T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NİLPOTENT GRUPLARIN İNTEGRAL GRUP HALKALARINDA BURULMALI BİRİMSELLER

DOKTORA TEZİ

Hazırlayan: Kamil ARI

Van - 2001

KABUL VE ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Abdurrahim YILMAZ danışmanlığında, Kamil ARI tarafından hazırlanan "Nilpotent Grupların İntegral Grup Halkalarında Burulmalı Birimseller" isimli bu çalışma 12 / 11 / 2001... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdurrahim Yılmaz..... İmza:

Üye Prof. Dr. Hüseyin Aydın.............. İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Necdet Batır........... İmza:

Üye : .... İmza:

Üye : .... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 30 / 11 / 2001... gün ve 30-8..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Nezaket ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ÖZET

NİLPOTENT GRUPLARIN İNTEGRAL GRUP HALKALARINDA BURULMALI BİRİMSELLER

ARI, Kamil
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdurrahim YILMAZ
Ekim 2001, 42 sayfa

Bu çalışmanın birinci bölümünde literatür bildirişi, ikinci bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, metadevirli olmayıp metabelian bir grubun integral grup halkalarındaki sonlu mertebeli elemanları karakterize edilmiş ve Zassenhaus'un bir konjektürünün gerçeklenişi bu grubun sonlu mertebeli elemanları üzerine uygulanmıştır.

Dördüncü bölümde, nilpotent metabelian gruplardaki burulmalı birimsellerin izi ve keyfi bir grupta burulmalı birimsellerin katsayılar toplamı tartışıldı.

Son bölümde ise, sonsuz nilpotent gruplar ile Zassenhaus konjektürü arasındaki bağıntı incelendi.

Anahtar Kelimeler : Metabelian grup, Nilpotent metabelian grup, Nilpotent grup, Yarı-direkt çarpım, Sonlu mertebeli birimseller.

ABSTRACT

TORSION UNITS IN INTEGRAL GROUP RİNGS OF NILPOTENT GROUPS

ARI, Kamil
Ph.D.Department of Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Abdurrahim YILMAZ
October 2001, 42 pages

This thesis consists of five chapters. In the first and second chapters, literature notices and some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters were given respectively.

In the third chapter, the torsion elements of the integral group ring of metabelian but not metacylic groups are characterized and one of the Zassenhaus' conjectures is verified.

In the fourth chapter, trace of torsion units in nilpotent metabelian groups and the sum of coefficients of torsion units in arbitrary groups have been discussed.

In the last chapter, relation between infinite nilpotent groups and Zassenhaus conjecture was examined.

Key Words : Metabelian group, Nilpotent metabelian group, Nilpotent group, Semidirect product, Torsion unit.

ÖN SÖZ

Grup Teorisi veya onun paralelinde çalışan matematikçiler, özellikle pür alandaki matematikçiler son dönemlerde Grup Halkası konusuna oldukça yoğun ilgi göstermektedirler. Bunların başında grup halkalarındaki birimsellerin elde edilmesi ve bazı özel grupların sonlu mertebeden birimsellerinin incelenmesi gelmektedir. Bu nedenle Grup Temsilleri büyük önem arz etmekte ve Zassenhaus konjektürleriyle birlikte temsil teorisi bu çalışmalarda önemli rol oynamaktadır.

Çalışmalarım boyunca bana yardımcı olan sayın hocam Prof.Dr. Abdurrahim YILMAZ'a teşekkür ederim.

Kamil ARI

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
F_p	Asal cisim
$Z(G)$	G grubunun merkezi
$G'=[G,G]$	G'nin türev grubu
$N \Delta G$	N, G nin normal altgrubu
$[x,y]$	x ve y nin komütatörü
K^*	Bir K cisminin çarpımsal grubu
K^+	Bir K cisminin toplamsal grubu
$AutG$	G nin otomorfizma grubu
$U(R)$	R nin birimsel grubu
$R[X]$	R halkasının X üzerinde polinom halkası
KG	K üzerinde G nin grup halkası
$Supp(\lambda)$	λ nın dayanağı (supportu)
$\varepsilon(\lambda)$	λ nın ogmentasyonu, katsayıların toplamı
$\Delta_K(G)$	KG nin ogmentasyon ideali
$\Delta_K(G,N)$	$KG \rightarrow K(G/N)$ dönüşümün çekirdeği
$U_1(R)$	R halkasının ogmentasyonu 1 olan birimseller grubu
ZG	İntegral grup halkası
QG	Rasyonel grup cebiri
$o(g)$	g nin mertebesi
$T^{(i)}(x)$	x in i inci genelleştirilmiş izi
$\tilde{x}(g)$	$g \in G$ nin eşlenik sınıfı üzerinde x birimsel elemanındaki katsayıların toplamı

GİRİŞ

G sonlu bir grup, Z tamsayılar halkası ve V(ZG), ZG integral grup halkalasının normalleşmiş (ogmentasyonu koruyan) birimsellerinin grubu olsun. $u \in V(ZG)$ ise, bir $g \in G$ ve bir $\alpha \in U(ZG)$ için $u = \alpha^{-1}g\alpha$ olur mu? (Hughes ve Pearson, 1972) tarafından Zassenhaus'a yöneltilen bu soruya, yine aynı kişiler tarafından aşağıdaki teoremle olumsuz cevap verildi.

Teorem 1

(i) $U(ZS_3) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(Z) \mid a + c \equiv b + d \pmod 3)\}$,

(ii) (ii) $V(ZS_3)$ grubundaki sonlu merteben aşikar olmayan bir eleman 2 veya 3 elemanlıdır. $V(ZS_3)$ grubunda temsilcileri (12) ve u=(12)+3(23)-3(13)-3(123)+3(132) olan 2 mertebeli elemanların iki eşlenik sınıfı varken, 3 mertebeli bütün elemanlar $V(ZS_3)$ de eşleniktirler. Yine de $V(ZS_3)$ deki 2 mertebeli bütün elemanlar QS_3 de eşleniktir.

(iii) S_3 ve {1, u} grupları, eşlenik olma dışında, $V(ZS_3)$ grubunun tek maksimum sonlu olan altgruplarıdır.

Buna rağmen Zassenhaus, bu soruya olumlu bir cevap olarak metabelian ve nilpotent gruplar için o meşhur konjektürü şöyle belirtmiştir: $u \in T\, U_1(ZG)$ ise $u \sim g$ olacak şekilde $\exists\, g \in G$ ve $\gamma \in QG$ vardır. Bu konjektür, (Ritter ve Sehgal, 1983) tarafından nilpotentlik sınıfı 2 gruplar, (Milies ve ark.,1986) tarafından (0(a), 0(x)) =1 olmak üzere metadevirli gruplar ve (Sehgal ve Weis, 1986) tarafından X, A grubunda sadık indirgenmez biçimde etkilenmek üzere $A \times_\sigma X$ metabelian gruplar için gerçeklenmiştir. Ayrıca (Marciniak ve ark., 1987) tarafından Zassenhaus konjektürünün sağlandığı gösterilmiştir.

Teorem 2

A değişmeli grup ve A nın mertebesini bölen her p asalı için, $m < p$ iken X, m mertebeli değişmeli grup olmak üzere

$G = A \times_\sigma X$ olsun.

a) m asal sayı (=q) veya

b) A devirli grup (=<a>)

olduğu kabul edilsin. O halde G için Zassenhaus konjektürü sağlanır.

(Hughes ve Pearson, 1972) tarafından $U(ZS_3)$ grubunun ve (Milies,1972) tarafından $U(ZD_4)$ grubunun karakterizasyonu verildi. Teorem 1'in ispat tekniğinden kısaca şöyle bahsedilebilir:
$\sigma : V(ZS_3) \rightarrow \sigma(V(ZS_3)) \subset GL(2,Z)$ bir sadık temsili belirten 6 x 6 türünde bir P matrisini elde etmek için S_3 simetrik grubunun farklı indirgenmez temsillerinin kullanılmasından ibarettir. $r = \sum a_i g_i$ ise $\alpha = [a_1,\ldots,a_6]$ satır vektörü olmak üzere,

σ (r) nin girişleri $\alpha P = \beta$ matris çarpımından elde edilir. Son olarak P^{-1} bulunur ve $\alpha=\beta P^{-1}$ nin çözümlerinin Z de olması koşulundan doğan lineer denklikler sistemi çözülerek GL(2, Z) de $\sigma(V(ZS_3))$ ye ait olan matrisleri belirleyen gerek ve yeter şarta elde edilir. G, n mertebeli keyfi bir grup ise, σ n x n türünde bir P matrisi göstermek üzere m inci mertebeden bir temsili etmek için de yukarıdaki teknik kullanılabilir. (Allen ve Hobby, 1980) tarafından da benzer şekilde, bu teknik kullanılarak $U(ZA_4)$ grubundaki birimsellerin karakterizasyonu verilmiştir.

$i > 1$ için $G(i) = \{g \in G \mid o(g) = i\}$, $G(1) = \{1\}$ ve $x = \sum_{g\in G} \alpha_g g \in ZG$ için $T^{(i)}(x) = \sum_{g\in G(i)} \alpha_g$ ve $\tilde{x}(g) = \sum_{h\sim g} \alpha_h$ olsun. Sıfırdan farklı ize sahip olan V(ZG) grubundaki bir burulmalı (torsion) birimselin, birim olması gerektiği biliniyor (Sehgal, 1978). Bovdi konjektürü şöyle ifade edilebilir: "p bir asal sayı, $x \in V(ZG)$ ve $o(x) = p^n$ ise, $T^{(p^n)}(x) = 1$ ve $T^{(p^i)}(x) = 0$ ". Eğer G sonlu bir grup ise, V(ZG) deki burulmalı birimseller için Bovdi konjektürü ile Zassenhaus konjektürü arasında bir ilişki vardır. (Dokuchaev, 1992) ye göre G nilpotent metabelian grup ise, burulmalı birimsellerin genelleştirilmiş izi $i \neq n$ için $T^{(n)}(x) = 1$ ve $T^{(i)} = 0$ dır.

(Weiss, 1988; 1991) tarafından sonlu nilpotent gruplarda Zassenhaus konjektürünün sağlandığı gösterilmiştir. ZG deki her burulmalı birimselin, eşleşmiş Bass iz fonksiyonunun sıfır olmayan birtek eşlenik sınıfı varsa G grubuna bir UT grup denir. Zassenhaus konjektürü sonlu bir G grubu için sağlanır ancak ve ancak G bir UT gruptur. (Sehgal, 1993; Bovdi ve ark., 1994) tarafından bu konu detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Keyfi bir G grubunun her burulmalı birimseli aşikar bir birimsele eşlenik olma özelliğine sahip olsun. Buna göre G nin bir UT grup olduğu görülür. (Marciniak ve Sehgal, 1995; 1996) tarafından keyfi nilpotent grupların ve sonlu gruplara göre bazı çok devirli grupların UT özelliğine sahip olduğu belirtilmiştir. Bu yüzden bu tür gruplar için Zassenhaus konjektürünün genişlemesi ile ilgili bazı sorular akla gelebilir. Gerçekten (Bovdi ve ark., 1994) tarafından bazı sonsuz gruplar için, tüm burulmalı birimsellerin aşikar birimsellere rasyonel olarak eşlenik olabileceği ihtimali üzerinde durulmuştur. (Marciniak ve Sehgal, 1996) tarafından Zassenhaus konjektürünün bütün sonsuz nilpotent gruplar için sağlanmadığının tam bir analizi yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bundan sonraki 3., 4. ve 5. bölümlere yardımcı olacağını düşündüğümüz bazı temel tanım ve yardımcı teoremleri vereceğiz.

2.1. Bazı Tanımlar ve Yardımcı Teoremler

2.1.1. Tanım (Metabelian Grup)

G bir grup, $A \Delta G$ ve A değişmeli grup olsun. Eğer G / A değişmeli grup ise, G ye bir *metabelian grup* denir.

2.1.2. Tanım (Nilpotent Grup)

G bir grup olsun. G nin n.merkezi tümevarımla şöyle tanımlıdır : $n=1$ için $Z_1(G) = Z(G)$, G nin merkezi. Şimdi $G/Z_1(G)$ nin merkezi gözönüne alınırsa, $Z[G/Z_1(G)]\ \Delta G/Z(G)$ olduğundan, en az bir $Z_2(G)\Delta G$ var öyle ki, $Z_2(G)/Z_1(G) = Z[G/Z_1(G)]$, benzer şekilde, $\exists\ Z_n(G)\ \Delta G$ var öyle ki, $Z_n(G)/Z_{n-1}(G) = Z[G/Z_{n-1}(G)]$. $\forall\ n=1,2,3,\ldots$ için $Z_n(G)$ ye G nin n.merkezi denir. $Z_0(G)=\{e\}$ yazılarak her $n>1$ için $Z_n(G)/Z_{n-1}(G)=Z[G/Z_{n-1}(G)]$ dir. Tanımdan, $Z_n(G)=\{x\in G \mid xy\,x^{-1}y^{-1} \in Z_{n-1}(G),\ \forall\ y \in G\}$ olup $Z_n(G) \leq Z_{n-1}(G)$ dir. G nin bu altgruplarından oluşan $\{e\}=Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \ldots \leq Z_n(G) \leq \ldots$ artan altgruplar serisine G nin üst merkezsel serisi denir.

Bir $m=1,2,3,\ldots$ için $Z_m(G) = G$ ise G ye *nilpotent grup* denir. $Z_m(G) = G$ olacak şekildeki en küçük m ye G nin **nilpotentlik sınıfı** denir.

2.1.3. Tanım (Ayrılabilir)

$F \leq E$ bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in E$ elemanı F-cebirsel olsun. Eğer α nın F-üzerindeki minimal polinomu $\min_F(\alpha,x)$ ayrılabilir (separable) ise α, F-üzerinde *ayrılabilir* ve E nin her elemanı F-üzerinde ayrılabilir ise E ye F nin bir **ayrılabilir genişlemesi** denir.

2.1.4. Önerme

F bir cisim ve $\sigma : F \to L$, F nin cebirsel kapalı bir L cismine yerleşimi ve $E=F(\alpha)$, F nin bir cebirsel genişlemesi olsun. O halde σ, bir $\eta : E \to L$ yerleşimine genişletilebilir ve böyle yerleşimlerin sayısı, α nın minimal polinomunun farklı köklerinin sayısına eşittir.

2.1.5. Örnek

E, F nin bir genişlemesi ve $\alpha \in E$ elemanı F-üzerinde cebirsel olsun. Buna göre, α F-üzerinde ayrılabilir $\Leftrightarrow F(\alpha)$, F nin ayrılabilir genişlemesidir.

$\beta \in F(\alpha)$ olsun. β nın F-ayrılabilir olduğu gösterilebilir: $F \subseteq F(\beta) \subseteq F(\alpha)$ dır. L bir cebirsel kapalı cisim ve $\sigma : F \to L$ bir yerleşim olsun. $p_1(x) = \min_F(\beta,x)$ in m farklı kökü bulunsun. 2.1.4. Önermeden, σ nın $F(\beta)$ ya m farklı $\sigma_1, \sigma_2,...,\sigma_3$ genişlemesi bulunur. Ayrıca, $p_2(x)=\min_{F(\beta)}$ $(\alpha, \beta)=$ (α nın $F(\beta)$-üzerindeki minimal polinomu) olsun ve $p_2(x)$'in n farklı kökü bulunsun. Yine 2.1.4. Önermeden, her σ_i, $1 \leq i \leq m$ için σ_2 nin $F(\alpha)$ ya tam olarak n tane σ_{ij} , $i \leq j \leq n$ genişlemesi bulunur. Buradan $\sigma : F \to L$ yi $F(\alpha)$ dan L ye genişleten yerleşimlerin tümü $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ için, mn tane $\{\sigma_{ij}\}$ yerleşimler kümesidir. $P_3(x) = \min_F(\alpha, x)$ ise, $[F(\alpha):F] = \text{der } p_3(x) = \sigma$ yerleşmesinin $F(\alpha)$ ya genişleme sayısıdır. α, F-ayrılabilir olduğundan, α, $F(\beta)$-ayrılabilir ve benzer biçimde $[F(\alpha):F(\beta)]=\text{der}p_2(x) = p_2(x)$ in farklı kök sayısı = her bir σ_i nin $F(\alpha)$ ya genişleme sayısı = n. Yine, $[F(\beta) : F] = \text{der}p_1(x)$ olup, $p_1(x)$ in farklı kök sayısı = σ nın $F(\beta)$ ya genişleme sayısı = m olup,

$mn= [F(\alpha):F] = [F(\alpha):F(\beta)][F(\beta):F] = n. \text{ der}p_1(x) \Rightarrow m = \text{der}P_1(x)$ = ($p_1(x)$ in farklı kök sayısı). O halde $p_1(x) = \min_F(\beta, x)$ bir ayrılabilir polinom olup β, F-üzerinde ayrılabilirdir.

2.1.6. Tanım (Galois İzi)

E / F bir Galois genişlemesi, $G = \text{Gal } E/F = \{\eta_1=1, \eta_2,...,\eta_n\}$ olsun. $u \in E$ ise, $T_{E/F}(u) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(u)$ ile tanımlı dönüşüme E/F de u nun *izi* denir.

2.1.7. Tanım (Yarı Direkt Çarpım)

G ve H birer grup ve $\alpha : H \to \text{Aut}(G)$ bir homomorfizması olsun. G x H $= \{(g,h) : g\in G,\ h \in H\}$ kartezyen çarpımı $(g_1,h_1)\ (g_2,h_2) = (g_1(\alpha(h_1)g_2),\ h_1h_2)$ işlemi altında bir gruptur. Buna H nin G ile *yarı direkt çarpımı* denir.

2.1.8. Önerme

G bir grup, A ve H, G nin altgrupları ve A G de normal olsun. Buna göre,

(i) A bir değişmeli grup

(ii) G, A ile H nin bir yarı direkt çarpımıdır. (Serre, 1977).

G nin indirgenmez temsillerinin, H nin birtakım altgruplarından oluşturulabileceği şöyle yorumlanabilir:

2.1.8.Önerme (i) den, A değişmeli olduğundan A nın indirgenmez karakterleri 1.derecedendir ve X=Hom(A, C^*) grubu oluşturulabilir. G, X üzerinde şöyle etkir: $s \in G$, $x \in X$, $a \in A$ için $(s\chi)(a) = \chi(s^{-1}as)$.

$(\chi_i)_{i \in X/H}$, χ deki H nin yörüngeleri için temsilcilerin bir sistemi olsun. Her bir $i \in X/H$ için H_i, $h\chi_i = \chi_i$ olacak şekilde bu h elemanlarından oluşan H nin altgrubu ve $G_i = A \times H_i$, G grubunun altgruplarına karşılık gelen grup olsun. χ_i fonksiyonu G_i ye $a \in A$, $h \in H_i$ için $\chi_i(ah) = \chi_i(a)$ alarak genişletilebilir. Her $h \in H_i$ için $h\chi_i = \chi_i$ olmasını kullanarak, χ_i nin G_i grubunun 1.dereceden bir karakteri olduğu görülür. Şimdi ρ H_i nin bir indirgenmez temsili olsun. Buradan $G_i \rightarrow H_i$ kanonik izdüşümüyle ρ temsilinin bileşkesi alınarak, G_i nin bir $\tilde{\rho}$ indirgenmez temsili elde edilir. Son olarak χ_i ve $\tilde{\rho}$ nun tensör çarpımı alınarak G_i nin bir $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$ indirgenmez temsili elde edilir ve G nin yükseltilmiş (induced) temsiline karşılık gelen temsil $\theta_{i,\rho}$ olsun. Böylece aşağıdaki önerme verilebilir.

2.1.9. Önerme

(a) $\theta_{i,\rho}$ indirgenmez.
(b) $\theta_{i,\rho}$ ve $\theta_{i',\rho'}$ izomorf ise, $i = i'$ ve ρ, ρ' ne izomorftur.
(c) G nin her indirgenmez temsili θ_i, ρ nun birine izomorftur (Serre, 1977).

2.1.10. Tanım (Sadık Temsil)

G bir grup olsun. $\rho: G \rightarrow GL(n, F)$ dönüşümü $g \rightarrow \rho(g)$ biçiminde tanımlanan ρ grup homomorfizmasına n.dereceden bir *temsil* denir. Eğer çekg = $\{1\}$ ise, ρ ya *sadık*(faithful) temsil denir.

2.1.11. Tanım (Sabit Nokta Serbest Etki)

G bir grup, X değişmeli bir grup ve $A \Delta G$ olsun. $\sigma : X \rightarrow \text{Aut } A$, $x \,.\, a = \sigma(x)(a)$ biçiminde tanımlı ($x \in X$, $a \in A$) bir dönüşüm olmak üzere eğer, $x \neq e \Rightarrow \sigma(x) \neq 1 \Rightarrow \sigma(x)(a) \neq 1(a) = a$ ise bu etkiye *sabit nokta serbest etki* (fixed point freely) veya denk olarak sadık etki denir.

2.1.12. Tanım (Grup Halkası)

G bir grup ve K birimli bir halka olsun. $KG = \{\sum \lambda_g g : \lambda_g \in K, g \in G\}$ biçimindeki sonlu şekli toplamların halkasına *grup halkası* denir ve şu özeliklere sahiptir.

(i) $\sum_{g\in G}\lambda_g g=\sum_{g\in G}\mu_g g \Leftrightarrow \lambda_g=\mu_g, \forall g\in G$ için.

(ii) $\sum_{g\in G}\lambda_g g+\sum_{g\in G}\mu_g g=\sum_{g\in G}(\lambda_g+\mu_g)g$

(iii) $\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\mu_h h\right)=\sum_{t\in G}\gamma_t t\ ,\ \gamma_t=\sum_{t=gh}\lambda_g\mu_h$

2.1.13. Tanım (Ogmentasyon İdeali)

$$\varepsilon\ :\ KG\ \to\ K,\quad \lambda=\sum_{g\in G}\lambda_g g\in K\ \text{ için }\ \sum_{g\in G}\lambda_g g\to\varepsilon(\lambda)=\sum_{g\in G}\lambda_g\in K$$

dönüşümü bir halka homomorfizmasıdır. Bu homomorfizmaya KG nin *ogmentasyon* dönüşümü denir. Bu dönüşümün çekirdeği,

$\Delta_K(G)=\left\{\sum_{g\in G}\lambda_g g\in KG:\sum\lambda_g=0\right\}$ olup $\Delta_K(G)$ ye KG grup halkasının *ogmentasyon ideali* denir. $N\ \Delta\ G$ olmak üzere $KG\to K(G/N)$ dönüşümü $\sum_{g\in G}\lambda_g g\to\sum_{g\in G}\lambda_g gN$ biçiminde tanımlanan bir doğal homomorfizmadır. Bu dönüşümün çekirdeği

$$\Delta_K(G,N)=\left\{\sum_{g\in G}\lambda_g g\in KG:\sum_{x\in G}\lambda_g gx=0,\forall g\in G\right\}=<x-1,x\in N>\text{dir.}$$

Bunlara ilaveten, $\lambda=\sum_{g\in G}\lambda_g g\in KG,\lambda_g\in K$ için λ elemanının **dayanağı (support)** supp(λ)=$\{g : \lambda_g \neq 0\}$ ile tanımlıdır.

2.1.14. Tanım (Birimsel Grup)

R bir halka olsun. Bir $r\in R$ için rs= sr=1 olacak şekilde bir $s\in R$ varsa, r nin R de tersi vardır denir. R nin bütün terslenir (birimsel) elamanlarının kümesi U(R) bir grup olup U(R) ye R nin *birimsel grubu* denir.

2.1.15. Önerme (Berman- Higman):

G sonlu bir grup, $\gamma=\sum_{g\in G}\lambda_g g\in ZG$ osun. $\lambda_e\neq 0$ ve $n\in N$ için $\gamma^n=1\Rightarrow$ $\gamma=\pm1$ dir.

2.1.16. Önerme

G sonlu bir grup ve $\gamma = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in ZG$ olsun. $\gamma \neq \pm 1$ ve $n \in N$ için $\gamma^n = 1$ $\Rightarrow \lambda_e = 0$ dır (Sehgal, 1993).

2.1.17. Metod (Schur Bağıntıları)

ρ_k ve ρ_t sonlu bir G grubunun sırasıyla n_k ve n_t ci dereceden temsilleri; örneğin, $\rho_k(g) = [\rho_k(g)_{ij}]$, $\rho_t(g) = [\rho_t(g)_{ij}]$ olsunlar. O halde

$$[n_k / o(G)] \sum_{g\in G} \rho_k(g)_{ij} \rho_t(g^{-1})_{sr} = \begin{cases} 1, & k = t, i = r, j = s \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (2.2)$$

bağıntısı vardır. (2.2) bağıntısı kullanılarak temsilden doğan ve terslenir herhangi bir P matrisi için, P^{-1} matrisinin m inci satırı şu basamaklar sonucu belirlenir :

(1) P nin m. ci sütununu oluşturan $\{\rho_k(g)_{ij} \mid g \in G\}$ sayılarını belirleyen sabit i, j, k gözönüne alınır.
(2) Bu i, j, k sabit sayıları bulunduktan sonra P nin $\{\rho_k(g)_{ji} \mid g \in G\}$ sayılarından oluşan sütunu seçilir. Bu m_t inci sütun olsun.
(3) Bu m_t inci sütunun elemanları arasında $\rho_k(g)_{ji}$ ve $\rho_k(g^{-1})_{ji}$ nin yerleri değiştirilir. Bu sütun yeniden düzenlenir. Sonra da her eleman $n_k/o(G)$ ile çarpılır. Böylece elde edilen sütunun transpozesi alınarak P^{-1} matrisinin m inci satırı elde edilir.

2.1.18. Önerme

u, sonlu mertebeden ZG nin bir birimseli ve $u \equiv 1 \mod \Delta(G,A)^2$ ise $u = 1$ dir (Cliff ve ark., 1981).

2.1.19. Önerme

G metabelian ve $A \Delta G$ olmak üzere, $u \in TU_1(ZG)$ ve $g \in G$ için $u \equiv g \mod (\Delta(G)\Delta(A))$ olsun. O halde $o(u) = o(g)$ dir (Milies ve Sehgal, 1984.)

2.1.20. Teorem

A ve X değişmeli gruplar olsun. $G = A \rtimes X$ ve $(o(u), o(A)) = 1$ iken, $u \in TU_1(ZG)$ ise $u = \gamma^{-1} x \gamma$ olacak şekilde bir $\gamma \in uQG$ ve bir $x \in X$ vardır (Milies ve Sehgal, 1984).

2.1.21. Önerme

A, sonlu bir G grubunun abelian normal bir altgrubu ve B, A da kapsanan G nin elementer abelian normal bir p-altgrubu olsun. $\delta \in \Delta$ (G,B) ve $(1+\delta)^P \equiv 1$ mod $(G,B)^{P+1}$ ise, $p\delta + \delta^P \equiv 0 \bmod \Delta(G,B)^{P+1}$ dir (Cliff ve ark., 1981).

2.1.22. Önerme

p bir asal sayı, $x \in V(ZG)$ ve $o(x) = p^n$ olsun. Bu durumda her $i < n$ için

$$T^{p^n}(x) \equiv 1 \bmod p \quad \text{ve} \quad T^{p^i} \equiv 0 \bmod p$$

dir (Dokuchaev, 1992).

2.1.23. Önerme

G nilpotent bir grup ve $x = \sum \alpha_g g \in V(ZG)$ burulmalı(torsion) aşikar olmayan bir eleman olsun. Her $h \in C(G)$ için $\alpha_h = 0$ dır (Dokuchaev, 1992).

3. BAZI METABELİAN GRUPLARIN İNTEGRAL GRUP HALKALARINDA BURULMALI BİRİMSELLER

3.1. ZC1 Konjektürü

$u \in TU_1(ZG)$ için, bir $g \in G$ ile $\alpha \in UQG$ elemanlarının Zassenhaus konjektüründeki ifadesi şöyledir:

$u \in TU_1(ZG) \Rightarrow \exists\, g \in G$ öyle ki $u \sim g$.

3.1.1. Teorem

A normal elementer değişmeli p-grup ve X herhangi bir değişmeli grup olmak üzere $G = A \times_\sigma X$ olsun. X, A üzerine sadık indirgenmez olacak şekilde etkisin. Bu durumda

$u \in TU_1(ZG) \Rightarrow \exists\, g \in G$ öyle ki $u \sim g$.

İspat : $|A| = p^d$ ve K kendi asal cismi F_p üzerinde d dereceli sonlu bir cisim olsun. O halde K^+ ve K^* K nın, sırasıyla, toplamsal ve çarpımsal grupları olmak üzere, $\upsilon : A \to K^+$ bir izomorfizma ve $\varnothing\ X \to K^*$ bir monomorfizma öyle ki, $x \in X$ ve $a \in A$ için $\upsilon(a^x) = \varnothing(x)\,\upsilon(a)$ (Huppert, 1967).

$|X| = r$ olsun. $tr : K \to F_p$ Galois izini tanımlasın. K/F_p ayrılabilir olduğundan, sıfır olmayan her $K \to F_p$ lineer dönüşümü bir $\theta \in K^*$ için, $\alpha \to tr\,(\theta\alpha)$ olarak tanımanabilir. Birimin kompleks bir p yinci w kökü sabitlenerek A nın aşikar olmayan her kompleks karakteri, bir $\theta \in K^*$ ve $a \in A$ için

$$\chi_\theta\,(a) = w^{tr(\theta\upsilon(a))} \qquad (3.2)$$

biçiminde tanımlanabilir.

X, $A \setminus \{1\}$ üzerinde sabit nokta serbest (birim dışında hiçbir noktayı sabitlemez) olarak etkidiğinden, 2.1.9.Önermeden G nin lineer olmayan indirgenmez λ karakteri, χ_θ dan $\lambda = Ind_A^G\chi_\theta$ şeklinde yükseltilir. T_θ bu temsile karşılık gelsin. Öyle ise $R = Z[w]$ olmak üzere, T_θ nın temsil uzayı RX olarak gözönüne alınıp etki aşağıdaki gibi düşünülebilir:

$$a \in A,\ x,y \in X,\ T_\theta(a)y = \chi_\theta(a^y)y,\ T_\theta(x)\,y = xy. \qquad (3.3)$$

$\chi_\theta(a^y) - 1 \equiv 0 \bmod (w-1)$ olduğundan,

$T_\theta(a-1)\,y = (\chi_\theta(a^y) - 1)y \equiv 0 \bmod (w-1)$ dir.

Δ (A) ogmentasyon ideali olmak üzere $ZG\Delta(A)$ idealinden $\Delta(G,A)$ ideali tanımlanarak, $\delta \in \Delta(G,A)$ için RX üzerinde bir $S_\theta(\delta)$ operatörü elde edilir. Öyle ki,

$$T_\theta(\delta) = (w-1)\,S_\theta(\delta). \qquad (3.4)$$

$\overline{S}_\theta(\delta)$, $S_\theta(\delta)$ mod(w-1) in indirgenmişini tanımlasın. O halde $\overline{S}_\theta(\delta)$, F_pX üzerinde bir operatör ve KX üzerinde skalarların genişlemesiyle de operatördür. $T_\theta(\Delta(G,A)^2)RX \subseteq (w-1)^2 RX$ olduğundan

$$\overline{S}_\theta : \Delta(G,A) / \Delta(G,A)^2 \longrightarrow End_K KX \qquad (3.5)$$

dönüşümünü yükseltir. Ayrıca $T_\theta : RG \longrightarrow End_R RX$ bir halka homomorfizması olduğundan dolayı, $a \in A$ ve $x \in X$ için

$$\overline{S}_\theta(x(a-1) = \overline{T}_\theta(x)\overline{S}_\theta(a-1),\ \overline{S}_\theta((a-1)x) = \overline{S}_\theta(a-1)\overline{T}_\theta(x) \qquad (3.6)$$

dir, burada $\overline{T}_\theta$, T_θ mod(w-1) in indirgenmesidir.

$\delta \in \Delta(G,A)$ olsun. Bu durumda 2.1.21.Önermeden, $a_x \in A$ olmak üzere δ,

$$\delta \equiv \sum_{x \in X} x(a_x - 1) \bmod \Delta(G,A)^2 \qquad (3.7)$$

biçiminde tektürlü yazılabilir. (3.2) den,
$(\chi_\theta(a)-1/(w-1) = 1+w+...+w^{tr(\theta\upsilon(a))-1} \equiv tr(\theta\upsilon(a))mod(w-1)$
olduğundan dolayı, $y \in X$ için
$\overline{S}_\theta(a-1)y \equiv ((\chi_\theta(a^y)-1)/(w-1)y(mod(w-1)) = tr(\theta\upsilon(a^y)y$ dir. Bu nedenle, (3.6) dan

$$\overline{S}_\theta(\delta)y = \sum_x \overline{T}_\theta(x)\overline{S}_\theta(a_x - 1)y = \sum_x tr(\theta\upsilon(a_x^y)xy \qquad (3.8)$$

elde edilir. $\overline{T}(x)$ köşegen olacak şekilde KX de bir baz seçilebilir öyle ki, KX in ilkel idempotentleri imodr olmak üzere

$$\varepsilon_i = (1/r)\sum_{x \in X} \varnothing(x)^{-i}x \qquad (3.9)$$

$$\overline{T}_\theta(x)\varepsilon_i = \varnothing(x)^i\varepsilon_i \qquad (3.10)$$

dır.

δ_i, $i \in Z$ elemanları δ ile sadece *i* modr üzerinde bağlı kalarak birleştirilsin.

$$\delta_i = \sum_{x \in X} \varnothing(x)^i\upsilon(a_x) \in K. \qquad (3.11)$$

Şimdi yeni baza göre $\overline{S}_\theta(\delta)$ nın etkisi hesaplanabilir. $a \in A$ ve j mod r için,

$$S_\theta = (a-1)\varepsilon_j = (1/r)\sum \varnothing(x)^{-j}\overline{S}_\theta(a-1)x$$

$$= (1/r)\sum_x \varnothing(x)^{-j} tr(\theta\upsilon(a^x))x$$

$$= (1/r)\sum_x \varnothing(x)^{-j} tr(\theta\varnothing(x)\upsilon(a))x$$

$$= (1/r)\sum_x \varnothing(x)^{-j}\left(\sum_{n \bmod d}(\theta\varnothing(x)\upsilon(a)^{p^n})\right)x$$

$$= (1/r)\sum_{n}(\theta\upsilon(a)^{p^n}\left(\sum_{x}\varnothing(x)^{-j+p^n}n\right)$$

$$= \sum_{n \bmod d}(\theta\upsilon(a)^{p^n}\varepsilon_{j-p^n}$$

dir. Böylece

$$\bar{S}_\theta(\delta)\varepsilon_i = \sum \bar{T}_\theta(x)\bar{S}_\theta(a_x - 1)\varepsilon_i$$

$$= \sum_{x}\sum_{n \bmod d}(\theta\upsilon(a_x))^{p^n}\bar{T}_\theta(x)\varepsilon_{j-p^n}$$

$$= \sum_{x}\sum_{n \bmod d}(\theta\upsilon(a_x))^{p^n}\varnothing(x)^{j-p^n}\varepsilon_{j-p^n}$$

$$= \sum_{n}\theta^{p^n}(\sum_{x}\upsilon(a_x)\varnothing(x)^{p-nj-1})^{p^n}\varepsilon_{j-p^n}$$

$$= \sum_{n \bmod d}\theta^{p^n}\ \delta^{p^n}_{p-nj-1}\varepsilon_{j-pn} \tag{3.12}$$

gibi önemli bir formül elde edilmiş olur. Aynı zamanda şu da biliniyor ki,

$$\bar{S}_\theta : \Delta(G,A)/\Delta(G,A)^2 \rightarrow \mathrm{End}_K KX \tag{3.13}$$

dönüşümü örten bir dönüşümdür. Gerçekten $\bar{S}_\theta(\delta) = 0$ olsun, bu durumda her $y \in X$ için $\bar{S}_\theta(\delta)y = 0$ dır. (3.8) den her $x,y\in X$ için $tr(\theta\varnothing(y)\upsilon(a_x)) = tr(\theta\upsilon(a_x^y))=0$ sonucu elde edilir. $\varnothing(X)$, F_p üzerinde K yı ürettiğinden dolayı X-modül olarak A nın indirgenmezliğinden, $tr(K\upsilon(a_x))=0$ elde edilir. İzi değişikliğe uğratmadan, her x için $\upsilon(a_x) = 0$ olduğu görülür. Böylece tüm x ler için $a_x=1$ ve $\delta\equiv 0 \bmod \Delta(G,A)^2$ sonucuyla $\bar{S}_\theta$ dönüşümünün örtenliği görülmüş olur.

Şimdi, $G=A \times_\sigma X$ olmak üzere $u \in TU_1(ZG)$, A p^d mertebeli elementer değişmeli grup, $|X| = r$ ve $r|(p^d-1)$ olsun. Böyle bir G grubundaki her elemanın mertebesi p ya da r nin bir bölenidir. 2.1.19 Önermeden, $|u| = p$ veya r nin bir bölenidir. $x \in X$ için, u nun x e eşlenik durum 2.1.20 Teoremden görülür. Böylece $|u|=p$ olduğu kabul edilebilir. Bu yüzden $u \equiv 1 \bmod \Delta(G,A)$ dır. Bir $a \in A$ bulunur öyle ki, G nin tamamen indirgenmez bir T temsili için $T(u) \sim T(a)$ dır. $G' = A$ olduğundan, her $a \in A$ ve tüm lineer T temsilleri için $T(u) = T(a) = 1$ dir. Buradan uygun bir $a \in A$ ve bütün $\theta\in K^*$ için

$$T_\theta(u) \sim T_\theta(a) \tag{3.14}$$

olduğu gösterilmelidir.

İlk olarak notasyonlar oluşturulup aşağıdaki gözlemler yapılabilir:

$$u = 1+\delta,\ \delta\in\Delta(G,A),\ \delta\equiv \sum_{x} x(a_x - 1) \bmod \Delta(G,A)^2$$

2.1.18. Önermeden, $\delta\notin\Delta(G,A)^2$ olduğu görülmektedir ve

$$\bar{S}_\theta(\delta)^p = \bar{S}_\theta(\delta) \text{ dir.} \tag{3.15}$$

$(1+\delta)^p=1$ olduğundan dolayı, 2.1.21. Önermeden

$$p\delta+\delta^p = o \bmod \Delta(G,A)^{p+1}$$

olduğu görülür. $T_\theta(\Delta(G,A))\, RX \subseteq (w-1)RX$ den

$$T_\theta(p\delta+\delta^p)\equiv 0 \bmod (w-1)^{p+1}$$

$$p(w-1)S_\theta(\delta)+(w-1)^pS_\theta(\delta)^p \equiv 0 \bmod (w-1)^{p+1}$$

elde edilir.

$p/(w-1)^{p-1} \equiv -1 \bmod (w-1)$ den

$-S_\theta(\delta)+S_\theta(\delta)^p \equiv 0 \bmod (w-1)$

sonucu elde edilir.

(3.14) den hem $T_\theta(u)$ ve hem $\bar{S}_\theta(u)$ nın köşegenlendiği aşikardır.

3.15. VZG deki Birimseller

Metadevirli olmayıp metabelian gruplardaki 2 ve 3 mertebeli birimsellerin karakterizasyonu ve eşlenik yapan elemanlar şöyledir. Önce grubumuzu ve metodu verelim.

$a = (12)(34)$ ve $b = (123)$ devreleri $G = A_4$ grubunu üretir. Bu devreler arasındaki bağıntılar ve elemanlar aşağıdaki sırada yazılabilir :

$g_1 = 1$	$g_5 = b = (123)$	$g_9 = b^2 = (132)$
$g_2 = a = (12)(34)$	$g_6 = aba = (142)$	$g_{10} = ab^2a = (124)$
$g_3 = b^2ab = (13)(24)$	$g_7 = (ab^2)^2 = (134)$	$g_{11} = ab^2 = (143)$
$g_4 = bab^2 = (14)(23)$	$g_8 = ab = (243)$	$g_{12} = b^2a = (243)$

G nin 4 tane denk olmayan indirgenmez temsili var. Bunların üçü 1.dereceden ρ_1 , ρ_2, ρ_3 ve bir tane 3.dereceden ρ_4 temsilleridir. 1 in bir ilkel üçüncü kökü w olmak üzere bu temsiller şöyle belirlenebilir:

$\rho_1(a) = 1$, $\rho_1(b) = 1$,

$\rho_2(a) = 1$, $\rho_2(b) = w$,

$\rho_3(a) = 1$, $\rho_3(b) = w^2$,

$$\rho_4(a) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A, \qquad \rho_4(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B \quad .$$

Her $i = 1,2,3$ için $\rho_i(a)^2 = 1$ ve $\rho_i(b)^3 = 1$ ve $\rho_i(ab)^2 = \rho_i(b)^2\rho_i(a)$ sağlanır. G nin indirgenmez temsillerinin direkt toplamı $\rho = \rho_1 \oplus\rho_2\oplus\rho_3\oplus\rho_4$ ile gösterilir. Her $g \in G$ için, $\rho(g) = X^*$ görüntüsü esas köşegen üzerinde blok matrisler olmak üzere 6 x 6 türünde bir

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 & & & & & \\ & x_2 & & & O & \\ & & x_3 & & & \\ & & & x_4 & x_5 & x_6 \\ & O & & x_7 & x_8 & x_9 \\ & & & x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \qquad \text{(I)}$$

matris olur. D, esas köşegeni üzerinde x_1, x_2, x_3 olan 3x3 köşegen matrisi; X, girişleri, x_4, ..., x_{12} olan 3 x 3 matrisini tanımlar. X^* matrisindeki mevcut bilgiyi ifade etmede faydalı olacak notasyon $x^{*}=[x_1,x_2,\ldots,x_{12}]$ satır vektörü olarak verilebilir. Ayrıca $X \in GL(3,Z)$ ise aşağıdaki gösterimler kullanılabilir.

$$X=\begin{bmatrix} x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{bmatrix} \qquad \text{(II)}$$

$t_0= x_4 + x_8 + x_{12}$, $t_1= x_5 + x_9 + x_{10}$, $t_2=x_6 + x_7 + x_{11}$ X matrisinin yan-izlerini tanımlasın. UZG nin karekterizasyonu, X üzerinde aşağıdaki şartları sağlar.

a) $X \equiv B^{i}\,(\text{mod}2)\,;\; i = 0, 1, 2$

b) İki yan-iz mod 4 göre sıfıra denktir.

$X \equiv B^{i}(\text{mod}2)$ $i \neq j$ için $t_j \equiv 0$ (mod 4) olmasını gerektirir. $\text{Det}(X) \equiv 1$ (mod 4) ancak ve ancak $t_i \equiv -1$ (mod 4)

Bununla birlikte $\rho(g_i)$ ye karşılık 12 boyutlu satır vektörü x_i^{*} olsun. x_i^{*} nin bileşenleri aşağıda oluşturulacak P matrisinin i yinci satırı olarak alınacaktır.

Örneğin $g_{11}=ab^2 \in G$ için

$$\rho(g_{11})=\rho(ab^2)=\rho(a)\rho(b)^2=\left(1, w^2, w, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

ve $x_{11}^{*}=(1, w^2, w, 0,0,-1,-1,0,0,0,1,0)$ dır.

$$\begin{array}{l} g_1=1 \xrightarrow{\rho} \\ g_2=a \\ g_3=b^2ab \\ g_4=bab^2 \\ g_5=b \\ g_6=aba \\ g_7=(ab^2)^2 \\ g_8=ab \\ g_9=b^2 \\ g_{10}=ab^2a \\ g_{11}=ab^2 \\ g_{12}=b^2a \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & w & w^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & w & w^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & w & w^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & w & w^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & w^2 & w & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & w^2 & w & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & w^2 & w & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & w^2 & w & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = P \quad \text{(III)}$$

ρ direkt toplam temsili, ZG grup halkasından (I) biçimindeki verilen 6x6 matrislerin Z-cebirine bir $\bar{\rho}$ Z-cebir homomorfizmasına lineer olarak

$\bar{\rho}(\sum a_i g_i) = \sum a_i \rho(g_i)$ biçiminde genişletilebilir. $\pi(X^*)=X$, (I) deki X^* matrisin 3x3 X matrisine dönüştüren doğal izdüşüm olsun. $\bar{\rho}$ yu sonra da π yi uygulayarak elde edilen bileşke dönüşümü, ZG yi 3x3 integral matrislerin Z-cebirine dönüştüren bir Z-cebir homomorfizmasıdır. Bu $\pi o \bar{\rho}$ nun V(ZG) ye kısıtlanmışı σ olsun. Bu durumda σ nın V(ZG) den GL(3,Z) grubuna bir grup homomorfizması olması aşikardır.

σ homomorfizması (III) deki P matrisine göre şöyle izah edilebilir. g_i nin dayanak elemanları yukarda belirtilen sırada olmak üzere, $r=\sum a_i g_i$ elemanını $\alpha=[a_1,a_2,\ldots,a_{12}]$ biçiminde satır vektörü olarak gösterilebilir. $\alpha P=x^*$ çarpım matrisinin $\bar{\rho}(r)=X^*$ ile eşleşmiş x^* satır vektörünü verdiği anlaşılır. O halde $\sigma(r)=\pi(X^*)$ dır. σ altında V(ZG) nin görüntüsü, GL(3,Z) nin X elemanlarından oluşaktır, çünkü X matrisleri bir $r \in V(ZG)$ nin katsayıları olmak üzere $\alpha P=x^*$ olacak şekilde X^* matrislerinin izdüşümüdür. Buradan P^{-1} bulunursa, σ nın görüntüsü x^*P^{-1} in toplamları 1 olan tamsayıların bir satır vektörü olacak şekilde GL(3,Z) deki bütün X lerin kümesinde kapsandığı ifade edilebilir.

Şimdi, bu şekilde temsille elde edilen P matrisinin terslenebileceğini 2.1.17.Metod (Schur Bağıntıları) kullanılarak P^{-1} şöyle bulunur :

$\rho_k(g)_{ij} \rightarrow \rho_k(g)_{ji}$ değişim tablosu; k = 1,2,3,4 için

$$
\begin{array}{l}
g_1 = 1 \xrightarrow{\rho} \\
g_2 = a \\
g_3 = b^2ab \\
g_4 = bab^2 \\
g_5 = b \\
g_6 = aba \\
g_7 = (ab^2)^2 \\
g_8 = ab \\
g_9 = b^2 \\
g_{10} = ab^2a \\
g_{11} = ab^2 \\
g_{12} = b^2a
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & w & w^2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & w & w^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & w & w^2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & w & w^2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & w^2 & w & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & w^2 & w & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & w^2 & w & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & w^2 & w & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix} = P
$$

Buradan her $g_i \in G$ ye ait satırın g_i^{-1} e ait satırla yeri değiştirilip ilk üç sütun 1/12 ve geri kalan sütunlar 3/12 ile çarpılır. Son olarak da bulunan matris devrilir. Böylece P^{-1} matrisi elde edilir.

$\rho_k(g)_{ij} \rightarrow \rho_k(g^{-1})_{ij}$

$$
\begin{array}{l}
g_1 = 1 \xrightarrow{\rho} \\
g_2 = a \\
g_3^{-1} = b^2ab \\
g_4^{-1} = bab^2 \\
g_5^{-1} = b^2 \\
g_6^{-1} = ab^2a \\
g_7^{-1} = ab^2 1/12 \\
g_8^{-1} = b^2a \\
g_9^{-1} = b^2 \\
g_{10}^{-1} = ab^2a \\
g_{11}^{-1} = (ab^2)^2 \\
g_{12}^{-1} = ab
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
1 & w^2 & w & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
1 & w^2 & w & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\
1 & w^2 & w & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\
1 & w^2 & w & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\
1 & w & w^2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
1 & w & w^2 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
1 & w & w^2 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
1 & w & w^2 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
P^{-1} = \frac{1}{12}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & w^2 & w^2 & w^2 & w^2 & w & w & w & w \\
1 & 1 & 1 & 1 & w & w & w & w & w^2 & w^2 & w^2 & w^2 \\
3 & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\
3 & -3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -3 \\
3 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

P matrisi terslendiğinden dolayı $\bar{\rho}$ Z-cebir homomorfizması bir izomorfizma olup, $r = \sum_{i=1}^{12} a_i g_i \in ZG$ için

$$\bar{\rho}(r) \in Z \oplus Z[w] \oplus Z[w] \oplus Z_{3x3} \qquad \text{(IV)}$$

vektörü şu biçimi alır : $s_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $s_1 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ ve $s_2 = a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$ olmak üzere

$$\bar{\rho}(r) = (s_0+s_1+s_2 \,,\, s_0+s_1w+s_2w^2 \,,\, s_0+s_1w^2+s_2w \,,\; X). \qquad \text{(V)}$$

$$\alpha P = X^{*} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

olduğundan, D nin köşegen bileşenleri $s_0+s_1+s_2$, $s_0+s_1w+s_2w^2$ ve $s_0+s_1w^2 + s_2w$ dir. Z(w) halkasındaki birimseller sadece ± 1, $\pm w$, $\pm w^2$ dir. D nin köşegen bileşenleri, birimsel olmak zorunda olduğundan s_i nin ikisi sıfırdır. Buradan $\sum a_i=1$ olduğundan, öteki s_i nin 1 olmasını gerektirir. 2.1.16. Önermesine göre $a_1=0$ olmak üzere (V)'deki 3x3 X matrisi şöyle olur :

$$X = \begin{bmatrix} -a_2+a_3-a_4 & a_4+a_6-a_7-a_8 & a_9-a_{10}-a_{11}+a_{12} \\ a_9+a_{10}-a_{11}-a_{12} & -a_2-a_3+a_4 & a_5-a_6+a_7-a_8 \\ a_5-a_6-a_7+a_8 & a_9-a_{10}+a_{11}-a_{12} & a_2-a_3-a_4 \end{bmatrix}$$

(b) den dolayı doğrudan A veya B matrisine göre herbir $t_i \equiv -s_i \pmod 4$ dir ve $X \equiv s_0 I + s_1 B + s_2 B^2 \pmod 2$ olması gözlenir.

$\sigma : V(ZG) \to \sigma\,(V(ZG)) \subseteq GL\,(3, Z)$ grup homomorfizması $r = \sum a_i g_i \in V(ZG)$ için $\sigma(r) = n(\bar{\rho}(r)) = \pi\,(X^{*}) = X$ biçiminde tanımlıdır. Bu nedenle herhangi bir $X \in \sigma\,(V(ZG))$ (a) ve (b) şartlarını sağlar. Ayrıca t_i lerden biri $t_i \equiv -1 \pmod 4$ olduğundan dolayı $\det(X) = \pm 1$ olması $\det(X) = 1$ olmasını gerektirir.

Sonuç olarak σ nın bir izomorfizma, ayrıca $x^{*} = [x_1, x_2, ..., x_{12}]$ olmak üzere $x^{*} P = [a_1, a_2, ..., a_{12}]$ vektörü tamsayı bileşenli ve $\sum a_i = 1$ olduğu gösterilerek $H=\sigma(V(ZG)) = \{X \in SL(3,Z) : X$ (a) ve (b) yi sağlar$\}$ eşitliği görülür.

3.16. ZA_4 Grup Halkasındaki 2 ve 3 Mertebeli Birimseller

3.1.1.Teoreminin sonucu yönelik 3.15 deki bağıntıları da kullanarak 2 ve 3 mertebeli birimsellerin V(ZG) ve V(QG) deki durumları şöyle gözlemlenebilir.

3.16.1. İki Mertebeli Birimseller

a,b tek tamsayı, x,y,c,d çift tamsayı ve k,l,m keyfi tamsayılar olmak üzere,

$$D = \begin{bmatrix} a & c & x \\ y & b & d \\ 4l-c-d & 4m-x-y & 4k-a-b-1 \end{bmatrix} \qquad \text{(VI)}$$

ve $\det(D) = -rw-sq-tp = 1$ olmak koşuluyla

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} -br+ds & cr-xs & p \\ yr-dt & -ar+xt & q \\ -ys+bt & as-ct & w \end{bmatrix} \qquad \text{(VII)}$$

olsun, burada $r = 1 + a + b - 4k$, $s = x+y - 4m$, $t = c+d-4l$, $p = cd - bx$, $q = xy-ad$ ve $w = ab-cy$ dir.

$D \in H$ olmak üzere $D^{-1}A\ D = X$ ise,

$$X=\begin{bmatrix} rw+sq-tp & -2sp & -2rp \\ -2tq & rw+tp-sq & -rq \\ -2tw & -2sw & -rw+sq+tp \end{bmatrix}$$

X, (a) ve (b) koşullarını sağlar, $X \in SL(3,Z)$ ve $X^2 = I_3$. Ayrıca $s_0 = 1$, $s_1=s_2=0$ ve $\dot{I}z(X) = rw + sq + tp = -1$ dir.

$$\bar{\rho}(\alpha)=(1,1,1,\begin{bmatrix} a & c & x \\ y & b & d \\ -t & -s & -r \end{bmatrix})$$

dir ve $\alpha \in V(ZG)$ olur. α^{-1} in katsayılarını bulmak için $\bar{\rho}(\alpha)$ nın tüm bileşenleri terslenerek elde edilen

$$(\bar{\rho}(\alpha))^{-1}=\left(1,1,1,\begin{bmatrix} -br+ds & cr-xs & p \\ yr-dt & -ar+xt & q \\ -ys+bt & as-ct & w \end{bmatrix}\right)$$

deki tüm girişler sıra ile yazılarak 12 bileşenli x^* vektörü elde edilir.

$\bar{\rho}(u) = (1,1,1, X)$ deki tüm girişler yazılarak da P^{-1} matrisi ile çarpılıp $u \in V(ZG)$ nin dayanak (support) elemanları

$a_1= 0$, $a_5=\frac{1}{2}(-sp-rq-tw)$, $a_9=\frac{1}{2}(-rp-tq-sw)$,

$a_2=-rw$, $a_6=\frac{1}{2}(-sp+rq+tw)$, $a_{10}=\frac{1}{2}(rp-tq+sw)$,

$a_3=-tp$, $a_7=\frac{1}{2}(sp-rq+tw)$, $a_{11}=\frac{1}{2}(rp+tq-sw)$,

$a_4=-sq$, $a_8=\frac{1}{2}(sp+rq-tw)$, $a_{12}=\frac{1}{2}(-rp+tq+sw)$,

olur. Buradan $u \in TU_1(ZG)$ ve $\alpha \in V(ZG)$ iken $\alpha^{-1}u\alpha=g$ dir.

3.16.2. Örnek

$$X_1 = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 12 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & -7 \end{bmatrix},$$

$|X_1|=2$, X_1 (a) ve (b) koşullarını sağlar ve $X_1 \in SL(3,Z)$ olmak üzere, $a_1=0$, $a_2=-3$, $a_3=4$, $a_4=0$, $a_5=-3$, $a_6=-1$, $a_7=3$, $a_8=1$, $a_9=4$, $a_{10}=-4$, $a_{11}=-2$, $a_{12}=2$ iken $u_1=-3g_2+4g_3-3g_5-g_6+3g_7+g_8+4g_9-4g_{10}-2g_{11}+2g_{12} \in ZA_4$ elemanı için $s_0=1$, $s_1=s_2=0$ dır.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } D_1^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in SL(3,Z)$$

olmak üzere x^*P^{-1} matrisi yardımıyla $\alpha = g_1+g_2-g_4-g_6+g_8-g_{11}+g_{12}$ ve $\alpha^{-1}=-g_1+g_2+g_4+g_5-g_7-g_{11}+g_{12}$ olarak bulunur ve $\alpha^{-1}\, u_1\alpha= g$ dir.

3.16.3. Üç Mertebeli Birimseller

(VI) ve (VII) den $D^{-1}B\,D = X$ veya $D^{-1}B^2D = X$ olur. Buna göre $s_0 = 0$, $s_1=1$, $s_2=0$ ya da $s_0=$, $s_1=0$,$s_2=1$ dır. O halde ilk üç lineer birleşimde $(1,w,w^2)$ ya da $(1, w^2,w)$ biçiminde bileşenler gözönüne alınacaktır. O halde X in parametrizasyonu aşağıdaki gibi olacaktır. Eğer $D^{-1}BD = X$ ise

$$X = \begin{bmatrix} -byr+dys-crt+xst+ap & -b^2r+bds-crs+xs^2+cp & -bdr+d^2s+cr^2+xrs+xp \\ y^2r-dyt+art-xt^2+aq & byr-bdt+ars-xst+cq & dyr-d^2t+ar^2-xrt+xq \\ -y^2s+byt-ast+ct^2+aw & -bys+b^2t-as^2+cst+cw & -dys+bdt-ars+crt+xw \end{bmatrix}$$

olup, X (a) ve (b) koşullarını sağlar. $X \in SL(3,Z)$ ve $X^3= I_3$ dir.

Ayrıca $s_0=0$, $s_1= 1$, $s_2=0$ ve $\text{İz}(X) = ap+cq+xw = 0$ dır.

$\bar{\rho}(u) = (1,w,w^2,X)$ yu 12 bileşenli bir vektör haline getirip P^{-1} ile soldan çarpıldıktan sonra

$a_1= 0$

$a_2=1/2(-ars+crt-dys+bdt+xw)$

$a_3=1/2(-crt+xst-byr+dys+ap)$

$a_4=1/2(ars-xst+byr-bdt+cq)$

$$a_5=\frac{1}{4}\,[a(-st+r^2+w)+c(t^2-rs+p)+x(s^2-rt+q)+r(dy-b^2)+s(bd-y^2)+t(by-d^2)+1]$$

$$a_6=\frac{1}{4}\,[a(st-r^2-w)+c(-t^2-rs+p)+x(s^2+rt-q)-r(b^2+dy)+s(bd+y^2)+t(-by+d^2)+1]$$

$a_7=\frac{1}{4}$ [a(st+r^2-w)+c(-t^2+rs-p)+x(-s^2-rt+q)+r(b^2+dy)+s(-bd+y^2)-t(by+d^2)+1]

$a_8=\frac{1}{4}$ [a(-st-r^2+w)+c(t^2+rs-p)+x(-s^2+rt-q)+r(b^2-dy)-s(bd+y^2)+t(by+d^2)+1]

$a_9=\frac{1}{4}$ [a(-s^2+rt+q)+c(-r^2+st+w)+x(-t^2+rs+p)+r(y^2-bd)+s(d^2-by)+t(b^2-dy)]

$a_{10}=\frac{1}{4}$ [a(s^2+rt+q)+c(r^2-st-w)-x(t^2+rs+p)+r(y^2+bd)+s(-d^2+by)+t(b^2+dy)]

$a_{11}=\frac{1}{4}$ [-a(s^2+rt+q)+c(r^2+st+w)+x(t^2-rs-p)+r(y^2+bd)-s(d^2+by)+t(b^2+dy)]

$a_{12}=\frac{1}{4}$ [a(s^2-rt-q)-c(r^2+st+w)+x(t^2+rs+p)-r(y^2+bd)+s(d^2+by)+t(-b^2+dy)]

biçiminde birimselin dayanak elemanları ortaya çıkmış olur.

Benzer şekilde $\bar{\rho}(\gamma)=(1,w,w^2,D)$ ve $(\bar{\rho}(\gamma))^{-1}=(1,w,w^2,D^{-1})$ için önce 12 bileşenli vektör elde edilip, sonra da P^{-1} ile γ ve γ^{-1} in destekli elemanları bulunur.

Böylece $u \in U_1(ZG)$ için $\gamma^{-1}u\gamma=g$ olacak şekilde $\gamma \in V(QG)$ nin varlığı görülmüş olur.

3.16.4. Örnek

$$X_2=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

X_2 (a) ve (b) koşullarını sağlar, $X_2 \in SL(3,Z)$ ve $X_2^3=I_3$ tür. $\bar{\rho}(u_2)=(1,w,w^2,X_2)$ satır vektörü P^{-1} matrisiyle yani x^*P^{-1} çarpımı sonucunda $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$, $a_4=-1$, $a_5=2$, $a_6=2$, $a_7=-1$, $a_8=-2$, $a_9=-1$, $a_{10}=1$, $a_{11}=-1$, $a_{12}=1$ olup $u_2=g_3-g_4+2g_5+2g_6-g_7-2g_8-g_9+g_{10}-g_{11}+g_{12} \in ZA_4$ elemanı için $s_0=s_2=0$, $s_1=1$ dir.

Bu seçilişe göre

$$D_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } D_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ olup}$$

$D_2^{-1}\,B\,D_2=X_2$ dir. $\bar{\rho}(\gamma)=(1,w,w^2,D_2)$ ve $(\bar{\rho}(\gamma))^{-1}=(1,w,w^2,D_2^{-1})$ satır vektörleri sırayla P^{-1} matrisi ile çarpılırsa,

$$\gamma=-\frac{1}{4}g_1-\frac{1}{4}g_2+\frac{3}{4}g_3-\frac{1}{4}g_4+\frac{1}{4}g_5+\frac{1}{4}g_6+\frac{1}{4}g_7+\frac{1}{4}g_8+g_9-g_{10},$$

$$\gamma^{-1}=-\frac{1}{4}g_1-\frac{1}{4}g_2+\frac{3}{4}g_3-\frac{1}{4}g_4+\frac{5}{4}g_5+\frac{5}{4}g_6+\frac{3}{4}g_7+\frac{3}{4}g_8+g_{11}-g_{12}$$

$\gamma^{-1}u_2\gamma=a$ olacak şekilde $\gamma\in V(QA_4)$ elemanı vardır.

3.16.5. Önerme

$V(ZA_4)$ grubundaki 2 mertebeli bütün elemanları $V(ZA_4)$ de eşleniktir.

İspat : $H=\{X\in SL(3,Z):X$ (a) ve (b) yi sağlar$\}$ ve $X=[x_4,x_8,x_{12}]$ (II) deki X matrisinin esas köşegenini göstermek üzere,

$N=\{X \in H \mid \operatorname{diag}X \equiv [1,1,1] \pmod 4\}$ kümesi H grubunda A_4 ün bir burulmasız normal tümleyenidir. (Allen ve Hobby, 1980).

X, H grubunda 2 mertebeli bir eleman olsun. Bu durumda X AN, BAB^2N veya B^2AN kosetlerinin birindedir. B elemanı bu kosetleri devirsel olarak eşlenik yapar, yani AN $\sim B^2ABN$, BAB^2N $\sim$AN ve B^2ABN $\sim BAB^2N$ dir. Buradan AN kosetindeki bütün 2 mertebeli elemanların A ya eşlenik olduğunu göstermek yetecektir.

X, AN kosetinde 2 mertebeli bir eleman olsun. O halde $m_A(x)=(x-1)(x+1)$, $\Delta_A(x)=(x-1)(x+1)^2$ ve özdeğerler $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=1$ olacak şekilde

$$X\equiv A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\pmod 4$$

dir. c_i ler ya sıfır ya da 2 olmak üzere

$$X=\begin{bmatrix}-1&c_1&c_2\\c_3&-1&c_4\\c_5&c_6&1\end{bmatrix}\pmod 4$$

olduğu açıktır.

$$I=X^2\equiv\begin{bmatrix}1+c_1c_4+c_2c_5&-2c_1+c_2c_6&c_1c_4\\-2c_3+c_2c_5&1+c_1c_3+c_4c_6&c_2c_3\\c_3c_6&c_1c_5&1+c_2c_5+c_4c_6\end{bmatrix}\pmod 8$$

olduğu görülür. $c_1=2$ olsun. X^2 nin (1.3) bileşeni mod8 göre $2c_4$ olmalı, buradan $c_4=0$ olmasını gerektir. Benzer şekilde (3.2) bileşeninden $c_5=0$ olur. Ancak bu durum X matrisinde $t_1=c_1+c_4+c_5\equiv 2 \pmod 4$ oluşuyla çelişir. Bu yüzden $c_1=0$ dır. $c_1=0$ olduğu takdirde, X^2 matrisinin (1,2) ve (2,3) bileşenlerinden $c_2=2$ ise $c_3=c_6=0$

olduğu görülür ve X matrisinde $t_2 \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$ oluşuyla bu bir çelişkidir. Benzer yolla devam edilerek c_i lerin herbiri sıfırdır. Böylece $X \equiv A (\mathrm{mod} 4)$ olur.

X matrisinin mertebesi 2 ve İz(X)=-1 olmasından X in A ya benzer olduğu anlaşılır. Buradan $M = \frac{1}{2}(X+I)$ tamsayı matrisi, köşegen üzerindeki girişleri [0,0,1] biçiminde olan bir D köşegen matrise benzerdir. Sonuç olarak M matrisinin rankı 1 ve $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in Z$ tamsayıları var öyle ki, M matrisi şöyledir:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha a & \beta a & \gamma a \\ \alpha b & \beta b & \gamma b \\ \alpha c & \beta c & \gamma c \end{bmatrix}$$

$X \equiv A (\mathrm{mod} 4)$ olmak üzere $M = \frac{1}{2}(X+I)$ olduğundan dolayı, $M \equiv D (\mathrm{mod} 2)$ elde edilir. Buradan c ile γ tek ve α, β, a, b çift tamsayılardır.

H grubunda bir T matrisi var öyle ki, $T^{-1}XT = A$; ya da buna denk olarak $T^{-1}MT = \frac{1}{2}(A+I) = D$ dir. T nin kolonları sırasıyla, 0,0,1 özdeğerlerine karşılık gelen M matrisinin özvektörleri olmasını gerektirir. $\gamma = \mathrm{ebob}(\alpha, \beta)$ ve bir $r, s \in Z$ için $\gamma = r\alpha + s\beta$ olsun. O halde

$$T = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)r\alpha}{\delta} + 1 & \frac{(\gamma-1)r\beta}{\delta} & a \\ \frac{(\gamma-1)s\alpha}{\delta} & \frac{(\gamma-1)s\beta}{\delta} + 1 & b \\ -\alpha & -\beta & c \end{bmatrix}$$

ve

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)s\beta c}{\delta} + \beta b + c & \frac{(1-\gamma)r\beta c}{\delta} - \beta a & \frac{\beta(\gamma-1)(rb-sa)}{\delta} - a \\ \frac{(1-\gamma)s\alpha c}{\delta} - \alpha b & \frac{(\gamma-1)r\beta c}{\delta} + \alpha a + c & \frac{\alpha(\gamma-1)(sa-rb)}{\delta} - b \\ \alpha & \beta & \frac{(\gamma-1)^2 r\alpha s\beta}{\delta^2} + \wp \end{bmatrix}$$

olacaktır. İz(X) =-1 olduğundan dolayı, İz(M)=1 olması gerektiği anlaşılır. Buradan

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 1$$

dir. T nin üçüncü kolonu 1 özdeğeri için M matrisinin bir özvektörü ve ilk iki kolon 0 özdeğeri için M nin özvektörleri olmasını gerektirir. Üstelik $\alpha a + \beta b + \gamma c = 1$ den det(T)=1 dir. Yukarıda verilen T matrisinde esas köşegen üzerindeki girişler tek ve diğer girişler çift tamsayılardır. Ayrıca det(T)=1 ve $T^{-1}XT = A$ dır. T matrisindeki t_1 ve t_2 yan-izlerinin $t_1 \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$ veya $t_2 \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$ olması ihtimaline karşılık T nin H de kalıp kalmadığı şöyle irdelenebilir. Eğer $t_1 \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$ ise, olduğu görülür ve X matrisinde $t_2 \equiv 2(\text{mod}4)$ oluşuyla bu bir çelişkidir. Benzer yolla devam edilerek c_i lerin herbiri sıfırdır. Böylece $X \equiv A(\text{mod}4)$ olur.

X matrisinin mertebesi 2 ve İz(X)=-1 olmasından X in A ya benzer olduğu anlaşılır. Buradan $M=\frac{1}{2}(X+I)$ tamsayı matrisi, köşegen üzerindeki girişleri [0,0,1] biçiminde olan bir D köşegen matrise benzerdir. Sonuç olarak M matrisinin rankı 1 ve α,β,γ, $a,b,c \in Z$ tamsayıları var öyle ki, M matrisi şöyledir:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha a & \beta a & \gamma a \\ \alpha b & \beta b & \gamma b \\ \alpha c & \beta c & \gamma c \end{bmatrix}$$

$X \equiv A$ (mod4) olmak üzere $M = \frac{1}{2}(X+I)$ olduğundan dolayı, $M \equiv D(\text{mod}2)$ elde edilir. Buradan c ile γ tek ve α, β, a, b çift tamsayılardır.

H grubunda bir T matrisi var öyle ki, $T^{-1}XT=A$; ya da buna denk olarak $T^{-1}MT=\frac{1}{2}(A+I)=D$ dir. T nin kolonları sırasıyla, 0,0,1 özdeğerlerine karşılık gelen M matrisinin özvektörleri olmasını gerektirir. γ=ebob(α,β) ve bir $r,s \in Z$ için $\gamma=r\alpha+s\beta$ olsun. O halde

$$T = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)r\alpha}{\delta}+1 & \frac{(\gamma-1)r\beta}{\delta} & a \\ \frac{(\gamma-1)s\alpha}{\delta} & \frac{(\gamma-1)s\beta}{\delta}+1 & b \\ -\alpha & -\beta & c \end{bmatrix}$$

ve

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)s\beta c}{\delta}+\beta b+c & \frac{(1-\gamma)r\beta c}{\delta}-\beta a & \frac{\beta(\gamma-1)(rb-sa)}{\delta}-a \\ \frac{(1-\gamma)s\alpha c}{\delta}-\alpha b & \frac{(\gamma-1)r\beta c}{\delta}+\alpha a+c & \frac{\alpha(\gamma-1)(sa-rb)}{\delta}-b \\ \alpha & \beta & \frac{(\gamma-1)^2 r\alpha s\beta}{\delta^2}+\wp \end{bmatrix}$$

olacaktır. İz(X) =-1 olduğundan dolayı, İz(M)=1 olması gerektiği anlaşılır. Buradan

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=1$$

dir. T nin üçüncü kolonu 1 özdeğeri için M matrisinin bir özvektörü ve ilk iki kolon 0 özdeğeri için M nin özvektörleri olmasını gerektirir. Üstelik $\alpha a+\beta b+\gamma c=1$ den det(T)=1 dir. Yukarıda verilen T matrisinde esas köşegen üzerindeki girişler tek ve diğer girişler çift tamsayılardır. Ayrıca det(T)=1 ve $T^{-1}XT=A$ dır. T matrisindeki t_1 ve t_2 yan-izlerinin $t_1 \equiv 2(\text{mod}4)$ veya $t_2 \equiv 2(\text{mod}4)$ olması ihtimaline karşılık T nin H de kalıp kalmadığı şöyle irdelenebilir. Eğer $t_1 \equiv 2(\text{mod}4)$ ise,

$\{h_{22}=(\tau\sigma\tau)^2=(12)(34),\ h_{23}=(\sigma\tau)^2=(13)(24),\ h_{24}=(\sigma\tau)^2=(14)(23)\}$. S_4 grubunun beş tane denk olmayan indirgenmez temsili var ve bunlar şu biçimde olacaktır:

$\rho_1(\sigma)=1$, $\qquad \rho_1(\tau)=1,$

$\rho_2(\sigma)=-1,$ $\qquad \rho_2(\tau)=1,$

$$\rho_3=(\sigma)=A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \qquad \rho_3(\tau)=B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$\rho_4(\sigma)=C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad \rho_4(\tau)=D=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\rho_5(\sigma)=-C=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad \rho_5(\tau)=D=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

S_4 ün indirgenmez temsillerinin direkt toplamı $\rho=\rho_1\oplus\rho_2\oplus\rho_3\oplus\rho_4\oplus\rho_5$ olsun. Bir $g\in S_4$ elemanının $\rho(g)=X^*$ görüntüsü 10x10 türündeki bir

$$X^*=\begin{bmatrix} x_1 & & & & & & & & & \\ & x_2 & & & & & & O & & \\ & & x_3 & x_4 & & & & & & \\ & & x_5 & x_6 & & & & & & \\ & & & & x_7 & x_8 & x_9 & & & \\ & & & & x_{10} & x_{11} & x_{12} & & & \\ & & & & x_{13} & x_{14} & x_{15} & & & \\ & & O & & & & & x_{16} & x_{17} & x_{18} \\ & & & & & & & x_{19} & x_{20} & x_{21} \\ & & & & & & & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K & & & \\ & M_1 & O & \\ & O & M_2 & \\ & & & M_3 \end{bmatrix} (*)$$

matrisidir. Buradaki K esas köşegen üzerindeki elemanları x_1, x_2 olan 2x2 köşegen matris; M_1 elemanları x_3, x_4, x_5, x_6; M_2 elemanları $x_7,\ldots,x_{15}$ ve M_3 elemanları $x_{16},\ldots,x_{24}$ olan matrislerdir. Bütün $h_i\in S_4$ için $\rho(h_i)$ ye karşılık gelen 24-boyutlu satır vektörü x_i^* ile gösterilsin. Örneğin, $h_7=(34)=\sigma\tau^2\sigma\tau\sigma\tau^2\in S_4$ için

$$\rho(h_7)=\rho(\sigma)\,\rho(\tau)^2\,\rho(\sigma)\,\rho(\tau)\,\rho(\sigma)\,\rho(\tau)^2$$
$$=(1.1^2.1.1.1.1^2,\ (-1).(1)^2.(-1).1.(-1).1^2,\ AB^2ABAB^2,\ CD^2CDCD^2,$$
$$(-C)D^2(-C)D(-C)D^2)$$

$$=\left(1,-1,\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

olup, $x_7^*=(1,-1,0,1,1,0,0,0,-1,0,-1,0,-1,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,0)$ dır. x_i^* vektörünün bileşenleri şu matrisin i inci satırını oluşturur.

$$
\begin{array}{c}
h_1 \longrightarrow \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{14} \\ h_{15} \\ h_{16} \\ h_{17} \\ h_{18} \\ h_{19} \\ h_{20} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{24}
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} = Q
$$

2.1.17 Metod (Schur bağıntıları) kullanılarak Q matrisinin tersi şöyle elde edilir.

$$
Q^{-1} = \frac{1}{24}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 & 2 & -2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 & -2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
3 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -3 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & -3 & 3 \\
3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 & -3 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -3 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & -3 & 3
\end{bmatrix}
$$

ρ direkt toplam temsili, ZS_4 grup halkasından Q matrisi biçimindeki 24x24 matrislerin Z-cebirine bir $\bar{\rho}$ Z-cebir homomorfizmasına, lineerlikle, $\bar{\rho}(\Sigma a_i h_i)=\Sigma a_i \rho(h_i)$ biçiminde genişletilebilir. Q matrisinin tersi mevcut olduğundan bir Z-cebir homomorfizması olan $\bar{\rho}$ nun bir izomorfizma olduğu anlaşılır.

$x^* =[x_1,x_2,...,x_{24}]$ bir vektör olmak üzere, ρ o $\bar{\rho}$ bileşke dönüşümünün $U(ZS_4)$ ye kısıtlanmışını gösteren θ altında görüntüsü x^* olan $[a_1,a_2,...,a_{24}]$ vektörü x^*Q^{-1} çarpımıyla gösterilecektir. a_i lerin birer tamsayı olması için bir takım denklikler sistemi çözülür.

Şimdi (*) daki M_1, M_2 ve M_3 matrislerinin bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

$$M_1=\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix},\quad M_2=\begin{bmatrix} x_7 & x_8 & x_9 \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} \end{bmatrix},\quad M_3=\begin{bmatrix} x_{16} & x_{17} & x_{18} \\ x_{19} & x_{20} & x_{21} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{bmatrix}$$

olduğuna göre,

a) M_1 matrisinde $x_3+x_5\equiv x_4+x_6$ (mod3)

b) M_2 matrisinde $x_7+x_{10}+x_{13}\equiv x_8+x_{11}+x_{14}\equiv x_9+x_{12}+x_{15}$(mod2)
   M_3 matrisinde $x_{16}+x_{19}+x_{22}\equiv x_{17}+x_{20}+x_{23}\equiv x_{18}+x_{21}+x_{24}$(mod2)

c) M_2 ve M_3 matrislerinin karşılıklı elemanları mod2 ye göre denktir. Ayrıca M_2 ve M_3 matrisleri arasında mevcut diğer bağıntılar şöyledir:

$$\begin{array}{ll} s_1 = x_7 + x_{11} + x_{15} & r_1=x_{16}+x_{20}+x_{24} \\ s_2=-x_8+x_{12}-x_{13} & r_2=-x_{17}+x_{21}-x_{22} \\ s_3=-x_9+x_{10}-x_{14} & r_3=-x_{18}+x_{19}-x_{23} \\ s_4=x_9-x_{11}+x_{13} & r_4=x_{18}-x_{20}+x_{22} \\ s_5=x_8+x_{10}-x_{15} & r_5=x_{17}+x_{19}-x_{24} \\ s_6=-x_7+x_{12}+x_{14} & r_6=-x_{16}+x_{22}+x_{23} \end{array} \qquad \text{(i)}$$

Bu s_k ve r_k ler cinsinden M_2 ve M_3 arasındaki bağıntılar şöyledir:

d) M_2 nin s_k üzerinde alınan herhangi iki eleman x_i, x_j ve bunların M_3 deki karşılıkları sırasıyla, x_m, x_n olsun. O halde

1) x_i, x_j (x_m,x_n) ler s_1, s_2 veya s_3 (r_1, r_2 veya r_3) toplamlarında yer alıyorsa, $x_i+x_j \equiv -(x_m+x_n)$ mod 4 ve $x_i-x_j\equiv-(x_m-x_n)$mod4

2) x_i, x_j (x_m,x_n) ler s_4, s_5 veya s_6 (r_4, r_5 veya r_6) toplamlarında ise, $x_i+x_j\equiv(x_m+x_n)$mod4 ve $x_i-x_j\equiv(x_m-x_n)$ mod4.

Ayrıca M_1 matrisinin M_2 ile M_3 matrisleri arasındaki bağıntılar da şu biçimdedir:

θ nın görüntüsü $GL(2,Z) \oplus GL(3,Z) \oplus GL(3,Z)$ de $\alpha=x^*Q^{-1}$ toplamları 1 olan tamsayıların bir satır vektörü olmak üzere, bütün (M_1, M_2, M_3) matris üçlülerinin kümesinde kapsanır, yani

$x^*=[x_1,x_2,...,x_{24}] \in \theta(V(ZS_4)) \Rightarrow a_1+a_2+...+a_{24}=1$ dir. $\sum_{i=1}^{24} a_i = \frac{24x}{24} = x_1$

elde edilir. Buradan x^* vektörünün ilk bileşeninin 1 olması gerektiği ortaya çıkar. K nın köşegen elemanlarının birimsel olması gerektiğinden $x_2=\pm 1$ olmalıdır. Buna göre,

$(x_1,x_2)=(1,1)$ için	$(x_1,x_2)=(1,-1)$ için	
$2(1+x_3+x_6)+3(s_1+r_1)\equiv 0 \bmod 24$	$2(x_3+x_6)+3(s_1+r_1)\equiv 0 \bmod 24$	
$2(x_4+x_5)+3(s_4-r_4)\equiv 0 \bmod 24$	$2(1+x_4+x_5)+3(s_4-r_4)\equiv 0 \bmod 24$	
$2(x_3-x_5-x_6)+3(s_6-r_6)\equiv 0 \bmod 24$	$2(1+x_3-x_5-x_6)+3(s_6-r_6)\equiv 0 \bmod 24$	(ii)
$2(-x_3-x_4+x_6)+3(s_5-r_5)\equiv 0 \bmod 24$	$2(1-x_3-x_4+x_6)+3(s_5-r_5)\equiv 0 \bmod 24$	
$2(1+x_4-x_5-x_6)+3(s_3+r_3)\equiv 0 \bmod 24$	$2(x_4-x_5-x_6)+3(s_3+r_3)\equiv 0 \bmod 24$	
$2(1-x_3-x_4+x_5)+3(s_2+r_2)\equiv 0 \bmod 24$	$2(-x_3-x_4+x_5)+3(s_2+r_2)\equiv 0 \bmod 24$	

Bu inceleme sayısal olarak somutlaştırılabilir :
Örneğin,

$$(M_1,M_2,M_3)=\left(\begin{bmatrix}5 & -2\\ -7 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4 & 17 & -14\\ -5 & 22 & -18\\ 6 & 26 & 21\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\ 19 & 16 & 12\\ -24 & -20 & -15\end{bmatrix}\right)\in G$$

olduğu (ii) ve (a)-(d) koşullarını sağladığı görülerek anlaşılır, burada $G=G_1\oplus G_2\oplus G_3=\{(M_1,M_2,M_3)\in GL(2,Z)\oplus GL(3,Z)\oplus GL(3,Z) \mid M_1,M_2,M_3$ matrisleri (a)-(d) ve (ii) koşullarını sağlar$\}$ $\theta(V(ZS_4)$ yı kapsayan bir birimsel gruptur. $x_2=\det(M_1)=1$ olduğundan x^* vektörü

(1,1,5,-2,-7,3,-4,17,-14,-5,22,-18,6,-26,21,2,5,4,19,16,12,-24,-20,-15) olup

$\alpha=[a_1,a_2,...,a_{24}]=x^*Q^{-1}$

$=(6,0,-3,-6,-3,6,-3,9,-2,3,-1,5,-6,-5,-5,3,9,6,-3,0,-6,-5,-5,-3)$ dir. Buna göre

$\gamma=6h_1-3h_3-6h_4-3h_5+6h_6-3h_7+9h_8-2h_9+3h_{10}-h_{11}+5h_{12}-6h_{13}-5h_{14}-5h_{15}+3h_{16}+9h_{17}+6h_{18}-3h_{19}-6h_{21}+5h_{22}+5h_{23}-3h_{24} \in V(ZS_4)$

dir ve γ^{-1} yi bulmak için

$$\left(M_1^{-1},M_2^{-1},M_3^{-1}\right)=\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6 & 7 & 2\\ -3 & 0 & -2\\ -2 & -2 & -3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -5 & -4\\ -3 & 66 & 52\\ 4 & -80 & -63\end{bmatrix}\right)$$

oluşu dikkate alınarak aynı şekilde x^* vektörü oluşturulur.

Buradan $\gamma^{-1}= 9h_2+3h_3-6h_4-9h_5-3h_6+9h_7+9h_8+6h_9+10h_{10}+7h_{11}-6h_{12}-10h_{13}-6h_{14}-12h_{15}+15h_{16}+9h_{17}-9h_{18}-18h_{19}+6h_{20}-6h_{21}+18h_{22}-15_{24}$

dir.

$$\left(K_1, K_2, K_3\right)=\left(\begin{bmatrix} 45 & -19 \\ 109 & -46 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 64 & -280 & 227 \\ 23 & -100 & 82 \\ 10 & -43 & 36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 112 & 80 & 59 \\ -1537 & -1108 & -818 \\ 1870 & 1349 & 996 \end{bmatrix}\right),$$

$K_1^3=I_2$, $K_2^3=I_3$, $K_3^3=I_3$ dir. Benzer şekilde x^* vektörü oluşturulup 3 mertebeli bir birimsel elde edilmiş olur:

$u=-330h_2-57h_3-264h_4-36h_5+66h_6+93h_7-395h_8-295h_9+55h_{10}+125h_{11}-161h_{12}+310h_{13}+359h_{14}+3h_{15}-294h_{16}-366h_{17}-120h_{18}+279h_{19}+114h_{20}+387h_{21}-302h_{22}+44h_{23}+258h_{24}$,

$u\in V(ZS_4)$, $u^3=1$ dir. Böylece $\gamma^{-1}u\gamma=b$ olacak şekilde $\gamma\in V(ZS_4)$ ve $b\in S_4$ olduğu görülür.

4. NİLPOTENT METABELİAN GRUPLARIN İNTEGRAL GRUP HALKALARINDA BURULMALI BİRİMSELLER

Bir önceki bölümde V(ZG) deki burulmalı birimseller için Zassenhaus konjektürünün gerçeklenişi incelendi. Bu bölümde eğer G nilpotent metabelian grup ise, burulmalı birimsellerin genelleştirilmiş izleri üzerine kısa bir inceleme yapılacaktır.

4.1. Nilpotent Metabelian Gruplar

4.1.1. Önerme

G bir metabelian grup olsun. Her a, b $\in$G ve h $\in$ G′ için şu eşitlikler vardır :

i) $[ah,b] = [a,b][h,b]$

ii) $[h^{-1},a] = [h,a]^{-1}$

İspat : i) $[ah,b]=[a,b]^h[h,b]$ özdeşliği kullanılarak $[a,b][h,b]=[a,b]^h[h,b]$ $\Leftrightarrow$ $[a,b]^h=[a,b]$ olduğundan eşitlik sağlanmış olur.

ii) $[h^{-1},a] = ([h,a]^{-1})^{h^{-1}}$ özdeşliği yardımıyla

$$\begin{aligned}[h^{-1},a]=[h,a]^{-1} &\Leftrightarrow ([h,a]^{-1})^{h^{-1}}=[h,a]^{-1}\\ &\Leftrightarrow h[h,a]^{-1}h^{-1}\\ &\Leftrightarrow [h,a]h\, h^{-1}\\ &\Leftrightarrow [h,a]^{-1}hh^{-1}=[h,a]^{-1}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

4.1.2. Önerme

G bir metabelian grup, g $\in$ G, o(g)=m ve h$\in$ gK(g) olsun. Buna göre o(gh) | o(g) dir.

İspat : Sabit bir g $\in$ G için, $K(g)= <[g,a] : a \in G> =\{(g^{-1}a_1^{-1}ga_1)^{\varepsilon_1}(g^{-1}a_2^{-1}ga_2)^{\varepsilon_2} \ldots (g^{-1}a_s^{-1}ga_s)^{\varepsilon_s} \mid a_i\in G,\ \varepsilon_i=\pm1,\ s \in N\}$ grubu tanımlanabilir öyle ki, $[g,a]^b=[g,b]^{-1}[g,ab]$ olduğundan dolayı K(g) grubu G de normal altgruptur. Buradan o([g,a]=m.o(g) ; $g[g,a]= g^a\sim g\Rightarrow$ $o(a^{-1}ga)=o(g)=m$ olmak üzere $(g[g,a])^m=1$ olduğundan

$$[g,a]^{g^{m-1}}[g,a]^{g^{m-2}}\ldots[g,a]^g[g,a]=1 \qquad (4.2)$$

ifadesi bütün a $\in$A için sağlanır yani;

$$g^{-m}.g[g,a]\, g^{m-1}g^{2-m}[g,a]g^{m-2} \ldots g^1[g,a]g[g,a]=1$$

Şimdi $a_i\in G$, $\varepsilon_i=\pm1$ için $h = \prod_{i=1}^{s}[g, a_i]^{\varepsilon_i} \in K(g)$ olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}(gh)^m &= (gh)\,(gh)\,\ldots\,(gh)(gh)h \\ &= (gh)(gh)\,\ldots\, g^2g^{-1}hgh \\ &= (gh)\,(gh)\,\ldots\, g^2h^gh \\ &\;\;\vdots \\ &= g^m h^{g^{m-1}}\ldots g^{g^2}h^gh \\ &= \prod_{j=1}^{s}\prod_{i=0}^{m-1}([g,a_j]^{\varepsilon_j})^{g^i}\end{aligned}$$

aynı şekilde eşitliğin sağ tarafından işlem yaparak da

$$\prod_{j=1}^{s}\{[g,a_j]^{\varepsilon_j}([g,a_j]^{\varepsilon_j})^{g}([g,a_j]^{\varepsilon_j})^{g2}\ldots([g,a_j]^{\varepsilon_j})^{g^{m-1}}\}$$

$= \quad ([g,a]^{\varepsilon_1})([g,a_1]^{\varepsilon_1})^{g}([g,a]^{\varepsilon_1})^{g^2} \quad \ldots \quad ([g,a_1]^{\varepsilon_1})^{g^{m-1}}\ldots([g,a_s]^{\varepsilon_s})$ $([g,a_s]^{\varepsilon_s})^{g}([g,a_s]^{\varepsilon_s})^{g^2}\ \ldots([g,a_s]^{\varepsilon_s})^{g^{m-1}}$
dir. Buradan,

$[g,a_1]^g\ \ldots\ [g,a_s]^{g'}=1$ olduğundan ve (4.2) den $(g[g,a])^m=1$. Böylece $(gh)^m=1$ olup $o(gh) \mid o(g)$ bağıntısı sağlanmış olur.

4.1.3. Önerme

G bir metabelian grup, $g\in G$ ve $h=\prod_{i=1}^{s}[g,a_i]^{\varepsilon_i}\in K(g)$ olsun. ($a_i\in G$) $\mu=\{a_1,a_2,\ldots,a_s\}$ ($\varepsilon_i=\pm1$) $\upsilon=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_s\}$ sabit sıralı kümeler ve $b\in G$, $k\in N$, $i_j\in\{1,2,\ldots,s\}$, $j=1,\ldots,k$ olmak üzere $\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,i_2,\ldots,i_k)=[\ldots[[b,a_{i_k}],a_{i_{k-1}}]\ldots,a_i]^{\varepsilon_{i_1}\ldots\varepsilon_{i_k}}$ ile tanımlı ifadelerle birlikte $\mu\subset G$ ve $b=gh^{-1}$ olsun. Bu durumda her $k\in N$ için

$$h=\prod_{i_1=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1)\prod_{i_2=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,i_2)\ldots\prod_{i_k=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,\ldots,i_k)\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,\ldots,i_k)]\ldots \text{ dir.}$$

İspat : Önerme k üzerinde tümevarımla ispatlanacaktır. 4.1.1. Önerme (i) ve g=bh den,

$$\begin{aligned}h &= \prod_{i_1=1}^{s}[b,a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}}[h,a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}} \\ &= \prod_{i_1=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1)\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1] \\ &= \prod_{i_1=1}^{s}[g,a_i]^{\varepsilon_{i_1}} \quad \text{, g=bh den}\end{aligned}$$

elde edilir ve k=1 için hipotez doğrudur.

Şimdi, tümevarımdan

$$\prod_{i_1=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1)\prod_{i_1=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,i_2)\ldots\prod_{i_{k-1}=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,\ldots,i_{k-1})\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,\ldots,i_{k-1})]\ldots$$

doğru olduğu kabul edilsin.

Buradan,

$$\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,\ldots,i_{k-1})=\prod_{i_k=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,\ldots,i_k)\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,\ldots,i_{k-1})]$$

olduğunu göstermek yetecektir.

$$h=[g,a_{i_1}]^{\varepsilon_1}[g,a_{i_2}]^{\varepsilon_2}\ \ldots\ [g,a_{i_s}]^{\varepsilon_s}=\prod_{i_k=1}^{s}[g,a_{i_k}]^{\varepsilon_{i_k}}$$

olduğundan dolayı ve tanımdan

$$\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,\ldots,i_{k-1})=[\ldots[[\prod_{i_k=1}^{s}[g,a_{i_k}]^{\varepsilon_{i_k}},a_{i_{-1k}}],a_{i_{-2k}}]\ldots,a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}\ldots\varepsilon_{i_{k-1}}}$$

olduğu görülür. 4.1.1. Önermeden,

$$\left[\prod_{i_k=1}^{s}[g,a_{i_k}]^{\varepsilon_{i_k}},a_{i_{k-1}}\right]=[[g,a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}}[g,a_{i_2}]^{\varepsilon_{i_2}}\ldots[g,a_{i_s}]^{\varepsilon_{i_s}},a_{i_{s-1}}]$$

$$=([g,a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}}\ldots[g,a_{i_s}]^{\varepsilon_{i_s}})^{-1}a_{i_{s-1}}^{-1}[g,a_{i_1}]^{\varepsilon_1}\ldots[g,a_{i_s}]^{\varepsilon_{i_s}}a_{i_{s-1}}$$

$$=([g,a_{i_s}]^{\varepsilon_{i_s}})^{-1}\ldots([g,a_{i_1}]^{\varepsilon_1})^{-1}a_{i_{s-1}}^{-1}[g,a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}}\ldots[g,a_{i_s}]^{\varepsilon_{i_s}}a_{i_{s-1}}$$

$$=[g^{-1},a_{i_s}]^{\varepsilon_{i_s}}\ldots[g^{-1},a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}}a_{i_{s-1}}^{-1}[g,a_{i_1}]^{\varepsilon_1}\ldots[g,a_{i_s}]^{\varepsilon_{i_s}}a_{i_{s-1}}$$

$$=ga_{i_s}^{-1}g^{-1}a_{i_s}\ldots ga_{i_1}^{-1}g^{-1}a_{i_1}a_{i_1}^{-1}g^{-1}a_{i_{s-1}}^{-1}ga_{i_1}\ldots g^{-1}a_{i_s}^{-1}ga_{i_s}a_{i_{s-1}}$$

$$=([g,a_{i_s}]^{\varepsilon_{i_s}})^{-1}\ldots([g,a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}})^{-1}a_{i_{s-1}}^{-1}$$

$$=\prod_{i_k=1}^{s}[[g,a_{i_k}],a_{i_{k-1}}]^{\varepsilon_{i_k}}$$

elde edilir ve bu yüzden

$$\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,\ldots,i_{k-1})=[\ldots[\prod_{i_k=1}^{s}([[g,a_{i_{k-1}}],a_{i_{k-1}}])^{\varepsilon_{i_k}},a_{i_{k-2}}]\ldots,a_{i_1}]^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{i_{k-1}}}$$

dir. Bu şekilde devam edilerek yani, çarpım sembolünü sola ve ε_{i_k} sembolünü sağa doğru hareket ettirerek k ıncı adımda

$$\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,\ldots,i_{k-1})=\prod_{i_k=1}^{s}[\ldots[[g,a_{i_k}],a_{i_{k-1}}],\ldots,a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}\ldots\varepsilon_{i_k}}$$

elde edilir.

4.1.1.Önerme ve g=bh den

$$[[g,a_{i_k}],a_{i_{k-1}}]=[[bh,a_{i_k}],a_{i_{k-1}}]=[[b,a_{i_k}][h,a_{i_k}],a_{i_{k-1}}]$$

olduğu görülür. Buradan

$$\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,i_2,\ldots,i_{k-1})=\prod_{i_k=1}^{s}[\ldots[[b,a_{i_k}][h,a_{i_k}],a_{i_{k-1}}],\ldots,a_{i_1}]^{\varepsilon_{i_1}\ldots\varepsilon_{i_k}}$$

dır. 4.1.1. Önerme (i) yi bu şekilde k ıncı kez uygulayarak

$$\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,...,i_{k-1}) = \prod_{i_k=1}^{s}([...[b,a_{i_k}],...,a_{i_1}][...[h,a_{i_k}],...,a_{i_1}])^{\varepsilon_{i_1}...\varepsilon_{i_k}}$$

$$= \prod_{i_k=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,...,i_k)\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,...,i_k)]$$

sonucu elde edilmiş olur.

4.1.4. Önerme :

G bir metabelian grup ve $g \in G$ olsun. Eğer $b \in gK(g)$ ise $bK(b) \subseteq gK(g)$ dir.

İspat : $b \in gK(g)$ ise $b=gh$ olacak şekilde bir $h \in K(g)$ vardır. $c \in bK(b)$ olsun. Buna göre $d_i \in G$, $\delta_i = \pm 1$, $i=1,...,r$ için $h_1 = \prod_{i=1}^{r}[b,d_i]^{\delta_i}$ olmak üzere $c=bh_1$ dir. 4.1.1.Önerme ve $b=gh$ kullanılarak

$$h_1 = \prod_{i=1}^{r}[gh,d_i]^{\delta_i} = \prod_{i=1}^{r}[g,d_i]^{\delta_i}[h,d_i]^{\delta_i}$$

olduğu görülür.

K(g) grubunun tanımından $[g,d_i]^{\delta i} \in K(g)$ dir. Ayrıca, $h \in K(g)$ ve $K(g) \Delta G$ olduğundan $[h,d_i]^{\delta i} \in K(g)$ dir. Bu yüzden $h_1 \in K(g)$, $c=bh_1=ghh_1 \in gK(g)$ ve buradan $bK(b) \subseteq gK(g)$ gerçeklenir.

4.1.5. Önerme

G nilpotent metabelian bir grup ve $g_1, g_2 \in G$ olsun. O halde ya $g_1K(g) = g_2K(g)$ ya da $g_1K(g) \cap g_2K(g) = \varnothing$ dır. Ayrıca, her $t \in gK(g)$ için $o(t)=o(g)$ dir.

İspat : $b \in g_1K(g) \cap g_2K(g)$ olsun. Yani, $g_1K(g_1) \cap g_2K(g_2) \neq \varnothing$ dir. Öyle ise $b \in g_1K(g_1)$ ve $b \in g_2K(g_2)$ olacak şekilde $k_1 \in K(g_1)$ ve $k_2 \in K(g_2)$ vardır. 4.1.1. Önermeden

$$bK(b) \subseteq g_1K(g_1) \cap g_2K(g_2) \qquad (4.3)$$

olduğu ortaya çıkar.

$b \in g_1K(g_1)$ olduğundan dolayı, $b=g_1h^{-1}$ olacak şekilde $h \in K(g_1)$ vardır. $a_i \in G$, $\varepsilon_i = \pm 1$ için $h = \prod_{i=1}^{s}[ga_i]^{\varepsilon_i}, \mu = \{a_1,...,a_s\}$ $\upsilon = \{\varepsilon_1,...,\varepsilon_s\}$ ve n, G nin nilpotentlik sınıfı olsun. $\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,...,i_n)$, ve $\sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,...,i_2)$, G nin alt merkezsel serisinin n+1 inci terimine ait olduğu görülür ve buradan

$$\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,...,i_n) = \sigma_\mu^\upsilon(h,i_1,...,i_n) = 1$$

dir. k=n için 4.1.3.Önermenin uygulamasından

$$h = \prod_{i_1=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1)\prod_{i_2=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,i_2)...\prod_{i_{n-1}=1}^{s}[\sigma_\mu^\upsilon(b,i_1,...,i_{n-1})]...]]$$

elde edilir. Bu sebeple tanımdan $j\in N$ için $\sigma_{\mu}^{\upsilon}(b,i_1,...,i_j)\in K(b)$ olduğundan dolayı $h\in K(b)$ dir. Buradan $g_1=bh\in bK(b)$ dir ki, 4.1.4. Önermeden $g_1K(g)\subseteq bK(g)$ olmasını gerektirir ve (4.3) den dolayı $g_1K(g_1)\subseteq g_2K(g_2)$ olduğu görülür.

Benzer biçimde $g_2K(g_2)\subseteq g_1K(g_1)$ kapsaması da elde edilir. Böylece $g_1K(g_1)=g_2K(g_2)$ olduğu gösterilerek önermenin ilk hipotezi ispatlanmış olur.

Şimdi $g\in G$, $o(g)<\infty$ ve $b\in gK(g)$ olsun. Yukarıdaki verilenlerden $bK(b)=gK(g)$ olduğu ortaya çıkar. 4.1.2. Önermeden $o(b)\,|o(g)$, $o(g)|\,o(b)$ ve buradan $o(b)=o(g)$ olduğu görülür.

Eğer $g\in G$ nin mertebesi sonsuz ise, her bir $b\in gK(g)$ için $bK(b)=gK(g)$ dir ve 4.1.2. Önermeden b burulmalı eleman olamaz.

4.1.6. Teorem

G nilpotent metabelian bir grup, $x\in V(ZG)$ ve $o(x)=n$ olsun. Bu durumda her $i\neq n$ için

$$T^{(n)}(x)=1 \text{ ve } T^{(i)}(x)=0$$

dır.

İspat : G nilpotent metabelian bir grup ve $x=\sum_{t\in G}\alpha_t t\in V(ZG)$, $o(x)=n$ olsun. Sabit bir $g\in G$ için, $\tilde{x}(g)=\sum_{t\in gK(g)}\alpha_t$ yazılabilir.

$$t\in gK(g)\Leftrightarrow t=g[g,h_1][g,h_2]...[g,h_l]$$

$$=gg^{-1}h_1^{-1}gh_1g^{-1}h_2^{-1}gh_2\ldots g^{-1}h_l^{-1}gh_l$$

$$=h^{-1}gh$$

buradan $o(t)=o(g)$ dir.

$f: G\to G/K(g)$, $t\to tK(g)$ grup homomorfizması

φ: $ZG\to Z(G/K(g))$, $x=\sum_{t\in G}\alpha_t t\to\sum_{t\in G}\alpha_t(tK(g))=\varphi(x)$ ile tanımlı doğal homomorfizmasına genişletilebilir. $\tilde{x}(g)$, $gK(g)\in G/K(g)$ ye karşılık gelen $\varphi(x)$ in katsayıları olduğu görülür: $K(1)=<[1,h]:h\in G>=\{1\}$; $1K(1)=\{1\}$ ve $\sum\alpha_t=1$ dir. $g\in K(g)\in C(G/K(g))$ olduğu açık ve 2.1.23.Önermeden

$$\tilde{x}(g)\in\{0,1\} \tag{4.4}$$

olduğu sonucuna varılır.

J, x in dayanağındaki (support) elemanlarının mertebelerinin kümesini tanımlasın. $k\in J$ ise, 4.1.5.Önermeden bir $S_k\subset G$ kümesinin varlığı söz konusudur öyle ki, $T^{(k)}(x)=\sum_{g\in S_k}\tilde{x}(g)$ dir. Buradan

$$\sum_{k\in J}\sum_{g\in S_t}\tilde{x}(g)=\sum_{k\in J}T^{(k)}(x)=\sum_{t\in G}\alpha_t=1$$

ve (4.4) den her $t \in S_k$, $k \in J$ ve $t \neq g$ için $\tilde{x}(g)=1$ ve $\tilde{x}(t)=0$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Bu nedenle $k_0=o(g)$ ise, her $k \in J$ ve $k \neq k_0$ için

$$T^{(k_0)}(x) = 1 \qquad \text{ve} \qquad T^{(k)}(x)=0 \tag{4.5}$$

elde edilir.

Şimdi $n = k_0$ olduğu gösterilirse ispat tamam olacaktır. Buna göre n üzerinde tümevarım kullanılabilir. p bir asal sayı olmak üzere, ilk basamak $n=p^m$ konumu olsun. 2.1.22.Önermeden $T^{p^m}(x) \equiv 1 \pmod p$ olduğu görülür ve (4.5) den dolayı $p^m=k_0$ sonucu elde edilir.

Farklı iki asal sayı n yi bölsün. $g; h \in G$ için bütün gh-hg ile üretilmiş Z-modülü L(ZG) şeklinde tanımlansın. $y \in L(ZG)$ ise, $\forall g \in G$ için

$$y=a_1(g_1h_1-h_1g_1)+a_2(g_2h_2-h_2g_2)+\ldots+a_r(g_rh_r-h_rg_r)$$
$$=a_1g_1h_1-a_1h_1g_1+a_2g_2h_2-a_2h_2g_2+\ldots+a_rg_rh_r-a_rh_rg_r$$
$$g \sim g_ih_i \sim h_ig_i \Rightarrow gh \sim hg \text{ ve}$$

$$\tilde{y}(g) = \sum_{t \sim g} \alpha_t = 0 \tag{4.6}$$

olduğu görülür.

Eğer p, n yi bölen bir asal sayı ise

$$x^p \equiv \sum_{t \in G} \alpha_t^p t^p \bmod(L(ZG)+pZG)$$

dir. $o(x^p)=n/p$ olduğundan dolayı tümevarım $T^{(n/p)}(x^p)=1$ elde edilir. Bu yüzden (4.6) nın uygulamasıyla son denklikten

$$\sum_{t^p \in G(n/p)} \alpha_t^p \equiv 1 \pmod p$$

sonucu elde edilir ki, bu

$$\sum_{t^p \in G(n/p)} \alpha_t^p \equiv 1 \pmod p \tag{4.7}$$

olmasını gerektirir.

$p^2 | n$ olsun. O halde

$$t^p \in G\left(\frac{n}{p}\right) \Rightarrow t \in G(n)$$

dir. Buradan $T^{(m)}(x)= \sum_{t^p \in (n/p)} \alpha_t$ ve (4.7) den $T^{(n)}(x) \equiv 1 \pmod p$ elde edilir. $t^p \in G(\frac{n}{p})$ den (4.5) deki $n=k_0$ olduğu görülür.

Şimdi, $r \geq 2$ ve $i=1,\ldots,r$ için p_i farklı asal sayılar olmak üzere $n=p_1p_2 \ldots p_r$ olsun. $t \in G(n/p_i) \Rightarrow t^{p_i} \in G(n/p_i)$ olduğu görülür ve buradan $i=1,2$ için

$$\sum_{t^{p_i} \in G(n/p_i)} \alpha_t = T^{(n)}(x) + T^{(n/p_i)}(x)$$

dir. p_1 ve p_2 için (4.7) nin uygulamasından

$$T^{(n)}(x)+T^{(n/p_i)}(x) \equiv 1 \pmod{p_i}$$

elde edilmiş olur. Böylece (4.5) den $n=k_0$ dır.

4.1.7. Örnek

Nilpotent metabelian gruplar için,

$D_8 = <a,b:\ a^4=b^2=1,\ b^{-1}ab=a^{-1}> = \{1,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$ dihedral grubunun tüm eşlenik sınıfları şöyledir (Gordon ve Liebeck, 1993):

$\{1\}$, $\{a^2\}$, $\{a,a^3\}$, $\{b,a^2b\}$, $\{ab,a^3b\}$

4 mertebeli $\gamma_1 \in V(ZD_8)$ ve 2 mertebeli $\gamma_2, \gamma_3 \in V(ZD_8)$ burulmalı elemanlar aşağıdaki gibi olsun. $k,n \in Z$ ve $(2k-1)|(n^2+k^2)$ olmak üzere,

$$\gamma_1 = \left(\frac{k^2+n^2}{2k-1}\right)a + \left(1-\frac{k^2+n^2}{2k-1}\right)a^3 + n(ab-a^3b) + \left(\frac{n^2-k^2+k}{2k-1}\right)(b-a^2b)$$

ve $o(\gamma_1)=4$ iken 4.1.6.Teoremden

$T^{(4)}(\gamma_1)=1$ ve $T^{(2)}(\gamma_1)=0$ dır.

Benzer şekilde $k,n \in Z$ ve $n|k(4k-1)$ olmak üzere 2 mertebeli burulmalı elemanlar

$$\gamma_2 = \left[\frac{k}{n}(4k-1)+n\right](a-a^3) + 4kb + (1-4k)a^2b + \left[\frac{k}{n}(4k-1)-n\right](ab-a^3b)$$

veya

$$\gamma_3 = \left[\frac{k}{n}(4k-1)+n\right](a-a^3) + 4ka^3b + \left[\frac{k}{n}(4k-1)-n\right](b-a^2b) + (1-4k)ab$$

dir ve $o(\gamma_2)=o(\gamma_3)=2$ olduğundan

$T^{(2)}(\gamma_2)= T^{(2)}(\gamma_3) = 1$ ve $T^{(4)}(\gamma_2) = T^{(4)}(\gamma_3) = 0$ dır.

4.1.8. Teorem

G keyfi bir grup , $x \in V(ZG)$,$x \neq 1$, $o(x)=n$ ve $|G:C_G(g)|<\infty$ olsun. Buna göre

$|\tilde{x}(g)|^2 < n.|G:C_G(g)|$ dir.

İspat: G keyfi bir grup, $g \in G$ sabit, $|G:C_G(g)|<\infty, x \in V(ZG)$ ve $o(x)=n$ olsun. <x> devirli grubunun elemanları C kompleks sayılar kümesi üzerinde lineer bağımsızdır. Gerçekten lineer bağımsız değilse, $\alpha_i \in C$ ler var öyle ki, $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1}=0$ dır. $j=0,1,\ldots,n-1$ için x^{-j} ile çarpıp izi hesaplanarak $\alpha_j=0$ olduğu görülür, çünkü $j<n$ için $trx^j=0$ dır.

Sonuç olarak, x ile üretilmiş halka ile C kümesi, C üzerinde <x> halkasının C<x> grup cebirine izomorftur. Wedderburn-Artin teoreminden, C<x>

grup cebirinin aşağıdaki gibi cisimlerin bir direkt toplamına olan ayrışımı(dekompose) şöyledir:

$e_1,e_2,\ldots,e_n$ ler C<x> grup cebirinin ilkel idempotentleri olmak üzere,

$C\langle x\rangle = Ce_1 \oplus Ce_2 \oplus \ldots \oplus Ce_n$

dir. $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n$ fonksiyonları C<x> halkasının indirgenmez kompleks karakterleri olsun. O halde

$$e_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\chi_i(x^j)}x^j$$

dir. Buradan uygun bir $\varepsilon_i \in C$, $\varepsilon_i^n=1$ için $\mathrm{tr}e_i=\frac{1}{n}$ ve $x=\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_2 e_2+\ldots+\varepsilon_n e_n$ dir.

$s=|G:C_G(g)|$ ve $\tilde{e}_i(g)$, g nin eşlenik sınıfları üzerinde katsayıların toplamı olmak üzere (Weiss, 1980) göre $|\tilde{e}_i(g)|<sn$ dir. Bu yüzden

$$\left|\tilde{x}(g)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\,\tilde{e}_i(g)\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\tilde{e}_i(g)\right| < (sn)^{1/2}$$

ve böylece $\left|\tilde{x}(g)\right|^2 < sn$ dir.

4.1.9. Örnek

$x\in V(ZG)$, $o(x)=0$, $|G:C_G(g)|<\infty$ ve $C_G(g)=\{a\in G : ag=ga\}\leq G$ olsun. $x^G=\{x^g : g\in G\}$, x in eşlenik sınıfı olmak üzere $o(x^G)=|G:C_G(x)|$, $x=\sum_{g\in G}\alpha_g g$ ve $\tilde{x}(g)=\sum_{h\sim g}\alpha_h$ dir.

$\sigma=(123)$, $\tau=(12)$ devreleri ile üretilen grup $S_3=\langle\sigma,\tau : \sigma^3=\tau^2=1,\ \tau^{-1}\sigma\tau=\sigma^{-1}\rangle = \{1,\sigma,\sigma^2,\tau,\tau\sigma,\tau\sigma^2\}$ olsun.

$\alpha=(-3t^2)\sigma+(3t^2+1)\sigma^2+(3t^2+t)\tau+(-3t^2+t)\tau\sigma-(2t)\tau\sigma^2 \in ZS_3$ ve $o(\alpha)=3$ dür. $g=\sigma$ ise 4.18. Teoremden,

$$|\tilde{\alpha}(g)|^2 = 1 < 3.|S_3 : C_{S_3}(g)| = 3.2 = 6;$$

eğer $g=\tau$ ise

$$|\tilde{\alpha}(g)|^2 = 0 < 3.3 = 6$$

olduğu görülür.

5. SONSUZ NİLPOTENT GRUPLAR

5.1. Zassenhaus Konjektürü ve Sonsuz Nilpotent Gruplar

5.1.1. Teorem

$H=(Z\oplus Z)\ X_{\sigma}\ Z$ nilpotent grubu olmak üzere, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in H$ ve $a,b\in D_8$ olsun. $G = H\ X\ D_8$ olmak üzere, ZG integral grup halkasındaki $u=b+[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)b+(\gamma+\delta)a+(\gamma-\delta)ba](a^2-1)$ elemanı aşağıdaki özelliklere sahiptir :

i) $u^2=1$, yani u burulmalı bir birimseldir.

ii) u, karekteristiği sıfır bir K cismi için KG de bir grup elemanına eşlenik değildir.

İspat : Bir $\varnothing : QD_8 \to Q[D_8/\langle a^2\rangle]\oplus M_2(Q)$ Wedderburn izomorfizması şöyle seçilebilir. $\varnothing_1$ dönüşümü, $D_8 \to D_8/\langle a^2\rangle$ doğal epimorfizması ile yükseltilmiş ve $\varnothing_2$ dönüşümü,

$$\varnothing_2(a)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \varnothing_2(b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlı lineer temsil olmak üzere, herhangi bir $z\in QD_8$ için $\varnothing(z)=(\varnothing_1(z), \varnothing_2(z))$ dönüşümü oluşturulur. K, karekteristiği sıfır olan herhangi bir cisim ve R, KH grup cebiri olsun. O halde bir

$$\overline{\varnothing}=id_R\otimes\varnothing:KG\approx R\otimes QD_8 \to K[H\ X\ D_8/\langle a^2\rangle]\oplus M_2(R)$$

izomorfizması elde edilir. $\overline{b}$, $H\ X\ D_8/\langle a^2\rangle$ grubunda b elemanının koseti ve U, $M_2(R)$ halkasında bir matris olmak üzere, $\overline{\varnothing}(u)=(\overline{b},U)$ olduğu açıktır. Bu kısa bilgiler ışığı altında hipotezlerin ispatı yapılabilir.

i) $U^2=I$ yani, U^2 nun birim matris olduğunu göstermek yetecektir, zira G grubundaki sonlu mertebeden bütün elemanlar D_8 grubunda ve $M_2(R)$ halkasındaki görüntüleri de, rasyonel matrislerin $M_2(Q)$ althalkasında kalır.

Doğrudan hesaplamalardan görülür ki,

$$U=\overline{\varnothing}_2(u)=\begin{pmatrix}1-4\alpha & 4\gamma\\ -4\delta & -1+4\beta\end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$E=(1+U)/2=\begin{pmatrix}1-2\alpha & 2\wp\\ -2\delta & 2\beta\end{pmatrix}\in M_2(ZH)$$

matrisi ile işleme devam etmek daha kolay olacaktır. $y_i=2x_i$ olsun. O halde $V=(y_0+t,\ y_1)$, $W=(t^{-2}(t-y_1),\ t^{-2}y_0)$ olmak üzere,

$$E=\begin{pmatrix}1-t^{-2}y_1y_2 & t^{-2}y_0y_2+t^{-1}y_0\\ t^{-1}y_2-t^{-2}y_1y_2 & t^{-2}y_0y_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(y_0+t)t^{-2}(t-y_1) & (y_0+t)t^{-2}y_0\\ y_1t^{-2}(t-y_2) & y_1t^{-2}y_0\end{pmatrix}=V^TW$$

dir. $W.V^T = (t^{-2}(t-y_1)+t^{-1}y_0\begin{bmatrix} y_0+t \\ y_1 \end{bmatrix}$

$= t^{-2}(t-y_1)(y_0+t)+t^{-2}y_0y_1=1$

gözlemi de doğrudur. Buradan,

$E^2=(V^TW)(V^TW)=V^T(WV^T)\ W=V^TW=E$ dir.

Yani E bir idempotent matristir. Bu yüzden

$U^2=(2E-I)^2=4E^2-4E+I=I$ elde edilmiş olur.

ii) U veya denk olarak E matrisinin $M_2(R)$ halkasında herhangi bir rasyonel matrise eşlenik olmadığını göstermek yetecektir.

P= Çek(E) : $R\oplus R\rightarrow R\oplus R$ olsun. P,I-E matrisinin satırlarıyla ücretilmiş $R\oplus R$ nin bir sol izdüşüm R-altmodül olduğu açıktır.

P nin, R halkasında bir sol ideal olduğu şöyle tanımlanabilir. İlk koordinat üzerinde izdüşüm olan $q_1:R\oplus R\rightarrow R$ dönüşümü, P üzerinde bire-bir dir. $(0,c) \in P\cap$Çek(q_1) olsun. Bu durumda $c.y_1=(0,c).V^T=(0,c).E.V^T=(0,0).V^T=0$ dır. R nin hiç sıfır böleni olmadığından ve $y_1\neq 0$ dan c=0 elde edilir.

$J=q_1(p)$ sol ideali, I-E matrisinin ilk kolon elemanları yani $\{t^{-2}y_1, y_2, t^{-1}y_2-t^{-2}y_1y_3\}$ kümesi ile üretilir. Buradan

$P\approx J=R.y_1y_2+R(ty_2-y_1y_3)$

dir. Şimdi $E\sim F\in M_2(R)$ olduğu kabul edilsin. F matrisinin de idempotent olduğu açıktır. Ayrıca Tr matris izini ve tr $1\in H$ deki katsayıları tanımlamak üzere, tr(Tr(F))=tr(Tr(E)=1 elde edilir. Bu yüzden F~diag(1,0) dır ve F bu biçimde olduğu varsayılabilir.

$E=YFY^{-1}$ olacak şekilde $Y\in M_2(R)$ olsun. Buna göre Y, Çek(F)=$0\oplus R$ üzerinde izomorfizma olarak Çek(E)=P ye gider ve buradan $P\approx R$ dir, çünkü R bir integral (tamlık bölgesi) olduğundan J, R nin bir sol temel ideali olduğu anlaşılır.

$S=K[Z\oplus Z]$ olmak üzere, $R=S_\sigma[t,t^{-1}]$ olduğu görülür. Özellikle bir $s_i\in S$ için, R nin her elemanı $\sum t^is_i$ biçiminde tektürlü yazılabilir.

Şimdi bir $\xi\in$ R için, $J=Ry_1y_2+R(ty_2-y_1y_3)=R\ \xi$ dir yani, J bir temel ideal olsun. Bu ise (Artamonov, 1981) a göre çelişkidir.

$y_1y_2 \in R\xi$ iken, bir $r \in R$ için J, $r.\xi$ biçiminde olmalıdır. Fakat $y_1y_2 \in S$ dir ve buradan hem r ve hem de ξ, $t^k_{s_k}$ biçiminde tekterimli olmak zorundadır. Bu yüzden genelliği bozmadan $\xi\in S$ olduğu kabul edilebilir.

Bütün $s_i\xi \in S\ \xi$ olmak üzere, en az bir $\sum t^i s_i \in R$ için $ty_2-y_1y_3=\sum t^i(s_i\xi)$ olduğundan aynı zamanda $ty_2-y_1y_3 \in R\ \xi$ dir. Polinom katsayılarının tekliğinden, hem y_2 ve hem y_1y_3 $S\xi$ idealinde kalır. Böylece $Sy_2+Sy_1y_3 \subseteq S\xi$ dir.

Diğer yandan $\xi\in J$ ve buradan $r'=\sum t^is_i'$ ve $r''=\sum t^is_i''$ polinomları için $\xi=r'y_1y_2+r''(ty_2-y_1y_3)$ dir. Her iki taraftaki bağımsız terimler karşılaştırılarak,

$\xi=s_0'y_1y_2+\sigma^{-1}(s''-1)y_2-s_0''y_1y_3 \subseteq Sy_2+Sy_1y_3$

elde edilir. Sonuç olarak

$Sy_2+Sy_1y_3=S\xi$

dir. S, iki değişken içinde Laurent polinomlarının bir K-cebiridir ve böylece S bir tektürlü çarpan bölgesidir.

Bütün y_i elemanları ogmentasyon idealinde kaldığından, ξ S de terslenmez. π, ξ nın bir asal çarpanı olsun. $y_2 \in S\xi$ ve $y_1 y_3 \in S\xi$ den $\pi | y_2$ olduğu ortaya çıkar ve ya $\pi | y_1$ ya da $\pi | y_3$ dür.

Her halükarda iki lineer bağımsız $z_1, z_2 \in Z \oplus Z$ elemanları için z_1-1, z_2-1 grup halkası elemanlarının ortak asal çarpana sahip olduğu görülür. $z_1 = v^m$ ve $z_2 = w^n$ olacak şekilde, $Z \oplus Z$ halkası için $\{v,w\}$ gibi bağımsız bir baz seçilebilir. O halde v^m-1 ve w^n-1 polinomları $K[v,v^{-1}, w,w^{-1}]$ halkasında bir ortak asal çarpana sahip olacaktır ve bu bir çelişkidir. Bu ise teoremin ii) kısmının ispatını tamamlar.

5.1.2. Örnek

$G X_\theta H$, H üst grup, G alttaki grup ve $\theta: H \to AutG$ grup homomorfizması olsun. $G X_\theta H$ deki bazı özelikler aşağıdaki biçimdedir. $g_1, g_2 \in H$ olsun.

1) $(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1.g_2^{\theta(h_1)}, h_1h_2) = [g_1.\theta(h_1)(g_2), h_1h_2]$
2) $(e_G,e_H)(g,h) = (g,h)$
   $(g,h)(e_G,e_H) = (g,h)$
   $e_{GX_\theta H} = (e_G, e_H)$, $G X_\theta H$ nın birim elemanı ve
3) $(g,h)(g,h)^{-1} = (e_G,e_H) = (g,h)^{-1}(g,h)$ olacak şekilde $G X_\theta H$ deki bütün elemanların tersi şöyledir:
   $(g,h)[(g^{-1})^{\theta(h^{-1})}, h^{-1}] = [g,((g^{-1})^{\theta(h^{-1})})^{\theta(h)}, h^{-1}h] = (e_G, e_H)$ ve
   $[(g^{-1})^{\theta(h^{-1})}, h^{-1}](g,h) = [(g^{-1})^{\theta(h^{-1})}.g^{\theta(h^{-1})}, h^{-1}h] = (e_G, e_H)$

dır. Buradan $(g,h)^{-1} = [(g^{-1})^{\theta(h^{-1})}, h^{-1}] = (\theta(h^{-1}))(g^{-1}), h^{-1}]$ (5.2)

Buna göre

$$\sigma: Z\oplus Z \to Z\oplus Z,\ \sigma(x,y) = (x+y,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlı otomorfizma olsun.

$$\sigma^2(x,y) = \sigma(\sigma(x,y)) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\sigma^3(x,y) = \sigma(\sigma^2(x,y)) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

.
.
.

$$\sigma^n(x,y) = \sigma(\sigma^{n-1}(x,y)) = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x+ny, y)$$

biçiminde genelleyebiliriz.

$H = (Z\oplus Z) X_\sigma Z$ yarı-direkt çarpımı nilpotent bir gruptur:

$\psi : Z \to Aut(Z \oplus Z)$

$1 \to \sigma$

$2 \to \sigma^2$

.

.

.

$n \to \sigma^n$

ile tanımlı homomorfizma $\psi(Z) = <\sigma> \leq Aut(Z \oplus Z)$ dır. x_1, x_2, y_1, y_2, m, n $\in$ Z için,

$$[(x_1,y_1),n][(x_2,y_2),m]=[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)^{\psi(n)},n+m]=[(x_1,y_1)+\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix},n+m]$$

$$=[(x_1,y_1)+(x_2+ny_2,y),n+m]=[(x_1,x_2+ny_2,y_1+y_2),n+m]$$

$$[(x_2,y_2),m][(x_1,y_1),n]=[(x_2,y_2)+(x_1,y_1)^{\psi(m)},m+n]=[(x_2,y_2)+\begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix},m+n]$$

$$=[(x_2,y_2)+(x_1+my_1,y_1),m+n]=[(x_2+y_2)+[x_1+x_2+my_1,n+m]$$

$[(x,y),n] \in Z(H) \Leftrightarrow x_1+x_2+ny_2=x_2+x_1+my_1$,

$\forall\ x_2, y_2, n, m \in Z \Leftrightarrow n, y$ sabit, $\forall\ y_2,\ m \in Z$,

$\Leftrightarrow n=0,\ y=0$,

$\Leftrightarrow (x,y)=(x,0)=x(1,0)$,

$\Leftrightarrow Z(H) \cong <(1,0)>$.

Şimdi, $[(x_1,y_1),n]$, $[(x_2,y_2),m] \in H$ için,

$$[H,H]=[(x_1,y_1),n][(x_2,y_2),m][(x_1,y_1),n]^{-1}[(x_2,y_2),m]^{-1}$$

(5.2) yi kullanılarak.

$$= [(x_1,y_1),n][(x_2,y_2),m][(-x_1,-y_1)^{\psi(-n)},-n][(-x_2,-y_2)^{\psi(-m)},m]$$

$$= [(x_1,y_1),n][(x_2,y_2),m][\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix},-n]\left[\begin{pmatrix}1 & -m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x_2\\ -y_2\end{pmatrix},-m\right]$$

$$= [(x_1+x_2+ny_2,y_1+y_2),\ n+m][(-x_1+ny_1,-y_1),-n][(-x_2+my_2,-y_2,-m]$$

$$= [(x_1+x_2+ny_2,y_1+y_2),n+m][(-x_1+ny_1-x_2+my_2+(-n)(-y_2),-y_1-y_2),-n-m]$$

$$=[(x_1+x_2+ny_2-x_1+ny_1-x_2+my_2+ny_2+(n+m)(-y_1-y_2),0),n+m-n-m]$$

$$= [(ny_2-my_1,0),0]$$

dır. burada $y_1, y_2, m, n \in Z$ keyfi tam sayılar ve bu yüzden

$$[H,H] \cong \{(ny_2,my_1,0) \mid n,m,y_1,y_2 \in Z\} = <(1,0)> \cong Z(H).$$

Buradan, $H/Z(H) = H/[H,H]$ değişmeli ve bu nedenle

$\{e\}\ \Delta\ Z(H)\ \Delta\ H$, H nin üst merkezsel serisidir. Böylece H nilpotent gruptur.

Koseti $H/Z\oplus Z$ bölüm grubunu üreten bir $t \in H$ seçilebilir. Yani, $<t+Z\oplus Z> = H/Z\oplus Z$ dir çünkü $H/Z\oplus Z \cong Z$ devirlidir. Buradan $t=[(1,1),1]$ ve $t^2=[(3,2),2]$ olsun. $Z\oplus Z<H$ üzerinde t ile σ eşlenik alma dönüşümü ile çakışır.

$x_0=(0,1) \leftrightarrow ((0,1),0)\ \in Z\oplus Z<H$

$x_1= (1,1) \leftrightarrow ((1,1),0)$

$x_2=(2,1) \leftrightarrow ((2,1),0)$

$x_3=(3,1) \leftrightarrow ((3,1),0)$

olsun ve şu gözlemler yapılabilir:

$$tx_0t^{-1}=[(1,1),1][(0,1),0][(-1,-1)^{\psi(-1)},-1]$$

$= [(1,1),1][(0,1),0][(0,-1),-1]$

$= (2,2,1)(0,-1,1)=(1,1,0) \leftrightarrow (1,1) = x_1$

$t^2x_0t^{-2}=[(3,2),2][(0,1),0][(1,-2),-2]$

$=[(2,1),0]\leftrightarrow(2,1)=x_2$

$t^3x_0t^{-3}=[(6,3),3][(0,1),0][(3,-3),-3]$

$=[(6+3,4)][(3,-3),-3]=((3,1),0)\leftrightarrow(3,1)=x_3.$

İ=0,1,2,3 için $x_i=x_i$-1 olmak üzere, ZH grup halkasındaki dört eleman şöyle olsun:

$\alpha=2t^{-2}x_1x_2$, $\gamma=2t^{-2}x_0x_2+t^{-1}x_0$

$\beta=2t^{-2}x_0x_3$, $\delta=2t^{-2}x_1x_3-t^{-1}x_2.$

Son olarak, $D_8=\langle a,\ b:\ a^4=1=b^2,\ bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ dihedral grup olsun. G= H XD_8 olmak üzere örnek ZG grup halkası içinde kalmaktadır.

KAYNAKLAR

Allen, P.J., Hobby, C., 1980. A Characterization of Units in ZA_4. ***J.Algebra, 66:*** 534-543.

Artamanov, V.A., 1981. Projective Non-free Modules Over group Rings of Solvable Groups. ***Mat.Sb.,116(2)*** : 232-244.

Bovdi, A.A., Marciniak, Z.S., Sehgal, S.K., 1994. Torsion Units in Integral Group Rings. ***J.Number Theory, 47(3)***: 284-299.

Cliff, G.H., Sehgal,S.K., Weiss, A.R., 1981. Units of Integral Group Rings of Metabelian Groups. ***J.Algebra, 73***: 167-185.

Dokuchaev, M.A., 1992. Torsion Units in Integral Group Rings of Nilpotent Metabelian Groups. ***Comm.Algebra,20(2)*** : 423-435.

Hughes, I., Pearson, K.R., 1972. The Group of Units of The Integral Group Rings ZS_3. ***Canad.Math.Bull., 15*** : 529-534.

Huppert, B., 1967. ***Endliche Gruppen***. Springer-Verlag, Heidelberg. 637.

James, G., Liebeck, M., 1993. ***Representations and Characters of Groups***. Cambridge University, London. 419.

Marciniak, Z.S., Sehgal, S.K., 1995. Hirsch Induction and Torsion Units in Group Rings. ***Arch.Math., 64*** : 374-384.

Marciniak, Z.S., Sehgal, S.K., 1996. Finite Matrix Groups Over Nilpotent Group Rings. ***J. Algebra, 181*** : 565-583.

Marciniak, Z.S., Sehgal, Sehgal, S.K., 1996. Zassenhaus Conjecture and Nilpotent Groups. ***J.Algebra, 184*** : 207-212.

Marciniak, Z.S., Ritter, J., Sehgal, S.K., Weiss, A.R., 1987. Torsion Units Integral Group Rings of Some Metabelian Groups. ***J.Number Theory, 25*** : 340-352.

Milies, C.P., Ritter, J., Sehgal, S.K., 1986. On a Conjecture of Zassenhaus on Torsion Units Integral Group Rings II. ***Proc. Amer. Math.Soc., 97*** : 201-206.

Milies, C.P., Sehgal, S.K., 1984. Torsion Units in Integral Group Rings of Metacyclic Groups. ***J. Number Theory, 19*** : 103-114.

Milies, C.P., 1972. The Units of The Integral Group Ring ZD_4. ***Bol. Soc. Mat. Brasil, 4*** : 85-92.

Ritter, J., Sehgal, S.K., 1983. On a Conjecture of Zassenhaus on Torsion Units in Integral Group Rings. ***Math. Ann., 264*** : 257-270.

Sehgal, S.K., 1978. ***Topic in Group Rings.*** Dekker, New York. 251.

Sehgal, S.K., 1993. ***Units in Integral Group Rings***. Pitman Monographs and Survey in Pure and Applied Math., Ed. No:69, New York. 357.

Sehgal, S.K., Weiss, A.R., 1986. Torsion Units in Integral Group Rings of Some Metabelian Groups. ***J.Algebra, 103***: 490-499.

Serre, J.P., 1977. ***Linear Representations of Finite groups.*** Springer-Verlag, Heidelberg. 170.

Yılmaz, A., 1984. ***ZS_4 İntegral Grup Halkasının Birimsellerinin Bir Karakterizasyonu ve ZS_4 için İzomorfizma Problemi*** (doçentlik tezi, basılmamış). H.Ü.Matematik Bölümü, Ankara.

Weiss, A.R., 1980. Idempotents in Group Rings. ***J. Pure Appl. Algebra, 16***: 207-213.

Weiss, A.R., 1988. Rigidity of p-adic Torsion. ***Ann. of Math., 127***: 317-332.

Weiss, A.R., 1991. Torsion Units in Integral Group Rings. ***J. Reine Angew. Math., 415*** : 175-187.

ÖZ GEÇMİŞ

1966'da Konya'nın Kaşınhan Kasabası'nda doğdu. İlkokulu köyünde ve orta öğrenimini Konya'da tamamladı. 1988'de Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 1993 yılında mezun oldu. 1994 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başladı ve aynı yıl Eğitim fakültesine araştırma görevlisi olarak atandı. 1996'da Yüksek Lisansı bitirip aynı yıl Doktora'ya başladı. Evli ve iki çocuk babasıdır.