T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TOPOLOJİK UZAYLARDA PARAKOMPAKTLIK ve METRİKLENEBİLME

MURAT CANCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÖNETİCİ
YRD.DOÇ.DR. YILMAZ ALTIN

VAN-1999

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TOPOLOJİK UZAYLARDA PARAKOMPAKTLIK ve METRİKLENEBİLME

MURAT CANCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

JÜRİ ÜYELERİ

BAŞKAN
Doç. Dr. Tünay Bilgin

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Altun
ÜYE

Yrd. Doç. Dr. Hasan Kara
ÜYE

TEZ KABUL TARİHİ
15/9/1999

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ I

TEŞEKKÜR II

ÖZ III

ABSTRACT IV

GİRİŞ 1

BİRİNCİ BÖLÜM

1. ÖNBİLGİLER 2

1.1. Topolojik Uzaylar...2

1.2. Metrik Uzaylar..6

1.3. Ayırma Aksiyomları 8

1.4. Kompakt Uzaylar...10

1.5. Çarpım Uzayları 12

İKİNCİ BÖLÜM

2. PARAKOMPAKTLIK..14

2.1. Örtüm Kavramları...14

2.2. Kompaktlığın Genelleştirilmesi: Parakompaktlık 20

2.3. Parakompaktlığın Ayırma Aksiyomlarına Uygulanması...................................22

2.4. Sayılabilir Parakompaktlık...24

2.5. Parakompakt Çarpım Uzayları 25

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. METRİKLENEBİLME..28

3.1. Metriklenebilirlik..28

3.2. Metriklenebilme Problemi..31

3.3. Metriklenebilir Çarpım Uzayları 35

ÖZET 40

SUMMARY...41

KAYNAKLAR..42

ÖZGEÇMİŞ...43

SİMGELER DİZİNİ

~(F)	: F kümesinin tümleyeni
c(F)	: F kümesinin kapanışı
S_1	: Birinci Sayılabilir Uzay
S_2	: İkinci Sayılabilir Uzay
R	: Reel Sayılar Kümesi
Q	: Rasyonel Sayılar Kümesi
Z	: Tam Sayılar Kümesi
N	: Doğal Sayılar Kümesi
$\hat{H}$	: Hilbert Uzayı
T_t	: Tychonoff Uzayı
I^{ω}	: Hilbert Küpü
$\prec$	: İnceltme Bağıntısı
$(\hat{U})^*$	: $\hat{U}$ örtümünün star ailesi
$(\hat{U})^{\Delta}$	: $\hat{U}$ örtümünün delta ailesi
$\hat{T}_d$	: Bir d metriği ile kurulan metriklenebilir topoloji

TEŞEKKÜR

Bu tez genel itibariyle topolojik uzaylarda parakompaktlık ve metriklenebilme ile ilgili faydalı bilgileri içermektedir. Bundan dolayı tezin hazırlanmasında bana rehberlik eden Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr. Yılmaz ALTIN'a ve Matematik Bölümü Öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

ÖZ

Bir $(X,\hat{T})$ topolojik uzayının ne zaman bir Metrik Uzay olacağı sorusu topolojinin başlıca problemlerinden birisidir. Eğer X üzerinde $\hat{T}_d = \hat{T}$ olacak şekilde bir d metriği varsa, X bir Metrik Uzay olarak düşünülebilir.

Ancak X 'in açık kümelere dayalı bir takım koşullara sahip olması gerekmektedir. Bu sebeple, metriklenebilirlik kavramı için bir geçiş noktası olarak parakompaktlık kavramı geliştirilmiştir. Böylece, bir Regüler Uzay üzerine kurulu bir σ-yerel sonlu bazın bu uzayı metriklendirebildiği belirlenmiştir.

İşte, Genel Metriklenebilme Teoremi ve sonuçları bu açıdan önem kazanmaktadır. Ayrıca, sonuçların geliştirilmesi ve genelleştirilmesi de 1950'den beri devam etmektedir.

Bu çalışmada; kompaktlığın doğal bir genelleştirilmesi olan parakompaktlık kavramına ilişkin bazı teorem ve sonuçlardan hareketle, metriklenebilirlik kavramı genel topolojik uzaylar için genelleştirilmiştir.

Aynı zamanda bu çalışmada metriklenebilme teorisi üzerine yapılan uygulamalar için kolaylık sağlayan bir takım önemli teorem ve sonuçlarda verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Örtüm, Yerel Sonlu Örtüm, İnceltilmiş Örtüm, Parakompaktlık, Metriklenebilirlik.

ABSTRACT

The question that will, "When is $(X, \hat{T})$ topological space a Metric Space?", is principal in problems of general topology. If a metric d exists such that $\hat{T}_d = \hat{T}$ in topological space X, may be thought as a metric space X.

However, X is necessary to be possess some condition according to open sets. This reason, paracompactness concept is improved as a passing point to metrizable concept. In this way, X space is determined metrization together with a σ-local finite base as a Regular Space.

Also from this point of view General Metrization Theorem and results are very important. Moreover, generalizations and improvements of these results have been appearing continuously since 1950.

In this study, metrizable concept is generalized for general topological spaces with motion in some theorem and results according to paracompactness concept that a natural generalization of compactness.

And moreover are given also some important theorem and results getting easy to making applications for metrizable theory.

Keywords: Covering, Local Finite Covering, Refinement Covering, Paracompactness, Metrizable.

GİRİŞ

Topolojinin gelişimi ile açık küme ve Örtüm kavramlarının topolojik uzaylarda yeterince kullanım alanına sahip olmadığı anlaşılmıştır. Özellikle bu kavramlar, metriklenebilme konusunun araştırılmasında temel alınmamıştır. İşte bu yüzden, 1924 yılına kadar metrik uzayların topolojik uzaylara genelleştirilmesi çalışmaları olumlu sonuç verememiştir. 1924 yılında ise Alexandroff ve Urysohn tarafından hem bu konuda ilk olumlu sonuç elde edilmiş ve hem de açık kümeler üzerine kurulu, tanımı henüz yapılmamış bazı kavramlar gösterilmiştir.

Bu kavramlara 1937'de Cech tarafından bikompaktlık dahil edilmiş, 1940'da ise Tukey tarafından tam normallik tanımlanarak her metrik uzayın bir tam normal uzay olduğu gösterilmiştir. Dieudonne tarafından 1944'de kendi deyimiyle metrik ve kompakt uzaylar arasında özel bir topolojik sınıfın oluşumunu sağlayan ve kompaktlığın doğal bir genelleştirilmesi olan parakompaktlık kavramı literatüre kazandırılmıştır. 1948'de Stone tarafından her metrik uzayın bir parakompakt uzay olduğu gösterilerek; aslında parakompaktlık ile tam normalliğin denk olduğu sonucu elde edilmiştir. Nagata (1950), Bing (1951), Smirnov (1951) gibi matematikçilerin çalışmaları neticesinde ise Genel Metriklenebilme Teoremi oluşturularak, ispatında bir σ-yerel sonlu baz (Bing'in deyimiyle σ-ayrık baz) kullanılması uygun görülmüştür. Daha sonra parakompaklık ve metriklenebilme konularında Kely (1987), Durmochwal (1989), Leszek (1991), Tkachuk (1994) tarafından yeni çalışmalar yapılmıştır, fakat bu konulara deyinilmeyecektir.

Konu ile ilgili temel kavramların detayları Kelley (1955), Michael (1957), Mamuzic (1963), Pervin (1964), Willard (1970), Aslım (1988), Gemignani (1990), Gürkanlı (1993), Bülbül (1994), Yüksel (1995) çalışmalarında verilmiştir.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. ÖNBİLGİLER

1.1. Topolojik Uzaylar

1.1.1. Tanım: X bir küme, A sonlu olması gerekmeyen bir indis kümesi ve $\hat{T}$'de X 'in alt kümelerinin bir kolleksiyonu olmak üzere aşağıdakiler sağlansın.

i) $\varnothing \in \hat{T}$, $X \in \hat{T}$.

ii) Eğer $\alpha=1,2,\ldots,n$ için $U_\alpha \in \hat{T}$ ise $\cap\{U_\alpha | \alpha=1,\ldots,n\} \in \hat{T}$.

iii) Eğer $\forall\alpha\in A$ için $U_\alpha \in \hat{T}$ ise $\cup\{U_\alpha | \alpha\in A\} \in \hat{T}$.

Bu taktirde $\hat{T}$ 'ye ait olan her kümeye bir açık küme ve X 'e bir topolojik uzay ya da bir $\hat{T}$-uzayı denir. $\hat{T}$ kolleksiyonuna ise X 'in topolojisi denir.

1.1.2. Tanım: X bir topolojik uzay ve X 'in bir x noktası verilsin. Eğer X 'in bir U alt kümesi, x 'i ihtiva eden bir V açık kümesini içeriyorsa, U 'ya x 'in bir komşuluğu denir.

1.1.3. Teorem: X bir topolojik uzay ve $\hat{U}(x)$'de bir $x\in X$ noktasının tüm komşuluklarının kolleksiyonu olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

i) $X\in \hat{U}(x)$.

ii) Eğer $U\in \hat{U}(x)$ ise $x\in U$.

iii) Eğer $U\in \hat{U}(x)$ ise $U\subset V$ olacak şekilde bir $V\in \hat{U}(x)$ vardır.

iv) Eğer $U,V\in \hat{U}(x)$ ise $U\cap V\in \hat{U}(x)$.

v) Eğer $U\in \hat{U}(x)$ ise $x\in V\subset U$ olacak şekilde öyle bir V kümesi vardır ki her $y\in V$ için $V\in \hat{U}(y)$ 'dir (Aslım, 1988).

1.1.4. Tanım: Bir X topolojik uzayının bir F alt kümesi, eğer X-F bir açık küme ise, bir kapalı küme adını alır ve c(F) ile gösterilir. Bazen X-F, ~(F) ile gösterilir.

1.1.5. Teorem: Bir X topolojik uzayının kapalı kümelerinin bir $\hat{F}$ kolleksiyonu, A sonlu olması gerekmeyen bir indis kümesi olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlar:

i) $\emptyset \in \hat{F}$, $X \in \hat{F}$.

ii) Eğer $\alpha=1,2,\ldots,n$ için $F_\alpha \in \hat{F}$ ise $\cup\{F_\alpha | \alpha=1,2,\ldots,n\} \in \hat{F}$.

iii) Eğer $\forall\alpha\in A$ için $F_\alpha \in \hat{F}$ ise $\cap\{F_\alpha | \alpha\in A\} \in \hat{F}$ 'dir.

1.1.6. Tanım: $(X, \hat{T})$ bir topolojik uzay ve bir $x\in X$ 'in $\hat{U}(x)$ komşulukları kümesi olmak üzere, $c(F)=\{x\in X | U\cap F\neq\emptyset,\ \forall U\in \hat{U}(x)\}$ kümesine X 'in bir F alt kümesinin kapanışı denir.

1.1.7. Tanım: $(X, \hat{T})$ bir topolojik uzay ve $Y\subset X$ olsun. Eğer $c(Y)=X$ ise Y 'ye X 'in bir yoğun alt kümesi denir.

1.1.8. Teorem: Bir $(X, \hat{T})$ topolojik uzayında $A,B\subset X$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

i) $c(\emptyset)=\emptyset$, $A\subset c(A)$.

ii) $c(c(A))=c(A)$, $c(A\cup B)=c(A)\cup c(B)$.

1.1.9. Tanım: $(X, \hat{T}_1)$ ve $(Y, \hat{T}_2)$ iki topolojik uzay olmak üzere bir $f:X\to Y$ fonksiyonu ile $x\in X$ noktası verilsin. f(x) noktasının Y'de her W komşuluğu için, $f(U)\subset W$ olacak şekilde x noktasının X'de bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir. Eğer $\forall x\in X$ için f sürekli ise f 'ye X üzerinde süreklidir denir.

1.1.10. Tanım: $(X, \hat{T}_1)$ ve $(Y, \hat{T}_2)$ iki topolojik uzay, $f(X)\subset Y$ ile bir $f:X\to f(X)$ birebir, örten, sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $f^{-1}:f(X)\to X$ fonksiyonu da sürekli ise f'ye X 'den Y içine bir gömme fonksiyonu denir.

1.1.11. Tanım: Bir $f:(X, \hat{T}_1)\to(Y, \hat{T}_2)$ fonksiyonu verilsin. Eğer X 'in her açık (kapalı) kümesinin f altındaki görüntüsü de açık (kapalı) ise f 'ye bir açık (kapalı) fonksiyon denir.

1.1.12. Tanım: Bir $f:(X,\hat{T}_1)\rightarrow(Y,\hat{T}_2)$ fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve ters fonksiyonu sürekli ise bu f fonksiyonuna bir homeomorfizm, X ile Y topolojik uzaylarına da homeomorf uzaylar denir.

1.1.13. Teorem: Bir $f:(X,\hat{T}_1)\rightarrow(Y,\hat{T}_2)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) f, X'de süreklidir.

ii) Her $H\subset Y$ (açık) kapalı alt kümesi için $f^{-1}(H)\subset X$ kümesi (açık) kapalıdır.

iii) Her $G\subset X$ için $f(c(G))\subset c(f(G))$ sağlanır (Yüksel, 1995).

1.1.14. Tanım: Topolojik uzaylarda topolojik dönüşümler altında değişmeyen özelliklere bir topolojik özellik denir.

1.1.15. Teorem:

i) $f: (X,\hat{T})\rightarrow(Y,\{Y,\emptyset\})$ fonksiyonu süreklidir.

ii) $I: (X,\hat{T})\rightarrow(X,\hat{T})$ fonksiyonu süreklidir (Bülbül, 1994).

1.1.16. Tanım: $(X,\hat{T})$ bir topolojik uzay ve $\hat{B}$ 'de X 'in açık alt kümelerinin bir sınıfı, yani $\hat{B}\subset\hat{T}$ olsun. Eğer $\hat{T}$ 'nin her elemanı $\hat{B}$ 'nin elemanlarının bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\hat{B}$'ye $\hat{T}$ topolojisi için bir taban denir. $\hat{T}=<\hat{B}>$ ile gösterilir.

1.1.17. Tanım: $(X,\hat{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bir $\hat{S}\subset\hat{T}$ alt sınıfının elemanlarının tüm sonlu arakesitlerinden oluşan sınıf $\hat{T}$ için bir taban oluşturuyorsa bu $\hat{S}$ alt ailesine $\hat{T}$ 'nin bir alt tabanı denir. $\hat{T}=<<\hat{S}>>$ ile gösterilir.

1.1.18. Tanım: $(X,\hat{T})$ bir topolojik uzay ve $x\in X$ olsun. Bir $\hat{B}(x)\subset\hat{U}(x)$ alt ailesine, her $U\in\hat{U}(x)$ için $V\subset U$ olacak şekilde bir $V\in\hat{B}(x)$ varsa, X üzerinde bir x noktasının bir komşuluk tabanı denir.

1.1.19. Teorem: $(X, \hat{T}_1)$ ve $(Y, \hat{T}_2)$ herhangi iki topolojik uzay ile bir $f{:}X\to Y$ fonksiyonu verilsin. $\hat{B}_1$ ile $\hat{S}_1$, X uzayının ve $\hat{B}_2$ ile $\hat{S}_2$ 'de, Y uzayının sırasıyla taban ve alt tabanı olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir:

i) f süreklidir.

ii) Her $S_2\in\hat{S}_2$ için $f^{-1}(S_2)\in \hat{T}_1$.

iii) Her $B_2\in\hat{B}_2$ için $f^{-1}(B_2)\in \hat{T}_1$ (Gemignani, 1990).

1.1.20. Tanım: Bir topolojik uzayda aynı topolojiyi üreten iki tabana denk tabanlar denir.

1.1.21. Teorem: Her taban bir alt tabandır.

1.1.22. Tanım: Her noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanına sahip olan bir topolojik uzaya birinci sayılabilir uzay denir ve S_1 ile gösterilir.

1.1.23. Tanım: Sayılabilir bir tabana sahip olan bir topolojik uzaya ikinci sayılabilir uzay denir ve S_2 ile gösterilir.

1.1.24. Teorem: Her S_2 uzayı bir S_1 uzayıdır.

1.1.25. Teorem: $(X, \hat{T})$ bir S_1 uzayı ise her $x\in X$ için $V_{n+1}\subset V_n (n=1,2,...)$ özelliğini sağlayan açık komşulukların sayılabilir bir $\hat{V}(x)=\{V_n|n=1,2,...\}$ komşuluk tabanı vardır (Bülbül, 1994).

1.1.26. Tanım: Sayılabilir güçte yoğun bir alt kümeye sahip olan bir topolojik uzaya ayrılabilir uzay denir.

1.1.27. Teorem: Her S_2 uzayı ayrılabilirdir.

1.1.28. Teorem: $\alpha=1,2$ için S_α uzayı olma özelliği bir topolojik özelliktir.

İspat: Tanım 1.1.22. ve Tanım 1.1.23. gereğince açıktır.

1.1.29. Örnek: $\forall x, y\in R$ $(x<y)$ için $[x,y)$ aralıklarının bir ailesi, R 'de bir topoloji için x 'in bir komşuluk tabanını oluşturur.

1.2. Metrik Uzaylar

1.2.1. Tanım: $\emptyset \neq X$ bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $d: X \times X \to R$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir.

i) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$; $\forall x,y \in X$.

ii) $d(x,y)=d(y,x)$; $\forall x,y \in X$.

iii) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$; $\forall x,y,z \in X$.

iv) $d(x,y) \geq 0$; $\forall x,y \in X$.

Ayrıca burada (X,d) ikilisine bir metrik uzay denir. Eğer d fonksiyonu; $\forall x,y \in X$ için $x=y$ ise $d(x,y)=0$ şartını ve (ii), (iii), (iv) şartlarını sağlıyorsa, X üzerinde bir yarı metrik adını alır. (X,d) ikilisine ise bir yarı metrik uzay denir. Tanım uyarınca her metrik uzay bir yarı metrik uzaydır, fakat tersi her zaman doğru değildir.

1.2.2. Örnek: $\hat{H}$:n=1,2,... için $x_1^2 + x_2^2 + \ldots < \infty$ özelliğini sağlayan (x_n) reel sayı dizilerinin bir uzayı olmak üzere $d((x_n), (y_n))=((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots)^{1/2}$; n=1,2,... fonksiyonu $\hat{H}$ üzerinde bir metriktir. Bu metrik ile birlikte $\hat{H}$ dizi uzayı (reel) Hilbert uzayı diye adlandırılır ve bu uzay ayrılabilir bir uzaydır.

1.2.3. Tanım: X bir küme ve bir $g: X \times X \to R$ fonksiyonu her $x,y \in X$ için; $x \neq y$ iken $g(x,y)=1$ ve $x=y$ iken $g(x,y)=0$ olacak şekilde tanımlı olsun. g,X üzerinde bir metrik olduğundan g 'ye bir ayrık metrik, (X,g) ikilisine de bir ayrık metrik uzay denir.

1.2.4. Tanım: (X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ bir nokta ve $\varepsilon > 0$ için; $S(x,\varepsilon)=\{y \in X | d(x,y) < \varepsilon\}$ kümesine x merkezli ve ε yarıçaplı bir açık yuvar ve $c(S(x,\varepsilon))=\{y \in X | d(x,y) \leq \varepsilon\}$ kümesine de bir kapalı yuvar denir.

1.2.5. Tanım: (X,d) bir metrik uzay ve bir $U \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $\forall x \in U$ için $\exists \varepsilon = \varepsilon(x) > 0$: $S(x,\varepsilon) \subset U$ ifadesi sağlanıyorsa U 'ya X 'in bir açık kümesi ve tümleyenine de X 'in bir kapalı kümesi denir.

1.2.6. Teorem: Bir metrik uzayda her açık (kapalı) yuvar bir açık (kapalı) kümedir.

1.2.7. Teorem: Bir metrik uzayda tek elemanlı ya da sonlu elemanlı her küme kapalıdır.

1.2.8. Teorem: (X,d) bir metrik uzay ve $\hat{U}$ 'da X 'in açık kümelerinin bir kolleksiyonu olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) $\varnothing$ ve X açıktır.

ii) Sonlu sayıda açık kümelerin kesişimi açıktır.

iii) Herhangi sayıda açık kümelerin bileşimi açıktır (Gürkanlı, 1993).

1.2.9. Tanım: (X,d) bir metrik uzay, A ile B X 'in alt kümeleri ve $x\in X$ noktası verilsin.

i) $d(x,A)=\inf\{d(x,a)|a\in A\}$ ifadesine x ile A arasındaki uzaklık denir.

ii) $d(A,B)=\inf\{d(a,b)|a\in A, b\in B\}$ ifadesine A ile B arasındaki uzaklık denir.

iii) $d(A)=\sup\{d(a,a')|a,a'\in A\}$ ifadesine A 'nın çapı denir.

iv) Eğer $x\in A$ ise $d(x,A)=0$ ve eğer $x\in c(A)$ ise yine $d(x,A)=0$ 'dır.

1.2.10. Tanım: (X,d), (Y,g) metrik uzayları, bir $x_0 \in X$ noktası ve bir $f:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. f, x_0 noktasında süreklidir denir $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$: $d(x,x_0)<\delta$ ise $g(f(x), f(x_0))<\varepsilon$. Eğer f, $\forall x\in X$ için sürekli ise f 'ye X 'de süreklidir denir.

1.2.11. Örnek: Bir metrik uzayda iki reel değerli fonksiyon sürekli ise; bunların toplamı, çarpımı da süreklidir.

1.2.12. Tanım: (X,d_1), (X,d_2) iki metrik uzay olsun. Eğer her $x,y\in X$ için $ad_2(x,y)\le d_1(x,y)\le bd_2(x,y)$ olacak şekilde pozitif a,b sayıları varsa X üzerinde d_1,d_2 metriklerine denk metrikler denir.

1.2.13. Teorem: Her metrik uzay bir S_1 uzayıdır.

İspat: Çünkü bir (X,d) metrik uzayının her $x\in X$ noktası $\{S(x,1/n)|n=1,2,\ldots\}$ biçiminde sayılabilir bir komşuluk tabanına sahiptir.

1.2.14. Örnek:

i) R^n öklid uzayı bir S_2 uzayıdır.

ii) Ayrılabilir metrik uzaylar sürekli dönüşümler altında korunurlar.

iii) Metrik uzaylarda aynı kümeye farklı metrikler verilebilir, ancak her kümeye bir metrik belli şartlar altında verilebilir ve her farklı metrik bir özel metrik uzay tayin eder.

1.3. Ayırma Aksiyomları

1.3.1. Tanım: $(X, \hat{T})$ bir topolojik uzay olsun.

i) $\forall x,y \in X$ $(x \neq y)$ için bir $G \subset X$ açık kümesi $(x \in G$ ve $y \notin G)$ veya $(x \notin G$ ve $y \in G)$ olacak biçimde bulunabiliyorsa bu $(X, \hat{T})$ topolojik uzayına bir T_0 uzayı denir.

ii) $\forall x,y \in X$ $(x \neq y)$ için $G, H \subset X$ açık alt kümeleri $(x \in G$ ve $y \notin G)$ ve $(x \notin H$ ve $y \in H)$ olacak biçimde bulunabiliyorsa bu $(X, \hat{T})$ topolojik uzayına bir T_1 uzayı denir.

iii) $\forall x,y \in X$ $(x \neq y)$ için $G, H \subset X$ açık alt kümeleri $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak biçimde bulunabiliyorsa bu $(X, \hat{T})$ topolojik uzayına bir T_2 (Hausdorff) uzayı denir.

Bunlar kısaca $\alpha=0,1,2$ için T_α uzayları diye gösterilebilir.

1.3.2. Teorem:

i) Her T_2 uzayı bir T_1 uzayıdır.

ii) Her T_1 uzayı bir T_0 uzayıdır.

1.3.3. Sonuç: Her T_2 uzayı bir T_0 uzayıdır.

1.3.4. Örnek: $\alpha=0,1,2$ için 1.3.2. Teorem ve 1.3.3. Sonucunun tersi her zaman doğru değildir.

1.3.5. Örnek: Kofinit uzay bir T_1 uzayıdır.

1.3.6. Teorem: Bir $(X, \hat{T})$ topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $(X, \hat{T})$ bir T_2 uzayıdır.

ii) Her $x \in X$ için $\{x\} = \cap\{U \in \hat{U}(x) | U$ kapalı$\}$.

iii) $\Delta = \{(x,x) | x \in X\}$ kümesi X^2 uzayında kapalıdır (Bülbül, 1994).

1.3.7. Teorem: $\alpha=0,1,2$ için T_α uzayı olma özelliği bir topolojik özelliktir.

1.3.8. Teorem: Her metrik uzay $\alpha=0,1,2$ için bir T_α uzayıdır.

1.3.9. Tanım: $(X, \hat{T})$ bir topolojik uzay olsun.

i) Her $x \in X$ ve $x \notin F \subset X$ kapalısı için $G, H \subset X$ ayrık, açık kümeleri $x \in G$, $F \subset H$ olacak biçimde bulunabiliyorsa bu $(X, \hat{T})$ topolojik uzayına bir regüler uzay denir.

ii) Bir regüler T_1 uzayına bir T_3 uzayı denir.

iii) Her $x \in X$ ve $x \notin F \subset X$ kapalısı için $f(x)=\{0\}$, $f(F)=\{1\}$ olacak biçimde sürekli bir $f: X \to [0,1]$ fonksiyonu bulunabiliyorsa bu $(X, \hat{T})$ topolojik uzayına bir tam regüler uzay denir.

iv) Bir tam regüler T_1 uzayına bir T_t (Tychonoff) uzayı denir.

v) Her $F_1, F_2 \subset X$ ayrık, kapalı kümeleri için $F_1 \subset G$ ve $F_2 \subset H$ olacak biçimde $G, H \subset X$ ayrık, açık kümeleri bulunabiliyorsa bu $(X, \hat{T})$ topolojik uzayına bir normal uzay denir.

vi) Bir normal T_1 uzayına bir T_4 uzayı denir.

1.3.10. Teorem:

i) Her T_4 uzayı bir T_3 uzayıdır.

ii) Her T_3 uzayı $\alpha=0,1,2$ için bir T_α uzayıdır.

1.3.11. Sonuç: Her T_4 uzayı $\alpha=0,1,2,3$ için bir T_α uzayıdır.

1.3.12. Teorem: Her tam regüler uzay regüler bir uzaydır.

1.3.13. Sonuç: Her normal uzay regüler bir uzaydır.

İspat: Her normal uzay bir tam regüler uzay olduğundan dolayı açıktır.

1.3.14. Teorem: Her normal, tam regüler, regüler ve $\alpha=3,4$ için T_α uzayı olma özellikleri birer topolojik özelliktir.

1.3.15. Teorem: Her metrik uzay normal (T_4) ve regüler (T_3) uzayıdır.

1.4. Kompakt Uzaylar

1.4.1. Tanım: X bir küme ve $A \subset X$ olsun. Eğer bir $\hat{U} \subset \hat{P}(X)$ ailesi için $A \subset \cup\{U | U \in \hat{U}\}$ ise bu $\hat{U}$ ailesine A kümesinin bir örtüsü (örtümü) denir.

1.4.2. Tanım: X bir küme ve $\hat{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda \neq \emptyset}$, X 'in bir örtümü olsun. Eğer $\hat{U}$ 'nun bir alt ailesi, I′ I 'nın bir alt indis kümesi olmak üzere, $\hat{\hat{U}} = (U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda' \neq \emptyset}$, X 'in bir örtümü oluyorsa bu $\hat{\hat{U}}$ ailesine $\hat{U}$ 'nun bir alt örtümü denir.

1.4.3. Tanım: Bir örtümün eleman sayısı sonlu (sayılabilir) ise bu örtüme sırasıyla sonlu (sayılabilir) örtüm denir.

1.4.4. Tanım: X bir küme ve $\hat{A} \subset \hat{P}(X)$ olsun. Eğer $\hat{A}$ 'nın her sonlu alt ailesinin elemanlarının arakesiti boştan farklı ise bu $\hat{A}$ ailesine sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

1.4.5. Tanım: (X, $\hat{T}$) bir topolojik uzay ve $\hat{Y}$, X 'in bir örtümü olsun. Eğer $\hat{Y}$ 'nin her elemanı bu uzayda açık (kapalı) ise $\hat{Y}$ 'ye bir açık (kapalı) örtüm denir.

1.4.6. Tanım: Bir (X, $\hat{T}$) topolojik uzayı verilsin. Eğer X 'in her açık örtümünün sonlu bir alt örtümü varsa bu topolojik uzaya bir kompakt uzay denir.

1.4.7. Tanım: (X, $\hat{T}$) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer (A, $\hat{T}(A)$) alt uzayı kompakt ise A kümesine (X, $\hat{T}$) topolojik uzayında bir kompakt kümedir denir.

1.4.8. Teorem: Bir (X, $\hat{T}$) topolojik uzayı kompakttır $\Leftrightarrow$ X 'in kapalı herhangi bir alt kümeler ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir (Bülbül, 1994).

1.4.9. Örnek: Kofinit uzay bir kompakt uzaydır.

1.4.10. Teorem: Kompaktlık bir topolojik özelliktir (Aslım, 1988).

1.4.11. Teorem: Kompakt bir uzayın herhangi bir kapalı alt kümesi kompakttır (Bülbül, 1994).

1.4.12. Teorem: Bir T_2 uzayının kompakt alt kümeleri kapalıdır (Bülbül, 1994).

1.4.13. Teorem: Her kompakt T_2 uzayı normaldir.

1.4.14. Sonuç: Her kompakt T_2 uzayı regülerdir.

1.4.15. Tanım: Bir topolojik uzayın her açık örtümünün sayılabilir bir alt örtümü varsa bu topolojik uzaya bir Lindelöf uzayı denir.

1.4.16. Teorem: Her kompakt uzay bir Lindelöf uzayıdır.

1.4.17. Teorem: Her S_2 uzayı bir Lindelöf uzayıdır.

1.4.18. Tanım: Bir topolojik uzayın her sayılabilir açık örtümünün sonlu bir alt örtümü varsa bu topolojik uzaya sayılabilir kompakt uzay denir.

1.4.19. Teorem: $(X, \hat{T})$ bir kompakt uzaydır $\Leftrightarrow$ $(X, \hat{T})$ sayılabilir kompakt ve Lindelöf uzayıdır (Bülbül, 1994).

1.4.20. Teorem: Her kompakt uzay sayılabilir kompakt uzaydır.

1.4.21. Teorem: Her S_2 uzayında kompaktlık ile sayılabilir kompaktlık denktir.

İspat: 1.4.17. Teoreminden dolayı açıktır.

1.4.22. Tanım: Bir topolojik uzayın her noktasının kompakt bir komşuluğu varsa bu topolojik uzaya yerel kompakt uzay denir.

1.4.23. Teorem: Her kompakt uzay yerel kompakt bir uzaydır (Bülbül, 1994).

1.4.24. Teorem: Her yerel kompakt T_2 uzayı regülerdir.

1.4.25. Teorem: Her Lindelöf metrik uzayı bir S_2 uzayıdır.

1.4.26. Tanım: (X,d) bir metrik uzay, $E \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer bir $F \subset X$ alt kümesi için, $E \subset \cup \{ S(x,\varepsilon) | x \in F \}$ sağlanıyorsa bu F alt kümesine E 'nin bir ε-ağı denir.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için E 'nin sonlu bir ε-ağı varsa bu E alt kümesine tam sınırlı bir küme denir.

1.4.27. Teorem: Her sayılabilir kompakt metrik uzay tam sınırlıdır.

1.4.28. Teorem: Her sayılabilir kompakt metrik uzay ayrılabilirdir.

1.5. Çarpım Uzayları

1.5.1. Tanım: $\{(X_\alpha, \hat{T}_\alpha)|\alpha\in A\}$ topolojik uzayların bir topluluğu olmak üzere, $X=\Pi\{X_\alpha|\alpha\in A\}$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde bütün $P_\alpha:X\rightarrow X_\alpha$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan en kaba topolojiye bir çarpım topolojisi ve bu topolojiyi $\hat{T}$ ile gösterirsek $(X, \hat{T})$ ikilisine de bir topolojik çarpım uzayı denir.

1.5.2. Teorem: İzdüşüm fonksiyonu kapalı olması gerekmeyen, örten, açık ve sürekli bir fonksiyondur.

1.5.3. Teorem: $(X_\alpha, \hat{T}_\alpha)_{\alpha\in A}$ bir topolojik uzaylar ailesi ve her $\alpha\in A$ için $A_\alpha\subset X_\alpha$ herhangi alt kümeler ise, $c(\Pi A_\alpha)=\Pi c(A_\alpha)$'dır (Bülbül, 1994).

1.5.4. Tanım: Sayılabilir sayıda $[0,1/\alpha]$; $\alpha=1,2,...$ kapalı aralıklarının çarpım uzayına Hilbert Küpü denir ve I^ω ile gösterilir.

1.5.5. Teorem: $\alpha=1,2,...$ için $[0,1/\alpha]$, $[0,1]$ 'e homeomorftur.

1.5.6. Sonuç: I^ω, $[0,1]$ 'in sayılabilir sayıdasının çarpım uzayına homeomorftur.

1.5.7. Tanım: $(X, \hat{T})$ bir topolojik uzay, "E" X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $[x]=\{y\in X|xEy\}$, bu bağıntıya göre x noktasının bir denklik sınıfı olsun. X 'den $X/E=\{[x]|x\in X\}$ 'ye , yani X 'in "E" bağıntısına göre bölüm kümesi üzerine tanımlanan bir $f:X\rightarrow X/E$, $f(x)=[x]$ bölüm fonksiyonunun ürettiği tümel topolojiye $\hat{T}$ 'nin "E" bağıntısına göre bölüm topolojisi ve X/E kümesine de $(X, \hat{T})$'nin bir bölüm uzayı denir. Bazen X/E, X(E) ile gösterilir.

1.5.8. Örnek: $\alpha=0,1,2,3$ için T_α uzaylarının bölüm uzaylarının yine bir T_α uzayı olması gerekmez.

1.5.9. Teorem: $(X, \hat{T})$ bir T_1 uzayı olsun. X uzayının bir H bağıntısı altındaki X(H) bölüm uzayı bir T_1 uzayıdır $\Leftrightarrow$X(H)'ın elemanlarının her biri $\hat{T}$ topolojisine göre kapalıdır (Yüksel, 1995).

1.5.10. Teorem: Hilbert Küpü kompakttır.

1.5.11. Teorem: $X \times Y$ kompakttır $\Leftrightarrow$ X ve Y kompakttır.

1.5.12. Teorem: $X \times Y$ bir T_2 uzayıdır $\Leftrightarrow$ X ve Y bir T_2 uzayıdır.

İKİNCİ BÖLÜM

2. PARAKOMPAKTLIK

Bu bölümde önce topolojik uzaylarda örtüm kavramı ve özellikleri ele alındı. Daha sonra kompaklığın doğal bir genelleştirilmesi olan parakompaktlık verildi. Burada Stone teoremi üzerinde duruldu. Son olarak parakompaklığın ayırma aksiyomlarına uygulanması ile çarpım uzaylarına uygulanmasına değinilerek parakompaklığın bir topolojik özellik olduğu tesbit edildi.

2.1. Örtüm Kavramları

2.1.1. Tanım: X bir küme, $\hat{U}$ ve $\hat{V}$ ise X 'in iki Örtümü olsunlar. Eğer her $U \in \hat{U}$ için $U \subseteq V$ olacak şekilde bir $V \in \hat{V}$ varsa bu $\hat{U}$ Örtümüne $\hat{V}$ 'nin bir inceltilmişi denir ve $\hat{U} \prec \hat{V}$ ile gösterilerek $\hat{U}$, $\hat{V}$'yi inceltir diye okunur. Burada "$\prec$" inceltme bağıntısı, bir topolojik uzayın alt kümelerinin oluşturduğu aileler üzerinde bir geçişken bağıntıdır.

2.1.2. Tanım: (X, $\hat{T}$) bir topolojik uzay ve $\hat{U} \subset \hat{P}(X)$ olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının, $\hat{U}$ 'nun sadece sonlu (sayılabilir) sayıda elemanını kesen bir komşuluğu varsa bu $\hat{U}$ ailesine yerel sonlu (yerel sayılabilir) bir aile denir. Eğer $\hat{U}$ bir Örtüm ve yerel sonlu ise, yerel sonlu bir Örtüm adını alır.

Ayrıca verilen bir $\hat{U}$ yerel sonlu Örtümü çoğu zaman A bir indis kümesi olmak üzere, $\hat{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ şeklinde bir küme ile gösterilecektir.

2.1.3. Tanım: (X, $\hat{T}$) bir topolojik uzay ve $\hat{U} \subset \hat{P}(X)$ olsun. Eğer her $x \in X$ noktası $\hat{U}$ 'nun sadece sonlu (sayılabilir) sayıda elemanının içine düşüyorsa böyle bir $\hat{U}$ ailesine nokta sonlu (nokta sayılabilir) bir aile denir. Eğer $\hat{U}$ bir Örtüm ve nokta sonlu ise, nokta sonlu bir Örtüm adını alır.

2.1.4. Teorem: Her yerel sonlu aile aynı zamanda nokta sonlu bir ailedir (Nagata, 1950).

2.1.5. Teorem: Sonlu bir aile yerel sonludur fakat tersi doğru değildir (Pervin, 1964).

2.1.6. Örnek:

i) X sonsuz elemanlı bir küme olmak üzere $(X, \hat{T})$ indiscret topolojik uzayı üzerinde $\{\{x\}|x\in X\}$ ailesi, X 'in nokta sonlu bir Örtümü olmasına rağmen yerel sonlu bir Örtümü değildir.

ii) $\{[n,n+1]|n\in Z\}$ alt küme ailesi, R 'nin nokta sonlu bir Örtümüdür.

iii) $\hat{U}=\{(2n-1,\ 2n+1),\ (2n,2n+2)|n=0,\ \pm1,\ \pm2,...\}$, R üzerinde verilen açık aralıkların oluşturduğu bir kolleksiyon olmak üzere açık yerel sonlu bir Örtümümdür. Fakat $\hat{U}$ kolleksiyonu sonlu değildir.

2.1.7. Teorem: Bir $(X,\hat{T})$ topolojik uzayında $\hat{U}$ ve $\hat{B}$ gibi iki Örtüm verilsin.

i) Eğer $\hat{U}\subset\hat{B}$ ise $\hat{U}\prec\hat{B}$ sağlanır ama bunun tersi her zaman doğru değildir.

ii) Eğer $\hat{U}\prec\hat{B}$ ve $\hat{B}\prec\hat{U}$ ise $\hat{U}$ ile $\hat{B}$'nin eşit olması gerekmez (Nagata, 1950).

İspat: Tanım 2.1.1. gereğince açıktır.

2.1.8. Tanım: $(X, \hat{T})$ bir topolojik uzay ve $\hat{U}\subset\hat{P}(X)$ verilsin. Eğer her $x\in X$ noktasının, $\hat{U}$ 'nun en çok bir elemanını kesen bir komşuluğu varsa bu $\hat{U}$ ailesine ayrık bir aile denir.

Eğer $\hat{U}$ ailesi bir Örtüm ve ayrık ise, ayrık bir Örtüm adını alır.

2.1.9. Teorem: Her ayrık aile yerel sonlu bir ailedir.

İspat: Tanım 2.1.2. ve Tanım 2.1.8. gereğince açıktır.

2.1.10. Sonuç: Her ayrık aile nokta sonlu bir ailedir.

İspat: Teorem 2.1.9. gereğince açıktır.

2.1.11. Sonuç: Ayrık aileler Örtüm kavramları içinde en geniş olanıdır (Pervin, 1964).

İspat: Ayrık aile tanımı gereğince açıktır.

2.1.12. Teorem: Kapalı kümelerin yerel sonlu bir ailesinin herhangi bir alt ailesinin birleşimi kapalıdır.

İspat: Bunun ispatı Yardımcı Teorem 2.1.15. ve Yardımcı Teorem 2.1.16'da geniş olarak ele alınmaktadır.

2.1.13. Teorem: (X, $\hat{T}$) bir topolojik uzay, $\hat{U}$ ve $\hat{B}$ iki Örtüm olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

i) $\hat{U} \cup \hat{B} = \{U | U \in \hat{U}$ veya $U \in \hat{B}\}$.

ii) $\hat{U} \cap \hat{B} = \{U \cap B | U \in \hat{U}$ ve $B \in \hat{B}\}$.

iii) Eğer $\hat{U}$ ve $\hat{B}$ açık (kapalı) Örtümler ise, $\hat{U} \cup \hat{B}$ ile $\hat{U} \cap \hat{B}$ 'de açık (kapalı) bir Örtümüdür (Nagata, 1950).

İspat: $\hat{U}$ ve $\hat{B}$ Örtümlerinin birleşim ve kesişim altında küme özelliklerini sağladığı açıktır.

2.1.14. Teorem: (X, $\hat{T}$) bir topolojik uzay, $\hat{U}$ ve $\hat{B}$ iki Örtüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) $\hat{U} \cap \hat{B} \prec \hat{U} \prec \hat{U} \cup \hat{B}$.

ii) $\hat{U} \cap \hat{B} \prec \hat{B} \prec \hat{U} \cup \hat{B}$ (Nagata, 1950).

İspat: Tanım 2.1.1. ve Teorem 2.1.13. gereğince açıktır.

2.1.15. Yardımcı Teorem: (X, $\hat{T}$) bir topolojik uzay ve $\{U | U \in \hat{U}\}$, X'in alt kümelerinin yerel sonlu bir ailesi ise $\{c(U) | U \in \hat{U}\}$ ailesi de yerel sonludur (Bülbül, 1994).

İspat: $x \in X$ verilsin. $V \in \hat{V}(x)$ açık komşuluğu sonlu sayıda $\alpha=1,\dots,n$ için U_α 'yı kesmez ise, sonlu sayıda kapalı $c(U_\alpha)$'yı de kesmez.

2.1.16. Yardımcı Teorem: (X, $\hat{T}$) bir topolojik uzay, $\hat{U}$ yerel sonlu bir kolleksiyon olmak üzere $\cup\{c(U) | U \in \hat{U}\} = c(\cup\{U | U \in \hat{U}\})$ sağlanır (Nagata, 1950).

İspat: Bir $x \in X$ için $x \notin \cup\{c(U) | U \in \hat{U}\}$ olsun. $\hat{U}$ 'nun yerel sonlu oluşundan dolayı, $\hat{U}$ 'nun U_α, $\alpha=1,2,...$ ile gösterilen en fazla sonlu sayıda üyesini kesen x 'in bir V komşuluğu vardır. O zaman $x \notin c(U_\alpha)$ 'dır ve her $X-c(U_\alpha)$ x 'in açık bir komşuluğudur.

Bu taktirde, $W=V\cap[\cap\{X-c(U_\alpha) | \alpha=1,...,n\}]$ x 'in bir komşuluğudur. $\alpha=1,...,n$ için $W\cap U_\alpha \subset (X-c(U_\alpha))\cap c(U_\alpha)=\varnothing$ 'dir. Her U_α 'dan farklı herhangi bir $U\in\hat{U}$ için $W\cap U\subset V\cap U=\varnothing$ 'dir.

Buradan W, U 'nun elemanını kesmeyen x 'in bir komşuluğu olarak bulunur. O zaman $x\notin c(\cup\{U | U\in\hat{U}\})$ olmak üzere $c(\cup\{U | U\in\hat{U}\})\subset\cup\{c(U) | U\in\hat{U}\})$ yazılabilir. Ayrıca, $U\in\hat{U}$ için $c(U)\subset c(\cup\{U | U\in\hat{U}\})$ olduğundan $\cup\{c(U) | U\in\hat{U}\}\subset c(\cup\{U | U\in\hat{U}\})$ yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

2.1.17. Sonuç: Kapalı kümelerin ayrık bir ailesinin birleşimi de kapalıdır (Bing, 1951).

İspat: Yardımcı Teorem 2.1.16. ve ayrık aile tanımı gereğince açıktır.

2.1.18. Yardımcı Teorem: Bir $(X, \hat{T})$ topolojik uzayının her sayılabilir $\{V_\alpha | \alpha=1,2,...\}$ açık örtümünün $\alpha=1,2,...$ için $U_\alpha\subset V_\alpha$ olacak şekilde bir $\{U_\alpha | \alpha=1,2,...\}$ yerel sonlu örtümü vardır (Nagata, 1950).

İspat: $U_1=W_1$ ile $U_\alpha=W_\alpha-\cup\{W_\beta | \beta=1,...,\alpha-1\}$; $\alpha=2,3,...$ şeklinde ifade edilirse arzu edilen bir $\{U_\alpha | \alpha=1,2,...\}$ örtümü elde edilir.

2.1.19. Örnek: $\{(-n,n) | n=1,2,...\}$ ailesi öklid uzayında yerel sonlu olmayan bir açık örtümdür.

2.1.20. Tanım: $(X, \hat{T})$ bir topolojik uzay ve $\hat{U}\subset\hat{P}(X)$ olsun. Eğer her bir $\hat{U}_n$ yerel sonlu (nokta sonlu, ayrık) ise, $\hat{U}=\cup\{\hat{U}_n | n=1,2,...\}$ şeklinde yazılabilen bir aileye σ-yerel sonlu (nokta sonlu, ayrık) bir aile denir.

2.1.21. Tanım: Bir topolojik uzayda kolleksiyonların herhangi bir özelliği birleşim altında korunursa bu özelliğe bir σ-özelliği denir.

2.1.22. Teorem: Her σ-ayrık aile bir σ-yerel sonlu ailedir.

İspat: Yerel sonlu ve ayrık aile tanımları gereğince açıktır.

2.1.23. Tanım: Bir $(X, \hat{T})$ topolojik uzayında σ-yerel sonlu (σ-ayrık) bir $\hat{U}$ ailesi $\hat{T}$ topolojisi için bir taban teşkil ediyorsa $\hat{U}$'ya bir σ-yerel sonlu (σ-ayrık) taban denir.

2.1.24. Tanım: Bir $(X, \hat{T})$ topolojik uzayında bir $x \in X$ noktasını ihtiva eden bir $\hat{U} \subset \hat{P}(X)$ ailesinin üyelerinin birleşimine, $\hat{U}$ üzerinde $x \in X$ noktasının bir starı denir ve $St(x, \hat{U}) = \cup\{U | x \in U, U \in \hat{U}\}$ şeklinde gösterilir.

Eğer $\hat{U}$ üzerinde X'in bir A alt kümesinin starından bahsedilirse bu genellikle, $St(A, \hat{U}) = \cup\{U | U \in \hat{U}, U \cap A \neq \varnothing\}$ şeklinde gösterilir.

Bir X topolojik uzayında tüm x noktalarının starlarının bir ailesi olarak $\hat{U}$'nun starı da; $del(\hat{U}) = St(\hat{U}) = \{St(x, \hat{U}) | x \in X\}$ şeklinde gösterilir. $\hat{U}$'nun U elemanlarının starlarının ailesi ise; $yıl(\hat{U}) = \{St(U, \hat{U}) | U \in \hat{U}\}$ ile gösterilir.

Eğer $\hat{U}$ açık bir örtüm ise $St(x, \hat{U})$, $St(\hat{U})$ ve $yıl(\hat{U})$ birer açık örtümlerdir.

2.1.25. Uyarı: Bazen $del(\hat{U})$, $(\hat{U})^{\Delta}$ ile ve $yıl(\hat{U})$'da $(\hat{U})^{*}$ ile gösterilir.

2.1.26. Tanım: Eğer bir $(X, \hat{T})$ topolojik uzayında bir $\hat{U}$ kolleksiyonunun her üyesi $\hat{U}$'nun üyelerinin en fazla sonlu (sayılabilir) sayıdasını kesiyorsa $\hat{U}$'ya star sonlu (star sayılabilir) denir.

2.1.27. Tanım: Bir $(X, \hat{T})$ topolojik uzayında $\hat{U}$, $\hat{B}$ örtümleri verilsin.

i) Eğer her $U \in \hat{U}$ için $St(U, \hat{U}) \subset B$ olacak şekilde öyle bir $B \in \hat{B}$ elemanı varsa yani $(\hat{U})^{*} \lessdot \hat{B}$ ise $\hat{U}$'ya $\hat{B}$'nin bir star inceltilmişi denir ve $\hat{U}$, $\hat{B}$'yi star inceltir diye okunur.

ii) Eğer $\hat{U}$ hem $x \in X$ için $St(x, \hat{U})$ kümelerini barındıran hem de $\hat{B}$ örtümünü incelten bir örtüm ise yani $(\hat{U})^{\Delta} \lessdot \hat{B}$ ise $\hat{U}$'ya $\hat{B}$'nin bir delta inceltilmişi denir ve $\hat{U}$, $\hat{B}$'yi delta inceltir diye okunur.

2.1.28. Teorem: (X, $\hat{T}$) bir topolojik uzay, $\hat{U}$ ve $\hat{B}$ iki Örtüm iken eğer $(\hat{U})^* \prec \hat{B}$ ise $(\hat{U})^\Delta \prec \hat{B}$ 'dir ve dolayısıyla $\hat{U} \prec \hat{B}$ 'dir (Nagata, 1950).

İspat: Tanım 2.1.2. ve Tanım 2.1.27. gereğince açıktır.

2.1.29. Tanım: Bir (X, $\hat{T}$) topolojik uzayında bir $\hat{U}$ Örtümü verilsin. Eğer n=1,2,... için $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$,... açık Örtümlerinin bir dizisi $\hat{U} \succ (\hat{U}_1)^* \succ \hat{U}_1 \succ (\hat{U}_2)^* \succ \hat{U}_2 \succ ..$ şartını sağlıyorsa X 'in bu $\hat{U}$ Örtümüne bir normal Örtüm denir.

2.1.30. Yardımcı Teorem: Bir (X, $\hat{T}$) topolojik uzayında her $\hat{U}$ Örtümü için $\hat{U} \prec (\hat{U})^\Delta \prec (\hat{U})^* \prec (\hat{U})^{\Delta\Delta}$ sağlanır.

İspat: $\hat{U} \prec (\hat{U})^\Delta \prec (\hat{U})^*$, $(\hat{U})^\Delta$ ve $(\hat{U})^*$ 'ın tanımlarından açıktır. $(\hat{U})^* \prec (\hat{U})^{\Delta\Delta}$ olduğunu göstermek için $(\hat{U})^*$ 'ın bir St(U, $\hat{U}$) üyesini ele alalım. $x_1 \in U$ sabit noktasını seçelim. Farzedelim ki U', $\hat{U}$ 'nun U 'yu kesen keyfi bir üyesi olsun. O zaman bir $x_2 \in U \cap U'$ vardır ve $U' \subset St(x_2, \hat{U})$'dur. Diğer yandan, $x_1 \in U \subset St(x_2, \hat{U})$ ve $St(x_2, \hat{U})$, x_1 'i ihtiva eden $(\hat{U})^\Delta$ 'nın bir üyesidir. Buradan $St(x_2, \hat{U}) \subset St(x_1, (\hat{U})^\Delta)$ elde edilir. Her $U' \in \hat{U}$ için $U' \subset St(x_1, (\hat{U})^\Delta)$; U 'yu kestiği gözönüne alındığında doğrudur. Yani $St(U, \hat{U}) \subset St(x_1, (\hat{U})^\Delta) \in (\hat{U})^{\Delta\Delta}$ yazılabileceğinden $(\hat{U})^* \prec (\hat{U})^{\Delta\Delta}$ olur.

2.1.31. Örnek: Bir X={(0,n)|n=1,2,...} kümesi üzerinde bir $\hat{U}=\{\{x\}|x\in X\}$ ailesi star sonlu olmasına karşın bir $\hat{B}$={(n,m)|n∈N-{0}, m=1,2,...} ailesi star sonlu değildir.

2.1.32. Teorem: Her ayrık aile bir star sonlu ailedir (Willard, 1970).

İspat: Tanım 2.1.26. gereğince açıktır.

2.1.33. Sonuç: Her star sonlu aile bir yerel sonlu ailedir.

İspat: Teorem 2.1.32. gereğince açıktır.

2.2. Kompaktlığın Genelleştirilmesi: Parakompaktlık

2.2.1. Tanım: Her açık Örtümünün sonlu açık bir inceltilmiş Örtümü olan bir topolojik uzaya bikompakt bir uzay denir ki bu, kompakt uzayın genişletilmiş bir tanımı olarak ifade edilebilir.

Yani inceltme bağıntısı altında kompaktlık ile bikompaktlık denk kavramlardır (Cech, 1937).

2.2.2. Tanım: Her açık Örtümünün yerel sonlu açık bir inceltilmiş Örtümü olan bir (T_2) topolojik uzayına parakompakt bir uzay denir. Bazen, (T_2) şartı tanımın dışında kalarak kullanılır (Dieudonne, 1944).

2.2.3. Teorem: Her bikompakt (kompakt) uzay parakompakt bir uzaydır (Nagata, 1950).

İspat: Her sonlu Örtümün yerel sonlu olmasından dolayı açıktır.

2.2.4. Tanım: Her açık Örtümünün star sonlu açık bir inceltilmiş Örtümü olan bir (T_2) topolojik uzayına tam normal bir uzay denir (Tukey, 1940).

2.2.5. Teorem: Her tam normal uzay parakompakt bir uzaydır (Stone, 1948).

İspat: Her star sonlu Örtüm yerel sonlu olduğundan dolayı açıktır.

2.2.6. Teorem: Bir $(X, \hat{T})$ regüler topolojik uzayında aşağıdaki şartlar denktir:

P_1) X'in her açık Örtümünün yerel sonlu açık bir inceltilmiş Örtümü vardır.

P_2) X'in her açık Örtümünün yerel sonlu bir inceltilmiş Örtümü vardır.

P_3) X 'in her açık Örtümünün yerel sonlu kapalı bir inceltilmiş Örtümü vardır (Pervin, 1964).

İspat: $(P_1) \Rightarrow (P_2)$'dir. $(P_2) \Rightarrow (P_3)$ için farzedelim ki X, (P_2)'yi sağlayan bir regüler uzay ve $\hat{G}_1$ 'de X 'in açık bir Örtümü olsun. X 'in her noktası, $\hat{G}_1$'in bazı açık üyelerine aittir ve regülerlik gereğince de kapanışı açık kümesini ihtiva eden bazı açık kümelere de aittir.

Ayrıca X 'in öyle bir açık $\hat{G}_2$ Örtümü vardır ki $\hat{G}_2$ 'nin üyelerinin kapanışlarının bir ailesi $\hat{G}_1$ 'i inceltir. Dikkat edildiğinde, $\hat{G}_2$ 'yi incelten yerel sonlu bir $\hat{G}_3$ Örtümü ortaya çıkmaktadır ve $\hat{G}_3$ 'ün üyelerinin kapanışlarının bir ailesi de arzu edilen bir kapalı Örtüm olarak belirmektedir.

$(P_3) \Rightarrow (P_1)$ için farzedelim ki X, (P_3)'ü sağlayan bir regüler uzay ve $\hat{G}$ 'de X 'in açık bir Örtümü olsun. Hipotez gereği, $\hat{G}$ 'yi incelten yerel sonlu bir $\hat{G}_2$ Örtümü vardır. Yerel sonluluğun tanımından; X 'in her noktası, $\hat{G}_2$ 'nin üyelerinin en fazla sonlu sayıdasını kesen bir açık küme tarafından ihtiva edilir.

Farzedelim ki böyle kümeler altında $\hat{H}_1$, X 'in bir Örtümü olarak (P_3) şartına uygun kapalı ve yerel sonlu bir inceltilmiş $\hat{H}_2$ Örtümüne sahip olsun ve her $E_1 \in \hat{G}_2$ için, $E_2 = c(\cup\{H \mid H \in \hat{H}_2,\ E_1 \cap H = \varnothing\})$ kümesi verilsin. O zaman, $\hat{H}_2$ 'nin üyeleri kapalı ve yerel sonlu olup üyelerinin birleşimleri de kapalıdır ve E_2, E_1'i ihtiva eden açık bir kümedir. Ayrıca, $\hat{H}_2$ üzerinde bir küme E_1 'i keserse E_2 'yi de keser.

Bu taktirde, her $E_1 \in \hat{G}_2$ için $E_1 \subseteq G(E_1)$ olacak şekilde bir $G(E_1) \in \hat{G}_1$ kümesi seçilirse $\hat{G}_2$, $\hat{G}_1$ 'i inceltir. Sonuç olarak, $\hat{G}_3 = \{E_2 \cap G(E_1) \mid E_1 \in \hat{G}_2\}$ kümesi verilirse $\hat{G}_3$, $\hat{G}_1$ 'i incelten X 'in bir açık Örtümü olduğundan ve yerel sonlu $\hat{H}_2$ ailesinin her üyesi $\hat{G}_3$'ün üyelerinin en fazla sonlu sayıdasını keseceğinden $\hat{G}_3$'ün kendisi de yerel sonludur.

2.2.7. Sonuç: Bir X regüler uzayında aşağıdaki şartlar parakompaktlığa denktir:

P_4) X 'in her açık Örtümünün σ-yerel sonlu açık bir inceltilmiş Örtümü vardır.

P_5) X 'in her açık Örtümünün σ-ayrık açık bir inceltilmiş Örtümü vardır.

P_6) X'in her açık Örtümünün açık bir star inceltilmiş Örtümü vardır (Pervin, 1964).

İspat: Teorem 2.2.6. gereğince açıktır.

2.2.8. Tanım: Bir topolojik uzayın kompakt alt kümelerinin bir ailesinin birleşimi kümesine bir σ-kompakt küme denir (Michael, 1957).

2.3. Parakompaktlığın Ayırma Aksiyomlarına Uygulanması

2.3.1. Teorem: Her Lindelöf T_3 uzayı bir parakompakt uzaydır (Bülbül,1994).

İspat: Bir sayılabilir alt Örtüm σ-yerel sonlu bir inceltilmiş Örtüm olduğundan dolayı açıktır.

2.3.2. Sonuç: Her kompakt T_2 uzayı parakompakttır.

İspat: Bir sonlu alt Örtümün bir yerel sonlu inceltilmiş Örtüm olduğu gözönüne alındığında istenen elde edilir.

2.3.3. Uyarı: Sonuç 2.3.2. gereğince denilebilir ki parakompaktlık metrik ve kompakt uzaylar arasında önemli bir topolojik sınıfı teşkil eder.

2.3.4. Sonuç: Her σ-kompakt S_2 uzayı bir Lindelöf uzayıdır.

İspat: Tanım 2.2.8. gereğince açıktır.

2.3.5. Teorem: Her X (T_2) uzayı parakompakttır $\Leftrightarrow$ X, tam normal bir uzay ise (Dieudonne, 1944).

İspat: X bir T_2 uzayı olmak üzere Teorem 2.2.5. gereğince yeter şart sağlanır. Sonuç 2.2.7.'nin (P_6) şartı gereğince de bir X parakompakt (T_2) uzayının her açık Örtümünün star sonlu açık bir inceltilmiş Örtümü olduğundan dolayı X bir tam normal uzaydır. Böylece ispat tamamlanır.

2.3.6. Teorem: Her metrik uzay bir tam normal uzaydır.

İspat: Kabul edelim ki $\forall x,y,z\in(X,d)$ noktaları ile x noktasının $\hat{U}(x)=\{S_{1/n}(x)|n=1,2,...\}$ şeklinde komşuluk tabanı verilsin. X 'in bir S_1 uzayı olduğu açıktır. X 'in açık bir $\hat{U}$ Örtümünü düşünelim. Her $x\in X$ noktası ve bazı $U\in\hat{U}$ için $S_{\varepsilon(x)}(x)\subset U$ ve $\varepsilon(x)\leq 1$ olacak şekilde bir $S_{\varepsilon(x)}(x)$ açık yuvarını alırsak, eğer $\hat{G}_1=\{S_{\varepsilon(x)}(x)|x\in X\}$ ise, $\hat{G}\prec\hat{U}$ olacak şekilde X 'in bir açık Örtümüdür.

Göstermeliyiz ki $\hat{G}_2=\{S_{\varepsilon(x)/4}(x)\,|x\in X\}$, $\hat{G}_1$ 'in bir delta inceltilmiş örtümüdür. Bunun için, bir $x'\in X$ noktası ve $n=\sup\{\varepsilon(x')|x\in S_{\varepsilon(x')/4}(x')\}$ ifadesini düşünürsek bir x_0 noktası için $\varepsilon(x_0)>(3/4)n$ olacak şekilde $x\in S_{\varepsilon(x_0)/4}(x_0)$ yazılabilir. $S_{\varepsilon(y)/4}(y)$, x 'i ihtiva eden $\hat{G}_2$ 'nin bir üyesi olmak üzere; her $z\in S_{\varepsilon(y)/4}(y)$ için, metrik şartı

$d(x_0,z)\le d(x_0,x)+d(x,y)+d(y,z)<(1/4)\varepsilon(x_0)+(1/4)\varepsilon(y)+(1/4)\varepsilon(y)\le(1/4)\varepsilon(x_0)+(1/2)n<\varepsilon(x_0)$ olduğundan $z\in S_{\varepsilon(x_0)}(x_0)$, yani $S_{\varepsilon(y)/4}(y)\subset S_{\varepsilon(x_0)}(x_0)$ yazılabilir.

Buradan da $St(x,\hat{G}_2)\subset S_{\varepsilon(x_0)}(x_0)\in\hat{G}_1$ elde edilir. Sonuç olarak, $\hat{U}$ üzerinde $\hat{G}_2$, $\hat{G}_1$ 'in bir delta inceltilmiş örtümü olduğundan X tam normal bir uzaydır.

2.3.7. Sonuç (Stone Teoremi): Her metrik uzay parakompakt bir uzaydır (Stone, 1948).

İspat: Teorem 2.3.5. ve Teorem 2.3.6. gereğince sağlanır.

2.3.8. Teorem: Her parakompakt (T_2) uzayı bir normal uzaydır.

İspat: Bir X parakompakt (T_2) uzayı olsun. Önce, her $x\in X-F\subset X$ ve $F\subset X$ kapalısı için $x\in U$ ve $F\subset V$ olacak şekilde X 'in ayrık, açık U ve V kümelerinin var olduğunu göstermek istiyoruz.

Kabul edelim ki F, X 'in bir kapalı alt kümesi ve $x\in X-F$ olsun. Bu durumda, her $y\in F$ için $x\in U_y$ ve $y\in V_y$ olacak şekilde U_y ve V_y ayrık, açık kümelerinin var olduğu X 'in bir T_2 uzayı oluşundan dolayı açıktır. O zaman V_y ile X-F X 'in bir açık örtümü formunda bir yerel sonlu açık $\{W_\alpha\}$, $\alpha\in A$ inceltilmiş örtümüne sahiptir.

$V=\cup\{W_\alpha|W_\alpha\cap F\neq\emptyset,\ \alpha\in A\}$ açık bir küme olduğundan F 'yi ihtiva eder. $c(V)=\cup\{c(W_\alpha)|W_\alpha\cap F\neq\emptyset,\ \alpha\in A\}$ olmak üzere V_y bazı W_α, $\alpha\in A$ kümelerini ihtiva edeceğinden dolayı $c(W_\alpha)$, $\alpha\in A$'da $c(V_y)$ tarafından ihtiva edilir. Ancak $x\notin c(V)$ olduğundan x ve F, X üzerinde açık kümelere ayrılabilir.

Farzedelim ki F_1 ve F_2, X üzerinde ayrık, kapalı iki küme olsun. Her $y\in F_1$ için $y\in V_y$, $c(V_y)\cap F_2=\emptyset$ olacak şekilde açık V_y kümeleri bulunabilir. Bu durumda, verilenlerden hareketle $F_1 \subset V$ ve $c(V) \cap F_2 = \emptyset$ olacak şekilde açık V kümeleri de bulunabilir. O halde X normaldir.

2.3.9. Sonuç: Her parakompakt (T_2) uzayı regülerdir.

İspat: Teorem 2.3.8.'in ispatından dolayı açıktır.

2.3.10. Uyarı: Sonuç 2.3.9. gereğince denilebilir ki parakompakt uzaylar kompakt T_2 uzayları ile normal uzaylar arasında yer alır.

2.4. Sayılabilir Parakompaktlık

2.4.1. Tanım: Her sayılabilir açık örtümünün yerel sonlu açık bir inceltilmiş örtümü olan bir topolojik uzaya sayılabilir parakompakt uzay denir.

2.4.2. Tanım: Sayılabilir parakompakt bir normal uzaya binormal bir topolojik uzay denir.

2.4.3. Teorem: Her parakompakt uzay sayılabilir parakompakttır (Kelley, 1955).

İspat: Tanım 2.2.2. ve Tanım 2.4.1. gereğince açıktır.

2.4.4. Teorem: Bir X normal uzayında aşağıdakiler denktir:

i) X, sayılabilir parakompakttır.

ii) X 'in sayılabilir her açık örtümünün nokta sonlu bir açık inceltilmiş örtümü vardır.

iii) X 'in sayılabilir her $\{U_n | n=1,2,...\}$ açık örtümünün $n=1,2,...$ için $c(V_n) \subset U_n$ olacak şekilde bir $\{V_n | n=1,2,...\}$ açık inceltilmiş örtümü vardır.

iv) Her $\{G_\alpha | G_\alpha \subset G_{\alpha+1};\ \alpha=1,2,...\}$ sayılabilir açık örtümünün $F_\alpha \subset G_\alpha;\ \alpha=1,2,..$ olacak şekilde bir kapalı $\{F_\alpha | \alpha=1,2,...\}$ örtümü vardır (Nagata, 1950).

İspat:

(i)$\Rightarrow$(ii): Bir yerel sonlu inceltilmiş örtüm nokta sonlu olduğundan dolayı açıktır.

(ii)$\Rightarrow$(iii): X 'in sayılabilir bir $\{U_n | n=1,2,...\}$ açık örtümünün bir $\{V_\beta | \beta \in A\}$ nokta sonlu inceltilmiş örtümü verilsin. $n=1,2,...$ için $V_n = \cup\{V_\beta | V_\beta \subset U_n,\ V_\beta \not\subset U_\gamma,\ \gamma < n\}$

verildiğinde $\alpha=1,2,\ldots$ için $V_\alpha \subset U_\alpha$ olacak şekilde $\{V_n | n=1,2,\ldots\}$ ailesi nokta sonludur. Ayrıca bir normal uzayda her nokta sonlu V_n örtümü $n=1,2,\ldots$ için $c(V_n)\subset U_n$ şartını sağlayan açık inceltilmiş bir örtüm olduğundan dolayı bellidir.

(iii)$\Rightarrow$(iv): $\{F_n | n=1,2,\ldots\}$ kapalı kümelerin bir ailesi olmak üzere $\{X-F_n | n=1,2,\ldots\}$, X 'in bir açık örtümü formundadır. Eğer $\{V_n | n=1,2,\ldots\}$, $c(V_n)\subset X-F_n$ olacak şekilde bir açık örtüm ise, $\{X-c(V_n) | n=1,2,\ldots\}$ kümesi $F_n \subset X-c(V_n)$ olacak şekilde $\{F_n | n=1,2,\ldots\}$ kapalı küme ailesinin bir üst açık örtümüdür.

(iv)$\Rightarrow$(i): $\{U_n | n=1,2,\ldots\}$ X'in bir açık örtümü, her n için $F_n=X-(U_1\cup\ldots\cup U_n)$ kümesi ve $\{F_n | n=1,2,\ldots\}$ kapalıların bir üst $\{G_n | n=1,2,\ldots\}$ açık örtümü verilsin. Şimdi; $X-G_1\subset W_1, c(W_1)\cap F_1=\varnothing$ olacak şekilde açık bir W_1, $c(W_1)\cup(X-G_2)\subset W_2$ ve $c(W_2)\cap F_2=\varnothing$ olacak şekilde açık bir $W_2,\ldots$ kümelerini -yani $W_1,W_2,\ldots$ kümelerini- seçersek $\{W_n | n=1,2,\ldots\}$ kümesi X 'in bir açık örtümü olur. O zaman, $\{X-G_n | n=1,2,\ldots\}$'de X 'i örter. Ayrıca; $c(W_n)\subset W_{n+1}$, $X-G_n\subset W_n$ ve $W_n\subset\{U_\alpha | \alpha=1,2,\ldots\}$ olduğundan hareketle, $n\geq 2$ için $S_1=W_1$ olacak şekilde $S_n=W_{n+1}-c(W_{n-1})$ kümelerini seçersek, her n için $c(W_{n-1})\subset W_n$ ve $W_{n+1}-W_n\subset S_n$ şartları sağlanacak şekilde X 'in bir $\{S_n | n=1,2,\ldots\}$ açık örtümü elde edilir. Eğer $|\alpha-\beta|\leq 1$ için $S_\alpha\cap S_\beta\neq\varnothing$ ise $S_1\cap U_1$, $S_1\cap U_2, S_2\cap U_1, S_2\cap U_2$, $S_2\cap U_3$, $S_3\cap U_1$, $S_3\cap U_2$, $S_3\cap U_3$, $S_3\cap U_4$ açık kümeleri X 'i örten $\{U_n | n=1,2,\ldots\}$ 'nin bir inceltilmiş örtümü formundadırlar. Böylece $\{S_\alpha\cap U_\beta | \alpha\in N, \beta=1,\ldots,\alpha+1\}$, $\{U_n | n=1,2,\ldots\}$ örtümünün bir yerel sonlu inceltilmiş örtümü olarak bulunur.

2.5. Parakompakt Çarpım Uzayları

2.5.1. Teorem: Bir parakompakt uzayın kapalı her alt uzayı parakompakttır (Michael, 1957).

İspat: Farzedelim ki F, X 'in kapalı bir alt uzayı ve $\{U_\alpha | \alpha\in A\}$ 'da F 'nin bir açık örtümü olsun. Her U_α, F 'de açık olduğundan $\alpha\in A$ için $U_\alpha=F\cap V_\alpha$ olacak şekilde X 'in V_α açık kümeleri vardır. Ayrıca $\{V_\alpha | \alpha\in A\}\cup\{X-F\}$, X 'in bir açık kümesi olduğundan dolayı bir $\{W_\beta | \beta\in B\}$ yerel sonlu açık inceltilmiş örtümüne sahiptir. $\{F\cap W_\beta | \beta\in B\}$ ailesi bir alt örtüm formunda alınmak suretiyle $\{U_\alpha|\alpha\in A\}$ 'nın bir yerel sonlu açık inceltilmiş Örtümü olacağından F parakompakttır.

2.5.2. Tanım: $(X, \hat{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer bir $F\subset X$ kümesi $F=\cup\{F_\alpha|\alpha=1,2,...\}$ şeklinde sayılabilir sayıda kapalı F_α kümelerinin birleşimi olarak yazılabilirse bu F alt kümesine bir F_σ kümesi denir.

2.5.3. Sonuç: Bir parakompakt uzayın her F_σ kümesi parakompakttır (Mamuzic, 1963).

İspat: Teorem 2.5.1. gereğince açıktır.

2.5.4. Teorem: Bir parakompakt uzayın kapalı ve sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü bir T_2 uzayı ise parakompakttır (Kelley, 1955).

İspat: Farzedelim ki f, bir X parakompakt uzayından herhangi bir Y topolojik uzayına sürekli bir fonksiyon olsun. Y bir T_1 uzayıdır. Göstermek istiyoruz ki, Y 'nin her $\hat{U}$ açık Örtümü kapanışı korunan kapalı bir inceltilmiş Örtüme sahiptir. Ancak, $\{f^{-1}(U)|U\in\hat{U}\}$, X 'in bir açık örtümü olduğundan yerel sonlu kapalı bir $\hat{W}_1$ inceltilmiş Örtümüne sahiptir. Herhangi $\hat{W}_2\subset\hat{W}_1$ için $\cup\hat{W}_2$ kapalı olup $\hat{V}=\{f(\hat{W}_1)|W_1\in\hat{W}_1\}$ Örtümü $\hat{U}$ 'nun kapanışı korunan kapalı bir inceltilmiş Örtümüdür. Buradan Y parakompakt olarak bulunur.

2.5.5. Sonuç: Parakompaktlık bir topolojik özelliktir.

İspat: Teorem 2.5.4. gereğince açıktır.

2.5.6. Teorem: Bir parakompakt uzay ile bir kompakt T_2 uzayının çarpım uzayı parakompakttır (Willard, 1970).

İspat: X bir parakompakt uzay, Y bir kompakt uzay ve $\hat{U}$, $X\times Y$ 'nin açık bir Örtümü olsun. Sabit $x\in X$ noktası için, $\hat{U}$ 'nun $U(x,\alpha_1),...,U(x,\alpha_{n(x)})$ şeklinde sonlu sayıda elemanı $\{x\}\times Y$ 'yi örter. X üzerinde $V_x\times Y\subset\cup\{U(x,\alpha_\beta)|\beta=1,...,n(x)\}$ olacak şekilde x 'in bir V_x açık komşuluğunu seçersek bu X 'in bir açık Örtümünü oluşturur. $\hat{V}$ yerel sonlu açık bir inceltilmiş örtüm olmak üzere her $V\in\hat{V}$ e bazı $x\in X$ için $V\subset V_x$

biçiminde $\beta=1,\ldots,n(x)$; $(V\times Y)\cap U(x,\alpha_\beta)$ kümeleri $X\times Y$ 'nin açık bir $\hat{W}$ inceltilmiş örtümüdür. Ayrıca, $(x,y)\in X\times Y$ için yalnızca sonlu sayıda $V\in\hat{V}$ 'yi kesen x 'in bir U komşuluğu ve $\hat{W}$ 'nin yalnızca sonlu sayıdasını kesen (x,y) 'nin $U\times Y$ komşuluğu vardır. O halde, $X\times Y$ parakompakttır.

2.5.7. Sonuç: X bir regüler parakompakt uzay ve Y 'de bir σ-kompakt uzay ise $X\times Y$ parakompakttır.

İspat: σ-kompakt uzay kompakt olduğundan Teorem 2.5.6. gereğince açıktır.

2.5.8. Teorem: X bir T_2 uzayı, $I=[0,1]\subset R$ aralığı ile verilsin. $X\times I$ normal ise X binormaldir (Willard, 1970).

İspat: $X\times I$ normal ise X 'in normal olduğu açıktır. Kabul edelim ki $\{F_n : n=1,2,\ldots\}$ kapalı kümelerin bir ailesi olmak üzere $W_n=X-F_n$ 'lerin, $[W_1\times[0,1)]\cup[W_2 x[0,1/2)]\cup\ldots$'in $X\times I$ üzerinde bir A tümleyen kümesi ve $B=X\times\{0\}$ verilsin. A ve B, $X\times I$ üzerinde ayrık, kapalı kümeler olduğundan dolayı $X\times I$ üzerinde $c(U)\cap B=\emptyset$ olacak şekilde A 'yı ihtiva eden bir U açık kümesini seçersek $G_n=\{x\in X|(x,1/n)\in U\}$, $F_n\subset G_n$ olacak şekilde bir açık küme olarak bulunabilir. O zaman X sayılabilir parakompakt olduğundan ispat tamamlanır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. METRİKLENEBİLME

Bu bölümde önce metriklenebilmenin tanımı yapılarak metriklenemeyen topolojik uzaylara örnekler verildi. Daha sonra metriklenebilme problemi verilerek Genel Metriklenebilme Teoremi ispatlandı ve bu teoremin sonuçları verildi. Ayrıca metriklenebilir çarpım uzaylarına değinilerek metriklenebilirliğin bir topolojik özellik olduğu tespit edildi.

3.1. Metriklenebilirlik

3.1.1. Tanım: Bir metrik uzaya homeomorf olan bir topolojik uzaya bir metriklenebilir topolojik uzay denir (Alexandroff, 1924).

3.1.2. Uyarı: Bir küme üzerinde bir metrik ile birlikte bir topolojik yapı açık yuvarlar yardımı ile kurulabilir (Urysohn, 1924).

3.1.3. Tanım: Bir (X,d) metrik uzayında, $\varepsilon>0$ için $S(x,\varepsilon)$ açık yuvarlarının oluşturduğu $\{S(x,\varepsilon)|x\in X,\ \varepsilon>0\}$ ailesi $\hat{B}_d$ ile gösterilir ve d metriği ile oluşturulan bir açık yuvarlar ailesi adını alır.

3.1.4. Teorem: Bir (X,d) metrik uzayında $\hat{B}_d$ açık yuvarlar ailesi bir topoloji tabanıdır.

İspat: $x,y,z\in X$ ve $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2>0$ için $z\in S(x,\varepsilon_1)\cap S(y,\varepsilon_2)$ verilsin. $d(x,z)=\delta_1<\varepsilon_1$, $d(y,z)=\delta_2<\varepsilon_2$ olmak üzere $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1-\delta_1,\ \varepsilon_2-\delta_2\}>0$ sayısı için yazılabileceğinden, $S(z,\varepsilon)\subset S(x,\varepsilon_1)\cap S(y,\varepsilon_2)$ olur. Taban tanımı uyarınca, $X=\cup\{S(x,\varepsilon)|x\in X,\ \varepsilon>0\}$ elde edilir.

3.1.5. Tanım: (X,d) (yarı) metrik uzayında tüm açık yuvarların $\hat{B}_d$ ailesinin d (yarı) metriği ile oluşturduğu topolojiye bir (yarı) metriklenebilir topoloji denir ve $\hat{T}_d$ ile gösterilir. (X, $\hat{T}_d$) ikilisine de (yarı) metriklenebilir topolojik uzay denir.

3.1.6. Uyarı: Tanım 3.1.1. ile Tanım 3.1.5. birbirine denktir. Bir (X,d) metrik uzayında d metriği ancak bir metriklenebilir topoloji doğurabilir. Dolayısıyla her metrik uzay bir topolojik uzaydır. Ancak tersi bazı özel durumlar da sözkonusu olabilir.

3.1.7. Örnek:

i) (X,g) ayrık metrik uzayı, g ayrık metriği ile doğurulan $\hat{T}_g$ ayrık topolojisi ile birlikte bir topolojik uzaydır.

ii) R^2 üzerinde $d(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{1/2}$; $x_\alpha, y_\alpha \in R$, $\alpha=1,2$ öklid metriği alışılmış topolojiyi doğurur.

iii) $(X,\{\emptyset,X\})$ indiscret topolojik uzayında her sonlu küme kapalı olmadığından dolayı bir metrik kurulamaz. Dolayısıyla X uzayı metriklenemez.

iv) $(\{a,b\}, \{\emptyset,\{a,b\},\{a\}\})$ topolojik uzayı, $\{a\}$ kapalı olmadığından dolayı metriklenemez.

3.1.8. Teorem: Bir X (yarı) metriklenebilir uzayın sabit bir A alt kümesi ile bir $x \in X$ noktası arasındaki uzaklık (yarı) metriklenebilir topoloji altında x noktasının sürekli bir fonksiyonudur (Kelley, 1955).

İspat: $x,y \in (X,d)$, $A \subset X$ sabit ve $z \in A$ için, $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ ve buradan $d(A,x) \leq d(x,y)+d(A,y)$ yazılabilir. Bir (yarı) metriklenebilme özelliği gereğince, $|d(A,x)-d(A,y)| \leq d(x,y)$ olup metriklenebilir uzayda nokta-küme uzaklığı tanımı gereğince ve süreklilik uyarınca y 'nin x merkezli ve bir $r>0$ yarıçaplı açık yuvarda bulunduğu ve böylece $|d(A,x)-d(A,y)|<r$ olduğu görülür.

3.1.9. Teorem: Her (yarı) metriklenebilir uzay normal bir uzaydır (Tukey, 1940).

İspat: A ve B bir (X,d) (yarı) metriklenebilir uzayı üzerinde ayrık, kapalı alt kümeler ve d(A,x) ile d(B,x)'de sırasıyla bir $x \in X$ noktasıyla A ve B arasındaki uzaklığı göstersin. $U=\{x | d(A,x)-d(B,x)<0\}$, $V=\{x | d(A,x)-d(B,x)>0\}$ kümeleri olmak üzere $d(A,x)-d(B,x)$, x üzerinde sürekli olduğundan U ve V açık olup U ile V ayrıktır. Zira U ile V 'nin tanımları gereği bu belli olup $A \subset U$ ve $B \subset V$, normalliğin bir karakterizasyonunu verir.

3.1.10. Örnek: Bir d metriği $(X, \hat{T}_d)$ metriklenebilir uzayını doğurursa, $d_1=\inf(1,d)$ metriği de aynı X metriklenebilir uzayını doğurur.

Öncelikle d_1 metrik şartlarından ilk üçünü sağlar. Dördüncü şart ise; $\forall x,y,z\in X$ için $d_1(x,z)=1$ veya $d_1(y,z)=1$ olursa $d(x,z)>1$ veya $d(y,z)>1$ olacağı için $d_1(x,z)+d_1(z,y)\geq d_1(x,y)$ bulunur. Eğer $d_1(x,z)=d(x,z)$ ve $d_1(z,y)=d(z,y)$ olursa $d_1(x,z)+d_1(z,y)=d(x,z)+d(z,y)\geq d(x,y)\geq d_1(x,y)$ elde edilir.

Öte yandan herhangi bir $A\subset X$ açık alt kümesi $(X, \hat{T}_d)$ metriklenebilir uzayında bir takım açık yuvarların bir birleşimi olarak yazılabileceğinden, açık yuvarların yarıçapını 1'den küçük alırsak $d_1=\inf(1,d)$ olmak üzere, $d_1(x,y)=d(x,y)$; $d(x,y)\leq 1$ elde edilir. Böylece yarıçapı 1'den küçük veya eşit yuvarlar her iki metrikte de aynı olur ve A açık kümesi her iki metrikte de açık olacağından d_1 metriği aynı X metriklenebilir uzayını doğurur.

3.1.11. Teorem: $(X_\alpha,d_\alpha)_{\alpha\in A}$ metrik uzaylarının $\sum\{X_\alpha|\alpha\in A\}$ topolojik toplamı bir d metriği yardımıyla, her $a_\alpha\in X_\alpha$ ve $\alpha\in A$ için; eğer $x=(\alpha,x_\alpha)$ ve $y=(\alpha,y_\alpha)$ ise $d(x,y)=d_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)$ ve eğer $x=(\alpha,x_\alpha)$, $y=(\beta,y_\beta)$, $\alpha\neq\beta$ ise $d(x,y)=d_\alpha(x_\alpha,a_\alpha)+1+d_\beta(y_\beta,a_\beta)$ biçiminde, bir metrik uzay olarak kabul edilebilir (Bing, 1951).

İspat: Bir d fonksiyonu; $d(x,y)\geq 0$, $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$, $d(x,y)=d(y,x)$ yazılarak $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$ şeklinde bir metrik olup, burada üçgen eşitsizliği için şartı ise;

Durum 1: Eğer $x=(\alpha,x_\alpha)$, $y=(\alpha,y_\alpha)$, $z=(\alpha,z_\alpha)$ şeklinde noktalar verilirse $d(x,y)+d(y,z)=d_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)+d_\alpha(y_\alpha,z_\alpha)\geq d_\alpha(x_\alpha,z_\alpha)=d(x,z)$ olur.

Durum 2: Eğer $x=(\alpha,x_\alpha)$, $y=(\alpha,y_\alpha)$, $z=(\beta,z_\beta)$, $\alpha\neq\beta$ şeklinde noktalar verilirse $d(x,y)+d(y,z)=d_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)+d_\alpha(y_\alpha,a_\alpha)+1+d_\beta(a_\beta,z_\beta)\geq d_\alpha(x_\alpha,a_\alpha)+1+d_\beta(a_\beta,z_\beta)=d(x,z)$ olur.

Durum 3: Eğer $x=(\alpha,x_\alpha)$, $y=(\beta,y_\beta)$, $z=(\gamma,z_\gamma)$, $\alpha\neq\beta$ ve $\beta\neq\gamma$ ise $d(x,y)+d(y,z)=d_\alpha(x_\alpha,a_\alpha)+1+2d_\beta(a_\beta,y_\beta)+1+d_\gamma(a_\gamma,z_\gamma)\geq d(x,z)$ biçiminde sağlanacağından topolojik toplamın d metriği ile bir $\hat{T}_d$ metriklenebilir topolojisini doğurabileceği ve dolayısıyla $(\sum\{X_\alpha|\alpha\in A\}, \hat{T}_d)$ 'nin bir metriklenebilir uzay olduğu söylenebilir.

3.1.12. Örnek: X mutlak değer metriği ile oluşturulan bir metriklenebilir topolojik uzay olmak üzere $\{S(x,4)|x\in X\}$, X'in bir açık örtümüdür. Ayrıca $\{S(n,4)|n\in Z\}$ kümesi bu açık örtümün bir alt açık örtümüdür. Bu doğrultuda,

$\{S(x,1)|x\in X\}$ kümesinin $\{S(x,4)|x\in X\}$ 'in bir inceltilmiş örtümü olduğu ve X 'in her 1-komşuluğunun bir 4-komşuluğu tarafından ihtiva edilebildiği söylenebilir.

3.2. Metriklenebilme Problemi

3.2.1. Tanım: Eğer bir $(X, \hat{T})$ topolojik uzayı $\hat{T}=\hat{T}_d$ olacak şekilde bir d metriğine sahipse, $(X, \hat{T})$ topolojik uzayı bir metrik uzaydır. Bu şekilde verilen bir d metriğini araştırma problemine bir metriklenebilme problemi denir.

3.2.2. Yardımcı Teorem: σ-yerel sonlu bir tabana sahip olan bir T_3 uzayı üzerinde her açık küme bir F_σ kümesidir.

İspat: Kabul edelim ki σ-yerel sonlu bir $\{B(n,\alpha)|n\in N, \alpha\in A(n)\}$ tabanına sahip olan ve bir G açık kümesini ihtiva eden bir X T_3 uzayı verilsin. Regülerlik gereği her $x\in G$ için G üzerinde x 'i ihtiva eden ve kapalısını bünyesinde barındıran bir açık küme vardır. Dolayısıyla G üzerinde, x 'i ihtiva eden ve kapalısını bünyesinde barındıran tabanın bir $B(n(x),\alpha(x))$ üyesi de vardır. Buradan, $B(\gamma)=\cup\{B(\gamma,\alpha(x))|x\in G\}$ olacak şekilde her sabit γ pozitif tamsayısı için $\{B(\gamma,\alpha)|\alpha\in A(\gamma)\}$ kolleksiyonu yerel sonlu bulunur. Bu durumda; $c(B(\gamma))=\cup\{c(B(\gamma,\alpha(x)))|x\in G\}\subseteq G$ yazılabilir. Böylece $G=\cup\{c(B(\gamma))|\gamma\in N\}$ kümesi sayılabilir kapalı kümelerin bir birleşimi olarak bulunur.

3.2.3. Teorem (Genel Metriklenebilme Teoremi): Bir X regüler uzayı metriklenebilirdir $\Leftrightarrow$ X 'in σ-yerel sonlu açık bir tabanı vardır (Nagata, 1950; Bing, 1951; Smirnov, 1951).

İspat:

$\Rightarrow$: Farzedelim ki X, $\hat{G}(n)=\{S(x, 1/n)|x\in X$ ve $n=1,2,...\}$ açık yuvarlar ailesine sahip bir metrik uzay olsun. X, Stone Teoremi sonucu parakompakttır. Böylece $\hat{G}(n)$ 'nin bir yerel sonlu açık $\hat{B}(n)$ inceltilmiş örtümü var olacağından X 'in bir σ-yerel sonlu açık $\cup\{\hat{B}(n)|n=1,2,...\}$ tabanı da bulunabilir.

$\Leftarrow$:Her $\hat{B}(n)$ yerel sonlu açık kolleksiyonu için regüler X 'in bir σ-yerel sonlu açık $\hat{B}=\cup\{\hat{B}(n)|n=1,2,...\}$ tabanı verilsin. Her (n,m) doğal sayı çifti ve $x\in X$ noktası için $U(nm,x)$ ve $V(nm,x)$ komşuluklarını tanımlarsak, $\hat{B}(n)$ 'nin yerel sonluluğundan x 'in bir $V(n,x)=\cap\{V|x\in V, V\in\hat{B}(n)\}$ açık komşuluğu elde edilebilir.

Eğer bazı $U\in\hat{B}(m)$ için $x\in U\subset c(U)\subset V(n,x)$ olursa $U(nm,x)=V(n,x)$, $V(nm,x)=U\cap[\cap\{X-c(V)|x\notin c(V)$ ve $V\in\hat{B}(m)\}]$ ve bundan dolayı $U(nm,x)=X$, $V(nm,x)=V(n,x)\cap[\cap\{X-c(V)|x\notin c(V)$ ve $V\in\hat{B}(m)\}]$ yazılabilir. $\hat{B}(m)$ yerel sonlu ve $V(nm,x)$, x 'in bir açık komşuluğu olmak üzere; X 'in bir x noktasının bir $U(x)$ komşuluğu için, $\hat{B}$ açık tabanı ile X regüler ve $x\in V\subset c(V)\subset V(n,x)\subset U(x)$ biçiminde seçilmiş n,m çiftleri ve $V\in\hat{B}(m)$ bulunabilir. $U(nm,x)$ 'in verilen tanımı gereği; $U(nm,x)=V(n,x)\subset U(x)$ olacak şekilde x 'in bir $\{U(nm,x)|n,m=1,2,...\}$ açık tabanı elde edilir.

Öte yandan $y\notin U(nm,x)$ için $U(nm,x)\neq X$ eşitsizliği olacak şekilde ve $x\in U\subset c(U)\subset V(n,x)=U(nm,x)$ biçiminde bazı $U\in\hat{B}(m)$ vardır. Ayrıca $y\notin c(U)$, $V(nm,y)$'nin tanımına uygun olarak $V(nm,y)\subset X-c(U)$ biçiminde ifade edilebilir. Yine $V(nm,x)$'in tanımı uyarınca $V(nm,x)\subset U$ ve buradan $V(nm,y)\cap V(nm,x)=\varnothing$ yazılabilir.

Sonuç olarak, $y\in V(nm,x)$ için $V(nm,x)$'in verilen tanımına uygun olarak $V(nm,x)\subset V(n,x)$ ve $y\in V(n,x)=\cap\{V|x\in V, V\in\hat{B}(n)\}$ bulunur. Bu durumda ise $V(n,y)=\cap\{V|y\in V$ ve $V\in\hat{B}(n)\}\subset V(n,x)$ iken $V(nm,y)\subset V(n,y)$ biçiminde olduğundan $U(nm,x)=V(n,x)$ olacak şekilde $V(nm,y)\subset V(n,x)=U(nm,x)$ yazılabilir. Eğer $U(nm,x)=X$ sağlanırsa $V(nm,y)\subset U(nm,x)$ olacağı açıktır. Bu durumda ise; $\{U(nm,x)|n,m=1,2,...\}$ ve $\{V(nm,x)|n,m=1,2,...\}$ kümeleri istenen şartlara sahip olduğundan X bir metriklenebilir uzaydır.

3.2.4. Teorem (1. Alexandroff-Urysohn Metriklenebilme Teoremi): X bir T_1 uzayı olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

i) X, regüler ve S_2 uzayıdır.

ii) X, ayrılabilir ve metriklenebilir uzaydır.

iii) X, I^{ω} 'nün bir alt uzayına gömülebilir (Alexandroff, 1924; Urysohn, 1924).

İspat:

(i)$\Rightarrow$(ii): Sayılabilir tabanı olan bir uzay σ-yerel sonlu bir tabana da sahip olacağından sağlanır.

(ii)$\Rightarrow$(i): Her ayrılabilir metrik uzay, S_2 uzayı ve regüler uzaydır. Dolayısıyla (i)$\Leftrightarrow$(ii) sağlanır.

(i)$\Rightarrow$(iii): X 'in bir sayılabilir $\hat{B}$ tabanı ile $\hat{A}=\{(U,V)|U,V\in\hat{B};\ c(U)\subset V\}$ kümesi verilsin. $\hat{A}$ sayılabilir, X regüler bir Lindelöf uzayı olduğundan X normal bir uzaydır. Her $(U,V)\in\hat{A}$ çifti için $f(c(U))=0$, $f(X-V)=1$ olacak şekilde bir $f_{uv}:X\rightarrow I=[0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır. Eğer $\hat{F}=\{f_{uv}|(U,V)\in\hat{A}\}$ sayılabilir ve X 'in ayrık (kapalı küme-nokta) çiftlerine sahip ise her $f_{uv}\in\hat{F}$ için $I_{f_{uv}}$, I 'nın bir gömüsüdür.

(iii)$\Rightarrow$(i): I doğal alt uzay topolojisi ile regüler ve S_2 uzayı olduğundan ve bu özellikler sayılabilir çarpım altında korunduğundan I^{ω} 'de regüler ve S_2 uzayıdır. Dolayısıyla bunun her alt uzayı da regüler ve S_2 uzayıdır. Buradan (i)$\Leftrightarrow$(iii) sağlanır. (ii)$\Leftrightarrow$(iii) şartı da (ii)$\Leftrightarrow$(i)$\Leftrightarrow$(iii) 'den sağlanır.

3.2.5. Teorem (2. Alexandroff - Urysohn Metriklenebilme Teoremi): Bir X kompakt T_2 uzayı metriklenebilirdir$\Leftrightarrow$X bir S_2 uzayıdır (Alexandroff, 1924; Urysohn, 1924).

İspat:

$\Rightarrow$: Her (sayılabilir) kompakt metrik uzay ayrılabilir olduğundan bir S_2 uzayıdır.

$\Leftarrow$: Her kompakt T_2 uzayı regüler olmak üzere bir S_2 uzayı da oluyorsa metriklenebilirdir.

3.2.6. Teorem: Bir X topolojik uzayı (yarı) metriklenebilirdir $\Leftrightarrow$ X 'in bir normal örtümü vardır.

İspat:

$\Rightarrow$: Her metrik uzay parakompakt ve Tanım 2.1.29. gereğince de bir normal örtüme sahiptir.

$\Leftarrow$: Star sonlu Örtüm yerel sonlu olduğundan ve X 'in bir σ-yerel sonlu tabanı kurulabileceğinden metriklenebilir ve dolayısıyla (yarı) metriklenebilirdir.

3.2.7. Teorem: Bir X T_0 uzayı metriklenebilirdir $\Leftrightarrow$ X 'in her x noktasının aşağıdaki özellikleri sağlayan sayılabilir bir $\{U(xn)|n\in N,\ x\in X\}$ komşuluk tabanı vardır: $(x,y,z\in X)$.

i) $y\in U(xn)$ ise $U(yn)\subset U(xn-1)$.

ii) $y\notin U(xn-1)$ ise $U(yn)\cap U(xn)=\emptyset$.

İspat:

$\Rightarrow$: Eğer bir metrik uzay sayılabilir bir tabana sahipse (i), (ii) şartlarını sağlayacak şekilde $1/2^n$ yarıçaplı U(xn) yuvarlarına da sahiptir.

$\Leftarrow$: $\hat{U}(n)=\{U(xn)|x\in X\}$ kümesi üzerinde verilen her $n > 2$ doğal sayısı için,

$U(zn)\cap U(xn)\neq\emptyset$ olmak üzere $St(U(xn), \hat{U}(n))\subset U(xn-2)$ yazılabileceğinden (ii) gereğince $z\in U(xn-1)$ olur. (i) şartı gereğince de $U(zn)\subset U(xn-2)$ doğru olduğundan $St(U(xn), \hat{U}(n))\subset U(xn-2)$ elde edilir. Her $n>2$ için $\hat{U}(1), \hat{U}(2),...$ normal dizisi altında $\hat{U}(n)$, $\hat{U}(n-2)$ 'yi star inceltir ve $St(x, \hat{U}(n))\subset U(xn-2)$ olduğundan dolayı da X 'in uygun bir normal dizisi kurularak uzay metriklenebilir. Sonuç olarak, Teorem 3.2.6. gereğince X metriklenebilirdir.

3.2.8. Teorem (Bing Metriklenebilme Teoremi): Bir X regüler uzayı metriklenebilirdir $\Leftrightarrow$X'in bir σ-ayrık açık tabanı vardır (Bing, 1951).

İspat:

$\Leftarrow$: Her ayrık aile yerel sonlu olduğundan Teorem 3.2.3. gereğince X metriklenebilirdir.

$\Rightarrow$: Stone Teoremi sonucunca; her n için $\hat{G}(n)=\{S(x, 1/n)|x\in X\}$ açık örtümü bir σ-ayrık açık $\hat{U}(n)$ inceltilmiş örtümüne sahip olduğundan $\cup\{\hat{U}(n)|n=1,2,...\}$ X'in bir σ-ayrık açık tabanı olarak elde edilir.

3.2.9. Sonuç: Bir σ-yerel sonlu tabana sahip T_3 uzayı normal bir uzaydır.

İspat: σ-yerel sonlu tabana sahip regüler uzay, metrik uzay olduğundan normal bir uzaydır.

3.3. Metriklenebilir Çarpım Uzayları

3.3.1. Tanım: Her noktasının metriklenebilir bir komşuluğu olan bir topolojik uzaya yerel metriklenebilir bir uzay denir.

3.3.2. Teorem: Her metriklenebilir uzay yerel metriklenebilirdir.

İspat: Metriklenebilir uzay her noktasının bir metriklenebilir komşuluğu olduğundan dolayı açıktır.

3.3.3. Teorem: Bir X yerel metriklenebilir T_2 uzayı metriklenebilirdir $\Leftrightarrow$ X parakompakt ise (Michael, 1957).

İspat: Tanım 3.3.1. ve Tanım 2.2.2. gereğince açıktır.

3.3.4. Uyarı: Normal bir uzay, metriklenebilir alt kümelerin oluşturduğu bir yerel sonlu örtüme sahipse metriklenebilirdir.

3.3.5. Teorem: (Yarı) metriklenebilirlik bir topolojik özelliktir.

İspat: $(X, \hat{T})$ ve $(Y, \hat{U})$ uzayları homeomorf iken $\hat{T}_d = \hat{T}$ olacak şekilde X üzerinde bir d (yarı) metriği verilsin. Bu durumda, $\varphi: X \to Y$ bir homeomorfizm olmak üzere, Y üzerinde $g(y_1, y_2) = d(\varphi^{-1}(y_1), \varphi^{-1}(y_2))$ kuralına uygun bir g (yarı) metriği oluşturulabilir. g 'nin tanımından $\varepsilon > 0$ için $\varphi(S(x,\varepsilon)) = S(\varphi(x), \varepsilon)$ yazılabilir. $U \in \hat{U}$ için $G = \varphi^{-1}(U) = \cup\{S(x_\alpha, \varepsilon_\alpha) | \alpha \in A_U\}$ olduğundan şu elde edilebilir ki U kümesi, $U = \cup\{\varphi(S(x_\alpha, \varepsilon_\alpha)) | \alpha \in A_U\} = \cup\{S(\varphi(x_\alpha), \varepsilon_\alpha) | \alpha \in A_U\}$ bulunur ve böylece $\hat{U} = \hat{U}_g$ olacağı için istenen elde edilir.

3.3.6. Tanım: $(X, \hat{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer bir $G \subset X$ kümesi, $G = \cap\{G_\alpha | \alpha = 1, 2, \ldots\}$ şeklinde sayılabilir sayıda açık G_α kümelerinin arakesiti olarak yazılabilirse bu G alt kümesine X 'in bir G_δ kümesi denir.

3.3.7. Teorem: Bir (X, $\hat{T}$) (yarı) metriklenebilir uzayı üzerinde her kapalı küme bir G_δ kümesidir.

İspat: g, $\hat{T}_g = \hat{T}$ olacak şekilde X 'de bir (yarı) metrik olsun. Bu durumda A, A=c(A) ve A=$\cap$\{S(A, 1/n)|n=1,2,...\} şartlarını sağlayan bir kapalı küme olmak üzere S(A, 1/n) 'ler açık olduğundan sayılabilir sayıdasının kesişimi, bir G_δ kümesi olarak A 'yı belirleyecektir.

3.3.8. Teorem: $(X_\gamma, \hat{T}_\gamma)$, γ=1,2,...,n (yarı) metriklenebilir uzaylar olmak üzere $(\Pi X_\gamma, \Pi\hat{T}_\gamma)$ çarpım uzayı da (yarı) metriklenebilirdir.

İspat: g(γ), $\hat{T}_{g(\gamma)} = \hat{T}_\gamma$ olacak şekilde X_γ üzerinde bir (yarı) metrik olsun.

$\sigma((x_1,...,x_n), (y_1,...,y_n))=g_1(x_1,y_1)+g_2(x_2,y_2)+...+g_n(x_n,y_n)$ olmak üzere, ΠX_γ üzerinde bir σ (yarı) metriği vardır. Çarpım topolojisi ise $\cap\{S(\Pi, x_\gamma, \delta_\gamma)|\ \gamma=1,...,n\}$ kümelerince oluşturulabilir ve eğer $\delta_\gamma<\varepsilon/n$ ise $m=(x_1,...,x_n)$ şartına uygun olarak bu kesişim $S(m,\varepsilon)$ kümesince ihtiva edilir. $\delta=\min\ \delta_\gamma$ iken $S(m,\delta)$ ise çarpım topolojisinin bu taban elemanı tarafından ihtiva edilir ve böylece iki tabanın denkliğinden $\hat{T}_\sigma = \Pi\hat{T}_\gamma$ yazılır.

3.3.9. Teorem: Her n$\in$A için $(X_n, \hat{T}_n)$ (yarı) metriklenebilir uzaylar olsun. Bu durumda sayılabilir sayıda $(\Pi X_n, \Pi\hat{T}_n)$ çarpım uzayı da (yarı) metriklenebilirdir.

İspat: d(n), X_n üzerinde $\hat{T}_{d(n)} = \hat{T}_n$ olacak biçimde bir (yarı) metrik olsun.

$\sigma(f,g)=(d(1,f_1,g_1)/1!(1+d(1,f_1,g_1)))+(d(2,f_2,g_2)/2!(1+d(2,f_2,g_2)))+...$ile tanımlı sonsuz serisi yakınsak olduğundan ΠX_n üzerinde σ bir (yarı) metriktir. Buradan, tüm d(n)/(1+d(n)) 'ler bir (yarı) metrik fonksiyonu olarak alındığında S(f,ε), $\hat{B}(\sigma)$ 'nın bir elemanı olarak tanımlanabilir. Yeterince büyük m 'ler için $\Sigma\{1/m!\ |\ m=n+1,...\}<\varepsilon/2$, $\delta<\varepsilon/2m$ şartı olmak üzere $\cap\{S(\Pi, f_n,\delta)|n=1,...,m\}\subset S(f,\varepsilon)$ kümesi yazılabileceğinden $B=\cap\{S(\Pi,f_n(\gamma),\delta_\gamma)|\gamma=1,...,r\}$, çarpım topolojisinin bir taban elemanı olarak kullanılabilir.

Eğer, $\mu=\min(\delta_\gamma/2(n(\gamma))!, 1/2n(r)!)$ şeklinde yazılabilirse $S(f,\mu)\subset B$ olur ve istenen elde edilir.

3.3.10. Teorem: Bir T_2 uzayı üzerine kompakt bir metrik uzayın sürekli görüntüsü metriklenebilirdir.

İspat: f, bir X kompakt uzayından bir Y T_2 uzayına sürekli bir dönüşüm olsun. Y, kompakt ve dolayısıyla regüler olduğundan bir S_2 uzayıdır. X üzerinde sayılabilir bir $\hat{B}$ tabanının elemanlarının tüm sonlu birleşimlerinin bir kolleksiyonu olarak $\hat{G}$ verilsin. $\hat{D}=\{Y-f(X-G) \mid G\in\hat{G}\}$, Y üzerinde açık kümelerin sayılabilir bir kolleksiyonu olduğundan bir taban teşkil eder. $y\in U$ ve U, Y 'nin bir açığı olmak üzere $f^{-1}(y)\subset f^{-1}(U)$ olduğundan $f^{-1}(y)$ kompakttır. Verilenlerden $f^{-1}(y)\subset B_1\cup...\cup B_n\subset f^{-1}(U)$ olacak şekilde $\hat{B}$ üzerinde $B_1,...,B_n$ kümeleri bulunabilir. Eğer $G=B_1\cup...\cup B_n$ alınırsa $G\in\hat{G}$ ve böylece $y\in Y-f(X-G)$ yazılabilir. Dolayısıyla $\hat{D}$, Y için arzu edilen bir tabandır.

3.3.11. Tanım: $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $x,y\in X$ ve $d_1(x,y)<\delta$ ise $d_2(f(x), f(y))<\varepsilon$ olacak biçimde bir $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ fonksiyonuna düzgün sürekli fonksiyon denir.

3.3.12. Teorem: Bir (X,d) kompakt metriklenebilir uzayının bir (Y,d') metriklenebilir uzayı üzerine her f sürekli dönüşümü düzgün süreklidir (Nagata, 1950).

İspat: $\varepsilon>0$ ve her $x\in X$ için $f(S(x, \delta(x)))\subset S(f(x), \varepsilon/2))$ olacak biçimde $\delta(x)>0$ sayısı var ve X kompakt olduğundan $S(x, \delta(x)/2)$ 'nin $S(x_\alpha, \delta(x_\alpha)/2)$, $\alpha=1,...,n$ ile gösterilen sonlu sayıdasıyla X örtülebilir.

Bu durumda $\delta=\min\{\delta(x_\alpha)/2 \mid \alpha=1,..,n\}$ olmak üzere her $x,x'\in X$ için $d(x,x')<\delta$ ve $x\in S(x_\alpha, \delta(x_\alpha)/2)$ olmak üzere x_α noktaları alınırsa, $\delta\leq\delta(x_\alpha)/2$, $x'\in S(x_\alpha,\delta(x_\alpha))$ yazılabileceğinden $f(S(x_\alpha, \delta(x_\alpha)))\subset S(f(x_\alpha), \varepsilon/2)$ gösterimi ile birlikte, verilenlerden $d'(f(x), f(x'))\leq d'(f(x),f(x_\alpha))+d'(f(x_\alpha),f(x'))<\varepsilon$ elde edilebileceğinden f düzgün sürekli bir dönüşüm bulunur.

3.3.13. Teorem: Bir X topolojik uzayının yerel sonlu kapalı bir $\hat{F}=\{F_\alpha \mid \alpha\in A\}$ örtümü için X 'in her F_α alt uzayı metriklenebilirse X 'de metriklenebilirdir (Nagata, 1950).

İspat: Verilenlerden X 'in T_1 ve dolayısıyla, her F_α 'nın kapalı ve T_1 olduğu açıktır. Ayrıca; $x \in F_\alpha$ 'nın her U komşuluğu için ve F_α 'nın yerel sonlu kapalı örtümlerinin bir $\{\hat{F}_{\alpha n} \mid n = 1,2,\ldots\}$ dizisi için $S(x, \hat{F}_{\alpha n}) \subset U$ olacak biçimde bir n sayısı bulunabilir. Her $\alpha \in A$ için $\hat{F}_{\alpha n+1} \lesssim \hat{F}_{\alpha n}$ kabulü gözardı edilmeksizin her n sayısı, $F_n = \cup\{\hat{F}_{\alpha n} \mid \alpha \in A\}$ ailesini $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ailesi tek olduğundan X 'in yerel sonlu kapalı bir örtümü olarak elde ettirir.

U; X 'in bir x noktasının komşuluğu olmak üzere x, $\hat{F}$ 'nin $F_{\alpha(1)},\ldots,F_{\alpha(\gamma)}$ ile gösterilen sonlu sayıdası üzerinde ihtiva edileceğinden her $\alpha(\alpha')$ için $S(x, \hat{F}_{n(\alpha'),\alpha(\alpha')}) \subset U$ biçiminde $n(\alpha')$ 'ler bulunabilir. Eğer $n=\max\{n(1),\ldots,n(\gamma)\}$ yazılırsa $S(x, \hat{F}_n) \subset U$ olur ve X metriklenebilir elde edilir.

3.3.14. Teorem: Sayılabilir sayıda ayrılabilir ve metriklenebilir uzayın birleşimi olan bir X topolojik uzayı, kalıtsal olarak Lindelöf uzayıdır (Nagata, 1950).

İspat: Her X_α ayrılabilir ve metriklenebilir bir uzay olmak üzere $X=\cup\{X_\alpha \mid \alpha=1,2,\ldots\}$ üzerinde bir A alt kümesinin, $A_\alpha=A\cap X_\alpha$; $\alpha=1,2,\ldots$ biçiminde sayılabilir sayıda ayrılabilir ve metriklenebilir uzayların bir birleşimi şeklinde yazılabileceği kabul edilirse $\hat{U}$, A 'nın bir açık örtümü olmak üzere her α için $\hat{U}$ 'nun sayılabilir sayıda $U_{\alpha\beta}$, $\beta=1,2,\ldots$ üyeleri A_α 'yı örtebilir. Buradan $\{U_{\alpha\beta} \mid \beta=1,2,\ldots\}$ X 'in sayılabilir bir alt örtümü olacağından A, X 'in kalıtsallığı sağlayan bir alt uzayı olarak elde edilir.

3.3.15. Tanım: Bir metrik uzayın her kapalı kümesi bir G_δ kümesidir. Eğer bir normal uzay bu şartı sağlarsa bu uzaya bir kesin normal uzay denir.

3.3.16. Teorem: Kalıtsal olarak bir Lindelöf, regüler X uzayının her kapalı F kümesi bir G_δ kümesi olup uzay kesin normaldir (Nagata, 1950).

İspat: X regüler ve $F \subset X$ kapalı iken her $U \in \hat{U}$ için $c(U) \subset X-F$ olacak biçimde kümelerden oluşan X-F 'nin bir $\hat{U}$ açık örtümü var olduğundan X-F kümesi Lindelöf olarak $\hat{U}$ örtümünün sayılabilir sayıda $U_1, U_2,\ldots$ üyesiyle örtülebilir. Buradan,

$F=\cap\{X-c(U_\alpha)|\alpha=1,2,...\}$ kümesi bir G_δ kümesi olarak X 'i kesin normal bir uzay yapar.

3.3.17. Teorem: Eğer yerel ve sayılabilir kompakt bir X T_2 uzayı X_α; $\alpha=1,2,...$ biçiminde sayılabilir sayıda ayrılabilir ve metriklenebilir uzayların bir birleşimine eşitse X, metriklenebilirdir.

İspat: Açıkçası X kompakttır ve X×X; $X_\alpha \times X_\beta$, $\alpha,\beta=1,...$ biçiminde sayılabilir sayıda ayrılabilir ve metriklenebilir alt kümelerin birleşimi olacağından yukarıdaki teoremlerden dolayı $\Delta=\{(x,x)|x\in X\}\in X\times X$ bir G_δ kümesidir ve metriklenebilme teoremleri uyarınca da X metriklenebilirdir.

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışma için gerekli olan temel kavramlar verilmektedir.

İkinci bölümde, açık küme ve örtü kavramları yardımı ile parakompaktlık kavramına ilişkin temel tanım ve özellikler verilmektedir. Parakompaktlık kavramının ayırma aksiyomları üzerinde uygulanması teoremlerle incelenmektedir. Stone Teoremi verilmektedir. Ayrıca parakompaktlık kavramı ile ilgili diğer özellikler de verilerek, üçüncü bölüm için gerekli özellikler ve uygulama alanları incelenmektedir.

Son bölümde, metriklenebilirlik incelenmektedir. Parakompaktlık gibi örtü kavramları yardımı ile Genel Metriklenebilme teoremi ve sonuçları verilmektedir. Bu doğrultuda, Alexandroff - Urysohn ve Bing Metriklenebilme Teoremleri incelenmektedir. Böylece metriklenebilirlik kavramı, topolojik uzaylarda parakompaktlık kavramı sayesinde genelleştirilmektedir.

SUMMARY

This study consist of three chapters. In the first section fundamental conceptions, which are necessary, for study, are given.

In the second section, basic definition and properties of paracompactness are given by the aid covering and open set concepts. The applications in separate axioms of paracompactness with theorems are investigated. Stone's Theorem are given. Moreover, other properties relation with paracompactness are also given. Necessary properties are application areas, for the third section, are investigated its.

In the last section, metrizable concept are investigated. The General metrizable Theorem and results are given by the aid covering concepts as paracompactness. In the light of this informations, Alexandroff-Urysohn and Bing Metrizable Theorems are investigated.

Thus, metrizable concept are generalized by the aid paracompactness in topological spaces.

KAYNAKLAR

ALEXANDROFF, P. 1924. Metrizability. Math. Ann., 92, 294-301.

ASLIM, G. 1988. Genel Topoloji, Ege Üniversitesi Yayınları, 1, 11-201.

BİNG, R.H. 1951. Metrizability in T-spaces, Con. J. Math., 3, 175-186.

BÜLBÜL, A. 1994. Genel Topoloji, K.T.Ü. Yayınları, 48, 11-200.

CECH, E. 1937. On bicompact spaces, Math. Ann., 38, 832-844.

DİEUDONNE, J.A. 1944. Paracompactness, J.M.P. Appl., 23, 65-76.

DURMOCHWAL, A. 1989. Certain generalization of metrizable subspaces, Journal of Formalized Mathematics.

GEMİGNANİ, M. 1990. Elementary Topology, Dover Pub., 2, 16-228.

GÜRKANLI, A.T. 1993. Genel Topoloji,1, 3-190.

KELLEY, J.L. 1955. General Topology, Van Nostrand Pub., 16, 57-1136.

KELY, M.R. 1987. On the number of fixed points for maps of paracompact spaces, Pasific Journal of Mathematics (126) 81 – 123.

LESZEK, B. 1991. Some characterizations of paracompactness and metrizable, Journal of Bialystok Mathematics (3).

MAMUZİC, Z.P. 1963. Introduction of T-spaces, Gron. Pub., 1, 261-266.

MİCHAEL, E. 1957. On paracompact spaces, Proc. Am. Math., 8, 822-828.

NAGATA, J. 1950. Modern Topology, North Holland Pub., 1, 93-100.

PERVİN, W.J. 1964. Foundations of Topology, A.P.T. Math., 4, 36-193.

SMİRNOV, Y.M. 1951. Metrizability, D.A. Nouk., 77, 197-206.

STONE, A.H. 1948. Paracompactness and P-spaces, B.A.M. Soc., 54, 977-982.

TKACHUK, V. 1994. A glance at paracompact spaces which map onto the metrizable spaces, Journal of Topological Proceedings Doc. (1) 321 – 334.

TUKEY, J.W. 1940. Normally in topology, Math. Ann., 2, 112-170.

URYSOHN, P. 1924. Metrizability problem, Math. Ann., 94, 309-315.

WİLLARD, S. 1970. General Topology, A.W. Pub., 1, 15-290.

YÜKSEL, Ş. 1995. Genel Topoloji, Selçuk Üniversitesi Yayınları, 14, 1-329.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Van'da dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Van'da tamamladı. 1992 yılında girdiği Y.Y.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1996 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 1996-1997 eğitim ve öğretim yılında Y.Y.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans programına girdi.