseteq J$ olur ve Q regüler bir halka olduğundan $h \in J$ olur ve $gQ=eQ+hQ \subseteq J$ oluşundan $g \in J$ ve aynı zamanda $x \in eQf \subseteq gQg$ olur.

3.2.11. Önerme: $a \in Q$, $K=r(a,Q)$ ve C, aQ nun (Q ya göre) bir tümleyen sağ ideali olsun.

$$QK=Q \text{ ve } QC=Q \qquad (1)$$

eşitliklerinin doğru olduğunu varsayalım. Q direkt sonsuz ise a idempotentlerin bir çarpımıdır.

İspat: Q nun direkt sonsuz olduğunu varsayalım.

$aQ=eQ$ ve $Qa=Qf$ olacak şekilde $e=e^2$, $f=f^2 \in Q$ olsun. Bu durumda (1) varsayımından $\overline{1-f} \neq \overline{0}$ ve $\overline{1-e} \neq \overline{0}$ olur. $b=ae$ ve $c=a(1-e)$ olsun. Buna göre iki durum dikkate alacağız.

(a) bir h için $\overline{h} = \overline{0}$ olmak üzere, $Qe=Qb \oplus Qh$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\overline{Qe} = \overline{Qb} = \overline{Qae} = \overline{Q}\,\overline{f}\,\overline{e} \Rightarrow r(\overline{f}, \overline{eQ}) = \overline{0}$ olur ve buradan ($\overline{1-f} \neq \overline{0}$ olduğundan) $\overline{(1-f)Q} \not\subseteq \overline{eQ}$ olur. 3.2.9. Önermeden, bir $g=g^2 \in Q$ için $\overline{1-g} \neq \overline{0}$ olmak üzere, $a \in eQf \subseteq gQg$ vardır. Q direkt sonsuz halka ve $\overline{1-g} \neq \overline{0}$ olduğundan, $(1-g)Q \cong Q$ olup; buradan $gQ \lesssim (1-g)Q$ dır. $a \in gQg$ olduğundan, a idempotentlerin bir çarpımı olduğu 3.2.2. Önermeden çıkar.

(b) $\overline{h} \neq \overline{0}$ olmak üzere $Qe=Qb \oplus Qh$ olduğunu varsayalım. g ve h, eQe de dik idempotentler ve $Qb=Qg$ olmak üzere, $e=g+h$ olduğunu varsayabiliriz. Q direkt sonsuz bir halka ve $\overline{h} \neq \overline{0}$ olduğundan, $hQ \cong Q$ olur ve buradan bir $u \in Qh$ için, $Q=uQ$ dır. $e=uw$ olacak şekilde $v \in eQh$ ve $w \in hQ$ bulabiliriz. Şimdi

$$a=b+c=(b+v)[e+wc]\,[g+(1-e)]$$

yazabiliriz. Burada köşeli parantez terimleri birer idempotent olup, $b+v \in eQe$ 3.2.2. Önermeden idempotentlerin bir çarpımıdır; çünkü $\overline{1-e} \neq \overline{0}$ oluşundan $eQ \lesssim (1-e)Q$ dur.

3.2.12. Önerme: R herhangi bir regüler halka, J, R nin bir ideali ve $a \in R$ olsun.

(i) $x \in R$ için, $xR \lesssim J$ ise $x \in J$.

(ii) $r(a,R) \subseteq J$ ise $r(a+J, R/J)=0$.

(iii) J, (R ye göre) aR nin bir tümleyenini kapsarsa, $\ell(a+J,R/J)=0$

(iv) a, idempotentlerin bir çarpımı ve $r(a,R) \subseteq J$ ise, $1-a \in J$.

(v) a, idempotentlerin bir çarpımı ve J, aR nin bir tümleyenini kapsarsa, $1-a \in J$ dir. (O'Meara 1986)

3.2.13. Teorem: Q asal, regüler, sağ self-injektif bir halka ve $1 \neq a \in Q$ olsun. Buna göre a, idempotentlerin bir çarpımıdır $\Leftrightarrow$

ya

(i) $\mu(r(a,Q))=\mu\text{-yanboy}(aQ)=\mu((1-a)Q)>\aleph_0$

ya da

(ii) a, 1+x formunda olup, $x \in H(\aleph_0)$ ve a, Q nun bir birimseli değildir.

Açıklama: (ii) ifadesi aşağıdaki ifadeye denktir;

$$0<\mu(r(a,Q))=\mu\text{-yanboy}(aQ)=\mu((1-a)Q)=\aleph_0$$

ancak, A direkt sonlu olduğunda $\mu(A)$ nın tanımından dolayı, bu son ifade aydınlatıcı değildir. Bununla birlikte bu son ifade, aşağıdaki tek ifadeden (i) ve (ii) ifadelerinin yerine kullanmamıza imkan verir.

$$0<\mu(r(a,Q))=\mu\text{-yanboy}(aQ)=\mu((1-a)Q) \text{ dır.}$$

İspat: Önce (i) ve (ii) ifadelerinin doğru olduğunu varsayalım. İlk olarak (i) ifadesinin doğruluğunu kabul edelim.

$\alpha=\mu((1-a)Q)$, $J=H(\alpha)$ ve $x=a-1$ olsun. $x \in J$ oluşundan 3.2.10. Önermeden $x \in gQg$ olacak şekilde $g=g^2 \in J$ bulabiliriz. $y=g+x \in gQg$ olsun. $\alpha=\mu(xQ) \leq \mu(gQ) \leq \alpha$, ki buradan $\mu(gQ)=\alpha$ olduğu görülür.

İddia: y, gQg halkasına göre 3.2.11. Önermenin (1) ifadesini sağlar.

Bu iddiayı gerçeklemek için, $A=gQg$, $K=r(a,Q)$ ve $K_1=r(y,A)$ olsun. $y \in gQ$ olmak üzere, $a=1+x=(1-g)+y$ olduğundan $K=r(y,Q)\cap gQ$ elde ederiz. Buradan $K_1=r(y,gQg)=K\cap Qg=Kg$ olur. Kabulden dolayı $\mu(K)=\alpha$ dır, buradan $\mu(K)=\mu(gQ)$ olur. Böylece 3.2.1. önermeden $QK=QgQ$ dır. Şimdi,

$$
\begin{aligned}
AK_1 &= (gQg)\,(Kg)=g(QK)g, && (gK=K \text{ olduğundan})\\
&= g\,(QgQ)g, && (QK=QgQ \text{ dan})\\
&= gQg = A
\end{aligned}
$$

dir. Bu yüzden $AK_1=A$ olur. $yA=eA$ olacak şekilde e ve f, A nın dik idempotentleri olmak üzere, $g=e+f$ yazalım. Bu durumda $aQ=(1-g)\,Q\oplus yQ=(1-g)Q\oplus eQ$ ve $gQ=eQ\oplus fQ$ dır; buradan fQ , aQ nun bir tümleyeni olur. Varsayımdan $\mu(fQ) = \mu$-yanboy $(aQ) = \alpha$ oluşundan $\mu(fQ)=\mu(gQ)$ dır. Böylece 3.2.1. Önermeden $QfQ=QgQ$ yazılır. Buna göre

$$
\begin{aligned}
AfA &= (gQg)f(gQg)=g(QfQ)g=g(QgQ)g\\
&= gQg\\
&= A
\end{aligned}
$$

olur. A da fA, yA nın bir tümleyeni olduğundan, bu (1)'in doğruluğunu gösterir.

Q asal, regüler ve sağ self-injektif bir halka olduğundan gQg nın da asal, regüler ve sağ self-injektif bir halka olduğu görülür. Aynı zamanda $\mu(gQ)=\alpha>\aleph_0$ olduğundan gQ da direkt sonsuz halkadır. Böylece gQg direkt sonsuz bir halkadır 3.2.11. Önermeden, $g_i = g_i^2 \in gQg$ ler için $y=g_1\, g_2 \ldots g_n$ olur. O halde $[(1-g)+g_1]= [(1-g)+g_1]^2$, $[(1-g)+g_2]=[(1-g)+g_2]^2,\ldots, [(1-g)+g_n]=[(1-g)+g_n]^2$ olmak üzere, a aşağıdaki gibi bu idempotent terimlerin bir çarpımıdır:

$$
\begin{aligned}
a &= (1-g)+y\\
&= [(1-g)+g_1]\,[(1-g)+g_2]\ldots[(1-g)+g_n].
\end{aligned}
$$

İkinci olarak (ii) ifadesinin doğru olduğunu varsayalım. $x=a-1$ olsun. $x \in gQg$ olacak şekilde $g=g^2\in H(\aleph_0)$ yı oluşturmak için yukardaki yolu takip edeceğiz. $y=g+x\in gQg$ olsun. gQ, direkt sonlu olduğundan gQg de direkt sonlu, asal, regüler ve sağ self-injektif bir halkadır. Aynı zamanda $a=(1-g)+y$ Q nun bir birimseli olmadığından y, gQg nin bir birimseli değildir. 3.2.6.Sonuçdan $g_i = g_i^2 \in gQg$ ler için $y=g_1 g_2 \ldots g_n$ dir. Böylece aşağıdaki gibi a, idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılır:

$$a=(1-g)+y$$
$$=[(1-g)+g_1]\,[(1-g)+g_2]\ldots[(1-g)+g_n].$$

Şimdi teoremin karşıtı doğru olsun; yani a, idempotentlerin bir çarpımı olduğunu varsayalım. Daima $r(a,Q)\subseteq(1-a)Q$ olduğu görülür ve böylece $\mu(r(a,Q))\leq\mu((1-a)Q)$ dir. Aynı zamanda bir $b\in Q$ için $(1-a)Q=((1-a)Q\cap aQ)\oplus bQ$ yazarsak bQ, aQ nun $(1-a)Q$ da kapsanan bir tümleyenidir ki, buradan μ-yanboy $(aQ)\leq\mu((1-a)Q)$ dır.

$J=\{y\in Q:\ \mu(yQ)\leq(r(a,Q))\}$ bir ideal ve $r(a,Q)\subseteq J$ olduğundan, 3.2.12. Önerme (iv) den $1-a\in J$ olur. Böylece $\mu((1-a)Q)\leq\mu(r(a,Q))$ dır ki, $\mu(r(a,Q))=\mu((1-a)Q)$ yazılır. (3.2.12. Ömermeden ve 3.2.1. Önermenin karşıtı kullanılarak $Q(1-a)Q=Qr(a,Q)$ olduğu görülür). Aynı şekilde, $I=\{y\in Q:\ \mu(yQ)\leq \mu(bQ)\}$ bir ideal ve $bQ\subseteq I$ olur. Buradan 3.2.12. Önerme (v) den $1-a\in I$ olur. Bu yüzden $\mu((1-a)Q)\leq\mu$-yanboy (aQ), $\mu((1-a)Q)=\mu$-yanboy (aQ) yu verir.

Böylece μ $((1-a)Q>\aleph_0$ ise, μ $(r(a,Q))=\mu$-yanboy $(aQ)=\mu((1-a)Q)>\aleph_0$ olur ve (i) sağlanmış olur. μ $((1-a)Q)\leq\aleph_0$ ise, idempotentlerin bir çarpımı olan tek birimsel 1 olduğundan, $a-1\in H$ $(\aleph_0)$ ve $a=1+(a-1)$ elemanının (ii) formunda olduğu görülür.

Sonuç olarak, Q direkt sonlu (I_f Tip veya II_f Tip) bir halka ise $Q=H(\aleph_0)$ dır. Q Tip III şartını sağlayan bir halka ise $H(\aleph_0)=0$ dır. Q basit bir halka ise a, ne sol ne de sağ birimsel elemandır.

3.2.14. Sonuç: Q herhangi bir basit, sağ self-injektif halka ve $1\neq a\in Q$ olsun. Bu durumda a idempotentlerin bir çarpımıdır $\Leftrightarrow$ a ne sağ ne de sol terslenebilirdir. (O'Meara, 1986).

3.2.15. Sonuç (Reynolds and Sullivan, 1985)**:** D bir bölümlü halka V, D üzerinde keyfi bir (sağ) vektör uzayı ve $L(V)$, V den V ye tüm lineer dönüşümlerin çarpımsal yarı grubu olsun. Bu durumda

$a \in L(V)$, öz ($\neq 1$) idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılabilir $\Leftrightarrow$

$n(a) = \text{boy çek}(a)$, (a nın sıfırlığı, (nullity))

$d(a) = \text{yanboy Im}(a)$, (a nın eksikliği, (defect))

$s(a) = \text{yanboy}\{u \in V: a(u)=u\}$, (a nın kayması, (shift))

olmak üzere,

(1) $n(a) = d(a) = s(a) \geq \aleph_0$

ya da

(2) $0<n(a)=d(a)\leq s(a)<\aleph_0$ dır.

İspat: $Q = \text{End}_D(V)$ genel lineer halka olsun. Bilindiği gibi, 2.2.7. Teoremden Q nun asal, regüler ve sağ self-injektif (Tip I den) bir halka olduğu bellidir. Buna göre (1) ve (2) koşulları, 3.2.13. Teoremin sırasıyla, (i) ve (ii) koşullarına denk olduklarını göstereceğiz.

İlk olarak $x,y \in Q$ için, $xQ \cong yQ$ (sağ Q-modüler olarak) olur $\Leftrightarrow$ $xV \cong yV$ (vektör uzayları olarak) dir. Dolayısıyla, $x \in Q$ ve bir α kardinali için,

$$\alpha(xQ) \lesssim xQ \Leftrightarrow \alpha(xV) \lesssim xV$$

olup buradan, (α^+, α nın ardışık kardinali olmak üzere),

$$\mu(xQ) = \begin{cases} 0, & \text{boy}(xV) = 0 \text{ ise;} \\ \aleph_0, & 0 < \text{boy}(xV) < \aleph_0 \text{ ise;} \\ ((\text{boy})xV)^+, & \text{boy}(xV) \geq \aleph_0 \text{ ise.} \end{cases}$$

$a \in Q$ olsun. Bir $b \in Q$ için $a=aba$ yazalım ve $e=ab$, $f=ba$ olsun. Bu durumda $n(a)=\text{boy}(1-f)V$, $d(a)=\text{boy}(1-e)V$ ve $s(a)=\text{boy}(1-a)V$ olur. Buradan

$$n(a)=d(a)=s(a)\geq\aleph_0$$

$$\Leftrightarrow n(a)^+ = d(a)^+ = s(a)^+ > \aleph_0$$

$$\Leftrightarrow \mu((1-f)Q)=\mu((1-e)Q)=\mu((1-a)Q)>\aleph_0$$

$$\Leftrightarrow \mu(r(a,Q))=\mu\text{-yanboy}(aQ)=\mu((1-a)Q)>\aleph_0$$

dır. Böylece (1) ve (i) ifadeleri denktirler.

Aynı zamanda $0<n(a)=d(a)\leq s(a)<\aleph_0$

$\Leftrightarrow$ boy $(1-a)V<\aleph_0$ ve a, bir birimsel değil,

(boy$(1-a)V<\aleph_0$ olduğunda daima $n(a)=d(a)$ eşitliği sağlandığından)

$\Leftrightarrow$ $a=1+x$, $x\in socQ$ ve a, bir birimsel değildir. Tam lineer bir halka için, $H(\aleph_0)=socQ$ dır. Böylece (2) ve (ii) ifadeleri denktir.

3.3. Ünit-Regüler Halkalarda İdempotent Çarpımları

3.3.1. Özelik: Bir regüler halkada, a nın ünit-regüler olması a nın $r(a)\cong R/aR$ anlamında dengeli olmasına denktir. 2.1.18. Teoremden, tüm e, $f\in R$ idempotentleri için

$$eR\cong fR\Rightarrow(1-e)R\cong(1-f)R$$

olur.

3.3.2. Önerme: R bir regüler halka ve k pozitif bir tamsayı olsun. Bir $a\in R$, k tane idempotentin bir çarpımı ise

$$(1-a)R\precsim k(r(a))$$

dır.

İspat: Önermeyi k üzerinde tümevarımla ispatlayacağız. R regüler bir halka ve $a\in R$ nin, k tane idempotentin bir çarpımı olduğunu varsayalım. $k=1$ ise, $a=a^2$ olup $a(1-a)R=(a-a^2)R=0 \Rightarrow (1-a)R=r(a)\precsim r(a)$ dır. $k>1$ olsun. $f=f^2$ ve a_1, k-1 tane idempotentin bir çarpımı olmak üzere, $a=a_1f$ yazalım. Tümevarımdan $(1-a_1)R\precsim (k-1)\ r\ (a_1)$ dır. $a[fR\cap r(a_1)\oplus(1-f)R]=0 \Leftrightarrow a[fR\cap r(a_1)]+a(1-f)R=0 \Leftrightarrow x\in fR\cap r(a_1)\Leftrightarrow x=fr$ ve $a_1x=0 \Leftrightarrow (a_1f)x+(a_1f)\ (1-f)R=0 \Leftrightarrow (a_1f)\ fr + a_1(f-f^2)R=0\Leftrightarrow a_1(f-f)R=0$ ve $a_1fr=0$ olduğundan $r(a)=(fR\cap r(a_1))\oplus(1-f)R$ dir. Bir $h\in R$ için $r(a_1)=(fR\cap r(a_1))\oplus hR$ yazalım. Buna göre $hR\cap fR=0 \Rightarrow hR\precsim(1-f)R\Rightarrow r(a_1)\precsim r(a)$ dır. Şimdi

$$(1-a_1)fR\subseteq(1-a_1)R\precsim(k-1)r(a_1)\precsim(k-1)r(a)$$

olur ki,

$$(1-a)R=(1-a_1)fR+(1-f)R\precsim(k-1)r(a)\oplus r(a)=k(r(a))$$

dır ve buradan

$$(1-a)R\precsim k(r(a))$$

dır.

3.3.3. Teorem: R ünit-regüler bir halka ve k herhangi bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $a \in R$, k tane idempotentin bir çarpımıdır $\Leftrightarrow$

$$(1-a)R \lesssim k(r(a)).$$

dır.

İspat: $a \in R$, k tane idempotentin bir çarpımı ise, $(1-a)R \lesssim k(r(a))$ olduğu 3.3.2. Önermesinde gösterildi.

Karşıt olarak, $(1-a)R \lesssim k(r(a))$ olduğunu varsayalım. $a \in R$ nın k tane idempotentin bir çarpımı olduğunu k üzerinde tümevarımla ispatlayacağız. $k=1$ için $(1-a)R \lesssim r(a)$ dır. $x \in r(a) \Rightarrow ax=0 \Rightarrow x=(1-a)x \in (1-a)R$ olduğundan $r(a) \subseteq (1-a)R$ ve $(1-a)R \lesssim r(a) \subseteq (1-a)R$ ve R nin direkt sonlu oluşundan $r(a) = (1-a)R$ ve sonuç olarak $a=a^2$, 1 tane idempotent çarpımıdır. Şimdi $k \geq 2$ ve sonucun k-1 için doğru olduğunu varsayalım.

R bir regüler halka olduğundan $b,c,d \in R$ için

$aR=(r(a) \cap aR) \oplus r(1-a) \oplus bR$

$R=(r(a)+aR) \oplus cR$

ve $a[(r(a) \cap aR) \oplus dR]=0 \Leftrightarrow a[(r(a) \cap aR]+adR = 0 \Leftrightarrow x \in r(a) \cap aR \Leftrightarrow x \in r(a)$ ve $x \in aR \Leftrightarrow ax=0$ ve $x=ar \Leftrightarrow a.\ ar=0 \Leftrightarrow a.\ [r(a) \cap aR]+adR=0 \Leftrightarrow a.x+(axa)dR=0$ olup,

$r(a)=(r(a) \cap aR) \oplus dR$ eşitliklerini yazalım.

$R=(r(a) \cap aR) \oplus r(1-a) \oplus bR \oplus cR \oplus dR$ dır.

R nin yukarıdaki ayrışıma karşılık gelen dik idempotentleri e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 olsun. Yani $e_1 R= r(a) \cap aR$, $e_2R=r(1-a)$, $e_3R=bR$, $e_4R=cR$ ve $e_5R=dR$ olmak üzere $1=e_1+e_2+e_3+e_4+e_5$ dir. $e=e_1+e_2+e_3$ ve $f=e_2+e_3+e_4$ olsun. Bu durumda $r(a)=(1-f)R$ ve $Ra=Rf$ olduğundan $aR=eR$ dir. a nın e_i lere göre formu, aşağıdaki Şekil 3.3.1 de görülmektedir.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Şekil 3.3.1. a nın $1=e_1+e_2+e_3+e_4+e_5$ toplamına göre (iki-yönlü) peirce ayrışımı.

$fR\cong eR$ (a ile soldan çarpma bir izomorfizma verdiğinden) ve R ünit-regüler halka olduğundan $(1-f)R\cong(1-e)R$ olur. Buradan

$$r(a)\cong e_4R\oplus e_5R \tag{2}$$

dir. Aynı zamanda $r(1-a)=e_2R\Rightarrow(1-e_2)R\cong (1-a)R$ dır ve $(1-a)R\lesssim k(r(a))$ dan $e_1R\oplus e_3R\oplus e_4R\oplus e_5R\lesssim k(r(a))$ sağlanır ve (2) den

$$e_1R\oplus e_3R\oplus r(a)\lesssim(k-2)r(a)\oplus e_1R\oplus e_5R \text{ olur.}$$

R nin ünit-regülerliğinden, 2.1.20.Sonuçtan bu ifadenin ortak terimlerinin sadeleşmesini gerçekleyebiliriz. Dolayısıyla

$$e_3R\lesssim(k-2)r(a)\oplus e_5R$$

yi elde ederiz.

$$e_{31}R\lesssim(k-2)r(a) \tag{3}$$

ve

$$e_{32}R\lesssim e_5R \tag{4}$$

olacak şekilde 2.1.12. Sonuçtan e_{31} ve e_{32} $\in R$ dik idempotentler olmak üzere $e_3=e_{31}+e_{32}$ yi yazabiliriz.

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_{31} & e_{32} & e_4 & e_5 \\ \hline e_1 & 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ e_2 & 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ e_{31} & 0 & 0 & * & 0 & * & * \\ e_{32} & 0 & 0 & * & 1 & * & *-1 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Şekil 3.2.2. a_1 nin $1=e_1+e_2+e_{31}+e_{32}+e_4+e_5$ toplamına göre Peirce ayrışımı. a_1 in e_5 kolonu, e_{32} kolonunu. yer değiştirerek ve y ile sağ çarpma altında kalanını kaydırarak a nın e_{32} kolonundan bulunur. Böylece a_1 in e_2, e_{31} ve e_4 kolonları a nın formu ile aynıdır.

(4) den $yz=e_{32}$ olmak üzere $y\in e_{32}Re_5$ ve $z\in e_5Re_{32}$ elemanları bulabiliriz. $a_1=e_1+e_{32}+a(1-e_{32})+(a-1)y$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} a&=(e_1+e_{32}+a(1-e_{32})+(a-1)y)(f+z) \\ &=a_1\,(f+z). \end{aligned} \tag{5}$$

Tümevarım basamağı yukarıdaki çarpımla gerçeklenir.

Çünkü, $(1-a_1)R\lesssim(k-1)r(a_1)$ olduğunu görelim. a_1 in seçilme gerekçesi Şekil 3.3.2'den kaynaklanır. (a_1 ; $r(1-a_1)$, $r(1-a)$ dan daha büyük olacak şekilde seçilir). Ünit-regülerlikten $R(e_4+e_5)\subseteq\ell(a_1)\Rightarrow(e_4+e_5)R\lesssim r(a_1)$ dır. Sonuç olarak (2) den

$$r(a)\lesssim r(a_1) \tag{6}$$

olur. Aynı zamanda $e_1R\oplus e_2R\oplus e_{32}R\subseteq r(1-a_1)$ olup, buradan $e_{31}R\oplus e_4R\oplus e_5R$, $r(1-a_1)$ in bir tümleyen sağ idealini kapsar. Böylece

$$\begin{aligned} (1-a_1)R&\lesssim e_{31}R\oplus e_4R\oplus e_5R \\ &\lesssim(k-2)\,r(a)\oplus e_4R\oplus e_5R\,, && \text{(3) den} \\ &=(k-2)\,r(a)\oplus r(a)=(k-1)\,r(a), && \text{(2) den} \\ &\lesssim(k-1)\,r(a_1) && \text{(6) dan} \end{aligned}$$

olur ve bu iddiayı gerçekler.

Tümevarımdan f_1 , ... , f_{K-1} $\in$R idempotentleri için, $a_1 = f_1 f_2 \ldots f_{k-1}$ dır. f_k=f+z olsun. Bu durumda f_k idempotenttir ve (5) den a, aşağıdaki gibi k tane idempotentin bir çarpımı olur.

$$a=a_1 f_k=f_1 f_2 \ldots f_{k-1} f_k .$$

3.3.4. Açıklama: 3.3.3. Teoreminin ispatında, $\ell(a)=\ell(a_1)$ olduğundan, $aR=a_1R$ ve $f_kR\cong fR\cong aR$ olur. Buna göre, tümevarımdan $a=f_1 f_2 .. f_k$ çarpımında f_i idempotentlerini aşağıdaki izomorfizmalar olacak şekilde düzenleyebiliriz.

$$f_1R\cong f_2R\cong \ldots \cong f_kR\cong aR.$$

Bu çarpımlarda kaç tane idompotentin yer aldığının tam olarak bilinmemesine karşılık bir ünit-regüler halkada bir elemanın idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılabilmesi için iki idealin eşitliği cinsinden basit bir gerek ve yeter şart aşağıdaki sonuçta verilmiştir. Pratikte bu koşulun geçerliliğini kontrol etmek zor değildir; çünkü aşağıdaki eşitlikte sol ideal daima sağ ideal içindedir.

3.3.5. Sonuç: R bir ünit-regüler halka olsun. Bu durumda

a$\in$R, R nin idempotentlerin bir çarpımıdır $\Leftrightarrow$

$$Rr(a)=R(1-a)R$$

dır.

İspat: $r(a)\subseteq(1-a)R$ olduğundan $Rr(a)\subseteq R(1-a)R$ daima doğru olur. Diğer yandan, 2.1.12. Sonuçtan $R(1-a)R\subseteq Rr(a)$ dır $\Leftrightarrow$ bir k pozitif tamsayısı için $(1-a)R \precsim k(r(a))$ dır. O halde sonuç 3.3.3. Teoremden çıkar.

3.3.6. Sonuç: R basit ünit-regüler bir halka olsun. Bu durumda a$\in$R, R nin öz ($\neq$1) idempotentlerin bir çarpımıdır $\Leftrightarrow$ a bir birimsel değildir. (Hannah and O'Meara 1989)

R karşılaştırma aksiyomunu sağlayan bir basit ünit-regüler halka ise, R nin bir tek $N:R\rightarrow[0,1]$, rank fonksiyonu var ve N, esas sağ ideallerin alt izomorfizmasını tanımlar. Yani, 2.3.15. Sonuçtan $xR\precsim yR \Leftrightarrow N(x)\leq N(y)$ dır. Aşağıdaki sonuçta olduğu gibi, basit bir eşitsizlikle a ve (1-a) elemanlarının ranklarını kapsadığından bu sonuç, 3.3.3.Teoremde $(1-a)R\precsim k(r(a))$ alt izomorfizma koşulunu yerine koymamıza imkan verir.

3.3.7. Sonuç: R karşılaştırma aksiyonumunu sağlayan basit, direkt sonlu regüler bir halka, $N:R\to[0,1]$, R nin bir tek rank fonksiyonu ve k keyfi bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $a\in R$, R nin k tane idempotentinin bir çarpımıdır $\Leftrightarrow$

$$N(1-a)\leq k(1-N(a))$$

dır.

İspat: 2.1.39.Teoremden, R ünit-regülerdir. R nin xR ve yR esas sağ idealleri için, 2.3.15.Sonuç ve 2.1.34.Önermeden

$$xR\precsim k(yR)\Leftrightarrow N(x)\leq k\,N(y)$$

olduğu görülür. $a\in R$ ve $r(a)=yR$ olsun. $R\cong r(a)\oplus aR$ olduğundan $N(y)=1-N(a)$ dır. Yukardaki çift yönlü ifadeyi, (1-a)R ve yR esas sağ ideallerine uygulayarak, 3.3.3.Teoremden:

a, k tane idempotentin bir çarpımı dır.

$$\Leftrightarrow (1-a)R\precsim k(r(a))$$

$$\Leftrightarrow (1-a)R\precsim k(yR)$$

$$\Leftrightarrow N(1-a)\leq kN(y)$$

$$\Leftrightarrow N(1-a)\leq k(1-N(a))$$

elde ederiz. 3.3.4. Açıklamadan, 3.3.7. Sonuçdaki k tane idempotenti, a nın idempotentleri gibi aynı ranka sahip olacak şekilde seçilebilir.

3.3.8. Sonuç (Ballantine, 1979): D bir bölümlü halka, k ve n keyfi pozitif tamsayılar ve A, D üzerinde bir nxn matris olsun. Bu durumda

A, D üzerinde k tane idempotent matrislerin bir çarpımıdır. $\Leftrightarrow$

$$\text{rank }(I-A)\leq k.\ \text{sıfırlık }(A)$$

dır.

İspat: D üzerindeki nxn matrislerinin $R=M_n(D)$ halkası, karşılaştırma aksiyomunu sağlayan basit, direkt sonlu regüler bir halkadır. rank (x) matris rankı olmak üzere, bir tek rank fonksiyonu N, $N(x)=\text{rank }(x)/n$ ile tanımlanır.

3.4. Sağ Self-İnjektif Regüler Halkalarda İdempotent Çarpımları

3.3.3. Teoremdeki $(1-a) \lesssim k(r(a))$ koşulunu k tane idempotentin çarpımları olarak daha uzun karakterize etmemek için, yeter miktarda, yeni halkalar vardır. Gerçekten, aşağıdaki önermeyi kullanarak (Dawlings 1983) k=1 ve k=2 için bile yukarıdaki koşulun aralarındaki ilişkinin bozulabileceğini göreceğiz.

3.4.1. Önerme: R bir halka olsun. $a \in R$, 2 tane idempotentin bir çarpımı ve $r(a) \subseteq aR$ ise, $a^2=a^3$ dır.

İspat: $e=e^2$, $f=f^2 \in R$ olmak üzere, $a=ef$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $1-f \in r(a) \subseteq aR \subseteq eR$ ve buradan $e(1-f)=1-f$ olur. Böylece $fe(1-f)=0$ dır, ki buradan $fe=fef$ dir. O halde $a^3=ef\,ef\,ef = ef\,ef = a^2$ olduğunu görürüz.

3.4.2. Örnek: R, $R_R \cong 2R_R$ olacak şekilde bir halka olsun. Bu durumda 3 indeksli bir nilpotent $a \in R$ vardır; öyle ki

(i) $r(a) \subseteq aR$ ve $a^2 \neq a^3$,

(ii) a, üç tane idempotentin bir çarpımıdır, fakat üçten daha az değildir,

(iii) $R=(1-a)R \cong r(a) \cong 2r(a)$,

(iv) $R=R(1-a) \cong \ell(a) \cong 2\ell(a)$.

İspat: (i) Hipotezden $R_R \cong 2R_R \cong 3R_R$ dir. Buradan herbiri $e_iR \cong R_R$ ve $e_1+e_2+e_3=1$ olacak şekilde e_1, e_2, $e_3 \in R$ dik idempotentleri vardır. $e_1R \cong e_2R \cong e_3R$ izomorfizmalarından $e_{ij} \in e_iRe_j$ elemanları vardır; öyle ki $i \neq j$ iken $e_i=e_{ij}\,e_{ji}$ dir. $a=e_{21}+e_{32}$ olsun. Bu durumda a, 3 indeksli bir nilpotent olup $r(a)=e_3R \subseteq (e_2+e_3)R=aR$ olur.

(ii) 3.4.1.Önermeden a, 2 tane idempotentin bir çarpımı olamaz, ancak

$$a=(e_2+e_3+e_{21})\,(e_1+e_{32})$$
$$=(e_2+e_3+e_{21})\,(e_1+e_3+e_{32})\,(e_1+e_2)$$

olduğundan 3 tane idempotentin bir çarpımı olarak yazılabilir.

(iii) a, nilpotent olduğundan $(1-a)R=R$ dir ve böylece $R=(1-a)R \cong r(a) \cong 2r(a)$ sağlanır.

(iv) $\ell(a)=Re_1$ olduğundan $R=R(1-a) \cong \ell(a) \cong 2\ell(a)$ dır. O halde a elemanı, $(1-a)\,R \lesssim k(r(a))$ ifadesini gerçekler ve k=1 ve k=2 için ifadenin sol tarafına benzerdir, ancak a ne idempotent ne de 2 tane idempotentin bir carpımıdır.

Bu örneğin hipotezlerini sağlayan en basit bir halka örneği, bir bölümlü halka üzerine sonsuz boyutlu bir (sağ) vektör uzayın lineer dönüşümlerinin halkasıdır. Bununla birlikte ünit-regüler olmayan herhangi bir sağ self-injektif regüler R halkasının bu örneğinin hipotezlerini sağlayan bir direkt faktörü mevcut olup bunun sonucu olarak R nin (ii), (iiii) ve (iv) koşullarını sağlayan bir elemanı vardır. Buna göre sağ self-injektif regüler halkalar arasında yalnızca ünit-regüler olanlar 3.3.3. Teoreminin sonuçlarını sağlarlar.

3.3.2. Önerme gösterir ki herhangi bir regüler R halkasında a, idempotentlerin bir çarpımı olduğunda bir k için $(1-a)R \precsim k(r(a))$ olup simetriden aynı zamanda $R(1-a) \cong k(\ell(a))$ dır. Bu örnek gösterir ki; genel bir regüler halkada, çarpımda yer alan idempotentlerin sayısı ile r(a)nın (1-a)R yi örtmek için gerekli olan kopyelerinin sayısı arasındaki bağıntının gevşetilmesi gerekir. (Aynı şey $\ell(a)$ nın R(1-a) yı örtmek için gerekli olan sayısı için de doğrudur). 3.3.5. Sonuçta olduğu gibi 2.1.14. Sonuçdan bu koşulları idealler cinsinden yeniden ifade edebiliriz. Böylece r(a) veya $\ell(a)$ ın kopyelerinin açık sayısını kaldırabiliriz.

3.4.3. Önerme: R bir regüler halka ve J, R nin bir ideali olsun. Her $x_1, \ldots, x_n \in J$ için bir $g=g^2 \in J$ vardır; öyle ki her $i=1,\ldots,n$ için $x_i \in gRg$ dır.

İspat: $e=e^2$, $f=f^2 \in J$ vardır; öyle ki R regüler olduğundan $eR = \sum_{i=1}^{n} x_iR$ ve $Rf = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$ olur. Aynı zamanda $(1-f)R=(eR \cap (1-f)R) \oplus uR$ ve $R=(eR+(1-f)R) \oplus vR$ olacak şekilde $u, v \in R$ vardır. $vR \cap (1-f)R=0 \Rightarrow vR \precsim fR$ dır ki, buradan $vR \subseteq RfR \subseteq J$ ve $v \in J$ olduğu görülüp, $R=eR \oplus uR \oplus vR$ ayrışımını da yazabiliriz. $gR=eR \oplus vR$ ve $(1-g)R=uR$ olacak şekilde $g=g^2 \in R$ olsun. Bu durumda $e, v \in J$ olduğundan $g \in J$ dir. Aynı zamanda $eR \subseteq gR$ ve $(1-g)R \subseteq (1-f)R$ olur, böylece $eRf \subseteq gRg$ dır. O halde, $x_i \in eRf \subseteq gRg$ her i için, $x_i \in gRg$ yi verir.

3.4.4. Önerme: R bir regüler halka olsun. $a \in R$, idempotentlerin bir çarpımı ise,

$$Rr(a)=\ell(a)R=R(1-a)R \tag{7}$$

dır. (Hannah and O'Meara, 1989)

3.4.5. Önerme: R nin bir regüler halka olduğunu varsayalım ve $a \in R$, 3.4.4. Önermedeki (7) ifadesini sağlasın. Bu durumda bir $g=g^2 \in R$ ve bir $y \in A \equiv gRg$ vardır; öyle ki

$$a=y+(1-g)$$

ve A halkasında

$$Ar(y)=\ell(y)A=A$$

dır.

İspat: $x=1-a$ olsun ve $R(1-a)R$ ideali J olarak tanımlansın. $x \in J$ olduğundan, 3.4.3.Önermesi bir $g=g^2 \in J$ olduğunu gösterir, öyle ki $x \in gRg$ dir. $RgR=J$ olduğu aşikardır. $y=g+x \in A$ olsun, şöyle ki $a=y+(1-g)$ dir. Bu durumda, $y \in gR$ olduğundan,

$$r_A(y)=r_R(a)\cap Rg=r_R(a)g$$

ve böylece

$$\begin{aligned} Ar_A(y) &= (gRg)r_R(a)g \\ &= gRr_R(a)g, \quad (r_R(a)\subseteq(1-a)R\subseteq gR \text{ olduğundan}) \\ &= gJg \\ &= gRgRg=gRg=A \end{aligned}$$

olur. Simetriden, $\ell_A(y)A=A$ olmalıdır.

Bu önermenin notasyonunda y, A halkasında e_i idempotentlerinin bir çarpımı olarak yazılabilirse a, R halkasında $e_i+(1-g)$ idempotentlerinin çarpımına karşılık geldiğini görebiliriz. R, 2.2.3. Sonuçtaki halka iken A halkası sağ self-injektif ve regüler olduğundan, A (7) ifadesinin tüm halkalarındaki ideallerine indirgenebilir anlamındadır.

3.4.6. Önerme: e, f, g idempotentler olmak üzere R bir regüler halka olduğunu varsayalım; öyle ki

$$eR\cap gR=0, \quad fR\cap gR=0 \quad \text{ve } fR\lesssim gR$$

dir. Bu durumda $e_1R=eR$, $e_2R\lesssim(1-e_2)R$ ve $e_3=f$ olmak üzere her $a\in eRf$, üç tane idempotentin $e_1e_2e_3$ biçiminde bir çarpımıdır.

İspat: e ve g nin dik olduklarını varsayalım. $fR \lesssim gR$ olduğundan R nin g_1 , g_2 dik idempotentleri vardır; öyle ki $g = g_1+g_2$ ve $fR \cong g_1R$ olur. Böylece $xy=f$ olacak şekilde $x \in fRg_1$ ve $y \in g_1Rf$ bulabiliriz. $fR \cap g_1R=0$ olduğundan $g_1R=h_1R$ ve $fR=h_2R$ olacak şekilde h_1, h_2 dik idempotentleri vardır. Bu durumda a, aşağıdaki gibi üç tane idempotentin ($e_1e_2e_3$ olarak) bir çarpımıdır,

$$a=[e+ax][h_1+yh_2][f].$$

$e_1R=eR$ eşitliği aşikardır. Aynı zamanda $g_1R \cong fR$ ve $fR \cap g_1R=0$ olduğundan $e_2R=h_1R=g_1R \lesssim (1-g_1)R$ dir. $(1-g_1)R \cong (1-e_2)R$ izomorfluğu gereğince $e_2R \lesssim (1-e_2)R$ alt izomorfluğu gerçeklenir.

3.4.7. Önerme: R genel karşılaştırma aksiyomunu sağlayan bir regüler halka olsun.

$$eR \lesssim (1-e)R \text{ ve } fR \lesssim (1-f)R$$

olacak şekilde $e=e^2$, $f=f^2 \in R$ ise, herbiri $e_iR \lesssim (1-e_i)R$ şartını sağlayarak her $a \in eRf$, üç tane idempotentin $e_1 e_2 e_3$ biçiminde bir çarpımıdır.

İspat: e_0, f_0 dik idempotentler olmak üzere

$$eR=e_0R \oplus (eR \cap fR) \text{ ve } fR=f_0R \oplus (eR \cap fR)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Genel karşılaştırma aksiyomundan,

$$ue_0R \lesssim uf_0R \quad \text{ve} \quad (1-u)f_0R \lesssim (1-u)e_0R$$

olacak şekilde R nin bir u merkezi idempotenti vardır. Bir $a \in eRf$ yi $a=ua+(1-u)a$ şeklinde yazarak, ayrı ayrı uR ve (1-u)R halkaları üzerinde yoğunlaşabiliriz. Her $g_iuR \lesssim (u-g_i)R$ ve her $h_i(1-u)R \lesssim (1-u-h_i)R$ alt izomorflar olmak üzere, uR de $ua=g_1g_2g_3$ yı ve (1-u) R de $(1-u)a=h_1h_2h_3$ yı yazabilirsek, $a=e_1e_2e_3$ yı ve $e_iR \lesssim (1-e_i)R$ yı elde etmek için $e_i=g_i+h_i$ idempotentlerini kullanabiliriz. Böylece, $e_0R \lesssim f_0R$ ve $f_0R \lesssim e_0R$ olduklarını varsaymamız yeterlidir.

İlk olarak $e_0R \lesssim f_0R$ durumunu düşünelim. Bir $g=g^2 \in R$ yi oluşturalım ki, 3.4.6. Önerme kullanılabilir. $e_0R \lesssim f_0R$ olduğundan e_0R da sıfır sağ sıfırlayıcı olmak üzere bir $x \in f_0Re_0$ vardır. e_0 ve f_0 dik idempotent olduklarından dolayı

$h=e_0+x$ idempotent olsun. Bu durumda $z\in eR\cap fR$ ise $z=hz=e_0z+xe_0z$ olduğundan $eR\cap hR=0$ dır ve $xe_0Z\in eR\cap f_0R=0$ olur. Buradan $e_0Z=0$ dır, böylece $z=0$ olmak zorundadır.

Aynı şekilde, $z\in fR\cap hR$ ise $z=e_0z+xe_0z$ ifadesi $e_0z\in fR\cap e_0R=0$ yi verdiğinden $fR\cap hR=0$ dır ve buradan $z=0$ olur.

Aynı zamanda $e_0=h-x\in hR+fR$ olduğundan $eR+fR=fR+hR$ dir. Şimdi R de h_1R, $eR+fR$ nin bir tümleyeni ve $gR=hR+h_1R$ olacak şeklide bir $g=g^2\in R$ olsun. $eR\cap gR=0$ ve $fR\cap gR=0$ olduğundan bu, 3.4.6. Önerme için aradığımız g dir.

$$R=(fR\oplus hR)\oplus h_1R=fR\oplus hR$$

ayrışımı, $gR\cong(1-f)R$ olduğunu gösterir ve hipotezlerden $fR\lesssim gR$ dir. O halde $e_0R\lesssim f_0R$ durumu ispatlanmış olur.

Benzer olarak, eğer $f_0R\lesssim e_0R$ ise $eR\cap gR=0$ ve $fR\cap gR=0$ olacak şekilde yukardaki yapı bir g idempotentini verir, fakat $eR\lesssim gR$ dir. Bununla birlikte $f_0R\lesssim e_0R\Rightarrow fR\lesssim eR$ olur ve böylece $fR\lesssim gR$ dir.

3.4.8. Teorem: R sağ self-injektif, regüler halka ve $a\in R$ olsun. Bu durumda

a idempotentlerin bir çarpımıdır $\Leftrightarrow$

$$Rr(a)=\ell(a)R=R(1-a)R. \tag{7}$$

İspat: R regüler, sağ self-injektif bir halka olsun. R ünit-regüler olduğunda (7) sağlanırken 3.3.5.Sonuçtan teoremin karşıtı da doğrudur. (Ünit-regüler durumunda $\ell(a)R$ den bahsetmeye gerek duymadık; çünkü; her $a\in R$ için $\ell(a)R=Rr(a)$ dır.) a, idempotentlerin bir çarpımı ise R yi 2x2 üst üçgensel matris halkalar ve a yı da sıfır olmayan bir üst üçgensel matris alarak (7) ifadesinin genel halkalarda doğru olduğu görülür. Reynolds ile Sullivan bir tam lineer R halkada ve O'Meara asal, regüler, sağ self-injektif bir R halkada çalıştıklarında buldukları sonuçlar, (7) ifadesiyle aynı karakterdedir. μ, Goodearl-Boyle sonsuz boyut fonksiyonu olmak üzere asal, regüler, sağ self-injektif bir R halkasında bir a elemanını idempotentlerin bir çarpımı olarak karakterize etmek için kullanılan koşul

$$\mu(r(a))=\mu\text{-yanboy }(aR)=\mu((1-a)R) \qquad (8)$$

dır. Bununla birlikte, $\mu(xR)=\mu(yR)\Leftrightarrow RxR=RyR$ olduğundan dolayı, aynı μ-boyut fonksiyonuna sahip olan bu ifadeler; esas sağ idealleri kapsayarak iki-yönlü esas ideallerin denkliğini kapsayan bir tanesine dönüştürülebilir. Ayrıca $e=e^2$ olmak üzere $aR=eR$ ise $\ell(a)=R(1-e)$ ve $(1-e)R$, aR nin bir tümleyeni olduğundan, aR nin sağ idealinin gösterimi $\ell(a)$ nın gösterimine karşılık gelir ve böylece $\ell(a)$ ve tümleyeni aynı $R(1-e)R$ idealini üretir. O halde bu yerine yazımda, (8) ifadesi (7) ifadesine denk olur. $n(a)$=boyÇek(a), $d(a)$=yanboy $Im(a)$, $s(a)$=yanboy $\{u\in V{:}a(u)=u\}$ olmak üzere,

$$n(a)=d(a)=s(a)\geq\aleph_0$$

veya

$$0<n(a)=d(a)\leq s(a)<\aleph_0$$

olacak şekilde (8) ifadesinden ve böylece (7) den dolayı Reynolds ve Sullivanın ifadelerinin nasıl çıkarıldığı 3.2.15. Sonuçda gösterildi.

Şimdi teoremimizin karşıtı doğru olsun, yani $a\in R$ (7) ifadesini sağladığını varsayalım. 3.4.5. Önerme ve açıklamalardan $R(1-a)R=R$ olduğunu kabul edebiliriz. 2.2.24. Önermeden, $(1-u)R$ direkt sonlu ve uR sırfi sonsuz olacak şekilde R nin bir u merkezi idempotenti vardır. 3.3.5. Sonuçdan $a(1-u)$ idempotentlerin bir çarpımıdır, öyle ise $au\in uR$ yi almalıyız. Yani, R nin sırfi sonsuz olduğunu varsayabiliriz. $eR=aR$ ve $Rf=Ra$ olacak şekilde $e=e^2$, $f=f^2\in R$ olsun, buna göre hipotezlerimiz $R(1-f)R=R(1-e)R=R$ olur. $a\in eRf$ olduğundan 3.4.7. Önermeden $eR\lesssim(1-e)R$ ve $fR\lesssim(1-f)R$ olduklarını göstermek yeterlidir. Buradan $RgR=R$ ise $R\lesssim gR$ olduğunu göstermek yeterlidir. Ancak $RgR=R$ ise bir n tamsayısı için 2.1.14. Sonuçtan $R\lesssim n(gR)$ olur. R sırfi sonsuz olduğundan 2.2.25. Teoremden $nR\cong R\lesssim n(gR)$ dir ve böylece $R\lesssim gR$ olur.

3.4.9. Teorem: R bir regüler halka olsun. Bu durumda R, aşağıdakilerden herhangi biri iken

$$Rr(a)=\ell(a)R=R(1-a)R \qquad (7)$$

özeliği $a\in R$ yi idempotentlerin bir çarpımı olarak karakterize eder.

(i) R ünit-regüler,

(ii) R sağ sürekli,

(iii) R bir sağ self-injektif halkanın bir bölüm halkasıdır.

İspat: 3.3.5. Sonuçdan R, ünit-regüler halka ise $a \in R$, idempotentlerin bir çarpımı olarak karakterize edilir. R sağ sürekli halka ise 2.3.12. Teoremden, R bir değişmeli (böylece ünit-regüler) halka ve bir sağ self-injektif halkanın bir direkt çarpımıdır. Böylece 3.3.5. Sonuç ve 3.4.8. Teoremden bu durum da sağlanır. O halde I, sağ self-injektif regüler bir R halkasının bir ideali olmak üzere R/I halkalarını alalım. $a \in R/I$, (7) ifadesini sağladığını varsayalım. 3.4.8.Teoremden, $\overline{b}=a$($R \to R/I$ doğal dönüşümün görüntüsünü tanımlamak üzere) olacak şekilde R halkasında (7) ifadesini sağlayan bir $\overline{b} \in R$ bulmamız yeterlidir. $\overline{b}_1=a$ olmak üzere $\overline{b}_1 \in R$ yi seçelim. a, (7) ifadesini sağladığından

$$R(1-b_1)R+I=Rr(b_1)+I=\ell(b_1)R+I$$

olduğu görülür.

İlk eşitliği değiştirerek devam edelim. Bir $y \in I$ için $(1-b_1)R \subseteq Rr(b_1)+yR$ olur. Genel karşılaştırma aksiyomundan, R nin bir u merkezi idempotenti vardır; öyle ki

$$ur(b_1) \lesssim uyR \quad \text{ve } (1-u)yR \lesssim (1-u)r(b_1)$$

dır. $ur(b_1) \lesssim uyR \subseteq I$ olduğundan $ur(b_1) \subseteq I$ olup, $u(1-b_1) \in I$ dır. Böylece $\overline{u}\overline{b}_1 = \overline{u} \in R/I$ olur. $b_2=u+(1-u)b_1$ olsun ki, buradan $\overline{b}_2 = \overline{b}_1$ dir. Bu durumda uR de $R(1-b_2)R=Rr(b_2)$ ifadesi doğru olduğundan, (1-u)R de

$$\begin{aligned}(1-u)\,R(1-b_2)R &= (1-u)R(1-b_1)R \\ &\subseteq (1-u)Rr(b_1)+(1-u)yR \\ &\subseteq (1-u)Rr(b_1), \qquad (1-u)yR \lesssim (1-u)r(b_1) \text{ den} \\ &= (1-u)Rr(b_2)\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

Simetriden, bir $v \in R$ merkezi idempotenti vardır; öyle ki $b_3=v+(1-v)b_2$ ifadesi $\overline{b}_3 = \overline{b}_2 = \overline{b}_1$ ve $R(1-b_3)R=\ell(b_3)R$ eşitliklerini sağlar. Ancak bu b_2 için sağlandığından $R(1-b_3)R=Rr(b_3)$ olur. Böylece b_3 , (7) ifadesini ve $\overline{b}_3=a$ eşitliğini sağlar.

KAYNAKLAR

Ballantine, C.S., (1979), Products of idempotent matrices, Linear Algebra Appl. 19, 81-86.

Barnett, C. and **Camillo, V.**, (1994), Idempotents in Matrix Rings, Proc. American Math. Soc. 122, (4), 965-969.

Dawlings, R.J.H., (1981), Products idempotents in the semigroup of singular endomorphisms of a finite-dimensional vector space, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 91, 123-133.

Dawlings, R.J.H., (1983), The idempotent generated semigroup of continuous endomorphisms of a separable Hilbert space., Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sect. A 94, 351-360.

Erdos, J.A., (1967), On products of idempotent matrices, Glasgow Math. J. 8, 118-122.

Goodearl, K.R., (1979), Von Neumann Regular Rings, Pitman, London.

Hannah, J. and **O'Meara, K.C.**, (1989), Products of Idempotents in Regular Rings II, Journal of Gebra 123, 223-239.

Lam, T.Y., (1991), A First Course in Noncommutative Rings, Springer-Verlag, New York.

O'Meara, K.C., (1986), Products of idempotents in regular rings, Glasgow Math. J. 28, 143-152.

Reynolds, M.A. and **Sullivan, R.P.**, (1985), Products of idempotent linear transformations, Proc.Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 100, 123-138.

Vander Waerden, B.L., (1950), Modern algebra, Vol.II, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1966 yılında Konya'da doğdu. İlk, orta ve lise tahsilini Konya'da tamamladı. 1988'de Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 1993 yılında aynı fakülteden mezun oldu. 1994 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi'ne araştırma görevlisi olarak atandı. Halen aynı görevde çalışmaktadır.