T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RICHARDSON EKSTRAPOLASYON METODUNUN SAYISAL TÜREV, SAYISAL İNTEGRASYON VE SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan: İlhame AMİRALİYEVA
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU

VAN-2001

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİCHARDSON EKSTRAPOLASYONUNUN SAYISAL TÜREV, SAYISAL İNTEGRASYON VE SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: İlhame AMİRALİYEVA

VAN-2001

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU danışmanlığında, İlhame AMİRALİYEVA tarafından hazırlanan 'Richardson Ekstrapolasyo-nunun sayısal türev, sayısal integrasyon ve singüler pertürbe olmuş başlangıç değer problemlerine uygulamaları' isimli çalışma 20/04/2001 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Heybetkulu Mustafayev imza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU imza: H. Duru

Üye: Yrd. Doç. Dr. Aytekin GÜLLE imza: A. Gülle

Üye: .... imza:

Üye: .... imza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 08./06./2001 gün ve 2001/17-IX sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç.Dr.Hayrettin OKUT
Enstitü Müdürü

....

Enstitü Müdürü

ÖZET

RICHARDSON EKSTRAPOLASYON METODUNUN SAYISAL TÜREV, SAYISAL İNTEGRASYON VE SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNE UYGULAMALARI

AMİRALİYEVA, İlhame
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı:Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU
Mart 2001, 37 sayfa

Bu çalışmada Richardson metodunun Nümerik Analizdeki bazı uygulamaları ele alınmıştır. Bu metot yaklaşık çözümün kesinliğinin yükseltilmesi için kullanılan en modern ve pratik metotlardan sayılmaktadır. Sunulan bu çalışmada ekstrapolasyon metodunun nümerik diferansiyelleme, nümerik integrasyon, adi diferansiyel denklem için başlangıç-değer problemi ve singüler pertürbe olmuş başlangıç-değer problemi gibi alanlardaki uygulamaları incelenmektedir. Ele alınan her durum için hata değerlendirmeleri yapılmış ve bunların orijinal çözümün düzgünlüğü ile bağlantı şekli verilmiştir. Teorik sonuçlar nümerik örnekler üzerinde denetlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Richardson ekstrapolasyon, başlangıç-değer problemi, singuler pertürbasyon problemi, fark şeması, düzgün yakınsaklık

ABSTRACT

APPLICATIONS OF RICHARDSON EXTRAPOLATION FOR NUMERICAL DERIVATION, NUMERICAL INTEGRATION AND SINGULARLY PERTURBED INITIAL VALUE PROBLEMS

AMİRALİYEVA, İlhame
Master, Mathematics Science
Supervisor:Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU
March 2001, 37 pages

In this study, a technique known as Richardson's Extrapolation is embloyed to generate results of high accuracy by using low-order formulas. This investigation is concerned with the numerical differentation, numerical integration, numerical solution by finite difference method of initial value problem and singularly perturbed initial value problem. Uniform error estimates are esteblished. A numerical examples are also considered.

Key words: Richardson Extrapolation, initial value problem, singular perturbation problem, difference scheme, uniform convergence

ÖN SÖZ

Nümerik Analizde homojen algoritmaların kullanışı dikkat çekilmesi istenen yaklaşımdır. Orijinal probleme uygun nümerik metodun bilgisayarda programlanması ve realizasyonu aşamasında bu özellik daha büyük önem arz etmektedir. Bu açıdan, Richardson metodu geniş avantajlara sahip olup, özellikle fizik ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde yaygın şekilde kullanılmaktadır. Bu metodun esasını, basit modelin ardışık şebekelerde uygulanması sonucu daha kesin sonuçlara varılması teşkil eder. Değişik şebekelerde eşyapılı (homojen) modelin kullanılışı realizasyon için büyük kolaylık sağlar. Bu çalışmada Richardson ekstrapolasyonunun sayısal türev, sayısal integral ve sonlu fark şemalarına uygulamaları verilmektedir. Metot, çözümün önceden istenen kesinliği sağlayacak biçimde bulunmasına imkan sağlıyor.

Bu çalışma süresince göstermiş olduğu yakın ilgi ve yardımlarından dolayı saygıdeğer hocam ve danışmanım Yard. Doç. Dr. Hakkı DURU'ya teşekkür ve saygılarımı sunarım.

İlhame AMİRALİYEVA

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Richardson Ekstrapolasyonu diye bilinen bu teknik, düşük dereceli formüller kullanılarak yüksek nitelikte sonuçlar bulmak için sıkça kullanılır. Bu metodun ismi Richardson ve Gaunt, 1927 tarafından yazılan bir makaleden alınmışsa da tekniğin ardındaki metodun fikri Archimedes'e kadar uzanmaktadır.

Ekstrapolasyonun tarihi ve uygulamaları hakkında ilginç bir makale SIAM Review'de (Joyced, 1971) tarafından yazılmıştır.

Ekstrapolasyon tekniği bir çok nümerik analiz dallarında kullanılmıştır. En çok bilinen uygulamalar integralin yakınsamasında ve diferansiyel denklemlerin çözümlerine yaklaşımda ortaya çıkmaktadır (Burden ve Faires, 1989).

Diferansiyel denklemler için singular perturbe olmuş problemler,uygulamalı matematiğin bir çok değişik alanlarında kullanılmaktadır. Örneğin; akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, elastik kuantum mekaniği, plastik, kimyasal-reaktör teori, aerodinamik, plazma dinamik, manyetik dinamik, arıtılmış-gaz dinamik, oşınografi, meteoroloji, yayma teori, reaksiyon-difuzyon süreçleri ve ışın yayan dalgalar vb. gibi sahalarda çok sık ortaya çıkarlar (Kadalbajoo ve Reddy,1989; O'Malley,1990). Bu tür problemler, yüksek türevler karşısında küçük pozitif bir parametrenin bulunduğu problemler olarak bilinir. Böyle problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında çok hızlı değişime sahip olur. Yani, çözüm ince geçiş katlarında hızlı, diğer yerlerde düzenli ve yavaş değişir. Bu nedenle de klasik nümerik yöntemlerin kararsızlıkları nedeniyle uygulanması imkansız olur. Böylece singular perturbe olmuş problemlerin işleyişinde ciddi zorluklar ortaya çıkıyor. Bu özellikler nümerik çözümde de kendini gösteriyor (Doolan ve ark., 1980; Amiraliyev ve Duru, 1999; Asher ve ark., 1998; Farrell ve ark., 2000).

Ekstrapolasyon tekniğini genel olarak izah edilebilmek için N(h)'nin bilinmeyen bir M değerine $O(h^2)$ biçiminde yaklaşımlar üreten bir formül olduğunu varsayalım. N(h)'ın M'ye yaklaşımı için hata formunun;

$$M = N(h) + K_1h^2 + O(h^4) \qquad (1.1)$$

şeklinde ifade edilebildiği varsayılsın. (Burada K_1, h'ye bağlı değildir).

(1.1) eşitliğinde h yerine h/2 yazılırsa, yeni muhtemelen daha hassas bir N(h/2) yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım;

$$M = N(h/2) + K_1h^2/4 + O((h/2)^4) \qquad (1.2)$$

eşitliğini sağlar.

$(h/2)^4 = h^2/16$ olduğundan bu ikinci yaklaşımın da derecesi $0(h^4)$'tür.

(1.2) eşitliği 4 ile çarpılır ve (1.1) eşitliği çıkarılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$3M = 4N(h/2) - N(h) + O(h^4)$$

veya

$$M = \frac{4N(\frac{h}{2}) - N(h)}{3} + O(h^4). \tag{1.3}$$

Kolaylık için $N_1(h) = N(h)$ ve

$$N_2(h) = \frac{4N_1(\frac{h}{2}) - N_1(h)}{3} \tag{1.4}$$

eşitlikleri tanımlansın.

Bu gösterim kullanılarak, aşağıda bulunan Tablo 1'deki M'ye olan yaklaşımlar üretilebilir. $N_1(h/2^k)$, $O((h/2^k)^2)$ derecesinde sahip iken $N_2(h/2^k)$'nın derecesi $O((h/2^k)^4)$ olur. Eğer ilave olarak h'den bağımsız bir K_2 sayısı varsa ve (1.1) eşitliği

$$M = N(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + O(h^6)$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa ekstrapolasyon tablosuna üçüncü bir sütun eklenebilir. Bu durumda (1.3) eşitliği aşağıdaki şekle dönüşür;

$$M = \frac{4N_1(\frac{h}{2}) - N_1(h)}{3} + \frac{4K_2(\frac{h}{2})^4 - K_2h^4}{3} + O(h^6)$$

veya

$$M = N_2(h) - \frac{1}{4}K_2h^4 + O(h^6) \tag{1.5}$$

burada h yerine h/2 yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$M = N_2(h/2) - \frac{1}{64}K_2h^4 + O(h^6). \tag{1.6}$$

burada h yerine h/2 yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$M = N_2(h/2) - \frac{1}{64}K_2h^4 + O(h^6). \qquad (1.6)$$

Tablo 1.1.

$N_1(h)$	
$N_1(h/2)$	$N_2(h)$
$N_1(h/4)$	$N_2(h/2)$
$N_1(h/8)$	$N_2(h/4)$
.	.
.	.

(1.6), 16 ile çarpılır, (1.5) çıkarılır ve 15'e bölünürse aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$M = \frac{16N_2(\frac{h}{2}) - N_2(h)}{15} + O(h^6) \qquad (1.7)$$

Eğer

$$N_3(h) = \frac{16N_2(\frac{h}{2}) - N_2(h)}{4^2 - 1}$$

şeklinde tanımlanırsa aşağıdaki ifade elde edilir

$$N_3(h) = \frac{16N_2(\frac{h}{2}) - N_2(h)}{15} \qquad (1.8)$$

$N_3(h/2^k)$, M'ye bir $O((h/2^k)^6)$ yaklaşımında olacaktır. Bu işlem m tane sütuna genişletilirse N(h)'nin M'ye yaklaşımı;

$$M = N(h) + \sum_{j=1}^{m-1} K_j h^{2j} + O(h^{2m})$$

Örnek 1.1.

$f'(x_0)$' a yaklaşmak için (4.13)'deki merkezi fark formülü için

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]+\frac{h^2}{6}f''(x_0)-\frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0)+O(h^6)$$

yazılabilir.

Önceki gösterimler kullanılırsa

$$M=f'(x_0)$$

$$K_1=-\frac{1}{6}f''(x_0),\quad K_2=-\frac{1}{120}f^{(5)}(x_0)$$

$$N(h)=\frac{1}{2h}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]$$

yazılır.

$x_0=2.0,\ h=0.2,\ f(x)=xe^x$ varsayılırsa bu durumda

$$N(0.2)=\frac{1}{0.4}[f(2.2)-f(1.8)]=22.414160$$

$N(0.1)=22.228786$

$N(0.05)=22.182564.$

Bu veriler için ekstrapolasyon tablosu Tablo 2.'de verilmiştir.

Tablo 1.2.

$N_1(0.2)=22.414160$

$N_1(0.1)=22.228786\quad N_2(0.2)=\dfrac{4N_1(0.1)-N_1(0.2)}{3}=22.166998$

$N_1(0.05)=22.182564\quad N_2(0.1)=\dfrac{4N_1(0.05)-N_1(0.1)}{3}=22.167157$

$$N_3(0.2)=\frac{16N_2(0.1)-N_2(0.2)}{15}$$
$$=22.167168.$$

Bu çalışmada Richardson ekstrapolasyon metodu sayısal diferansiyelleme, sayısal integrasyon, diferansiyel denklemler için başlangıç-değer probleminin ve singüler pertürbe olmuş başlangıç-değer probleminin çözümüne uygulanışı ele alınmıştır.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Rechardson ekstrapolasyon metodu tanıtılmaktadır.

İkinci bölüm bu metodun nümerik diferansiyellemeye uygulanışı takdim edilmiştir.

Üçüncü bölümde Rechardson ekstrapolasyon metodunun nümerik integrasyona uygulanışı olan Romberg integrasyon metodu tanıtılmıştır.

Dördüncü ve beşinci bölümlerde bu metodun sırayla diferansiyel denklemler için başlangıç-değer ve singüler perturbe olmuş başlangıç-değer problemlerinin çözümüne uygulaması ele alınmıştır.

2. SAYISAL TÜREV İÇİN EKSTRAPOLASYON METODU

Ekstrapolasyon tablosundaki birinci sütun dışındakiler basit ortalama alma işlemi ile elde edildiği için bu teknik, minimum yuvarlama hata ve işlem maliyetile yüksek dereceli yaklaşımlar üretir. Bununla birlikte nümerik türev almadaki kararsızlık sebebiyle, $N_1(h/n^k)$'daki yuvarlatma hatası genelde k'nın artmasıyla artacaktır.

$f'(x_0)$ türevinin yaklaşık hesabı için üç ve beş nokta formülleri kullanılır. Üç nokta formülleri $\xi_0 \in (x_0, x_0 + 2h)$ olmak üzere

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0) \qquad (2.1)$$

ve $\xi_1 \in (x_0 - h, x_0 + h)$ olmak üzere

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1) \qquad (2.2)$$

biçimindedir. Üç nokta formülleri, f için bir Lagrange interpolasyon (ya da interpolasyon) polinomunun türevini almak suretiyle elde edilir (Burden ve Faires, 1989).

Beş nokta formülleri de benzer şekilde elde edilebilir. Fakat türev alma işlemi uzun ve sıkıcıdır. Ekstrapolasyon bu formülleri daha kolay türetmek için kullanılır.

Şimdi f fonksiyonu x_0 civarında dördüncü dereceden Taylor polinomuna açılsın. O zaman

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}(x - x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{120}(x - x_0)^5$$

olur ve ξ sayısı x ile x_0 arasındadır. f'nin $(x_0 + h)$ ve $(x_0 - h)$ noktalarında açılımları hesaplanırsa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}h^4 + \frac{f^{(5)}(\xi_1)}{120}h^5 \qquad (2.3)$$

ve

$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2-\frac{f'''(x_0)}{6}h^3$$
$$+\frac{f^{(4)}(x_0)}{24}h^4-\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{120}h^5 \qquad (2.4)$$

elde edilir. Burada $x_0-h<\xi_2<x_0<\xi_1<x_0+h$'dır. (2.4), (2.3)'den çıkarılırsa aşağıdaki formül elde edilir

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=2hf'(x_0)+\frac{h^3}{3}f'''(x_0)+\frac{h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_1)+f^{(5)}(\xi_2)] \qquad (2.5)$$

Eğer $f^{(5)}$, $[x_0-h,x_0+h]$ kapalı aralığında sürekli ise, ara değer terimi (x_0-h,x_0+h) açık aralığında

$$f^{(5)}(\xi)=\frac{1}{2}[f^{(5)}(\xi_1)+f^{(5)}(\xi_2)]$$

şartını sağlayan bir ξ sayısının varlığını gerektirir. Sonuç olarak (2.5) eşitliği $O(h^2)$ yaklaşımını vermek için $f'(x_0)$'a göre çözülebilir:

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]-\frac{h^2}{6}f'''(x_0)-\frac{h^4}{120}f^{(5)}(\xi) \qquad (2.6)$$

Eşitlik (2.6)'deki yaklaşım (2.2)'deki üç nokta formülünde verilenle aynı olmasına rağmen bilinmeyen değerlendirme noktası f''' yerine $f^{(5)}$'de görünmektedir.

Extrapolasyon (2.2)'deki h yerine 2h alarak bir avantaj elde eder ve yeni formül ortaya çıkar.

$$f'(x_0)=\frac{1}{4h}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]-\frac{4h^2}{6}f'''(x_0)-\frac{16h^4}{120}f^{(5)}(\xi) \qquad (2.7)$$

Burada ξ, x_0-2h ile x_0+2h arasındadır. (2.7)'deki eşitliği 4 ile çarpıp (2.6) çıkarılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$3f'(x_0)=\frac{2}{h}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]-\frac{1}{4h}[f(x_0+2h)-f(x_0-2h)]$$

$$-\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\tilde{\xi})-\frac{h^4}{15}5f^{(5)}(\hat{\xi})$$

Eğer $f^{(5)}$, $[x_0-2h,x_0+2h]$ kapalı aralığında sürekli ise; bir alternatif metot, $f^{(5)}(\tilde{\xi})$ ve $f^{(5)}(\hat{\xi})$ değerlerinin $f^{(5)}(\xi)$ ortak değeri ile yer değiştirebileceğini göstermek için kullanılabilir. Bu sonuç kullanılarak ve 3 ile bölünerek beş nokta formülü elde edilir.

$$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$

$$+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

Birinci ve daha yüksek dereceli türevler için başka formüller benzer şekilde türetilebilir. Ekstrapolasyon, bir formül için kesme hatası K_j sabitleri . koleksiyonu için

$$\sum_{j=1}^{m-1}K_j h^{\alpha_j}+O(h^{\alpha_m}),\ \alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_m,$$

şeklindeyse uygulanabilir.

3. SAYISAL İNTEGRASYON İÇİN RICHARDSON EKSTRAPOLASYON METODU

Bu yönteme olan ihtiyaç, açık bir şekilde yazılabilen bir ilkeli olmayan ya da ilkeli kolaylıkla hesaplanamayan bir fonksiyonun belirli integralini hesaplamada ortaya çıkar.

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralini yaklaşık hesaplamadaki temel metoda nümerik quadrature denir. $\int_a^b f(x)dx$ integraline yakınsaması için

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

biçiminde bir toplam kullanılır.

Bu bölümde ele alınacak hesaplama yöntemleri interpolasyon formüllerine dayanmaktadır. İlke olarak [a, b] aralığından $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ şeklinde bir ayrık düğüm noktaları kümesi seçilir.

Eğer P_n,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Lagrange interpolasyon polinomu ise, P_n ve kesim hatası terimi [a, b] üzerinde integre edildiğinde aşağıdaki ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))dx .\end{aligned}$$

Burada her x için $\xi(x)$ [a,b] aralığındadır ve her i=0,1,.....,n için $a_i = \int_a^b f(x)dx$ olur.

Bu durumda kuadratur formülü

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),$$

hata terimi

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)f^{(n+1)}(\xi(x))dx$$

olur.

Kuadratur formüllerinin genel durumu ele alınmadan önce eşit adımlı düğümlerden oluşan kümede birinci ve ikinci Lagrange polinomu kullanılarak elde edilen formülleri göz önüne alınacaktır. Bu formüller yamuk kuralı ve Simpson kuralıdırlar.

$\int_a^b f(x)dx$ integralinin yaklaşık çözümünü hesaplamada yamuk kuralını türetmek için $x_0 = a$, $x_1 = b$ ve $h = b - a$ alınır ve aşağıdaki doğrusal Lagrange polinomu

$$P_n(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

kullanılır. Böylece

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)\right]dx \qquad (3.1)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)dx$$

$(x - x_0)(x - x_1)$ ifadesi $[x_0, x_1]$ aralığında işaret değiştirmediğinden hata terimine integral için ağırlıklı ortalama değer teoremi uygulanabilir ve

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$= \frac{(x_1-x_0)}{2} [f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

olur. $h = x_1 - x_0$ olduğundan yamuk kuralı

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

$x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = b$ düğüm noktalarıyla ikinci Lagrange polinomu ve $h = \dfrac{b-a}{2}$ ile $[a,b]$ aralığında integral almak suretiyle Simpson kuralı elde edilir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \Big[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1)$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \Big] dx$$
$$+ \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x))dx.$$

Simpson kuralının bu tarzda türetilmesi, $f^{(3)}$'ü ihtiva eden hata teriminin $O(h^4)$ yakınsamasını sağlar. Başka yollarla $f^{(4)}$'ü ihtiva eden daha yüksek mertebeli terim elde edilebilir.

Alternatif formülü teşkil etmek için f fonksiyonunun x_1 noktası civarında üçüncü Taylor polinomunda açılımı yazılsın. Daha sonra $\forall x \in [x_0, x_2]$ için bir $\xi(x) \in (x_0, x_2)$ sayısı var öyle ki,

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3$$
$$+ \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4$$

ve

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = f(x_1)(x_2 - x_0) + f'(x_1)(x - x_1) + \left[\frac{f''(x_1)}{2}(x - x_1)^2\right. \quad (3.2)$$

$$\left. + \frac{f'''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(x_1)}{24}(x - x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2}.$$

$$+ \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4 dx$$

$(x - x_1)^4$ ifadesi $[x_0, x_2]$ aralığında negatif olmadığından integraller için ağırlıklı ortalama değer teoremi uygulanır. Böylece $\xi_1 \in (x_0, x_2)$ sayısı için

$$\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}\int_{x_0}^{x_2}(x - x_1)^4 dx$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120}(x - x_1)^5 \Big]_{x_0}^{x_2}$$

olur. $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ olduğundan (3.2) eşitliği

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

olur.

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2)$$

eşitliği $f''(x_1)$ yerine yazılırsa

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\{\frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2)\}$$

$$+ \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^2}{12}[\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_1)]$$

Bu ifadede ξ_1 ve ξ_2 değerleri ortak bir $\xi \in (x_0, x_2)$ değeriyle yer değiştirebilir. Böylece Simpson kuralı:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi).$$

Hata terimi f fonksiyonunun dördüncü türevini içerdiği için Simpson kuralı üçüncü veya daha düşük dereceli polinomlara uygulandığında kesin sonuçlar verir.

Kuadratur hata formüllerinin standart türevleri, bu formüllerin kesin sonuçlar üreten polinomların sınıfını belirlemeye dayanır. Aşağıdaki tanım bu türevin elde edilişini kolaylaştırmak için kullanılır.

Tanım 3.1. Kuadratur formülünün uygunluk derecesi, n'ye eşit veya daha düşük dereceli her P_k polinomu için $E(P_k)=0$, fakat $n+1$ dereceli bazı polinomlar için $E(P_{n+1}) \neq 0$ olan n pozitif tamsayısıdır. Bu tanıma göre yamuk ve Simpson kuralının uygunluk derecesi bir ve üçtür.

Yamuk ve Simpson kuralları Newton-Cotes formülleri olarak bilinen metotlar sınıfının örnekleridir. Newton-Cotes formüllerinin iki tipi vardır: açık formüller ve kapalı formüller.

$n+1$ noktalı kapalı Newton-Cotes formülü $x_0 = a$, $x_n = b$ ve $h=(b-a)/n$ olmak üzere $x_i = x_0 + ih\,(i=0,1,2,\ldots,n)$ düğüm noktalarını kullanır. $n+1$ noktalı kapalı Newton-Cotes formülü

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

şeklindedir. Burada

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}dx.$$

Aşağıdaki teorem kapalı Newton-Cotes formüllerinin hata analizi ile ilgilidir. Teoremin ispatı için bakınız (Isaacson ve Keller,1966).

Teorem 3.1. $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$; $x_0 = a$, $x_n = b$ ve $h = (b-a)/n$ ile $n+1$ noktalı kapalı Newton-Cotes formülünü göstersin. n çift ve $f \in C^{n+2}[a,b]$ ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)(t-2)...(t-n)dt$$

,

n tek ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ ise

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)(t-2)...(t-n)dt$$

olacak şekilde bir $\xi \in [a,b]$ mevcuttur.

Açık Newton-Cotes formülünde $x_0 = a + h$ ve $h = (b-a)/(n+2)$ olmak üzere $x_i = x_0 + ih\ (i = 0,1,2,...,n)$ düğüm noktaları kullanılır. Bu $x_n = b - h$ olmasını gerektirir. Öyle ki uç noktalar $x_{-1} = a$ ve $x_{n+1} = b$ ile gösterilir. Açık Newton-Cotes formülü

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Burada

$$a_i = \int_a^b L_i(x)dx.$$

Aşağıdaki teorem teorem 1'in benzeridir. İspatı için bakınız (Isaacson ve Keller,1966).

Teorem 3.2. $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$; $x_{-1} = a$ ve $x_{n+1} = b$ ve $h = (b-a)/(n+2)$ ile $n+1$ noktalı açık Newton-Cotes formülünü göstersin. n çift ve $f \in C^{n+2}[a,b]$ ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_1^{n+1} t^2 (t-1)(t-2)...(t-n)dt,$$

n tek ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ ise

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_1^{n+1} t(t-1)(t-2)...(t-n)dt$$

olacak şekilde bir $\xi \in [a,b]$ mevcuttur.

3.1. Romberg İntegrasyonu

Yamuk kuralı Newton-Cotes formülünün bir uygulaması olmasına rağmen genel olarak uygunluk derecesi yetersizdir. Romberg integrasyon geniş uygulamaya sahiptir çünkü bu metotta önce ilk yaklaşım için yamuk kuralı kullanılır ve daha sonra yaklaşımların duyarlılığını artırmak için Richardson ekstrapolasyon prosesi uygulanır.

m tane alt aralık kullanılarak $[a,b]$ aralığı üzerinde bir f fonksiyonunun integrali için birleşik yamuk kuralı

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i)] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\mu)$$

şeklindedir. Burada $a < \mu < b$, $h = (b-a)/m$ ve $j = 0,1,...,m$ için $x_j = a + jh$.

Romberg prosesinde ilk adım $m_1 = 1$, $m_2 = 2, ..., m_n = 2^{n-1}$ ile yamuk kuralı tahminlerinin elde edilmesini içerir. Burada n bir kısım pozitif tamsayıdır. m_k'e tekabül eden adım değeri h_k, $h_k = (b-a)/m_k = (b-a)/2^{k-1}$ ve bu gösterimlerle yamuk kuralı

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_k}{2}[f(a) + f(b) + 2(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k))] - \frac{(b-a)}{12} h_k^2 f''(\mu_k) \quad (3.3)$$

Burada $\mu_k \in (a,b)$.

$R_{k,1}$ gösterimi, trapezoidal yaklaşım için kullanılan (3.3) denkleminin bölüntüsünü göstermek için sunulursa, bu durumda

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a)+f(b)] = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)];$$

$$\begin{aligned} R_{2,1} &= \frac{h_2}{2}[f(a)+f(b)+2f(a+h_2)] \\ &= \frac{b-a}{4}[f(a)+f(b)+2f(a+\frac{b-a}{2})] \\ &= \frac{1}{2}[R_{1,1}+h_1 f(a+\frac{1}{2}h_1)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{3,1} &= \frac{h_3}{2}\{f(a)+f(b)+2[f(a+\frac{b-a}{4}) \\ &\quad +f(a+\frac{b-a}{2})+f(a+\frac{3(b-a)}{4})]\} \\ &= \frac{b-a}{8}\{f(a)+f(b)+2[f(a+\frac{b-a}{4}) \\ &\quad +f(a+\frac{b-a}{2})+f(a+\frac{3(b-a)}{4})]\} \\ &= \frac{1}{2}\{R_{2,1}+h_2[f(a+\frac{h_2}{2})+f(a+\frac{3h_2}{2})]; \end{aligned}$$

ve genelde $k = 2,3,\dots,n$ için

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a+(i-\frac{1}{2})h_{k-1})]. \qquad (3.4)$$

Richardson ekstrapolasyon prosedürü, yamuk kuralındaki yaklaşımı hızlandırmak için uygulanır. Eğer ise $f \in C^4[a,b]$ ise (3.3) denkleminde verilen birleşik yamuk kuralı başka bir hata terimiyle

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h_k}{2}[f(a)+f(b)+2(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a+ih_k))] \qquad (3.5) \\ &\quad -\frac{h_k^2}{12}[f'(b)+f'(a)] + \frac{(b-a)h_k^4}{720} f^{(4)}(\mu_k) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $k = 1,2,3,\dots,n$ ve $a < \mu_k < b$.

Bu şekildeki birleşik yamuk kuralıyla h_k^2'yi içeren terimler denklemlerin birleştirilmesiyle yok edilebilir:

$$\int_a^b f(x)dx = R_{k-1,1} - \frac{h_{k-1}^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + \frac{(b-a)h_{k-1}^4}{720} f^{(4)}(\mu_{k-1})$$

ve

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= R_{k,1} - \frac{h_k^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + \frac{(b-a)h_k^4}{720} f^{(4)}(\mu_k) \\ &= R_{k,1} - \frac{h_{k-1}^2}{48}[f'(b) - f'(a)] + \frac{(b-a)h_k^4}{720} f^{(4)}(\mu_k).\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} + \frac{(b-a)}{2160}[4h_k^4 f^{(4)}(\mu_k) - h_{k-1}^4 f^{(4)}(\mu_{k-1})] \\ &= \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} + O(h_k^4).\end{aligned}$$

Bu teknikle elde edilen yaklaşım, $h = h_k$ 'lı birleşik Simpson kuralıyla verilen yaklaşımdır öyle ki, hatanın h_k^4 mertebeden olması beklenir.

Romberg şemasını devam ettirmek amacıyla her $k = 2,3,\ldots,n$ için

$$R_{k,2} = \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}$$

tanımlanır ve Richardson ekstrapolasyon prosedürü bu değerlere uygulanır. $f \in C^{2n+2}[a,b]$ ise bu durumda (3.5)'deki kural $k = 1,2,3,\ldots,n$ için genelleştirilebilir. Böylece k alt aralık üzerinde birleşik yamuk kuralı, (3.5) eşitliğindekine benzer hata terimiyle ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{h_k}{2}[f(a) + f(b) + 2(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k))] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} K_i h_k^{2i} + O(h_k^{2k+2}).\end{aligned}$$

Burada her i için K_i , h_k'dan bağımsızdır ve sadece $f^{(2i-1)}(a)$ ve $f^{(2i-1)}(b)$ değerlerine bağılıdır. Bu durumda Romberg şemasını üretmek amacıyla her $i = 2,3,\ldots,n$ ve $j = 1,2,3,\ldots,i$ için

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1} R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

şeklinde devam edilebilir.

Büyük j indisli $R_{i,j}$ değerleri, yüksek mertebeli çift Newton-Cotes formülüne karşı gelir. $R_{i,j}$ ile oluşan kesme hatası $O(h_i^2)$ olur ve $f^{(2i+2)}$ değerini içerir. Yaklaşımlar aşağıdaki şekilde bir tabloyla sunulurlar:

$$\begin{array}{cccccc}
R_{1,1} & & & & & \\
R_{2,1} & R_{2,2} & & & & \\
R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & & \\
. & . & . & . & & \\
. & . & . & . & . & \\
R_{n,1} & R_{n,2} & R_{n,3} & . & . & R_{n,n}
\end{array}$$

$R_{n,1}$ değerleri bu köşegen değerlere yakınsadığından köşegen boyunca olan terimler integrale yakınsar. Köşegen elemanlardan oluşan dizi birinci sütun değerlerinden oluşan diziden daha hızlı olarak yakınsar (Ralston ve Rabinowitz, 1978).

Romberg tekniği istenen ilave özelliklere sahiptir. Yamuk kuralının basitçe uygulanmasıyla Tablodaki yeni satırın tamamını hesaplatır ve daha sonra önceden hesaplanan değerleri kullanarak satırdaki ele alınan girişleri bulur. Böyle bir tablo oluşturmak için kullanılan bu metot girişleri satır satır hesaplar: $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{2,2}$, $R_{3,1}$, $R_{3,2}$, $R_{3,3}$,... .

3.2. Runge Metodu ile Hatanın Aposlerior Değerlendirilmesi

Runge metodu ile hatanın aposlerior değerlendirilmesi integralleme adımının otomatik seçilmesi.

Nümerik integrallemedeki hatanın büyüklüğü şebekenin adımı h 'a bağımlı olduğu gibi düzgün olan integral altı fonksiyonuna da bağımlıdır. Örneğin,

$$|\psi_i| \le \frac{M_{2,i} h^3}{12}$$

eşitsizliğine h 'ın yanı sıra

$$M_{2,i} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$$

da dahildir. Bu da noktadan noktaya hızla değişebilir ve genelde önceden bilinemez. Eğer hata çok büyükse $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında şebeke küçültülerek azaltılabilir. Bunun için her şeyden önce aposlerior değerlendirmeyi bilmek gerekiyor, yani hesaplamalar yapıldıktan sonra hatayı değerlendirmek gereklidir.

Hatanın apolerior değerlendirilmesi Runge metodu ile yapılabilir. Bu yöntemi önce yamuk formülünde açıklayalım. $[a, b]$ aralığı farklı $h_i = x_i - x_{i-1}$ uzunluklara sahip olan $[x_{i-1} - x_i]$, $i = 1,2,\dots,N$, $x_0 = a$, $x_N = b$ alt aralıklarına bölünmüş olsun. Her alt aralıkta yamuk formülü kullanılmaktadır.:

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f_i + f_{i-1}}{2} h_i = I_{h,i}$$

ve

$$|\psi_i| \le \frac{M_{2,i} h^3}{12}$$

ifadelerinden

$$I_i - I_{i,h} \approx c_i h^{i^3}$$

elde edilir. Burada c_i, $f(x)$ 'in düzgünlüğüne bağlıdır ve önceden bilinmemektedir. $[x_{i-1} - x_i]$ aralığında şebekeyi iki defa küçültelim ve $0{,}5h$ adımıyla işlemi devam ettirelim:

$$I_{h/2,i} = (f_{i-1} + 2f_{i-1/2} + f_i)\frac{h_i}{4}.$$

O zaman,

$$I_i - I_{h/2,i} \approx c_i \left(\frac{h_i}{2}\right)^3 \tag{3.7}$$

elde edilir.

(3.6) ve (3.7)'den c_i sabiti silinip, sadece bilinen uzunluk olan $I_{h,i} - I_{h/2,i}$'yi içeren hata değeri bulunabilir:

$$I_i - I_{h,i} \approx \frac{8}{7}\left(I_{h/2,i} - I_{h,i}\right)$$

$$I_i - I_{h/2,i} = \frac{1}{8}\left(I_i - I_{h,i}\right) \approx \frac{1}{7}\left(I_{h/2,i} - I_{h,i}\right).$$

Diğer ikinci dereceden formüllerin hatalarının hesaplanması için de Runge metodunu kullanılabilir. Varsayalım ki, herhangi ikinci dereceden bir formül alt aralıkta m kesinlik derecesine sahiptir. Yani $I_i - I_{h,i} \approx c_i h_i^m$. Bu durumda

$$I_i - I_{h/2,i} \approx c_i \left(\frac{h_i}{2}\right)^m.$$

Buradan aşağıdaki ifadeler

$$I_i - I_{h,i} \approx 2^m \left(I_i - I_{h/2,i}\right) \tag{3.8}$$

$$I_i - I_{h/2,i} \approx \frac{I_{h/2,i} - I_{h,i}}{2^m - 1} \tag{3.9}$$

elde edilir. Hatayı aposlerior değerlendirebilmek $\varepsilon > 0$ kesinliği ile verilmiş $I = \int_a^b f(x)dx$ integrali, integrasyon adımı olan h_i'yi otomatik seçerek hesaplamaya müsaade eder. İkinci dereceden formül:

$$I \approx I_h = \sum_{i=1}^{N} I_h$$

biçiminde olsun. Burada $I_{h,i}$, alt aralıktaki kuadratür toplamıdır. Öyle ki, bütün alt aralıklarda aynı kuadratur toplamı kullanılıyor: Yamuk formülü, Simpson formülü vb.

Her $[x_{i-1} - x_i]$ alt aralıkta hesaplamalar iki defa yapılsın. Birincide h_i adımıyla ve hatalar Runge metoduna göre değerlendirilsin.

Verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$|I_i - I_{h/2,i}| \approx \frac{|I_{h/2,i} - I_{h,i}|}{2^m - 1} \leq \frac{\varepsilon h_i}{b-a}, \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu durumda;

$$|I - I_{h/2}| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{N} h_i = \varepsilon$$

elde edilir.

Eğer bu alt aralıkların herhangi birinde (3.10) eşitsizliği sağlanmıyorsa o zaman bu aralıkta adım iki defa daha küçültülmeli ve yeniden hata hesaplanmalıdır. Verilen aralıkta şebekenin küçültülmesi (3.10) şeklinde bir değer elde edilene kadar devam ettirilmelidir. Bazı f(x) fonksiyonları için bu küçültme işlemi çok uzun sürebilir. Bu nedenle bu programda küçültme sayısındaki yukarıdan kısıtlamayı ve ε 'nun büyüyebilme ihtimalini görebilmek önemlidir.

Böylelikle integralleme adımının otomatik seçilmesi integrallemenin $f(x)$ 'in yavaş değiştiği aralıklarda büyük adımlarla, $f(x)$ 'in hızlı değiştiği aralıklarda küçük adımlarla yapılmasına sebep olur. Bu da verilen kesinlikteki ε 'da şebekedeki sabit adımlarla yapılan hesaba göre $f(x)$ değerlerinin daha kolay hesaplanması için işlem sayısını azaltmaya imkan sağlıyor. Ayrıca, $I_{h/2,i}$ toplamının bulunması için, $f(x)$ değerlerini bütün düğüm noktalarında tekrar tekrar hesaplamaya gerek yok, sadece yeni düğümlerde hesaplamak yeterlidir.

Örnek 3.1.

Örnek olarak Simpson formülünün yamuk formülünden çıkarılışı gösterilsin. Yamuk metodu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} h = h(0{,}5f_0 + f_1 + \ldots + f_{N-1} + 0{,}5f_N)$$

Burada $f_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,...,N)$, $h_N = b - a$. Yamuk formülü kullanılarak hesaplama yapılsın. Birinci hesaplama h adımıyla yapılsın yani; $I_h = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_i + f_{i-1}}{2} h$ $(f_i = f(x_i)$ $x_i = a + ih)$, toplamının hesaplaması h adımıyla yapılsın.

İkinci hesaplama ise yani;

$$I_{h/2} = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{f_{i-1} + f_{i-1/2}}{2} \right) + \left(\frac{f_{i-1/2} + f_i}{2} \right) \right] \frac{h}{2} = \sum_{i=1}^{N} \left(f_{i-1} + 2f_{i-1/2} + f_i \right) \frac{h}{4}$$

,

(burada $f_{i-1/2}(x_i - 0{,}5h)$) toplamının hesaplanması $0{,}5h$ adımıyla yapılsın.

Taylor açılımı kullanılarak yeterince düzgün $f(x)$ fonksiyonu için;

$$I_h = I + C_1 h^2 + O(h^4)$$

eşitliğinin doğruluğu gösterilebilir. Burada $I = \int_a^b f(x)dx$ ve C_1, h'a bağlı olmayan sabittir. Aynı şekilde

$$I_{h/2} = I + C_1 \left(\frac{h}{2} \right)^2 + O(h^4).$$

Buradan

$$I_{h/2} - \frac{1}{4} I_h = \frac{3}{4} I + O(h^4)$$

olduğu gösterilir:

$$J_h = \frac{4}{3} I_{h/2} - \frac{4}{3} I_h$$

ifadesi I integraline kesinlikle denktir.

Bu örnekte hesaplama iki şebeke ile yapmayabilirdi. Çünkü J_h toplamı için açık bir ifade yazılabilir. Gerçekten de;

$$4I_{h/2} - I_h = h\sum_{i=1}^{N}\left(f_{i-1} + 2f_{i-1/2} + f_i\right) - h\sum_{i=1}^{N}\frac{f_i + f_{i-1}}{2}$$

$$= h\sum_{i=1}^{N}\frac{f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i}{2} \quad ,$$

$$J_h = \sum_{i=1}^{N}\frac{f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i}{6}h$$

Bu ise h/2 adımı için Simpson kuadratur formülüdür.

4. BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN RICHARDSON METODU

Bu bölümde basit lineer denklem üzerinde fark şebekesinin adımına göre Richardson ekstrapolasyonunun sağladığı kolaylıklar incelenecektir.

Çözümü $u(t)$ olan aşağıdaki başlangıç değer problemi göz önüne alınsın:

$$u' + a(t)u = f(t), \qquad t \in (0,1), \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0. \tag{4.2}$$

(4.1) ve (4.2)'de

$$a(t) \geq 0, \qquad t \in (0,1), \tag{4.3}$$

olduğu ve fonksiyonun düzgünlüğünün bundan sonraki işlemler için yeterli olduğu varsayılsın.

$[0,1]$ aralığı düğüm sayısı tamsayı olan düzgün alt aralıklarla parçalansın.

$$t_j = j^{\tau}, j = 0,1,\ldots,M \tag{4.4}$$

(M tamsayıdır.) $\tau = 1/M$ adımı ve küçük aralıklı düğümlerle,

$$t_{j+1/2} = (j+1/2)\tau, \qquad j = 0,1,\ldots,M-1 \tag{4.5}$$

Cranck-Nicolson $(A = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha)$ şemasına uygun olarak küçük aralıklı düğümlerde (4.1) başlangıç diferansiyel denkleminin yerine cebirsel eşitliklerin yaklaşık sistemleri yazılsın:

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + a^{j+1/2}\frac{u^{j+1} - u^j}{2} = f^{j+1/2}, \quad j = 0,1,\ldots,M-1. \tag{4.6}$$

Bu formüllere,

$$u^0 = u_0 0 \tag{4.7}$$

başlangıç şartı da eklenirse, tüm u^j'ler aşağıdaki rekürans formülüyle tanımlanabilir:

$$u_j = \left(1+\frac{\tau}{2}a^{j+1/2}\right)^{-1}\left[\left(1-\frac{\tau}{2}a^{j+1/2}\right)\right]u^{j-1} - \frac{\tau}{2}f^{j+1/2}, \; j = 0,1,\ldots,M, \quad (4.8)$$

(4.6) ve (4.7) ikinci dereceli yaklaşıma sahiptirler.

$A = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ ifadesinde pozitif tanımlı Λ^j matrisi yerine pozitif tanımlı $a^{j+1/2}$ sayısı yazılırsa, kararlılığın değeri bulunur:

$$|u^j| \leq |u_0| + \max_{0\leq j\leq M-1} |f^{j+1/2}|. \quad (4.9)$$

Bu nedenle (4.4)'e uygun olarak fark probleminin çözümü ikinci derece kesinlikli diferansiyel problemin çözümüne yakınsar:

$$\max_{0\leq j\leq M-1} |u^j - (u)^j| \leq C_1\tau^2. \quad (4.10)$$

Burada C_1, τ 'dan bağımsız sabittir.

Bu teorik sonuçlar

$$u' + tu = t, \qquad t \in (0,1), \quad (4.11)$$

eşitliğine,

$$u(0) = 2 \quad (4.12)$$

başlangıç şartı için uygulanabilir.

$$u(t) = e - t^2/2 + 1 \quad (4.13)$$

fonksiyonunun (4.11) ve (4.12) problemlerinin kesin çözümü olduğu kolayca görülebilir.

Nümerik deney, (4.4)-(4.8) probleminin $M = 10, 20, 50, 100, 200$ değerlerine uygun yaklaşık çözümünün kurulması ve

$$\xi = \max_{0\leq j\leq M} |u^j - (u)^j| \quad (4.14)$$

ifadesinin hesaplanmasına dayanır.

Bulunan sonuçlar, (4.10)'un doğruluğunu ispatlamaktadır. İşlem sonuçlarının incelenmesi, (4.10) değerlendirilmesinin τ 'nun derecesine göre iyileştirilemez olduğunu göstermektedir. C_2 , τ 'dan bağımsız sabit olmak üzere

$$\xi \geq C_2\tau^2 . \qquad (4.15)$$

Böylece (4.14) probleminin yaklaşık çözümünün maksimal hatası $O(\tau^2)$ biçimindedir.

Yaklaşık çözümün her bir şebeke noktasındaki ayrıntılı incelemeleri, 1910 yılında Richardson'un $\tau \rightarrow 0$ durumunda yaklaşık çözümün açılımı konusunda aşağıdaki bağıntıyı ileri sürmesini sağladı:

$$u^j - (u)^j = \tau^2(\upsilon)^j + \eta^j, \qquad j = 0,1,...,M \qquad (4.16)$$

Bu durumda hatanın baş kısmı olan $\tau^2(\upsilon)^j$ ifadesinde υ fonksiyonu $\upsilon(t)$ fonksiyonunun düğüm noktalarındaki değerleri olup, τ 'ya bağlı değildir. Ayrıca kalan terim η^j ise her bir $j = 0,1,...,M$ için $O(\tau^4)$ biçimindedir.

(4.1)-(4.3) problemleri için bu verinin doğru olduğu gösterilsin.

Temellendirme genelde üç kısma ayrılmaktadır. Önce (4.16) ifadesinin sağlanması için gerekli şartlar yükleniyor, daha sonra bu şartlardan sınır-değer problemi oluşturuluyor. Onun da çözümü $\upsilon(t)$ fonksiyonu olacaktır- en sonunda artık η^j / τ^4 şebeke fonksiyonunun sınırlı olduğu ispatlanıyor.

Dolayısıyla eğer (4.16) ifadesi sağlanıyorsa;

$$u^j = (u)^j + \tau^2(\upsilon)^j + ... \quad , \qquad j = 0,1,...,M \qquad (4.17)$$

yazılabilir. Burada kalan terim $O(\tau^4)$ biçimindedir.

j kaydedilsin ve (4.6)'da u^j 'nin değerleri yerine yazılsın. O zaman;

$$\frac{(u)^{j+1}-(u)^j}{\tau} + a^{j+0.5}\frac{(u)^{j+1}-(u)^j}{2}\tau^2\left(\frac{(\upsilon)^{j+1}-(\upsilon)^j}{\tau} + a^{j+0.5}\frac{(\upsilon)^{j+1}-(\upsilon)^j}{2}\right) + ... = f^{j+0.5}$$

u ve υ fonksiyonları için Taylor açılımı kullanılarak .

$$(u)^{j+1/2\pm1/2} = (u \pm \frac{\tau}{2}u' + \frac{\tau^2}{8}u'' \pm \frac{\tau^3}{48}u''')^{j+1/2} + ...,$$

$$(\upsilon)^{j+1/2\pm1/2} = (\upsilon \pm \frac{\tau}{2}\upsilon')^{j+1/2} + ..., \qquad (4.18)$$

yazılsın ve her bir toplam $j+1/2$ düğümünde fonksiyonun değerlerine eşitlensin:

$$(u' + au + \tau^2(\frac{1}{24}u''' + \frac{1}{8}au'') + \tau^2(\upsilon' + a\upsilon))^{j+1/2} + ... = f^{j+1/2}.$$

(4.1) denklemi $j+1/2$ düğümünde sağlandığı için $O(\tau^0)$ dereceli terimler ihmal edilebilir. Bu sebeple $\tau \to 0$ eşitliği elde edebilmek için mutlaka

$$(\upsilon' + a\upsilon)^{j+1/2} = (-\frac{1}{24}u''' - \frac{1}{8}au'')^{j+1/2}, \quad j = 0,1,...M-1 \quad (4.19)$$

eşitliği sağlanmalıdır. j = 0 için (4.17) eşitliği ayrıca incelensin:

$$u^0 = u_0 + \tau(\upsilon)^0 + ... \quad (4.20)$$

(4.2) ve (4.7) başlangıç şartlarından $u^0 = u_0$ eşitliği elde edilir. Buradan $\tau \to 0$ iken υ^0 için

$$(\upsilon)^0 = 0 \quad (4.21)$$

şartı bulunur. Böylece (4.17)'den çıkan gerekli şartların bulanması işlemi tamamlanmış olur.

Şimdi de $\upsilon(t)$ fonksiyonunun tanımlanması için daha fazlası istensin: (4.19) sadece şebekenin düğümlerinde değil tüm (0,1) aralığında sağlansın yani:

$$\upsilon'(t) + a(t)\upsilon(t) = -\frac{1}{24}u'''(t) - \frac{1}{8}au''(t), \; t \in (0,1). \quad (4.22)$$

Eğer bu fonksiyon (4.21)'den çıkan

$$\upsilon(0) = 0 \quad (4.23)$$

başlangıç şartıyla tamamlanırsa yeterince düzgün $\upsilon(t)$ çözümüne sahip olan diferansiyel denklem bulunur ki, burada υ fonksiyonunun τ'dan bağımsız olduğu açıkça görülecektir.

Şimdi

$$\eta^j = u^j - (u)^j - \tau^2(\upsilon)^j \quad (4.24)$$

eşitliği ile M + 1'de tanımlanmış η şebeke fonksiyonunun $O(\tau^4)$ biçiminde olduğu gösterilsin. Bunun için belli bir j değeri kaydedilsin ve η fonksiyonu (4.6) fark operatöründe yerine yazılsın:

$$\frac{\eta^{j+1}-\eta^j}{\tau}+a^{j+0.5}\frac{\eta^{j+1}-\eta^j}{2}=\frac{u^{j+1}-u^j}{\tau}+a^{j+0.5}\frac{u^{j+1}+u^j}{2} \tag{4.25}$$
$$-\left(\frac{(u)^{j+1}-(u)^j}{\tau}+a^{j+0.5}\frac{(u)^{j+1}+(u)^j}{2}\right)$$
$$-\tau^2\left(\frac{(\upsilon)^{j+1}-(\upsilon)^j}{\tau}+a^{j+0.5}\frac{(\upsilon)^{j+1}+(\upsilon)^j}{2}\right).$$

Bu ifadenin sağ tarafı değiştirilsin. (4.6) formülünden sağ taraftaki ilk iki toplananın $f^{j+1/2}$ sayısına eşit olduğu çıkar. Kalan terimi Lagrange biçiminde olan (4.18) açılımından yararlanarak bir sonraki toplananlara uygun fonksiyonlar $j+1/2$ değerleriyle ifade edilirse aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\frac{\eta^{j+1}-\eta^j}{\tau}+a^{j+0.5}\frac{\eta^{j+1}-\eta^j}{2}=\left(f-u'-au-\tau^2\left(\frac{1}{24}u'''+\frac{1}{8}au''\right)-\tau^2\upsilon'+a\upsilon\right)^{j+0.5}$$
$$-\tau^4\left(\frac{1}{16.5!}u^{v}(\xi_j^1)+\frac{1}{16.4!}a^{j+0.5}u^{IV}(\xi_j^2)\right)$$
$$-\tau^4\left(\frac{1}{24}\upsilon'''(\xi_j^3)+\frac{1}{8}a^{j+0.5}\upsilon''(\xi_j^4)\right).$$

Burada ξ_j^i, (t_j, t_{j+1}) aralığının bazı noktalarıdır.

u fonksiyonunun (4.1) eşitliğinin, υ fonksiyonunun ise (4.22) eşitliğinin çözümü olduğu hatırlanarak, aşağıdaki eşitlik sadeleştirilsin:

$$\frac{\eta^{j+1}-\eta^j}{\tau}+a^{j+0.5}\frac{\eta^{j+1}-\eta^j}{2}=-\tau^4\left(\frac{1}{16.5!}u^{v}(\xi_j^1)+\frac{1}{16.4!}a^{j+0.5}u^{IV}(\xi_j^2)\right. \tag{4.26}$$
$$\left.+\frac{1}{24}\upsilon'''(\xi_j^3)+\frac{1}{8}a^{j+0.5}\upsilon''(\xi_j^4)\right).$$

Eğer u ve υ fonksiyonları $[0,1]$ aralığında (4.26) ya dahil olan sürekli türevlere sahiplerse, o zaman (4.26)'nın sağ tarafı, mutlak değeri $C_3\tau^4$ sayısı ile sınırlanan uzunluğu gösterecektir. Burada C_3 sabiti τ 'ya bağlı değildir. Bütün

$j = 0,1,\ldots,M$ 'ler için doğru olan bu bilgi ve (4.9) değeri kullanılarak aşağıdaki ifade bulunur:

$$|\eta^j| \leq |\eta^0_*| C_3\tau^4$$

(4.21), (4.7) ve (4.23) dikkate alınarak η^j 'nin tanımından $\eta^0 = 0$ olduğu çıkar.

$$|\eta^j| \leq C_3\tau^4, \quad j = 0,1,\ldots,M \tag{4.27}$$

ve (4.16) hipotezi ispatlanmış oldu.

Şimdi de bu açılımdaki kesinliği yükseltme metodu ele alınsın. u_τ ve $u_{\tau/2}$, (4.6) ve (4.7) yaklaşık problemlerinin sırayla τ ve $\tau/2$ adımlarıyla çözümleri olsun. Çözümlerden her birinin $O(\tau^2)$ dereceden kesinliğe sahip olmasına rağmen, onlardan çok kolaylıkla τ adımlı şebekede dördüncü dereceden kesinliğe sahip çözüm oluşturulabilir. $t_j = \tau_j$, τ adımına sahip fark şebekesinin keyfi noktası olsun, o zaman;

$$\bar{u}^j = \frac{4}{3}u^{2j}_{\tau/2} - \frac{1}{3}u^j_\tau \tag{4.28}$$

lineer ifadesi τ adımıyla dördüncü dereceden kesinliğe sahip kesin çözüme yakınsar.

$$\left|\bar{u}^j - u(j\tau)\right| \leq C_4\tau^4, \; j = 0,1,\ldots,M \tag{4.29}$$

burada C_4, τ 'dan bağımsız sabittir.

Bunun ispatı aşağıdaki gibidir. $j\tau$ noktasında (4.16) açılımları

$$u^j_\tau = u(j\tau) + \tau^2\upsilon(j\tau) + \eta^j_\tau$$

$$u^{2j}_{\tau/2} = u(j\tau) + \frac{\tau^2}{4}\upsilon(j\tau) + \eta^{2j}_{\tau/2}$$

her iki yaklaşık çözümler için doğrudur. (4.28)'den

$$\bar{u}^j = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)u(j\tau) + \tau^2\left(\frac{4}{3}\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\upsilon(j\tau) + \left(\frac{4}{3}\eta^{2j}_{\tau/2} - -\frac{1}{3}\eta^j_\tau\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{u}^j = u(j\tau) + \frac{4}{3}\eta_{\tau/2}^{2j} - \frac{1}{3}\eta_{\tau}^{j}$$

eşitliği çıkar.

η^j fonksiyonu için (4.27) değeri de dikkate alınırsa,

$$\left|\frac{4}{3}\eta_{\tau/2}^{2j} - \frac{1}{3}\eta_{\tau}^{j}\right| \leq \frac{4}{3}C_3\frac{\tau^4}{16} + C_3\frac{\tau^4}{3} = \frac{5}{12}C_3\tau^4$$

eşitliği bulunur. Buradan $C_4 = \frac{5}{12}C_3$ iken (4.29) ifadesi çıkar.

Şunu da belirtmek gerekir ki; incelenen yaklaşım düzgün olmayan şebekelerde de yaygın olabilir. Yalnız bu durumda daha da zor analizlere ihtiyaç vardır.

5. SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ PROBLEM İÇİN EKSTRAPOLASYON METODU

Birçok uygulamalarda özellikle akışkanlar mekaniğinde, elektrik devrelerinin modüle edilmesinde, kimyevi reaksiyonlarda ve yönetim teorisinde sertlik dediğimiz özelliğe sahip başlangıç değer problemleri ortaya çıkıyor. Sert eşitlikler öyle eşitliklerdir ki; çözümleri hem hızlı hem de yavaş değişen bileşenler içerir. Eğer integrallemenin klasik metotları kullanılıyorsa, bu bileşenler çok zor hesaplama problemlerinin ortaya çıkmasına neden olur. Dolayısıyla bu problemlerin çözümü için uygun olan nümerik metotları oluşturmak gerekir. Bu amaçla da şema çeşitleri önerilmiştir.

Bazı metotlar orta sertliğe sahip sistemlere uygulanırlar ve çözümün hızla değiştiği aralıklarda çok küçük adımlar kullanılmasını gerektirirler. Bu da sertlik arttıkça bu yöntemlerin etkisinin azaldığını gösterir. Diğer metotlar kararlılığın değişik kavramlarına dayanır.

Sürekli Problem

$$Lu(x) = \varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad x > 0 \qquad (5.1)$$
$$u(0) = \phi$$

problemlerini ele alalım. Burada $\varepsilon > 0$, a ve f düzgün fonksiyonlardır, bütün $x \geq 0$'lar için $a(x) \geq \alpha > 0$ olur.

Bu problem çok incelenmiş olup, çözümü vardır ve tektir (Keller,1968).

İki noktalı sınır-değer probleminin incelenmesinde en önemli rolü maksimum prensibi oynamaktadır. Cauchy meselesinde başlangıç verilerinin yardımıyla çözümün değerlendirilmesinde maksimum prensibi çok az kullanılır. Ama biz maksimum prensibini yararlı bulup ilk sonuç olarak veriyoruz.

Lemma 5.1. v düzgün fonksiyonu ve $x > 0$ verilmiş olsun. Varsayalım ki bütün $0 \leq x < X$ ler için $v(0) \geq 0$ ve $Lv(x) \geq 0$. O zaman bütün $0 \leq x < X$ ler için $v(x) \geq 0$.

İspat. Varsayalım öyle x_1 sayısı vardır ki $v(x_1) < 0$. O zaman x_0 öyle bir değerdir ki bütün $x \in (x_0, x_1)$ ' ler için $v(x) = 0$ ve $v(x_1) < 0$. O zaman ortalama değer teoreminden öyle bir $x_2 \in (x_0, x_1)$ in olduğu çıkıyor ki;

$$v'(x_2) = \frac{v(x_1) - v(x_0)}{x_1 - x_0} < 0$$

$v(x_2) < 0$. O zaman $Lv(x_2) < 0$

olduğunu görüyoruz ki bu da iddiaya terstir. Bu lemmayı ispatlamış oluyor.

Bu lemma, bir sonraki sonucu ispatlamamıza yardımcı oluyor, bu sonuçtan da çözümün tekliği çıkar.

Lemma 5.2. v-düzgün fonksiyonu ve $X > 0$ verilmiş olsun. O zaman aşağıdaki değerlendirmeyi elde ediyoruz.

$$|v(x)| \leq |v(0)| + \frac{1}{\alpha}\max_{0\leq y\leq x}|Lv(y)|; \qquad 0 \leq x \leq X$$

İspat. $w\pm(x) \equiv |v(0)| + \frac{1}{\alpha}\max_{0\leq y\leq x}|Lv(y)| \pm v(x)$ formülü ile w_+ ve w_- fonksiyonlarını delil olarak alalım. O zaman $w\pm(0) \geq 0$ ve $Lw\pm(x) \geq 0$ olacak (bütün x) $x \in [0, X]$ ler için $w\pm(x) \geq 0$ olduğunu elde ediyoruz ki buradan da Lemma 5.2. nin olduğunu görüyoruz. Lemma 5.1 ve Lemma 5.2 aşağıdaki teoremi ispatlamamız için bize yardımcı olacaktır. Bu teorem bize (5.1) probleminin değişimi hakkında birkaç bilgi verecektir.

Teorem 5.1. $X > 0$ ve (5.1)'de bir L operatörü verilmiş olsun. Varsayalım ki a katsayısı düzgündür. O zaman herhangi bir $v(x)$ düzgün fonksiyonu için,

$$|(Lv)^{(j)}(x)| \leq C, \qquad j \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq X$$

$$|v^{(j)}(x)| \leq C\varepsilon^{-j}, \qquad j \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq X$$

elde ediyoruz. Burada C , ε 'a bağımlı değildir.

İspat. Lemma 5.2' den $v(x)$ in sınırlı olduğunu gördük:

$$v^{(j)}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\{Lv(x) - a(x)v(x)\}^{(j-1)}.$$

İkinci sonucun ispatı için,

$$v^{(j)}(x) = \frac{Lv(x)}{a(x)} + \varepsilon L(x)$$

ele alalım.

Z fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümüdür.

$$Lz(x) = -\left(\frac{Lv}{a}\right)'(x),$$

$$z(0) = 0$$

Önceki sonucu z' ye uygularsak;

$$| z^{(j)}(x) | \leq C\varepsilon^{-j}$$

elde ediyoruz.

Bir sonraki sonucumuz (5.1) probleminin çözümünün değişimini küçük ε -ları için karakterize ediyor. (5.1) probleminin asimptotik açılımını inceleyeceğiz.

Teorem 5.2. Varsayalım ki a ve f düzgündür ve u, (5.1) probleminin çözümüdür. Tam pozitif M için $u_0,\ldots,u_M$ ve $v_0,\ldots,v_M$ fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde belirleyelim:

$$a(x)u_0(x) = f(x)$$
$$a(x)u_i(x) = -u'_{i-1}(x), \qquad 1 \leq i \leq M$$

bütün $x \geq 0$ lar için;

$$\frac{dv_0(\tau)}{d\tau} + a(0)v_0(\tau) = 0, \quad \tau \leq 0$$
$$v_0(0) = \phi - u_0(0)$$

ve bütün $1 \leq i \leq M$ 'ler için

$$\frac{dv_i(\tau)}{d\tau} + a(0)v_i(\tau) = -\sum_{k=0}^{i-1} \frac{\tau^{i-k}}{(i-k)!} a^{(i-k)}(0)v_k(\tau), \qquad \tau \geq 0$$
$$v_i(0) = -u_i(0)$$

O zaman yeterince küçük ε' lar için

$$u(x) = \sum_{k=0}^{M} \varepsilon^k (u_k(x) + v_k(\tau)) + R_{\varepsilon,M}, \qquad \tau = x/\varepsilon$$

burada $| R_{\varepsilon,M} | \leq C\varepsilon^{M+1}u$ ve C, ε ' dan bağımsızdır.

Aşağıdaki fark şemasına bakalım:

$$\begin{aligned} &L^h u_i \equiv \varepsilon\sigma_i(\rho)\Delta_+ u_i + a(x_i)v_i = f(x_i), \qquad i \geq 0 \\ &u_0 = \phi, \quad \sigma_i(\rho) = \rho a(x_i)[1 - \exp(-\rho a(x_i))]^{-1} \end{aligned} \qquad (5.2)$$

burada $\rho = h/\varepsilon$. Kolaylıkla görüyoruz ki (5.2) şeması (5.1) ile uyumludur. Bunun dışında Lemma 5.1 ve Lemma 5.2 nin diskret benzer olduğunu görüyoruz.

Lemma 5.3. v_i şebeke fonksiyonu ve $X > 0$ olsun. Varsayalım ki $v_0 \geq 0$ ve $L^h v_i \geq 0$ bütün i' ler için öyle ki $0 \leq ih \leq X$. O zaman $v_i \geq 0$, bütün i ' ler için, öyle ki $0 \leq ih \leq x$.

Lemma 5.4. v_i şebeke fonksiyonu ve $X > 0$ olsun. O zaman $0 \leq ih \leq X$ aralığında

$$|v_i| \leq |v_0| + \frac{1}{\alpha} \max_{0 \leq jh \leq X} |L^h v_j|$$

elde ediyoruz.

Bu lemmaların ispatları lemma 5.1 ve Lemma 5.2. nin ispatlarına benzerdir.

Lemma 5.3 den (5.1) problemindeki u_i nin çözümü aşağıdaki eşitsizlik için yeterlidir:

$$|u_i| \leq |\phi| + \frac{1}{\alpha} \max_{0 \leq jh \leq X} |f(x_j)|.$$

Bu sonucu (5.1) için açıkça ifade ederek de kullanabiliriz.

Cauchy meselesi ve sınır değer problemlerinin ε 'a göre düzgün yakınsama derecesinin yükseltilmesi için bilinen yöntemlerden biride Richardson Ekstrapolasyonudur. Bu bölümde gerekli ve yeterli şartları dahil ederek yakınsama derecesi Richardson Ekstrapolasyonu metodu yardımı ile ε ' a göre düzgün yakınsayarak yükseltilecektir.

Teorem 5.3. Varsayalım ki $X > 0$ ve u

$$Lu(x) \equiv \varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x), \; x > 0,$$
$$u(0) = \phi$$

probleminin çözümü ve u_i^h da

$$L^h u_j \equiv \varepsilon \sigma_i(\rho) D + u_i + a(x_i) u_i = f(x_i), \; i \geq 0$$
$$u_0 = \phi, \; \sigma(\rho) = \rho a(x_i)[1 - \exp(-\rho a(x_i))]^{-1}$$

probleminin çözümüdür. O zaman $0 \le ih \le X$ için

$$\left|u(x_i) - (2u_{2i}^{h/2} - u_i^h)\right| \le Ch^2$$

eşitsizliği elde edilir ki burada da C ; i, h ve ε ' a bağlı değildir.

İspat. Teoremin ispatı iki bölüme ayrılır. Önce f/a 'nın sabit olduğu varsayılır ve Richardson metodunun yararlı olduğu gösterilir. Daha sonra bunun tersi ispat edilir.

Varsayalım ki f/a sabittir ve $e(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} Le(x) &\equiv \frac{1}{2}a(x)u'(x) + \frac{1}{2}\varepsilon u''(x) \\ e(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

probleminin çözümüdür.

Lemma 5.2 ve

$$\frac{1}{2}\varepsilon u''(x) + \frac{1}{2}a(x)u'(x) = \frac{1}{2}\{f'(x) - a'(x)u(x)\}$$

dikkate alınırsa $e(x)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu görülür. Bütün $i \ge 0$ lar için

$$e_i \equiv \frac{1}{h}(u(x_i) - u_i^h)$$

olacak şekilde e_i^h şebeke fonksiyonu dahil edilir. Bundan sonra kolaylıkla

$$\left|L^h(e(x_i) - e_i\right| \le C_\varepsilon h$$

olduğu gösterilebilir. Burada C_ε ε ' a bağlı olabilir. Lemma 5.2' den

$$\left|e(x_i) - e_i\right| \le C_\varepsilon h$$

eşitsizliği, bu eşitsizlikten de

$$u(x_i) - u_i h = he(x_i) + O_\varepsilon(h^2) \qquad (5.4)$$

eşitliği bulunur.

Richardson Ekstrapolasyonunun ε ' a göre düzgün yakınsak olduğunu ispatlamak için önce yakınsama derece sembolü olan O_ε'nun ε ' na bağlı olmadığı gösterilmelidir. Daha sonra mutlaka $u_i^h + he(x_i)$ nin $u(x_i)$' ye $O(h^2)$ derecesi ile ε ' na göre düzgün yakınsadığı ispatlanmalıdır.

$$\lim_{h\to 0}\left[u_i^h + he(x_i)\right] = u(x_i)$$

eşitliğinden genel yakınsaklık prensibinin birinci şartının, yani $\left|F^h - F\right| = O(1)$ şartının doğru olduğu görülür. Daha sonra $u_i^h + he(x_i)$ ifadesinin ikinci şartı, yani $\left|F^h - F^{h/2}\right| \le C_2 h^p$ eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığına bakılır. Başka ifade ile

$$\left|\left[u_i^h + he(x_i)\right] - \left[u_{2i}^{h/2} + \frac{1}{2}he(x_i)\right]\right| \le Ch^2$$

veya

$$\left|e(x_i) - \frac{2}{h}\left[u_{2i}^{h/2} - u_i^h\right]\right| \le Ch$$

eşitsizliklerine bakılır. Burada C; i, h ve ε' a bağımlı değildir. Bu, "$2\left(u_{2i}^{h/2}-u_i^h\right)/h$, $e(x_i)$' ye $O(h)$ derecesi ile ε'a göre düzgün yakınsıyor" ifadesinin ispatına denktir. Yine genel yakınsaklık prensibi dahil edilir. Birinci şart

$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\left(u_{2i}^{h/2}-u_i^h\right)=e(x_i)$$

olduğu için sağlanır. İkinci şart ise

$$\left|\frac{2}{h}\left(u_{2i}^{h/2}-u_i^h\right)-\frac{4}{h}\left(u_{4i}^{h/4}-u_{2i}^{h/2}\right)\right|\leq Ch$$

veya bu eşitsizliğe denk olan

$$\left|3u_{2i}^{h/2}-u_i^h-2u_{4i}^{h/4}\right|\leq Ch^2 \qquad (5.5)$$

eşitsizliği yardımı ile sağlanır. Burada C sabiti i, h ve ε' a bağlı değil. Teoremin birinci bölümünün ispatını tamamlamak için (5.5) eşitsizliğini ispat etmek yeterlidir.

$$L^h u_j \equiv \varepsilon\sigma_i(\rho)D+u_i+a(x_i)u_i=f(x_i),\ i\geq 0$$
$$u_0=\phi,\ \sigma_i(\rho)=\rho a(x_i)\left[1-\exp(-\rho a(x_i))\right]^{-1}$$

ifadesinden

$$u_{i+1}^h=u_i^h\exp(-\rho a(x_i))+R_i^h \qquad (5.6)$$

elde edilir. Burada

$$R_i^h=\frac{f(x_i)}{a(x_i)}\left[1-\exp(-\rho a(x_i))\right].$$

Böylelikle.

$$u_{2i+2}^{h/2} = u_{2i+1}^{h/2} \exp(-\rho a(x_i + \frac{1}{2}h)/2) + \frac{f(x_i + \frac{1}{2}h)}{a(x_i + \frac{1}{2}h)}\left[1 - \exp(-\rho a(x_i + \frac{1}{2}h)/2)\right]$$

ve $u_{2i+1}^{h/2}$ için benzer ifade kullanarak

$$u_{2i+2}^{h/2} = u_{2i}^{h/2} \exp(-\rho\left[a(x_i) + a(x_i + \frac{1}{2}h)\right]/2) + R_{2i}^{h/2} \qquad (5.7)$$

ifadesi bulunur. Buradan

$$R_{2i}^{h/2} = \frac{f(x_i)}{a(x_i)}\left[1 - \exp(-\rho a(x_i)/2)\right]\exp(-\rho a(x_i + \frac{1}{2}h)/2)$$

$$+ \frac{f(x_i + \frac{1}{2}h)}{a(x_i + \frac{1}{2}h)}\left[1 - \exp(-\rho a(x_i + \frac{1}{2}h)/2)\right].$$

Bu şekilde devam ederek

$$u_{4i+4}^{h/4} = u_{4i}^{h/2} \exp(-\rho \sum_{k=0}^{3} a(x_i + \frac{1}{4}kh)/4) + R_{4i}^{h/4} \qquad (5.8)$$

eşitliği bulunur. Bunun dışında Teorem 5.2 nin ispatından

$$u_{4i}^{h/4} = u_{2i}^{h/2} + S_{2i}^{h/2} \qquad (5.9)$$

olduğu görülür. $\left|S_{2i}^{h/2}\right| \le Ch$ ve C sabiti i, h ve ε ' a bağlı değil. (5.8) ve (5.9) ifadelerinden

$$L^h\left(u_{2i}^{h/2} - u_i^h - 2u_{4i}^{h/4}\right) = v_{1i}u_{2i}^{h/2} + v_{2i}S_{2i}^{h/2} + v_{3i}$$

bulunur. Burada

$$v_{1i} = \frac{a(x_i)}{1-\exp(-\rho a(x_i))}\left\{3\exp(-\rho\sum_{k=0}^{1} a(x_i + \frac{1}{2}kh)/2)\right.$$

$$\left. -\exp(-\rho a(x_i)) - 2\exp(-\rho\sum_{k=0}^{3} a(x_i + \frac{1}{4}kh)/4)\right\}$$

$$v_{2i} = \frac{2a(x_i)}{1-\exp(-\rho a(x_i))}\left\{\exp(-\rho a(x_i)) - \exp(-\rho\sum_{k=0}^{3} a(x_i + \frac{1}{4}kh)/4)\right\}$$

$$v_{3i} = \frac{a(x_i)}{1-\exp(-\rho a(x_i))}\left\{3R_{2i}^{h/2} - R_i^h - 2R_{4i}^{h/4}\right\}.$$

Teorem 5.1'in ikinci şartından

$$|v_{1i}| \le Ch^2 \text{ ve } |v_{2i}| \le Ch$$

eşitsizlikleri bulunur. Burada C; i, h ve ε ' a bağlı değildir. Böylece

$$L^h\left(3u_{2i}^{h/2} - u_i^h - 2u_{4i}^{h/4}\right) \le Ch^2 + |v_{3i}|$$

olur. R_i^h, $R_{2i}^{h/2}$ ve $R_{4i}^{h/4}$ için uzun ifadeler ve x_i noktası civarında Taylor açılımlarını kullanarak

$$v_{3i} = F_i \frac{f(x_i)}{a(x_i)}$$

elde edilir. Burada $\frac{f}{a}$ fonksiyonunun değerinin sabit olduğu varsayımı kullanıldı

$$F_i = \Big\{ \exp(-\rho a(x_i)) + 2\exp(-\rho \sum_{k=0}^{3} a(x_i + \frac{1}{4}kh)/4)$$

$$-3\exp(-\rho \sum_{k=0}^{3} a(x_i + \frac{1}{2}kh)/2) \Big\} \frac{a(x_i)}{1-\exp(-\rho a(x_i))}.$$

teorem 5.1' ikinci şartının bundan sonraki incelemeleri $|F_i| \le Ch^2$ olduğunu gösteriyor. Burada C; i, h ve ε' a bağlı değildir. Böylece (5.5) ifadesinin doğru olduğu ispatlandı.

Teoremin ikinci bölümü

$$\varepsilon u'(x) + u(x) = x, \quad x \ge 0,$$
$$u(0) = 1$$

problemi üzerinden ispatlanır. Bu problemin $x = h$ noktasındaki kesin çözümü

$$u(h) = (1+\varepsilon)\exp(-\rho) + h - \varepsilon$$

şeklindedir. Bu probleme teorem 5.3'ü uygulayarak ve $h = \varepsilon$ olduğunu göz önüne alarak

$$u_1^h = \exp(-1), \; u_2^h = \exp(-1) + \frac{1}{2}h(1-\exp(-\frac{1}{2}))$$

buluruz ve buradan

$$u(h) - (2u_2^h - u_1^h) = h(\exp(-\frac{1}{2}) + \exp(-1) - 1) \neq O(h^2).$$

Bu da teoremin ispatıdır.

Bulunan sonuç, yaklaşım derecesinin yükseltilmesi için kullanılan diğer ekstrapolasyon formülleri için de doğrudur.

KAYNAKLAR

Amiraliyev, G.M., Duru, H., 1999. A uniformly convergent finite difference method for a singularly perturbed initial value problem. ***Applied Mathematics and Mechanics**, 20*: 379-387.

Asher, U., Mattheij, R.M.M., Russel, R.D., 1998. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations. ***Prentice-Hall, Englewood Cliffs***, New Jersey. 357s.

Burden, R.L., Faires, J.D., 1989. ***Numerical Analysis***. RWS-KENT Publishing Company, Boston.

Doolan, E.P., Miller, J.J., Schilders, W.H.A., 1980. Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers. ***Boole Press***, Dublin.

Kadalbajoo, M.K., Reddy, Y.N., 1989. Asymptotic and numerical analysis of singular perturbation problems. A survey. ***Appl. Math. and Comput, 30:*** 223-259.

O'Malley, R.E., 1990. Singular perturbation methods for ordinary differential equations. ***Springer-Verlag***, New York.

Farrell, P.A., Hearty, A.F., Miller, J.J.H., 2000. Robust computational techniques for boundary layers. ***Chapman & Hall/CRC***, Boca Raton.

ÖZ GEÇMİŞ

1972 yılında Bakü'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bakü'de 1989'da tamamladı. Aynı yıl Bakü Devlet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı ve 1994 yılında mezun oldu. 1994-1996 yılları arasında Bakü'de Matematik öğretmenliği yaptı. 1996 yılında Türkiye'ye gelerek Van'da özel bir dershanede öğretmenlik mesleğine devam etti. 1997 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başladı. 2000 yılında da aynı üniversiteye Öğretim Görevlisi olarak atandı. Evli ve iki çocuk annesidir.