T.C.

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HOMOJEN FONKSİYONLAR ve KISMİ ENDOMORFİZMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan

Recep BİNDAK

Yönetici

Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ

Van - 1996

T.C.

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HOMOJEN FONKSİYONLAR ve KISMİ ENDOMORFİZMALAR

Hazırlayan

Recep BİNDAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

JÜRİ ÜYELERİ

Başkan

Prof. Dr. Abdurrahim YILMAZ

ÜYE

Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ

ÜYE

Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ

TEZ KABUL TARİHİ

(14/2/1997)

ÖZET

Bu çalışmaya, kullanılan temem tanımlar ve kavramlar ile başlandı. Bu çalışmanın ikinci bölümünde homojen fonksiyonların özellikleri verildi. Daha sonra bu fonksiyonların $M_R(G)$ kümesi ile yakın-halkalar arasındaki ilişki incelendi. Son kısımda kısmi endomorfizmaların bazı özellikleri ele alındı.

SUMMARY

We start with some basic definitions and concepts to be used throughout the paper. In the second chapter of this paper we gives the properties of the homogeneous functions. After that we study relationship among the set of these functions $M_R(G)$ and near-rings. Lastly we give some properties of the piecewise endomorphisms.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bana her türlü konuda yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M (G)	G den G ye tüm fonksiyonlar
$End_S G$	G nin S halkası üzerindeki endomorfizmalar kümesi
$M_R(G)$	R üzerinde homojen fonksiyonlar kümesi
M	Modül
N_0	N yakın-halkasının sıfirsimetrik kısmı
N_s	N yakın-halkasının sabit kısmı
$\langle S \rangle$	S ile üretilen altmodül
TİB, PID	Temel ideal bölgesi
Ann(G)	G nin annihilatörü (sıfırlayıcısı)
l	sol annihilatör
${}_S G_R$	Bimodül G (sol S-, sağ R-modül)
$\mathcal{G}$	örtü
$\mathcal{G}(S)$	G nin S-alt modülleri olan $\mathcal{G}$ deki cümleler
$PE({}_S G, \mathcal{G})$	S-modül G nın $\mathcal{G}$ örtüsünce belirlenen kısmi endomorfizma yakın-halkası
ΠS	S halka direkt çarpımı
R[X]	Polinomlar halkası
R[[X]]	Formel kuvvet serileri

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. HALKALAR ve İDEALLER

Tanım 1.1.1 (Grup ve Yarıgrup):

(G, o) bir cebirsel yapı olsun. (G, o), aşağıdaki şartları sağlıyorsa G ye o işlemine göre grup denir.

(1) Her $a,b \in G$ için $ao(boc) = (aob)oc$

(2) Her $a \in G$ için $aoe = eoa$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

(3) Her $a \in G$ için $aoa' = a'oa = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır.

(G, o) grubundaki o ikili işlemi değişmeli ise (her $a,b \in G$ için $aob = boa$ oluyorsa) bu gruba değişmeli grup (abel grup veya komütatif grup) denir. Eğer (G,o) cebirsel yapısı (1) şartını sağlıyorsa G ye yarıgrup denir. (2) deki e elemanı özdeş eleman olup (G, +) grubunda o, (G, .) grubunda ise 1 dir. (3) teki a' elemanına a nın tersi denir ve (G, +) grubunda -a, (G, .) grubunda ise a^{-1} ile gösterilir.

Tanım 1.1.2 (Halka):

$\emptyset \neq R$ cümlesi ve bir küme üzerinde tanımlanan iki işlem (genellikle bunlar toplama ve çarpmadır) aşağıdaki şartaları sağlıyorsa (R, +, .) sistemine bir halka denir:

(1) (R, +) bir abel grup

(2) Her $a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$

(3) $a(b+c) = ab+ac$ ve $(a+b)c = ac+bc$

Eğer (4) Her $a,b \in R$ için $ab=ba$ ise R ye değişmeli (komütatif) halka, (5) Her $a \in R$ için $1_R a = a 1_R = 0$ ise R ye birimli (unitary) halka denir ve 1_R elemanına halkanın birimi denir.

Tanım 1.1.3 (Halka Homomorfizmi):

R ve S birer halka olsun. $f: R \to S$ dönüşümü; $f(a+b) = f(a)+f(b)$ ve $f(ab) = f(a)f(b)$ şartlarını sağlıyorsa f ye halka homomorfizmi denir.

Eğer; f, birebir ise monomorfizm

f, üzerine ise epimorfizm

f, birebir ve üzerine ise izomorfizm adını alır.

Ayrıca,

$f: R \to R$ izomorfizmine otomorfizm,

$f: R \to R$ homomorfizmine endomorfizm denir.

$(R, +, .)$ halkasının $(R, +)$ toplam grubunda $a \in R$ olmak üzere,

$$\psi_a : R \to R$$

$$r \to ar$$

olarak tanımlanırsa ψ_a $(R, +)$ nın bir endomorfizmidir. Çünkü,

$$\psi_a(r+s) = a(r+s) = ar+as = \psi_a(r)+\psi_a(s)$$

Ayrıca bu endomorfizmalarının bileşkesi

$$(\psi_a o \psi_b)(r) = \psi_a(\psi_b(r)) = \psi_a(br) = a(br) = (ab)r = \psi_{ab}(r)$$

şartını sağlar. Bu yüzden $(R, +)$ grubunun endomorfizmalarınınE cümlesinde $\psi_a+\psi_b$ ve $\psi_a o \psi_b$ sırasıyla,

$$(\psi_a+\psi_b)(r) = \psi_a(r)+\psi_b(r) \text{ ve}$$

$$(\psi_a o \psi_b)(r) = \psi_a(\psi_b(r))$$

olarak tanımlanırsa E bir halka olur.

Teorem 1.1.4 (Halkalar için Temsil Teoremi):

Birimli (R, +, .) halkası, (R, +) nin endomorfizmlerinin halkasına izomorftur.

İspat: (R, +) nin endomorfizmlerinin $E = \{\psi_a \mid a \in R, \psi_a(r) = ar\}$ cümlesini gözönüne alalım. E deki toplama ve çarpma sırasıyla $(\psi_a+\psi_b)(r) = \psi_a(r)+\psi_b(r)$ ve $(\psi_a o \psi_b)(r) = \psi_a(\psi_b(r))$ şeklinde tanımlansın. İddia ediyoruz ki,

$$H: (R, +, .) \rightarrow (E, +, o)$$

$$h(a) \rightarrow \psi_a$$

olarak tanımlanırsa h bir izomorfizmdir h nin üzerine dönüşüm olduğu açıktır. $h(a) = h(b)$ ise $\psi_a = \psi_b$ ve özellikle $\psi_a(1) = \psi_b(1) \Rightarrow 1a = 1b \Rightarrow a=b$ olduğundan h birebirdir.

Ayrıca ψ işlemleri korur. Çünkü

$$\psi_{a+b}(r) = (a+b)r = ar+br$$

$$= \psi_a(r) + \psi_b(r)$$

$$\psi_{ab}(r) = (ab)r = a(br)$$

$$= \psi_a(\psi_b(r))$$

$$= (\psi_a o \psi_b)(r)$$

olduğundan $h(a+b) = h(a)+h(b)$ ve $h(ab) = h(a)oh(b)$ dir.

Tanım 1.1.5 (Birimsel=Unit):

R bir halka ve $a \in R$ olsun. a nın R de çarpmaya göre (ikinci işleme göre) tersi varsa a ya R de birimseldir (unit) denir

Tanım 1.1.6 (Cisim):

Birimli değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı aritmetik birim ise bu halkaya cisim denir.

Tanım 1.1.7 (İdempotent, Nilpotent Eleman):

R bir halka ve $a \in R$ olsun. $a^2 = a$ ise a elemanına idempotent denir.

Eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n > 0$ tamsayısı varsa a ya nilpotent eleman denir. R nin bütün elemanları nilpotent özelliğe sahipse R ye nil halka denir.

Tanım 1.1.8 (İdeal):

R bir halka ve $S \neq \emptyset$ R nin bir altcümlesi olsun. Eğer R deki işlemlere göre bir halka oluyorsa S ye, R nin althalkası denir. R halkasının bir I althalkası,

$r \in R$, $x \in I \Rightarrow rx \in I$ şartını sağlıyorsa sol ideal,

$r \in R$, $x \in I \Rightarrow xr \in I$ şartını sağlıyırsa sağ ideal

adını alır. Eğer I hem sol hemde sağ ideal ise I ya ideal denir.

Bir R halkasının kendisi ve $\{0\}$ özdeş elemanı birer idealdir. Bunlara R nin aşikar idealleri denir. Geri kalan ideallere has (hakiki) ideal denir.

$X \subset R$ bir cümle, $B = \{I_i \mid X \subseteq I_i\}$ X i ihtiva eden R nin ideallerinin bir cümlesi olsun. Bu taktirde $\bigcap_{I_i \in B} I_i$ idealine X tarafından üretilen (gerilen) ideal denir.

Tanım 1.1.9 (Temel İdeal):

Bir tek eleman tarafından üretilen ideale Esas ideal veya Temel (principal) ideal denir. Her ideali temel olan bir halkaya Temel İdeal Halkası (TİH) denir.

Tanım 1.1.10 (Maksimal İdeal):

R birimli ve değişmeli bir halka olsun. $I \subset J \subset R$ olacak biçimde I ve J idealleri için $J=I$ veya $J=R$ oluyorsa, yani I ile R arasında başka bir ideal yoksa bu durumda I idealine maximal ideal denir.

Tanım 1.1.11 (Asal İdeal):

R halkasının bir ideali P olsun. $P \neq R$ ve her $a,b \in R$ için $ab \in P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye asal ideal denir.

Tanım 1.1.12 (Sıfır Bölen):

R nin sıfırdan farklı herhangi iki elemanı a ve b olsun $ab=0$ ise a ya sol sıfır bölen, b ye sağ sıfır bölen denir. Herhangi bir R halkası sıfır bölensizdir demek;

$a,b \in R$ iken $ab=0 \Rightarrow a=0$ veya $b=0$ demektir.

Tanım 1.1.13 (Tamlık Bölgesi):

Değişmeli birimli ve sıfırbölensiz bir halkaya tamlık bölgesi (integral domain) denir.

Her ideali temel olan bir tamlık bölgesine Temel İdeal Bölgesi (TİB) denir.

1.2.MODÜLLER

Tanım 1.2.1 (Modül):

R bir halka ve (M, +) değişmeli bir grup olsun. Her $r,s \in R$ ve $x, y \in M$ için;

1) $rx \in M$

2) $r(x+y) = rx+ry$

3) $(r+s)x = rx+sx$

4) $r(sx) = (rs)x$

ise M ye sol R-modül (veya R halkası üzerinde bir modül) denir.

R birimli ve her $x \in M$ için $1x = x$ oluyorsa M ye birimsel (üniter) modül denir. R halkası yerine R cismi olursa R-modülüne R üzerinde vektör uzayı denir. Dikkat edilirse modül,

$$R x M \to M$$

$$(a,x) \to ax$$

olarak tanımlanan ve 1-4 şartlarını sağlayan bir fonksiyonla değişmeli (M, +) grubundan ibarettir.(Hungerford 1974)

Eğer M aynı zamanda sağ S-modül ise M ye R-S-bimodül denir ve $_R M_S$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2 (Sabit Cümle, Altmodül):

(G, +) birgrup, $\emptyset \neq S \subset G$ ve her $x, y \in S$ için x-y S oluyorsa S ye G nin sabit (stable) altcümlesi denir. Bu durumda S bir yarıgruptur.

M bir R-modül ve $A \subset M$ olsun. Eğer A cümlesi modül şartlarını taşıyorsa A ya M nin bir altmodülü denir. Başka bir deyişle, R-modül M nin bir A altcümlesinin altmodül olması için gerek ve yeter şart:

Her x, y$\in$A, her r$\in$R için,

x-y$\in$A ve rx$\in$A olmasıdır.

R nin altmodülleri kesin olarak R nin idealleridir. M nin kendisi ve {0} altmodül olup bunlara R-modül M nin aşikar altmodülleri denir.

Tanım 1.2.3 (Basit Modül):

Bir R-modül M nin altmodülleri sadece M ve {0} ise buna basit modül denir.

Önerme 1.2.4:

R-modül M nin basit olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı her x$\in$R için $M = Rx = \{rx \mid r\in R\}$olmasıdır.

İspat: Eğer R basit ise $x\neq 0$ için $x=1x\in Rx \neq \{0\}$ olur. Rx bir altmodül olduğundan Rx=M olmalıdır.

$0\neq x\in R$ için Rx=M ise $N\neq\{0\}$, M nin bir altmodülü olsun. $n\in N$ ve $n\neq 0$ verildiğinden $M=Rn\subseteq N$ elde edilir. dolayısıyla M=N olur, yani M basittir(Blyth 1977).

Tanım 1.2.5 (Modül Homomorfizmi):

M ve N R-modüller, $f:M\rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. Her x, y$\in$M, r$\in$R için,

(1) $f(x+y) = f(x)+f(y)$

(2) $f(rx) = rf(x)$

şartları sağlanırsa f: M$\rightarrow$N dönüşümüne R-homomorfizm (veya modül homomorfizmi) denir. R bir cisim olduğunda buna lineer transformasyon denir.

Tanım 1.2.6 (Altmodül Üreten):

R-modül M nin bir altcümlesi X ise M nin X i içeren tüm altmodüllerinin kesişimine X ile üretilen altmodül denir ve <X> ile gösterilir. Eğer X sonlu ve X, B modülünü üretiyorsa B ye sonlu üretilen altmodül adı verilir.

Eğer X={a}tek bir elemandan ibaret ise X ile üretilen altmodüle devirli altmodül denir.

Tanım 1.2.7 (Temel İdeal Bölgesi):

Eğer R-modül M tek elemanlı bir altcümle tarafından üretiliyorsa buna devirli denir. Bir başka deyişle $M=Rx$ olacak şekilde $x \in M$ varsa R-modül M ye devirli denir. Değişmeli bir tamlık bölgesinin her I ideali temel ise buna Temel İdeal Bölgesi (TİB) denir. (Bazı $a \in R$ için $I=Ra$). Buna göre TİB'de her ideal devirli R-modülüdür.

Örnek 1.2.8:

Her basit R-modül devirlidir.

Örnek 1.2.9:

R nin herhangi bir I ideali R-modül R/I devirlidir. Çünkü $\{1/I\}$ tarafından, üretilir.

Tanım 1.2.10 (Lineer Kombinasyon):

M bir R-modül, $\emptyset \neq S \subset M$ bir altcümle olsun. $x = \sum_{i}^{n} r_i x_i$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ ve $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ varsa $x \in M$ ye S nin elemanlarının lineer kombinasyonu denir. S nin elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarının cümlesi LK(S) ile gösterilir.

Teorem 1.2.11:

S, R-modül M nin bir altcümlesi olsun. Bu durumda S tarafından üretilen altmodül,

$$<\mathbf{S}>= \begin{cases} \{0\} \ , & \text{eğer } S = \emptyset \ \text{ ise} \\ LK(S), & \text{eğer } S \neq \emptyset \ \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: $S=\emptyset$ ise M nin S yi içeren en küçük altmodülü $\{0\}$ sıfır altmodülüdür.

Kabul edelim ki $S \neq \emptyset$ dir. LK(S) nin, M nin altmodülü olduğu açıktır. Üstelik her $x \in S$ için $x = 1_R x \in LK(S)$ den dolayı $S \subseteq LK(S)$ dir. Tanımdan $<S>$, S yi içeren en küçük altmodülüdür. Buradan $<S> \subseteq LK(S)$ yazılır.

Öte yandan S nin elemanlarının herbir lineer kombinasyonu açıkça herbir altmodüle aittir. Yani $LK(S) \subseteq S$.

Tanım 1.2.12 (Annihilatör):

R-modül M nin her boş olmayan X altcümlesi için,

$$Ann(X) = \{r \in R \mid \text{her } x \in X \text{ için } rx = 0\}$$

cümlesine R de X in annihilatörü (sıfırlayıcısı) denir.

Tanım 1.2.13 (Faithful R-modül):

M bir R modül ve $Ann(M) = \{0\}$ ise M ye faithful (sadık) R-modül adı verilir.

Tanım 1.2.14 (Torsion-Free):

$X = \{x\}$ olduğu durumda $Ann(X) = Ann(x)$ olarak yazılır ve buna x in annihilatörü denir. Eğer $Ann(x) \neq \{0\}$ ise x elemanına M nin bir torsion (burulmuş)elemanı denir.

Eğer $Ann(x) = \{0\}$ ise buna torsion-free denir.

M nin her elemanı torsion eleman ise M ye torsion R-modül, M nin sıfırdan farklı her elemanı torsion-free ise M ye torsion-free R-modül adı verilir.

Tanım 1.2.15 (Maximal Altmodül):

G bir R-modül ve $M \subset G$ bir altmodül olsun. $M \subset N \subset G$ olacak şekilde bir N altmodül yoksa M ye G nin bir maximal altmodülü denir.

Her $x \in G$, G de $<x> \subset G$ devirli altmodül üretir. Eğer $<x> \subset <y> \subset G$ olacak biçimde bir $<y>$ devirli altmodülü yoksa $<x>$ e G nin bir maximal devirli altmodülü denir.

Tanım 1.2.16 (Noetherian / Artinian Modül):

M bir R-modül olsun. M nin altmodüllerinin her $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ artan zinciri için $M_k = M_n (k \geq n)$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa R-modül M ye noetherian (vaya artan zincir koşulunu sağlar) denir.

Eğer M nin altmodüllerinin $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ altmodüllerinin azalan zinciri sonlu bir adımda duruyorsa R-modül M ye Artinian adı verilir.

Tanım 1.2.17 (Bir Fonksiyonun Kısıtlanışı):

f: $A \to B$ bir dönüşüm ve $A' \subseteq A$ olsun. $a' \in A'$ için A den B ye $a' \to f(a')$ ile tanımlanan dönüşüme f nin A′ ye kısıtlanması denir ve $f|_{A'}$ ile gösterilir.

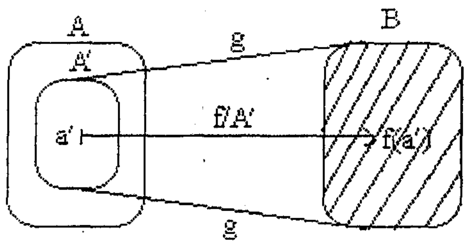
O halde $(f|_{A'})(a') = f(a')$ olur. Eğer g: $A' \to B$ dönüşümü için $f|_{A'} = g$ oluyorsa f ye g nin A ya genişlemesi denir.

Örnek 1.2.18:

$2IN \subseteq IN$ olduğu açıktır.

f: $IN \to IN$		g: $2IN \to IN$
	ve	
$n \to 2n+1$		$n' \to 2n'+1$

ile tanımlı dönüşüm olsun. Herbir $n' \in IN$ için $f(n') = g(n')$ olduğundan $g = f|_{2IN}$ dönüşümü f nin 2IN ye bir kısıtlanmasıdır.



$(f|_A)(a) = f(a)$

Eğer g: $A' \to B$ için $f|_A = g$ ise f ye g nin A ya genişlemesi denir.

II. BÖLÜM

2.1.YAKIN HALKALAR

Herhangi bir (R, +, .) halkası için (R, +) nın abel grub olduğu ve "+" nın "." üzerine iki yönden dağılma özelliğinin mevcut olduğu bilinmektedir. (R, +, .) sisteminde (R, +) grubunun abel olmadığını ve "+" nın "." üzerine iki yönden dağılımlı olması yerine tek yönden dağılımlı olduğunu düşünelim. Bu şekildeki bir sistem halkalar sınıfını içine alır. Bu sistemler YAKIN-HALKA (near-ring) adı altında incelenirler.

Tanım 2.1.1:

Bir N cümlesi ile bu cümle üzerinde toplama " + " ve çarpma " . " işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa (N, +, .) sistemine yakın-halka denir.

(i) (N, +) grup,

(ii) (N, .) yarı grup

(iii) $\forall a, b, c \in N$ için $a.(b+c) = a.b+a.c$

Burada (iii) şartından dolayı sol yakın-halka tanımlanmış oldu. Bunun yerine $(a+b).c = a.c+b.c$ şartı varsa sağ yakın-halka tanımlanmış olacaktır.(Pilz 1977).

Her halkanın bir yakın-halka olduğu açıktır. Ayrıca her grup bir yakın-halka yapılabilir;

Herhangi bir (G, +) grubunda $\forall a, b \in G$ için,

$a\Delta b = b$ olarak tanılandığında bir $(G, +, \Delta)$ sol yakın-halka,

$a\Delta b = a$ olarak tanımlandığında bir $(G, +, \Delta)$ sağ yakın-halka elde edilir.

Önerme 2.1.2:

N bir sağ yakın-halka ise her $n, m \in N$ için,

(i) $0.n = 0$ dır.

(ii) $(-n).m = -n.m$ dir.(Pilz 1977)

Örnek 2.1.3:

Bir sağ yakın-halkada $n.0 = 0$ ve $n.(-m) = -n.m$ eşitlikleri geçerli olmayabilir. M(G) de $fo0 = 0$ olabilmesi için f nin orjinden geçen bir fonksiyon olması gerekir.

$fo(-f) = fof$ eşitliği ise ancak f nin tek fonksiyon (yani $f(-x) = -f(x)$) olması ile mümkündür.

Tanım 2.1.4:

$N = (N, +, .)$ bir sol yakın-halka olmak üzere

$$N_d = \{d \in N \mid (r+s)\, d = rd+sd, \text{ her } r,s \in N \text{ için}\}$$

cümlesine N nin dağılımlı elemanlar cümlesi denir. $(N_d\ ,\ .)$, N nin bir altyarı grubudur. $(N, +)$ abel ise $(N_d\ ,\ .)$, N nin althalkası olur.(Guttierez 1991)

Homojen Fonksiyonlar

Tanım 2.1.5:

G bir sol R-modül ve $f:G \to G$ bir fonksiyon olsun. Her $r \in R$ ve $a \in G$ için,

$$f(ra) = rf(a) \text{ ise,}$$

f ye homojen fonksiyon denir.Homojen fonksiyonlar kümesi $M_R(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6:

V bir F vektör uzayı olsun. Her u, $v \in V$, $r \in F$ için $End_R V = \{f:V \to V \mid f(u+v)=f(u)+f(v),\ f(rv)=rf(v)\}$ kümesine V nin endormorfizmalar kümesi denir. $End_R V$, fonksiyon toplama ve fonksiyon bileşke işlemleri altında bir halkadır. Bu halkaya V 'nin endomorfizmalar halkası denir.

Örnek 2.1.7:

Her $T: G \to G$ R-Endomorfizması bir homojen fonksiyondur. $End_R(G) \subseteq M_R(G)$

Örnek 2.1.8:

$T \in M_R(G)$ ve $y_0 \in G$ olsun.

$$f(x) = \begin{cases} T(x) & ; \ x \neq y_0 \quad \text{ise,} \\ 0 & ; \ x = y_0 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

ile tanımlanan $f: G \to G$ fonksiyonu homojendir. $T(y_0) \neq 0$ ise,

$$f(x+y_0) = T(x+y_0) = T(x)+T(y_0) \neq T(x) \text{ iken,}$$

$$f(x)+f(y_0) = T(x)+0 = T(x) \text{ olduğundan } f \notin End_R(G) \text{ çıkar.}$$

Örnek 2.1.9:

$G = V$, K cismi üzerinde bir vektör uzayı, $T: V \to V$ bir lineer dönüşüm ve W bir alt uzay olsun.

$$f(x) = \begin{cases} T(x) & ; \ x \in W \\ 0 & ; \ x \notin W \end{cases}$$

ile tanımlanan $f: V \to V$ fonksiyonu homojendir, ancak lineer değildir.

$k \in K$ ve $x \in W$ iken $kx \in W$ olur.

$$\begin{aligned} f(kx) &= T(kx) = T(k).T(x) \\ &= k.T(x) \\ &= k.f(x) \end{aligned}$$

$x \in W$ ve $y \notin W$ olsun. T 'nin lineer olmasından,

$$f(x+y) = T(x+y) = T(x)+T(y) \text{ iken,}$$

$f(x)+f(y) = T(x)+0 = T(x)$ dir. Yani $f(x+y) \neq f(x)+f(y)$ elde edilir.

Örnek 2.1.10:

$M_{IR}(IR) = End_{IR}(IR)$ olduğunu gösterelim.

$f: IR \to IR$ homojen ise $f(0) = 0$ ve $\forall r, x \in IR$ için $f(rx) = rf(x)$ olacağından $a \in IR$ için f, $f_a(x) = ax$ şeklinde tanımlanmalıdır. $\forall x, y \in IR$ için,

$$f_a(x+y) = a.(x+y) = ax+ay$$

$$= f_a(x)+f_a(y) \text{ böylece } f_a \in End_{IR}(IR)$$

$$\psi: End_{IR}(IR) \to IR$$
$$f_a \to a$$

ile tanımlanan ψ dönüşümü bir izomorfizma olur. Dolayısıyla $M_{IR}(IR) = End_{IR}(IR)$ dir.

Örnek 2.1.11:

G devirli bir R-modül ise $M_R(G) = End_R(G)$ dir. R-modül G devirli olduğundan uygun bir $u \in G$ için $G = uR$ yazılır.

$f \in M_R(G)$, her $r_1, r_2 \in R$ için,

$$f(ur_1+ur_2) = f[u(r_1+r_2)]$$
$$= f(u)[r_1+r_2]$$
$$= f(u)r_1+f(u)r_2$$
$$= f(ur_1)+f(ur_2)$$

olup f, G nin bir endrmorfizmasıdır. Yani $M_R(G) = End_R(G)$ olur.

Sonuç 2.1.12:

Homojen olup endorfizma olmayan bir fonksiyon ancak devirli olmayan modüller için sözkonusudur.

Örnek 2.1.13:

(G, +) özdeş elemanı sıfır olan bir grup V bir vektör uzayı ve R değişmeli, birimli bir halka ise aşağıdaki cümleler fonksiyon toplama ve bileşke işlemleri altında birer yakın-halkadır.

(a) $M(G) = \{f: G \to G\}$ (G 'den G 'ye tüm fonksiyonlar)

(b) $M_0(G) = \{f \in M(G) | f(0) = 0\}$

(c) $R[x] = \{f \mid f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n ; n \in IN ; a_i \in R$, x bir belirsiz$\}$

(d) $R[[x]] = \{f \mid f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots ; a_i \in R$, x bir belirsiz$\}$

(e) $M_s(G) = \{f: G \to G | f$ sabit$\}$

(f) $M_{tür}(IR) = \{f: IR \to IR \mid f$ türevli$\}$

Örnek 2.1.14:

Yukarıdakilerden formel kuvvet serilerinin $R[[x]] = \{f \mid f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \}$ cümlesinin bir sağ yakın-halka olduğunu gösterelim:

Eğer $(a_0, a_1, \ldots\ldots) \in R[[x]]$ ise $(a_0, a_1, \ldots\ldots) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ demektir.

$(R[[x]], +, o)$ de toplama; $\sum a_i x^i + \sum b_i x^i = \sum (a_i + b_i) x^i$ ve

bileşke işlemi; $\sum a_i x^i o \sum b_j x^j = \sum a_i (\sum b_j x^j)^i$

ile tanımlansın,

(i) (R[[x]], +) değişmeli bir gruptur; özdeş elemanı (0, 0,........) ve $(a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots)\in R[[x]]$ in tersi $(-a_0, -a_1, \ldots\ldots)$ dir.

(ii) (R[[x]], o) nin yarıgrup olduğunu göstermek için birleşme özelliğinin sağlandını göstermek yeterlidir.

$$f = \sum a_i x^i \ , \ g = \sum b_j x^j \quad \text{ve} \quad h = \sum c_k x^k \in R[[x]] \ \text{iken,}$$

fo(goh) = (fog)oh olduğunu gösterelim;

$$\sum a_i x^i o[\sum b_j x^j \ o \ \sum c_k x^k] = \sum a_i x^i \ o \ (\sum b_j (\sum c_k x^k)^j) = \sum a_i (\sum b_j (\sum c_k x^k)^j)^i$$

$$[\sum a_i x^i \ o \ \sum b_j x^j] \ o \ \sum c_k x^k = (\sum a_i (\sum b_j x^j)^i) \ o \ \sum c_k x^k = \sum a_i (\sum b_j (\sum c_k x^k)^j)^i$$

Demek ki fo(goh) = (fog)oh dir.

(iii) $f = \sum a_i x^i$, $\quad g = \sum b_i x^i$, $\quad h = \sum c_k x^k \in R[[x]]$ için,

(f+g)oh = (foh) + (goh) olduğunu göstermeliyiz.

$$(f+g)oh = [\sum (a_i+b_i)x^i] o \sum c_k x^k = \sum (a_i+b_i)(\sum c_k x^k)^i \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}(foh)+(goh) &= [\sum a_i x^i o \sum c_k x^k \ ]o \ [\sum b_i x^i \ o \ \sum c_k x^k] \\ &= \sum a_i (\sum c_k x^k)^i + \sum b_i (\sum c_k x^k)^i \\ &= (\sum a_i + \sum b_i)(\sum c_k x^k)^i \\ &= \sum (a_i+b_i)(\sum c_k x^k)^i \end{aligned} \tag{1.2}$$

(1.1) ve (1.2) den (f+g)oh = (foh)+(goh) elde edilir. Benzer şekilde fo(g+h)≠(fog)+(foh) bulunur. Sonuç olarak (R[[x]], + , o) bir sağ yakın-halkadır.

Tanım 2.1.15:

N bir yakın-halka ve her $a\in N$ için $a.0 = 0.a = 0$ ise N ye sıfırsimetrik bir yakın-halka denir.

Herhangi bir sağ yakın-halka için;

(a) $N_0 = \{n \in N \mid n.0 = 0\} \subseteq N$ alt kümesine N nin sıfirsimetrik kısmı denir.

(b) $N_s = \{n \in N \mid n.0 = n\} = \{n \in N \mid \forall n \in N$ için $n.n = n\} \subseteq N$ alt kümesine N nin sabit kısmı denir. N_0 ve N_s N 'nin altyakın-halkalarıdır. N bir halka olduğu zaman $N_0 = N$ ve $N_s = \{0\}$ dır.(Pilz 1977)

Tanım 2.1.16:

Eğer bir $a \in N$ için $a.i = i.a = a$ olacak şekilde bir $i \in N$ varsa N ye birimli yakın-halka denir.

Örnek 2.1.17:

Yukarıda açıklanan (R[[x]], +, o) yakın halkası sıfir simetriktir. Ayrıca her $\sum a_i x^i \in R[[x]]$ için,

$$\sum a_i x^i \text{ o } x = x \text{ o } \sum a_i x^i = \sum a_i x^i$$

olduğundan R[[x]] yakın-halkası birimli olup birim elemanı x dir.

Tanım 2.1.18:

R, birimli halka, G; üniter sol R-modül ise

$$M_R(G) = \{f: G \to G \mid f(ra) = rf(a),\ r \in R,\ a \in G\}$$

cümlesi fonksiyonların toplamı ve bileşke işlemleri altında bir yakın halkadır. Buna (R, G) ile belirtilmiş centralizer yakın-halka adı verilir.(Fuchs et al 1991)

Önerme 2.1.19:

R birimli bir halka ve G üniter sol R-modül olsun. $M_R(G) = \{f: G \to G \mid f(ra) = rf(a),\ r \in R,\ a \in G\}$ cümlesi M(G) nin sıfir simetrik bir alt yakın-halkadır.

İspat: $f, g, h \in M_R(G)$ iken $f(rx) = rf(x)$, $g(rx) = rg(x)$ ve $h(rx) = rh(x)$ olur.

$$(f+g)(rx) = f(rx) + g(rx)$$

$$= rf(x)+rg(x)$$

$$= r[f(x)+g(x)]$$

$$= r[(f+g(x)] \Rightarrow f+g \in M_R(G) \text{ dir.}$$

$$(fg)(rx) = f(g(rx))$$

$$= f(rg(x))$$

$$= r(fg)(x) \Rightarrow fg \in M_R(G) \text{ dir.}$$

İki yönden dağılma özelliğine bakılırsa,

$$[(f+g)oh](rx) = (f+g)(h(rx))$$

$$= f(h(rx)+g(h(rx))$$

$$= f(rh(x))+g(rh(x))$$

$$= r[f(h(x))+g(h(x))]$$

$$= r[(foh)(x)+(goh)(x)]$$

$$= (foh)(rx)+(goh)(rx)$$

$$[fo(g+h)](rx)=f[(g+h)(rx)]$$

$$=f[r(g+h)(x)]$$

$$=f\, r[g(x)+h(x)]$$

$$=f[g(rx)+h(rx)]$$

f nin lineer olması gerekmediğinden son ifade $[(fog)+(foh)](rx)$ ifadesine eşit olmaz. Dolayısıyla soldan dağılma özelliği yoktur. $M_R(G)$ bir sağ yakın-halkadır. Ayrıca,

$(f0)(x) = f(0(x)) = f(0) = f(0x) = 0f(x) = 0$ olduğundan $M_R(G)$ sıfırsimetriktir.

Örnek 2.1.20:

$End_{IR}(IR^2) \subseteq M_{IR}(IR^2)$ dir.

$$M_{IR}(IR^2) = \left\{ f: IR^2 \to IR^2 \middle| f\left(\begin{bmatrix} ar \\ as \end{bmatrix}\right) = af\left(\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}\right),\ a \in IR,\ \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \in IR^2 \right\}$$

$f \in M_{IR}(IR^2)$ ve $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in IR^2$ olsun. $f(u) = u'$ ise

$f(IRu) = IRf(u) = IRu$ olduğundan f, IR^2 'nin bir boyutlu altuzaylarını birbirine dönüştürür. Her $r_1, r_2 \in IR$ için,

$$\begin{aligned} f(r_1u+r_2u) &= f[(r_1+r_2)u] \\ &= (r_1+r_2)f(u) \\ &= r_1f(u)+r_2f(u) \\ &= f(r_1u)+f(r_2u) \end{aligned}$$

olduğundan A bir 2x2 tipinde matris olmak üzere $f(u) = Au$ şeklinde yazılır. Bu da f'nin IR^2 nin altuzayında lineer olduğunu gösterir. Buna göre f'nin herhangi farklı iki altuzayındaki temsil matrisleri farklı ise f homojen fonksiyonu lineer olamaz. Çünkü $f(u) = Au$, $f(v) = Bv$ ve $A \neq B$ ise $u+v \notin \langle u \rangle = IRu$, $u+v \notin \langle u \rangle \neq IRv$ olduğundan bir $[C]_{2\times 2}$ matrisi için,

$$\begin{aligned} f(u+v) = C(u+v) = Cu+Cv &= Au+Bv \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

eşitliğinin mevcut olmayabileceği görülür. Şöyle ki,

$0 \neq u,\ v \in IR^2$, $U = IRu$, $V = IRv$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x \ ; \ x \in U & \text{ise} \\ 2x \ ; \ x \in V & \text{ise} \\ 0 \ ; \ x \notin U,\ x \in V & \text{ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $f \in M_{IR}(IR^2)$ dir. Ancak,

$$f(u+v) = 0,\ \ f(u)+f(v) = u+2v \text{ dolayısıyla } f \notin End_{IR}(IR^2) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak f 'nin IR^2 'nin herbir alt uzayındaki temsil matrisi (benzerlik dışında) bir tek ise $f \in M_{IR}(IR^2)$ fonksiyonu lineerdir.(Görentaş 1994)

2.2.ÜRETENLER

Tanım 2.2.1:

R birimli bir halka $\emptyset \neq S$ bir cümle olsun. S üzerinde serbest (free) R-modül şu anlama gelir:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \\ F \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Bir R-modül F ile birlikte f: $S \rightarrow F$ dönüşümü her R-modül M ve her g: $S \rightarrow M$ dönüşümü için yandaki diyagram komütatif olacak şekilde (h: $F \rightarrow M$) bir tek

R-modül homomofizması vardır.

Tanım 2.2.2:

R birimli bir halka olsun. Her serbest R-modül F için f nin herhangi iki tabanının kardinalitesi aynıdır. F nin herhangi bir tabanının kardinal sayısına R üzerinde F nin rankı denir.

Tanım 2.2.3:

D temel ideal bölgesi ve $\alpha \in D^2$ olsun. Herhangi bir $\beta \in D^2$ için r, s, $t \in D$ olmak üzere

$\alpha r = \beta s \neq 0$ iken $\beta = \alpha t$ ise α, D^2 de bir üretendir denir. Buna göre,

α D^2 de üretendir $\Leftrightarrow [\alpha D \cap \beta D \neq \{0\} \Rightarrow \beta D \subseteq \alpha D]$

yazılabilir.

Örnek 2.2.4:

1) (d, 1) **2)** (1, d) **3)** (d+1,d)

vektörleri her $d \in D$ için D^2 'de birer üretendir.

d = 0 için yukarıdaki vektörler, (0,1). (1,0) olup üreten oldukları açıktır.

$d \neq 0$ için,

1) $\alpha r = \beta s \neq \{0\}$, $\alpha = \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ için,

$$\begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} s \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (r, s \in D)$$

Burada $dr = xs$, $r = ys$ dir. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} y$ yazıldığından $\begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix}$, D^2 de üretendir.

2) $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ için

$$\alpha r = \beta s \neq \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} s \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Burada $r=xs$, $dr=ys$ dolayısıyla $dxs=ys$ ve $dx=y$ dir. Böylece,

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix} x$ yazıldığından $\begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix}$, D^2 de bir üretendir.

3) $\alpha = \begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ için,

$$\alpha r = \beta s \neq \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} s$$

Burada $dr+r=xs$, $dr=ys$ dolayısıyla $ys+r=xs$ ve $r=(x-y)s$ olur. Son eşitliğin her iki tarafı $\begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix}$ ile çarpılırsa.

$$\begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix} (x-y)s$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix} (x-y)s$ ve $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix} (x-y)$ çıkar.

O halde $\begin{bmatrix} d+1 \\ d \end{bmatrix}$, D^2 de bir üretendir.

$S \subseteq D^2$ bir alt küme olsun. Eğer her $\alpha \in S$ bir üreten ve α, $\beta \in S$ için $\alpha D \subseteq \beta D$ iken $\alpha = \beta$ oluyorsa S ye D^2 de bir üreten kümesi denir.

Şimdi de $M_R(G)$ nin halka olabilme durumlarını açıklayalım.

Önerme 2.2.5:

$M_R(G)$ de G=R alındığında oluşan $M_R(R)$ bir halkadır(Fuchs et al 1991).

İspat: R halka olduğundan R kendi üzerinde bir R-modüldür.

$$L: R \to M_R(R) \text{ yi } \forall a \in R \text{ için,}$$

$$L_r(a) = ra, \quad L(r) = L_r$$

biçiminde tanımlayalım.

$$L_r(ab) = r(ab) = (ra)b = (L_r(a))b$$

olduğundan $L_r \in M_R(R)$ dir. Ayrıca her a, $b \in R$ için,

$$L_r(a+b) = r(a+b) \; ra+rb = L_r(a)+L_r(b)$$

olduğundan $L_r \in End_R(R)$ dir. Her a, r, $s \in R$ için,

$$\begin{aligned}[L(r+s)](a) = L_{r+s}(a) &= (r+s)a = ra+sa \\ &= L_r(a)+L_s(a) \\ &= (L_r+L_s)(a)\end{aligned}$$

Böylece $L_{r+s} = L_r+L_s$ olduğu çıkar. ayrıca

$$\begin{aligned}[L(rs)](a) = L_{rs}(a) &= (rs)a = r(sa) \\ &= L_r(sa)\end{aligned}$$

$= L_r(L_s(a))$

$= (L_rL_s)(a) \Rightarrow L(rs) = L(r)L(s)$

olduğundan L bir halka homomorfizmasıdır.

$$L(r) = 0 \text{ ise } 0=L(r)(1) = L_r(1) = r1 = r$$

$L(r) = 0$ iken $r=0$ olduğundan L, birebirdir.

$\Phi \in End_R(R)$ olsun. $r \in \Phi(1)$ için $L(r)(a)=L_r(a)=ra=\Phi(1)a=\Phi(a)$ $L(r)=\Phi$ olup L bir halka izomorfizmasıdır. $R \cong End_R(R)$ olur (Yıldız 1994).

Önerme 2.2.6:

G bir sağ R-modül, H, K G 'nin R-altmüdülleri olmak üzere $G=H\oplus K$ ve $f\in M_R(G)$ olsun. a, $b\neq 0$ ve $a\in H$, $b\in K$ için $f(a+b)\neq f(a)+f(b)$ ise f, $M_R(G)$ nin bir dağılımı elemanı değildir. Bu durumda $M_R(G)$ bir halka değildir.

İspat: $G = H\oplus K$ direkt toplam ayrışımına karşılık gelen idempotentler sırasıyla e_H, $e_K \in M_R(G)$ olup e_H+e_K toplamı $M_R(G)$ nin birimine eşittir.

$$\begin{aligned}(fe_H+fe_K)(a+b) &= (fe_H)(a+b)+(fe_K)(a+b)\\ &= f(e_H(a+b))+f(e_K(a+b))\\ &= f(b)+f(a)\\ &\neq f(a+b)\end{aligned}$$

$f(e_H+e_K) \neq f(e_H)+f(e_K)$ olduğundan bu durumda $M_R(G)$ halka olamaz (Yıldız 1994).

Önerme 2.2.7:

G bir sağ R-modül ve $G=H\oplus K$, G 'nin aşikar olmayan bir direkt toplam ayrışımı olsun. Eğer G nin aşağıdaki şartlara uyan boştan farklı bir X altkümesi varsa $M_R(G)$ halka olamaz.

(i) $0\notin X$, $X\neq G^*$ $(G^* = G\setminus\{0\})$

(ii) $x\in X$ ise her $r\in R$ için $xr\in X\cup\{0\}$

(iii) $xr\in X$, $r\in R$ ise $x\in X$ dir.

İspat:

$$f(x) = \begin{cases} x \; ; & x\in X \text{ ise} \\ 0 \; ; & x\notin X \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $f: G\to G$ fonksiyonu verilsin. $x\in X$, $r\in R$ için (ii) den $xr\in X\cup\{0\}$ ve $xr\in X$ veya $xr=0$ yazılır.

$$xr\in X \text{ ise } f(xr) = xr = f(x)r$$

$$xr = 0 \text{ ise } f(xr) = 0 = 0.r = f(x)r$$

olup $f\in M_R(G)$ dir. $a\in H$, $b\in K$ elemanları $f(a+b) \neq f(a)+f(b)$ şartı ile seçilirse bir önceki önerkeden $M_R(G)$ bir halka olmaz.

Bu durumda meydana gelen üç ayrı durumu inceleyelim.

1. Durum:

$H\cap X = \emptyset$, $K\cap X = \emptyset$ ise; $x\in X$ elemanı $x=a+b$ olarak yazılır.

$a,b\notin X$ olduğundan $f(a) = f(b) = 0$ olur.

$$f(a+b) = f(x) = x\neq 0$$

$$f(a+b) \neq f(a)+f(b)$$

çıkar.

2. Durum:

$H \cap X \neq \emptyset$, $K \cap X = \emptyset$ ise;

$a \in H \cap K$ ve $0 \neq b \in K$ elemanları için,

$$f(a+b) = \begin{cases} a+b\ ; & a+b \in X \text{ ise} \\ 0\ ; & a+b \notin X \text{ ise} \end{cases}$$

iken $f(a)+f(b) = a+0$ ($a \in X$, $b \notin X$ olduğundan). Dolayısıyla her iki şart için de $f(a+b) \neq f(a)+f(b)$ elde edilir.

3. Durum:

$H \cap X \neq \emptyset$, $K \cap X \neq \emptyset$ ise;

$H \cup K \subseteq X \cup \{0\}$ ise $X \neq G^*$ olduğundan $a \in H$, $b \in K$ için bir $y = a+b \in G^* \setminus X$ elemanı vardır. Buna göre,

$f(a+b) = 0 \neq a+b = f(a)+f(b)$ elde edilir.

Ayrıca $H \not\subset X \cup \{0\}$ olduğu duruma bakılırsa,

$a \in H \setminus X$ ve $b \in K \cap X$ alalım. Buna göre,

$$f(a+b) = \begin{cases} a+b\ ; & a+b \in X \text{ ise} \\ 0\ ; & a+b \notin X \text{ ise} \end{cases}$$

iken $f(a)+f(b) = 0+b$ dir. dolayısıyla her iki şartta da $f(a+b) \neq f(a)+f(b)$ elde edilir.

III. BÖLÜM

3.1KISMİ ENDOMORFİZMALAR

Bu bölümün en temel kavramlarından biri olan "ÖRTÜ" şöyle tanımlanıyor.

Tanım 3.1.1:

S birimli bir halka, G bir sol S-modül olsun. G içinbir S-örtü (veya sadece örtü), aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ indeks kümesidir.

(i) $\emptyset \neq G_\alpha \subseteq G$, her $\alpha \in A$

(ii) $U\mathcal{G} = G$

(iii) Her $s\in S$ ve $\alpha\in A$ için $sG_\alpha \subseteq G_\beta$ olacak şekilde bir $\beta\in A$ vardır.

G nin bir $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ örtüsü $\prod\limits_{\alpha\in A} S$ 'nin bir T altkümesi belirler. Bu, $M_0(G)$ nin altyakın-halkası olarak yazılır.

$\alpha, \beta\in A$ olsun. Ayrıca ℓ sol annihilatörü göstersin.

$$K_{\alpha\beta} = \begin{cases} \ell_s(G_\alpha \cap G_\beta), & \text{eğer } G_\alpha \cap G_\beta \neq \emptyset \text{ ise} \\ S, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

olarak tanımlansın $\prod\limits_{\alpha\in A} S$ nin elemanlarını $t = \{t_\alpha\}$, $t_\alpha\in S$ ile tanımladığımızda,

$$T = \left\{ t \in \prod_{\alpha\in A} S \,\middle|\, t_\alpha - t_\beta \in K_{\alpha\beta},\ \text{her } \alpha,\beta \in A \right\} \text{ olur.}$$

Bir ψ: $T \rightarrow M_0(G)$ dönüşümü $\psi(t)(g) = t_\alpha g$ olarak tanımlanırsa $g\in G_\alpha$ olur. ψ dönüşümü iyi tanımlıdır. Çünkü $g\in G_\alpha \cap G_\beta$ ise $t_\alpha - t_\beta \in K_{\alpha\beta}$ ve $t_\alpha g = t_\beta g$ olur.

Teorem 3.1.2.

$\psi(T)$, $M_0(G)$ nin altyakın-halkasıdır.

İspat: s, t$\in$T için u, v $\in \prod_{\alpha\in\Lambda}$ S olsun, öyle ki;

$$u_\alpha = s_\alpha + t_\alpha, \quad v_\alpha = s_\delta t_\alpha, \quad t_\alpha G_\alpha \subseteq G_\delta$$

önce u, v$\in$T olduğunu gösterelim:

$$u_\alpha - u_\beta = (s_\alpha + t_\alpha) - (s_\beta + t_\beta)$$

$$= (s_\alpha - s_\beta) + (t_\alpha - t_\beta) \in K_{\alpha\beta}$$

üstelik $g \in G_\alpha \cap G_\beta$ ise $v_\alpha - v_\beta = s_\delta t_\alpha - s_\gamma t_\beta$.

$t_\alpha G_\alpha \subseteq G_\delta$ ve $t_\beta G_\beta \subseteq G_\gamma$ yazılır. Buradan;

$$(v_\alpha - v_\beta)g = (s_\delta t_\alpha - s_\gamma t_\beta)g = s_\delta(t_\alpha g) - s_\gamma(t_\beta g)$$

$$(t_\alpha g = t_\beta g \in G_\alpha \cap G_\beta \text{ dan}).$$

$$s_\delta(t_\alpha g) - s_\gamma(t_\alpha g) = (s_\delta - s_\gamma)(t_\alpha g) = 0$$

Bu nedenle $v_\alpha - v_\beta \in K_{\alpha\beta}$ olur.

Böylece u, v$\in$T olduğunu göstermiş olduk. Eğer $g \in G_\alpha$ ise,

$$\psi(u)g = u_\alpha g = (s_\alpha + t_\alpha)g$$

$$= s_\alpha g + t_\alpha g$$

$$= \psi(s)g + \psi(t)g$$

$$= (\psi(s) + \psi(t))g \quad \text{ve}$$

$$\psi(v)g = v_\alpha g = s_\delta t_\alpha g$$

$$= \psi(s)(t_\alpha g)$$

$$= \psi(s)(\psi(t)g)$$

$$= \psi(s)\psi(t)g$$

elde edilir.(Maxson and Walt 1991)

Yukarıda $M_0(G)$ nin altyakın-halkası olduğu gösterilen $\psi(T)$ ye S ve $\mathcal{G}$ tarafından belirlenen kısmi endomorfizmalar yakın-halkası denir. $PE({}_SG; \mathcal{G})$ veya sadece N ile gösterilir.

Kısmi Endomorfizmaları şu şekilde tanımlamak da mümkündür.

Tanım 3.1.3:

G bir S-modül $E = End_S G$, G nin her $\mathcal{G}$ örtüsü için $PE({}_SG, \mathcal{G}) = N = \{f \in M_S(G) \mid$ her $\alpha \in A$ için $f|_{G_\alpha}$ bazı $e \in E$ ye genişler$\}$ ile verilen $M_S(G)$ nin N altyakın-halkasını belirler. Buna $\mathcal{G}$ örtüsü ile belirlenen S-modül G nin Kısmi Endomorfizmalar Yakın-Halkası denir.

Herhangi bir $\mathcal{G}$ örtüsü için,

$End_S G \subseteq PE({}_SG, \mathcal{G}) \subseteq M_S(G)$ olduğu söylenebilir.

Bu bölümde, eğer D bir temelideal bölgesi ise $M_D(D^n)$ nin her elemanı D^n nin bir kısmi endomorfizmasıdır. Bunun anlamı şudur: Eğer $\alpha \in D^n$, $f \in M_D(D^n)$ ise D^n nin $f(\alpha) = t(\alpha)$ olacak şekilde D üzerinde bir t endomorfizması vardır.

$S = Z$ tamsayılar halkası, $G = Z^2$ iki boyutlu serbest Z-modül, $\mathcal{G}$ maximal devirli altmodüllerden oluşan bir örtü olsun. Ayrıca $f \in M_Z(Z^2)$, $G_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} Z$ üzerinde $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ile belirlensin. G_α devirli altmodül olduğundan $ebob(x_1, x_2) = 1$ ve buradan $\exists h, k \in Z$ için $hx_1 + kx_2 = 1$ elde edilir. Bu zaman f, G_α üzerinde

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 h & c_1 k \\ c_2 h & c_2 k \end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil olunabilir. Aynı şekilde f/G_α, G nin bir endomorfizmasına genişleyebilir. Yani her $f \in M_Z(Z^2)$; Z^2 nin kısmi bir endomorfizmasıdır. (Her $G_\alpha \in \mathcal{G}$, $\exists \psi \in End_Z(Z^2)$ için $f/G_\alpha = \psi$). (Maxson 1988)

G nin $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}\ \alpha\in A$ ve $\mathcal{D} = \{D_\beta\}\beta\in B$ örtüleri arasında mümkün olan iki bağıntı şöyle tanımlanıyor;

1) Her $\alpha\in A$ için $C_\alpha = D_\beta$ olacak şekilde bir $\beta\in B$ varsa $\mathcal{C}\sqsubseteq\mathcal{D}$ yazılır.

2) Eğer her $\alpha\in A$ için $C_\alpha\subseteq D_\beta$ olacak şekilde bir $\beta\in B$ varsa $\mathcal{C}\leq\mathcal{D}$ yazılır.

Herhangi bir $\mathcal{C}$ örtüsü için,

$End_S G \subseteq PE({}_SG, \mathcal{C}) \subseteq M_S(G)$ olduğu söylenebilir.

Önerme 3.1.4:

$\mathcal{C} = \{C_\alpha\}\alpha\in A$ ve $\mathcal{D} = \{D_\beta\}\beta\in B$, G_R için örtüler ve $\mathcal{C}\sqsubseteq\mathcal{D}$ veya $\mathcal{C}\leq\mathcal{D}$ ise $PE({}_SG, \mathcal{D})\subseteq PE({}_SG, \mathcal{C})$ dir.

İspat: $\mathcal{C}\sqsubseteq\mathcal{D}$ iken tabiatiyle $\mathcal{C}\leq\mathcal{D}$ dir. Bu nedenle $\mathcal{C}\leq\mathcal{D}$ durumunu ele almak yeterlidir.

$f\in PE({}_SG, \mathcal{D})$ olsun.

$\mathcal{C}\leq\mathcal{D}$ den her $\alpha\in A$ için $C_\alpha\subseteq D_\beta$ olacak şekilde bir $\beta\in B$ vardır. Dolayısıyla $f|_{C_\alpha} = (f|_{D_\beta})\,C_\alpha$ yazılabilir. $f\in PE({}_SG, \mathcal{D})$ olduğundan $f|_{D_\beta}$, bir $E = End_S(G)$ ye genişleyebilir. Bu durumda $f|_{C_\alpha}$ da E nin bir elemanına genişleyebilir, yani $f\in PE({}_SG,\mathcal{C})$ dir. O halde $PE({}_SG, \mathcal{D})\subseteq PE({}_SG, \mathcal{C})$ dir(Maxson and Walt 1992).

Önerme 3.1.5:

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ G_R nin örtüleri ve $\mathcal{C}\leq\mathcal{D}$ ise $PE({}_SG, \mathcal{D}) = PE({}_SG, \mathcal{C}\cup\mathcal{D})$ dir.

İspat: $\mathcal{D}\leq\mathcal{C}\cup\mathcal{D}$ ve $\mathcal{D}\sqsubseteq\mathcal{C}\cup\mathcal{D}$ olduğu açıktır. Bir önceki önermeden

$$PE({}_SG.\mathcal{C}\cup\mathcal{D})\subseteq PE({}_SG,\mathcal{D}) \qquad \textbf{(3.1)}$$

yazılır.

Öte yandan $\mathcal{C}\leq\mathcal{D}$ ise $\mathcal{C}\cup\mathcal{D}\leq\mathcal{D}$ dir. Yine önceki önermeden

$$PE({}_SG,\mathcal{D})\subseteq PE({}_SG,\mathcal{C}\cup\mathcal{D}) \qquad \textbf{(3.2)}$$

yazılır.(Maxson and Walt 1992)

(1) ve (2) den $PE({}_SG, \mathcal{D}) = PE({}_SG, \mathcal{C}\cup\mathcal{D})$ elde edilir.

Bu kısımda iki durumla ilgileneceğiz. Birincisi $\mathcal{G}$ deki cümleler G nin S-altmodülleridir. Bunu $\mathcal{G}$ (S) ile ifade edeceğiz. ikincisi G bir S-R-bimodüldür (${}_SG_R$) ayrıca G deki cümleler $\mathcal{G}(S, R)$ ile ifade edeceğimiz altbimodüllerdir.

Teorem 3.1.6.

Kabul edelim ki $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ S-modül G için bir örtüdür ve her $\alpha\in A$ için G_α, G nın bir S-altmodülüdür. Bu durumda $N=PE({}_SG, \mathcal{G}(S))$ bir halkadır.

İspat: Burada T, $\prod_{\alpha\in A}$ S halkasının bir alt halkası olarak ψ: T→N bir halka epimorfizmi olarak gözönüne alınabilir.

$t,s\in T$ için $s+t = \{s_\alpha+t_\alpha\}$ ve $st = \{s_\alpha t_\alpha\}$ olarak tanımlansın. Teorem 3.1.2.'den $s+t\in T$ olduğu çıkar.

$st\in T$ olduğuna gelince, $\alpha, \beta\in A$ için,

$s_\alpha t_\alpha - s_\beta t_\beta = s_\alpha(t_\alpha - t_\beta) + (s_\alpha - s_\beta)t_\beta \in K_{\alpha\beta}$ olduğu görülür. $K_{\alpha\beta}$ iki yanlı ideal olduğundan $st\in T$ dir. Üstelik ψ nin halka homomorfizması olduğu Teorem 3.1.2'de yapılan işlemlerden açıktır. Sonuç olarak T halka olduğundan N nin de bir halka olduğu elde edilir (Maxson and Walt 1991).

Teorem 3.1.7:

$\mathcal{G} = \mathcal{G}(S)$, S-modül G nin altmodülleri ile oluşturulan bir örtü olsun. Herbir G_α faithful S-modül olduğunda G bir yakın-halka T-modül olarak faithfuldur.

İspat: Her G_α nın bir S-modül olarak faithful (sadık) olduğunu kabul edelim ve bazı $t\in T$ için $tG = 0$ olarak alalım. O zaman her $\alpha\in A$ için $t_\alpha G_\alpha = 0$ ve $t_\alpha = 0$ olur. Bu, G bir T-modül olarak faithful oduğundan $t = 0$ anlamındadır.

Tersine, kabul edelim ki G, T nin faithful sol yakın halka modülüdür, ancak $\ell_S(G_\gamma) = K_{\gamma\gamma} \neq 0$ yazılabileceğinden $G_\gamma\in G$ bir faithful sol S-modül değildir.

$0 \neq s \in K_{\gamma'}$ olduğundan $t = \{t_\alpha\}$ ile $t_\gamma = s$, $t_\alpha = 0$ T nin sıfırdan farklı bir elemanıdır (Maxson and Walt 1991).

Şimdi de altbimodüllerce oluşturulan örtülerin durumunu gözönüne alalım. Bundan sonra R birimli bir halkayı, ${}_SG_R$ ise sol S-, sağ R-modülü göstersin.

Teorem 3.1.8:

Eğer $\mathcal{G}(R)$, $\mathcal{G}$ nin sağ R-altmodüllerince oluşturulan bir örtü ise $N = PE({}_SG_R, \mathcal{G}(R))$, $M_R(G)$ nin altyakın-halkasıdır.(Maxson and Walt 1991)

İspat: $f \in N$, $f = \psi(t)$, $t \in T$ olsun. Bu durumda,

$g \in G_\alpha$, $r \in R$ ise $gr \in G_\alpha$ elde ederiz. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} f(g)r &= (\psi(t)g)r = (t_\alpha g)r \\ &= t_\alpha(gr) \\ &= \psi(t)(gr) \\ &= f(gr) \end{aligned}$$

Bundan sonraki Lemma kısmi endomorfizma halkasının temel özelliklerinden birini verecektir. notasyon olarak,

R, S; halkalar,

${}_SG_R$; bimodül

$\mathcal{G}$; bimodüllerce oluşturulan bir örtü

N ; $PE({}_SG, \mathcal{G}(S, R))$

Lemma 3.1.9:

V, R nin sol ideali, $H = \ell_G(V) = \{g \in G \mid gv = 0, \text{ her } v \in V\}$ olsun. Bu durumda H; G nin altmodülüdür ve N-modül G nin bir N-idealidir.

İspat: Açıktır ki H, G nin altgrubudur.

$s \in S$, $r \in R$, $h \in H$ ve $v \in V$ olsun.

$(sh)v = s(hv) = 0$ ve $rv \in V$ den $(hr)v = h(rv) = 0$ dır. Bu nedenle H G nin altmodülüdür. H nin, G nin N-ideali olduğunu göstermek için $f \in N$, $g \in G$ alalım ve $f(g+h)-f(g) \in H$ olduğunu gösterelim. $f \in N$ den,

$$f(g+h) = s(g+h) = sg+sh$$

Uygun $s, s \in S$ için,

$$f(g) = sg$$

$$f(g+h)-f(g) = sg-s'g+sh$$

Şimdi $v \in V$ için

$$\begin{aligned}(sg)v = (sg+sh)(v) &= f(g+h)(v) \\ &= f(gv+hv) \\ &= f(g)v = (s'g)v\end{aligned}$$

Buradan $(sg-sg) \in l_G(v) = H$, $f(g+H)-f(g) \in H$ olmasını gerektirir (Maxson and Walt 1991).

KAYNAKLAR

BLYTH, T.S. ; 1977.Module Theory, Clarendon Press, Oxford.

CARLTON, MAXSON and KIRBY.;1980. Centralizer near-rings that are endomorphism rings. Proc. of the Ame. Math. Soc. V: 80.

FUCHS, MAXSON and G. PILZ. ;1991. On rings for which homogeneous maps are linear. Proc. of the Ame. Math. Soc. Vol: 118 .

GÖRENTAŞ, N. ; 1994. Kısmi Endomorfizma Yakın Halkaları, Dok. Tezi. Van.

HUNGERFORD, T.W. ; 1974.Algebra, Springer-Verlag, New York. 1974.

MAXSON, C. ;1990. Piecewise Endomorphism of PID modules. Result in Math. V: 18

MAXSON, C. and Von ders WALT.;1991. Piecewise Endomorphisms of ring modules. Quest. Math. V: 14

PILZ. G.;1977. Near-Rings, The Theory and its Applications. Nort-Holland Publishing Company. Amsterdam-New York- Oxford.

YILDIZ, M.; 1994.Homojen Fonksiyonları, Lineer olan Halkalar, Dok. Tezi, Van.

ÖZGEÇMİŞ

RECEP BİNDAK: 1969 yılında Mardin'in Derik İlçesi'nde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Derik'te tamamladı. 1991 yılında Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine 1994'te başladı. Halen Van merkezde bir ilköğretim okulunda öğretmenlik yapmaktadır.