

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

HOLDITCH TEOREMİNİN LIE GRUP ETKİLERİYLE İRDELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Sultan ÖZDEMİR
DANIŞMAN : Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

VAN - 2007

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

HOLDİTCH TEOREMİNİN LİE GRUP ETKİLERİYLE İRDELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Sultan ÖZDEMİR

VAN – 2007

KABUL ve ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ danışmanlığında Sultan ÖZDEMİR tarafından hazırlanan “*Holditch Teoreminin Lie Grup Etkileriyle İrdelenmesi*” isimli bu çalışma/....../2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : İmza:

Üye : İmza:

Üye : İmza:

Üye : İmza:

Üye : İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/....../2007 gün ve
..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

HOLDITCH TEOREMİNİN LIE GRUP ETKİLERİYLE İRDELENMESİ

ÖZDEMİR, Sultan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

Aralık 2007, 33 sayfa

Bu çalışmanın amacı, Holditch teoremini Lie grup etkileriyle ele alıp Holditch hareketini, bir Lie grup etkisi ile ifade edebilmektir. Özel olarak elips ve çember eğrileri için Holditch hareketinin bir Lie grup etkisi ile verilebileceği gösterildi ve örnekler verildi. Ayrıca ele alınan özel durumların Turbo Pascal 7.0 bilgisayar programları yazıldı.

Anahtar kelimeler: Holditch teoremi, Lie grupları, Lie grup etkileri.

ABSTRACT

INSPECTION WITH LIE GROUP ACTIONS FOR HOLDITCH THEOREM

ÖZDEMİR, Sultan

Msc, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

December 2007, 33 pages

The aim of this study is to describe Holditch's motion with a Lie group actions, taking form Holditch's theorem with Lie group actions. That Holditch's motion is a Lie group actions was bared, privately for ellipse and circle, and examples were given. Furthermore, the Turbo Pascal 7.0 computer programs were programmed for the special conditions.

Key words: Holditch's theorem, Lie groups, Lie group actions.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Holditch teoremi Lie grup etkileriyle ele alınıp Holditch hareketinin iki kapalı eğri için bir Lie grup etkisi ile verilebileceği gösterildi. Özel olarak elips ve çember eğrileri için Holditch hareketinin bir Lie grup etkisi ile verilebileceği gösterildi ve örnekler verildi. Ayrıca ele alınan özel durumlar için Turbo Pascal 7.0 bilgisayar programları yazıldı.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ'a ve yine çalışmalarım boyunca yardımlarını benden esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ'a teşekkür eder saygılarımı sunarım. Ayrıca yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi desteklerinden dolayı Tübitak'a teşekkür ederim.

Sultan ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	2
3. TEMEL TANIMLAR ve ÖNBİLGİLER	3
4. HOLDITCH TEOREMİNİN LIE GRUP ETKİLERİYLE İRDELENMESİ	18
4.1. Bir Noktaya Etkisi Elips Yörüngesi Olan Matrisin Yazılması	18
4.2. Lie Grup Özelliğinin İncelenmesi	20
4.3. Çember Üzerinde Uygulamalar	22
4.4. Pascal Programında Bilgisayar Uygulamaları	27
4.4.1. Elips ve Çember İçin Program	27
4.4.2. Holditch Hareketi	28
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	30
KAYNAKLAR	31
ÖZ GEÇMİŞ	33

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Eksenlere göre dönmeler (roll (yuvarlama), pitch (iniş-çıkış), yaw (yalpa))	6
Şekil 3.2. Uç noktaları kapalı C eğrisi üzerinde olan AB çubuğunun herhangi bir pozisyonu	9
Şekil 3.3. Çeşitli eğriler ve kiriş uzunluklarına göre P noktasının yörüngeleri	9
Şekil 4.1. (x_0, y_0) Noktasından Geçen Elipsin oluşturulması	18
Şekil 4.2. Yörüngesi çember olan nokta	22
Şekil 4.3. Çember	24
Şekil 4.4. Çember ve X noktasının yörüngesi arasındaki alan	25

1. GİRİŞ

Hamnet Holditch tarafından 1858' de "Geometrical Theorem" olarak yayınlanan teoremin ifadesi şöyledir.

Teorem (Holditch Teoremi):

Bir kapalı eğrinin, $c + c'$ sabit uzunluktaki bir kirişi sırasıyla c ve c' uzunluğunda iki parçaya bölünürse, kirişin eğri boyunca bir tam hareketinde, bölen noktanın çizdiği yörünge eğrisi ile kapalı eğri arasında kalan bölgenin alanı;

$$\pi cc'$$

olacaktır(Holditch, H.,1858).

Teorem şimdi Holditch teoremi ve arada sınırlanan bölge Holditch halkası olarak bilinmektedir. Teoremin ilk önemli noktası aradaki bölgenin alanının seçilen eğriden bağımsız olmasıdır. Eğri ve çubuk arasındaki tek kısıtlama, hareketin mümkün olmasını sağlayan boy ve şekle sahip olmasıdır.

1858 yılında ifade ve ispatı verilen Holditch teoremi, teknik uygulamaya açık olması ve eğriden bağımsızlığı nedeniyle; eğrinin değişik seçimleriyle, eğriyi taşıyan yüzeyin, düzlem, irtibatlı yüzey eğrisi gibi özel seçimleriyle oldukça ilgi toplamış ve üzerinde çok çalışılmıştır. Daha sonra diğer geometrilere uygulanarak değişik metotlar ile geliştirilmiştir. Yakın zamanda ise kapalı homotetik hareketler için birçok çalışma yapılmış ve Holditch teoreminin çeşitli geliştirilmeleri verilmiştir. Ancak ulaşabildiğimiz kaynaklarda Lie grup etkileriyle ilgisi ele alınmamıştır.

Bu çalışmada, çember ve elips eğrileri için Holditch hareketi bir Lie grup etkisi olarak ifade edildi.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Holditch hareketi değişik noktaların aynı yörünge üzerinde dolanma hareketine bir örnektir. Holditch (1858), “Geometrical Theorem” adlı makalede ilk kez ele alınmıştır. Holditch teoremi daha sonraları farklı alanlarda çalışılmış ve değişik metotlarla geliştirilmiştir.

Broman (1981), Holditch teoremini kapalı doğrultulabilir eğrilere genelleştirdi. Pottmann (1985), Holditch teoremindeki oval yerine konveks sınırsız bir eğri olarak “Holditch hilalleri” nin alanını ve hacmini hesaplamıştır. Pottmann (1986), sabit uzunluklu bir doğrunun uç noktalarının kapalı eğriler boyunca hareketiyle ilgili Holditch teoreminin genelleştirmesini açık hareketlere genişletmiştir. Güneş ve ark.(1989), Hacısalihoğlu’ nun bir parametrelili kapalı düzlemsel hareketler için elde ettiği önemli sonuçları, uzaydaki noktalar ve uzay hareketleri için Müller’ in tekniğini uygulayarak genişlettiler. Hacısalihoğlu (1989), 1-boyutlu kapalı küresel hareketleri inceleyerek sabit uzunluklu hareketli bir yayın iki ucunun aynı küresel eğriyi ya da eşit alanları kaplayan iki kapalı eğriyi tanımlaması için gerek ve yeter bir koşul buldu. Kılıç ve Keleş (1994), kapalı doğrultulabilir eğrilerin kutupsal eylemsizlik momentumları için holditch formülüne benzeyen bulgular elde ettiler ve ($\frac{1}{2}$ oranında) sınırlı bölgeler ve eğrilerin kutupsal eylemsizlik momentumları arasındaki oranı gösterdiler. Hacısalihoğlu ve Amirov (1995), n boyutlu Riemannian manifoldları için son teoremi geliştirerek, geometrideki Holditch teoremi ile mekanikteki Liouville teoremi arasında bağlantı kurdular. Karadağ ve Keleş (1996), kapalı uzay eğrilerinin paralel projeksiyon alanlarını hesaplayıp Holditch teoremini kapalı uzay eğrilerine genelleştirdiler. Tutar ve Kuruoğlu (1999), bir-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketler boyunca Steiner alan formülü ve holditch teoremini incelemiş homotetik oranın $h=1$ özel durumu için sonuçlar elde etmişlerdir. Kuruoğlu ve Yüce (2004), düzlemsel kinematikler üzerinde homotetik hareketler için Holditch teoremini genelleştirdiler. Yüce ve Kuruoğlu (2004), Holditch teoreminin bazı genelleştirmelerini Lorentzian hareketler altında incelediler. Yüce ve Kuruoğlu (2005), uç noktaları, iki farklı kapalı eğri boyunca hareket eden iki farklı doğru parçası kullanarak holditch teoreminin bir genelleştirmesini elde ettiler. Döldül ve Kuruoğlu (2005), üç boyutlu Öklid uzayında bir parametrelili kapalı hareketler altında kapalı uzay eğrileri için projeksiyon eğrilerinin eylemsizliğinin kutupsal momentini açıkladılar. Yüce ve Kuruoğlu (2006), bir-parametrelili açık düzlemsel homotetik hareketler için steiner formülünü elde ettiler.

3. TEMEL TANIMLAR ve ÖN BİLGİLER

Bu bölümde konuyla ilgili ihtiyaç duyulan tanımlar, Holditch teoreminin ifade ve ispatı yer almaktadır.

Tanım 3.1.

Boş olmayan bir G cümlesi üzerinde bir Δ işlemi;

$$\begin{aligned}\Delta : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\rightarrow c = a\Delta b\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $\forall x, y, z \in G$ için;

(G1) $x\Delta y \in G$ (kapalılık özelliği)

(G2) $x\Delta y = y\Delta x$ (değişme özelliği)

(G3) $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$ (birleşme özelliği)

(G4) $x\Delta e = e\Delta x = x$ olan bir $e \in G$ vardır (birim eleman özelliği)

(G5) $x\Delta x^{-1} = x^{-1}\Delta x = e$ olan bir $x^{-1} \in G$ vardır (ters eleman özelliği)

özelliklerinin sağlanması halinde G cümlesi, Δ işlemine göre bir değişmeli grup veya **Abel Grubu**, $G_1 \subset G$ ve G_1 aynı işleme göre bir grup ise (G_1, Δ) 'e (G, Δ) nin bir **Alt Grubu** denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 3.2.1.(Diferensiyellenebilir Yapı):

M bir topolojik n -manifold ve M nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, \omega_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $\omega_\alpha \cap \omega_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C sınıfından diferensiyellenebilir atlas denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir (Hacısalihoglu, 1995).

Tanım 3.2.2.(Diferensiyellenebilir Manifold):

M bir topolojik n -manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Hacısalıhoğlu, 1995)

Tanım 3.3.(Lie Grubu):

G bir diferensiyellenebilir manifold ve

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\rightarrow g_1 g_2 \end{aligned}$$

grup işlemi diferensiyellenebilir ise G ye bir **Lie Grubu**, G Lie grubunun, altmanifold ve altgrup yapısına sahip olan bir H Lie grubuna G nin bir **Alt Lie Grubu** denir (Brickell ve Clark, 1970).

Tanım 3.4. (Kati Transformasyonlar)

$$\begin{aligned} \varphi : (R^n, d_1) &\rightarrow (R^n, d_2) \\ p &\rightarrow \varphi(p) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\forall p, q \in R^n$ için;

$$d_1(p, q) = d_2(\varphi(p), \varphi(q))$$

ise φ ye R^n de bir kati transformasyon adı verilir.

Tanım 3.5. (Koordinat Transformasyonu)

Bir cismin bir diğerine bağlı pozisyonunu çalışmak için her bir cisme birer çati bağlanır. Cisimlerden biri sabit kabul edilir, diğeri hareketli. Sabit cisim yer gibi düşünülür ve bağlanan çati sabit çati olarak isimlendirilir ve bu çati F ile gösterilir. Hareketli cisme bağlanan çati, hareketli çatıdır ve M ile gösterilir. Koordinat transformasyonu

$$D : F \rightarrow M$$

şeklinde olup,

$$X = [A]x + d$$

ile verilir; burada, x noktanın M deki yer vektörü, X ise F deki yer vektürüdür (Bottema ve Roth,1979).

Hareketli cisim n -boyutlu ($n=2$ veya 3) ise, $[A]$ bir $n \times n$ matris ve d , n -boyutlu vektördür. Bu transformasyonun katı cisim katılığını korumak zorunda olması demek, her iki koordinat sisteminde de ilgili metriği kullanarak hesaplanan uzaklığın aynı olması demektir. M deki P ve Q noktaları arasındaki uzaklık Öklid uzaklığı olsun. Bu değer, P ve Q ' nun koordinat vektörlerinin farkının normudur. F deki ölçülendirme kullanılarak,

$$d(P, Q) = \|\vec{P} - \vec{Q}\| = \sqrt{(P - Q)^T (P - Q)}$$

elde edilir. M deki ölçülendirmeyi kullanarak bu hesaplama yapıldığında,

$$\|P - Q\| = \|[A]p + d - ([A]q + d)\| = \sqrt{(p - q)^T [A^T][A](p - q)}$$

bulunur. Son eşitliğin $\|p - q\|$ ya eşit olması için,

$$[A^T][A] = [I]$$

olmalıdır ki bu da A nın ortogonal olması demektir (Bottema ve Roth, 1979).

Tanım 3.6. (Yerdeğiştirmeler)

$\vec{X} = [A]\vec{x} + d$ ile verilen koordinat transformasyonunu, bir noktayı ilk konumundan şimdiki konumuna taşıyan bir operasyon olarak görmek sık yapılan bir tercihtir. Bu \vec{x} vektörünün ölçülendirildiği koordinat çatsı hakkında karışıklığa yol açabilir. Bu transformasyon, M nin bütünü F ile çakışık olduğu ilk konumundan, \vec{x} in daima M de ölçülendirildiği sunuş konumuna yer değiştirmesi olarak ele alınır. Bu transformasyon $D : F \rightarrow M$ ile gösterilir ve yer değiştirme olarak adlandırılır (Bottema ve Roth, 1979).

n -boyutlu uzayda bir yer değiştirme $D = (A, d)$ ile belirtilir, burada; $[A]$ bir $n \times n$ ortogonal matris ve d bir n -vektördür.

İki yer değiştirme $D_1 : F \rightarrow M_1$, $D_2 : M_1 \rightarrow M_2$ olmak üzere $D : D_1 D_2 : F \rightarrow M_2$ dir (Bottema ve Roth, 1979).

Teorem 3.1.

R^n , n -boyutlu uzayın yer değiştirmeleri cümlesi, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir cebirsel gruptur (Bottema ve Roth, 1979).

Tanım 3.7.

R^n , n -boyutlu uzayın yer değiştirmeleri grubu n -boyutlu uzayının Öklid Grubu olarak tanımlanır. Bu grup $SE(n)$ ile gösterilir (Bottema ve Roth, 1979).

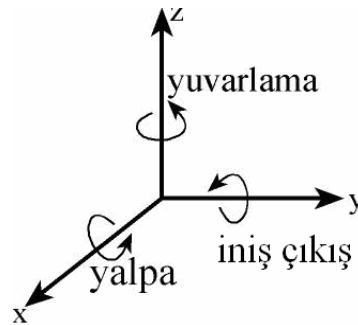
Tanım 3.8. (Temel Dönmeler)

R^3 de bir dönme, bir eksene dik olan düzlemlerde gerçekteşir ve dönme, dönme ekseni ile karakterize edilir. Temel olan üç dönme ekseni, koordinat eksenleridir ve bunlara bağlı dönmeler özel olarak adlandırılır. Bu isimlendirmeler şöyledir:

Dönme ekseni x ekseni ise dönme ye yalpa (yaw),

Dönme ekseni y ekseni ise dönme ye iniş-çıkış (pitch),

Dönme ekseni z ekseni ise dönme ye yuvarlama (roll) adı verilir (Schilling, 1990).



şekil 3.1. Eksenlere göre dönmeler (yuvarlama, iniş-çıkış, yalpa).

x , y ve z eksenleri etrafındaki dönmeler, sırasıyla R_x , R_y ve R_z ile gösterilirse her birine ait dönme matrisi,

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak belirlenir. Genel bir $R : F \rightarrow M$ hareketinin matris formu

$$[R] = R_y R_z R_x = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

olarak bellidir (Parkin, 1991).

Tanım 3.9. (Bir Ortogonal Matrisin Karakteristik Vektörleri)

Bir dönmenin (R^3 ' de), bir eksen etrafında olmasının açılımı, dönmenin bu eksenin invariant bırakması demektir. Bu kavram ise verilen bir matrisle belli olan lineer dönüşümün karakteristik vektörleriyle açıklanabilir. Söz konusu ortogonal matrisler olduğu için $A \in O(3)$ matrisinin karakteristik vektörleri belirlenmelidir. Aranacak çözüm,

$$[A]\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

matris denkleminin çözüm cümlesidir. Açık biçimde ,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

şeklinde yazılabilir.

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(M_{11} + M_{22} + M_{33}) + \det A = 0$$

ve ortogonal bir $[A]$ matrisi için $M_{ii} = a_{ii}$ olduğundan,

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 1 = 0 \quad (3.1)$$

elde edilir. $\lambda = 1$ in bir kök olduğu aşıkardır. Böylece sol tarafın çarpanlarından biri $\lambda - 1$ olup, buna göre (3.1) eşitliği;

$$(\lambda - 1)[\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1) + 1] = 0$$

olarak yazılır. $a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1 = a$ ile gösterilsin.

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad a = 2 \cos \phi$$

$$= \frac{2 \cos \phi \pm \sqrt{4 \cos^2 \phi - 4}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = \cos \phi \pm i \sin \phi$$

elde edilir. O halde (3.1) eşitliğinin diğer iki kökü,

$$\lambda = \cos \phi + i \sin \phi = \exp(i\phi)$$

$$\lambda^* = \cos \phi - i \sin \phi = \exp(-i\phi).$$

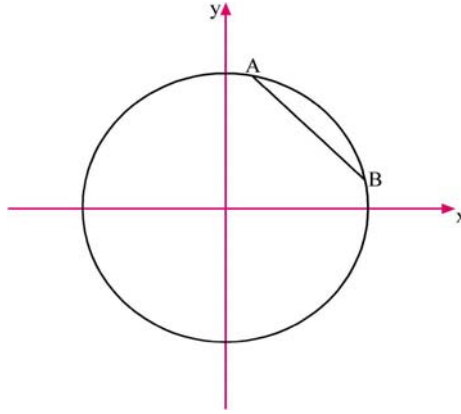
dir. $\lambda = 1$ ile birleşen karakteristik vektörü \vec{b} ile gösterelim; $\vec{v} = t\vec{b}$ üzerindeki bütün noktalar cümlesi dönme esnasında sabittir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 3.2. (Holditch Teoremi)

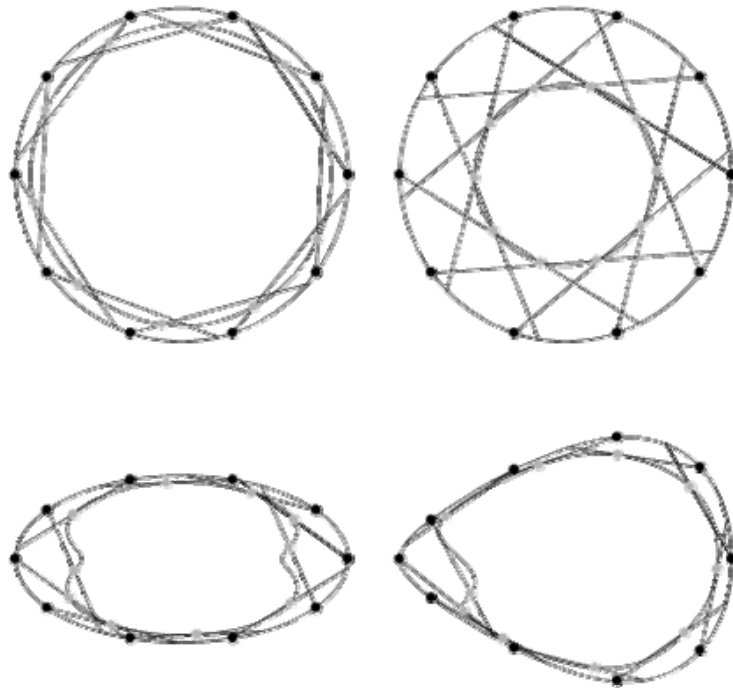
Bir kapalı eğrinin, $c + c'$ sabit uzunluktaki bir kirişi sırasıyla c ve c' uzunluğunda iki parçaya bölünürse, kirişin eğri boyunca bir tam hareketinde, bölen noktanın çizdiği yörünge eğrisi ile kapalı eğri arasında kalan bölgenin alanı;

$$\pi cc'$$

olacaktır(Holditch, H.,1858).



Şekil 3.2. Uç noktaları kapalı C eğrisi üzerinde olan AB çubuğunun herhangi bir pozisyonu.



Şekil 3.3. Çeşitli eğriler ve kiriş uzunluklarına göre P noktasının yörüngeleri.

İspat:

Kapalı bir eğri üzerinde hareket eden AB kirişinin herhangi bir pozisyonu şekil-3.2 de verildiği gibi olsun.

P , $AP = c$, $PB = c'$, olacak şekilde bölen nokta, Q da AB nin ardışık pozisyonu ile kesim noktası olsun. $[A]$ verilen kapalı eğrinin alanı; $[P]$, $[Q]$ ise P ve Q nun yörüngelerinin meydana getirdiği alanlardır. Ayrıca, $AQ = r$, $BQ = c + c' - r$ dir. Böylece kapalı eğri ile Q noktasının yörüngesinin meydana getirdiği bölgenin alanı

$$[A] - [Q] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

olur. Aynı zamanda

$$[A] - [Q] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (c + c' - r)^2 d\theta$$

olmaktadır. Böylece ,

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (c + c' - r)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(c + c')^2 - 2(c + c')r + r^2] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} [(c + c')^2 - 2(c + c')r + r^2] d\theta = \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} (c + c')^2 d\theta - \int_0^{2\pi} 2(c + c')r d\theta + \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

$$(c + c')^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 2(c + c') \int_0^{2\pi} r d\theta$$

$$(c + c') \int_0^{2\pi} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} r d\theta$$

$$(c + c')\theta \Big|_0^{2\pi} = 2 \int_0^{2\pi} r d\theta$$

$$(c + c')\pi = \int_0^{2\pi} r d\theta$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
[P] - [Q] &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (c-r)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} c^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2cr d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2} c^2 \int_0^{2\pi} d\theta - c \int_0^{2\pi} r d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta
\end{aligned}$$

dır. Hesaplanan integral değerleri yerlerine yazılırsa,

$$[P] - [Q] = \pi c^2 - c[\pi(c+c')] + [A] - [Q]$$

$$[P] - [Q] = \pi c^2 - \pi c^2 - \pi c c' + [A] - [Q]$$

ve buradan da ,

$$[A] - [P] = \pi c c'$$

elde edilir(Holditch, H., 1858).

Tanım 3.10.(Bir Lie Dönüşüm Grubu Altında Yörüngeler)

Bir G dönüşüm grubunun bir M manifoldu üstündeki sol (sağ) etkisi, M üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. Bu bağıntı,

$$m_1 \approx m_2 \Leftrightarrow m_2 = gm_1 \quad , \exists g \in G$$

şeklinde verilebilir. Bir $m \in M$ noktasını ihtiva eden denklik sınıfı,

$$\phi_m : G \rightarrow M$$

fonksiyonunun değerler kümesidir. Bu $\mathfrak{R}\phi_m = [m]$ cümlesine m nin **yörüngesi** denir.

Bir H_m cümlesini,

$$H_m = (\phi_m^{-1})_m$$

olarak tanımlayalım. H_m , G nin bir altgrupudur. H_m alt grubuna m deki *izotropi (isotropy) grubu* denir.

M nin denk noktalarındaki izotropi grupları birleşmiş (conjugate) gruplardır. Şöyle ki; $m' = gm$ ise,

$$H_m = (\phi_m^{-1})_m, H_m = \{g_o / g_o m = m\}$$

olmak üzere;

$$(gH_m g^{-1})m' = m'$$

$\forall g_o \in H_m$ için; $gg_o g^{-1} \in gH_m g^{-1}$ dir.

$$(gg_o g^{-1})(m') = gg_o g^{-1} gm = gg_o m = gm = m'$$

Böylece;

$$gH_m g^{-1} \subset H_{m'}$$

ve benzer şekilde

$$g^{-1}H_{m'}g \subset H_m$$

olur. Sonuç olarak;

$$H_{m'} = gH_m g^{-1}$$

bulunur. Eğer $m \in M$, verilen bir nokta ise,

$$\phi_m : G \rightarrow M$$

fonksiyonu G/H_m üzerinde

$$\begin{aligned} \psi_m : G/H_m &\rightarrow M \\ gH_m &\rightarrow gm \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı, değer cümlesi m nin yörüngesi olan bir ψ dönüşümünü tesis eder. ψ_m nin bir injection olduğu açıktır.

Bir Hausdorff manifoldu üstünde bir Lie dönüşüm grubu G olsun. $H_m \subset G$ kapalı altgruptur ve H_m ya discrete altcümledir veya G nin regüler altmanifoldu olarak tek türlü bir yapıya sahiptir.

$m' = gm$ ise H_m ve $H_{m'}$,

$$L_g \circ R_{g^{-1}} : G \rightarrow G$$

diffeomorfizmi altında birbirlerine karşılık gelirler.

Bir yörüngenin noktalarındaki izotropi grupları ya hepsi discrete dir veya G için bir regüler altmanifold olarak oluşturulabilir. Bu ikinci durumda, manifoldlar diffeomorfiktirler.

H_m , G nin bir açık altgrubu da olduğu zaman, H_m G nin bileşenlerinin bir bileşimi olmak mecburiyetindedir. O zaman, mesela, G sonlu sayıda bileşene sahipse, G/H_m sonlu bir cümledir ve m nin yörüngesi sonlu sayıda noktadan oluşur. Aksi takdirde, aşağıdaki teorem verilebilir (Brickell ve Clark, 1970).

Teorem.3.3:

G , bir M Hausdorff manifoldunun Lie dönüşüm grubu olsun. Eğer H_m izotropi grubu, G nin bir açık altgrubu değil ise, $\psi_m, G/H_m$ nin M içine bir imbeddingdir (Brickell ve Clark, 1970).

Teorem.3.4:

Yukarıdaki teoremin şartları altında, $m \in M$ nin yörüngesi, M nin G/H_m ye diffeomorfik bir altmanifold yapısıyla verilebilir (Brickell ve Clark, 1970).

Tanım 3.11.(Yörüngeler)

M bir manifold, $S(M)$ M nin bütün permütasyonlarının grubu olsun. ($(S(M), O)$ bir gruptur)

G , M üzerinde soldan etki etsin. O zaman,

$$1) \quad f : G \rightarrow S(M)$$

$$g \rightarrow \theta_g$$

bir homomorfizmdir.

2) Bu homomorfizm

$$\theta_g(m) = \theta(g, m)$$

ile bir etki tanımlar.

1). nin ispatı aşıkardır.

2). nin ispatı:

$$\forall g_1, g_2 \in G, \forall m \in M \text{ için,}$$

$$\begin{aligned}
\theta(g_1, \theta(g_2, m)) &= \theta(g_1, f(g_2)m) \\
&= f(g_1)(f(g_2)(m)) \\
&= f(g_1, g_2)(m) \\
&= \theta(g_1, g_2, m)
\end{aligned}$$

den ispat aşikardır (Brickell ve Clark, 1970).

Teorem.3.5:

$f : G \rightarrow S(M)$ homomorfizminin 1:1 olması için gerek ve yeter şart, θ_g birim dönüşüm iken $g = e$ olmasıdır (Brickell ve Clark, 1970).

İspat:

$\theta_g = f(g)$ dir. Böylece bu teorem, $f^{-1}(e') = e$ olması ile ifade edilebilir. Bu da grup teoriden bilinen bir gerçektir (Brickell ve Clark, 1970).

Tanım.3.12.

$\theta : G \times M \rightarrow M$ bir etki olsun. $f : G \rightarrow S(M)$ 1:1 ise θ ya “effective etki” (etkili etki) denir. Yani, bir θ etkisi ile belli f homomorfizminin çekirdeği $\{e \in G \text{ birim eleman}\}$ oluşuyor ise θ etkili olarak etki ediyordur (Brickell ve Clark, 1970).

Özellik.3.1.

$\theta : G \times M \rightarrow M$ bir effective etki ise $\{\theta_g / g \in G\} \subset S(M)$ bir altgruptur (Brickell ve Clark, 1970).

Tanım.3.13.

$\theta : G \times M \rightarrow M$ bir etki olsun. $N \subset M$ için,
 $GN : \{g_n / g \in G, n \in N\}$ olarak tanımlanır.
 $g_n = \theta(g, n)$ dir. $N = \{m\}$ için,

$$G(m): \{g_m / g \in G\}$$

Cümlesine , m nin G nin M üzerindeki θ etkisi altındaki yörüngesi denir.

$G(m) = m$ ise, m ye $\theta : G \times M \rightarrow M$ etkisinin sabit noktası denir.

En az bir $m \in M$ için $G(m) = m$ ise G , M üzerinde geçişlidir denir (Brickell ve Clark, 1970).

Örnek.3.1:

$$GL(n, R) \times R^n \rightarrow R^n$$

$$(A, x) \rightarrow Ax$$

etkisini ele alalım. $0 : (0, 0, \dots, 0) \in R^n$ bu etkinin sabit bıraktığı noktadır.

$$[A.0 = 0, \forall A \in GL(n, R)]$$

Bu etki geçişlidir. Şöyle ki;

Bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ için, $x = f_1$ olmak üzere, R^n nin bir $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ bazı oluşturulabilir. Bu baz R^n nin $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ doğal bazı cinsinden,

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} x = f_1 &= \sum_{i=1}^n a_{1j} e_j \\ &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \dots + a_{1n} e_n \\ &= (a_{11}, 0, \dots, 0) + (0, a_{12}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{1n}) \\ &= [a_{ji}] e_1 \end{aligned}$$

Bu eşitlik $\forall x \in R^n - \{0\}$ için geçerlidir. Böylece $\forall x, x \in G e_1 \Rightarrow R^n - \{0\} \subset G(e_1)$ dir.

$G(e_1) \subset R^n - \{0\}$ olduğu açıktır. $\Rightarrow G(e_1) = R^n - \{0\}$ dır $\Rightarrow \theta$ etkisi geçişlidir.

Bu tür etkiler, yörüngeler açısından önemli değildirler. Çünkü her elemanın yörüngesi manifoldun kendisidir.

Şimdi denklik sınıfları ve yörüngeler arasında ilgi kuralım.

$$\theta : G \times M \rightarrow M$$

bir etki olsun. M üzerinde bir $m_1 \approx m_2 \Leftrightarrow m_2 = g m_1, \exists g \in G$ olarak verilsin.

\approx nın bir denklik bağıntısı olduğu aşikardır. Buna bağlı olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir (Brickell ve Clark, 1970).

Teorem.3.6:

\approx bağıntısı ile elde edilen denklik sınıfları G nin yörüngeleri ile çakışır.

İspat:

$m_1, m_2 \in M$ için, $m_1 \approx m_2 \Rightarrow$

$$G(m_1) = \{m / m_* = gm_1\}$$

$$[m_1] = \{m / m_\xi = gm_1\}$$

$$x \in G(m_1) \Rightarrow x = gm_1 \Rightarrow m_1 \approx x \Rightarrow x \in [m_1] \Rightarrow G(m_1) \subset [m_1]$$

$$x \in [m_1] \Rightarrow gm_1 = x \Rightarrow m_1 \approx x \Rightarrow x \in [G(m_1)] \Rightarrow [m_1] \subset G(m_1)$$

$$\Rightarrow [m_1] = G(m_1)$$

dir.

Böylece, bir m elemanının $G(m)$ yörüngesi, m nin $\theta: G \times M \rightarrow M$ ile belirli \approx denklik bağıntısına göre denklik sınıfı olarak da tanımlanabilir (Brickell ve Clark, 1970).

Tanım.3.14.

$\theta: G \times M \rightarrow M$ bir etki olsun. $\forall m \in M$ için $G_m = \{e\}$ ise θ etkisine (freely) serbest etki denir.

Bir Lie grubu etkisinde, G grubu yerine özel olarak $(R, +)$ grubunu (abel) almak bazı yeni tanımlamalar ve özel durumlara sebep olur. $G = R$ durumunda, 1-parametrelili Lie grup etkilerinden bahsetmek anlamlıdır.

$$\theta: R \times M \rightarrow M$$

bir etki olsun. $\forall t \in R$ için,

$$\theta_t: M \rightarrow M$$

$$p \rightarrow \theta_t(p) = \theta(t, p)$$

şeklinde tanımlı dönüşümler, genel teoriye uygun olarak birer diffeomorfizimdirler. Ayrıca; $\{\theta_t / t \in R\}$ cümlesi bir gruptur ($\theta_0 = e, \theta_t^{-1} = \theta_{-t}$ dir) (Brickell ve Clark, 1970).

Tanım.3.15.

$\{\theta_t / t \in R\}$ grubuna M üstünde tanımlı dönüşümlerin 1-parametrelili grubu denir. Bu durumda $\theta: R \times M \rightarrow M$ etkisine M nin dönüşümlerinin 1-parametrelili grubunun etkisi denir.

$\{\theta_t(p)/t \in R\}$ cümlesine $p \in M$ noktasının bu 1-parametrel grup altındaki yörüngesi veya, $\{\theta_t\}$ grubunun $p \in M$ noktasındaki yörüngesi denir.

$$\begin{aligned}\theta_p : R &\rightarrow M \\ t &\rightarrow \theta_t(p) = \theta(t, p)\end{aligned}$$

dönüşümü M de bir C^∞ -eğri tanımlar (Brickell ve Clark, 1970).

Örnek.3.2.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\theta : R \times R^3 &\rightarrow R^3 \\ (t, x) &\rightarrow \theta(t, x) = x + at\end{aligned}$$

dönüşümü R nin R^3 üzerinde bir etkisini tanımlar. Böylece;

$$\begin{aligned}\theta_t : R^3 &\rightarrow R^3 \\ x &\rightarrow x + at\end{aligned}$$

diffeomorfizimleri bellidir.

Bir $x \in R^3$ noktasının yörüngesine ait iki nokta y_1, y_2 olsun.

$$\begin{aligned}y_1 &= x + at_1 \\ y_2 &= x + at_2 \\ y_1 - y_2 &= (a_1(t_1 - t_2), a_2(t_1 - t_2), a_3(t_1 - t_2))\end{aligned}$$

dikkat edilirse, $y_1 - y_2$ fark vektörü y_1 ve y_2 nin seçiminden bağımsızdır ve $y_1 - y_2$ vektörü x noktasının belirlediği yörünge olan doğrunun doğrultman vektörüdür. Ayrıca

$$\frac{a_1(t_1 - t_2)}{a_1} = \frac{a_2(t_1 - t_2)}{a_2} = \frac{a_3(t_1 - t_2)}{a_3} = t_1 - t_2 = \lambda$$

sabit değerinden dolayı x in yörüngesi \vec{a} nin paralelinde bir doğru belirler. Bu etki serbesttir.

Şöyle ki; bir $x \in R^3$ noktasının izotropi grubu R_x olsun.

$$R_x = \{t / \theta_t(x) = x\}$$

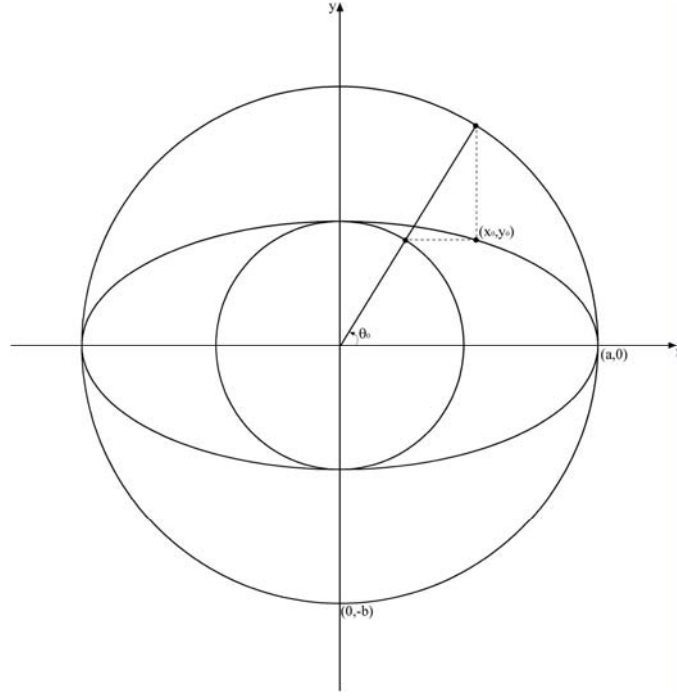
dir.

$$\begin{aligned}\theta_t(x) = x &\Rightarrow x + ta = x \\ &\Rightarrow ta = 0 \\ &\Rightarrow t = 0 \\ &\Rightarrow R_x = \{0\} \\ &\Rightarrow \text{etki serbesttir.}\end{aligned}$$

4. HOLDITCH TEOREMİNİN LIE GRUP ETKİLERİYLE İRDELENMESİ

Bu bölümde, Holditch teoremi Lie grup etkileriyle ele alınıp Holditch hareketinin bir Lie grup etkisi ile ifade edilebileceği gösterildi ve çember eğrisi üzerinde uygulama yapıldı.

4.1. Bir Noktaya Etkisi Elips Yörüngesi Olan Matrisin Yazılması



Şekil 4.1. (x_0, y_0) Noktasından Geçen Elipsin oluşturulması.

Herhangi bir (x_0, y_0) noktasına elips yörüngesini çizdiren transformasyon matrisi;

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & d_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\theta_0 + \theta) \\ b \sin(\theta_0 + \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada $(x_0, y_0) = (a \cos \theta_0, b \sin \theta_0)$ kabul edilirse,

$$d_1 = \cos \theta (a \cos \theta_0 - x_0) - \sin \theta (a \sin \theta_0 - y_0)$$

$$d_2 = \sin \theta (b \cos \theta_0 - x_0) + \cos \theta (b \sin \theta_0 - y_0)$$

öteleme vektörü bileşenleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$d_1 = (b - a) \sin \theta_0 \sin \theta$$

$$d_2 = (b - a) \cos \theta_0 \sin \theta$$

O halde aranan transformasyon matrisi;

$$E_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (b - a) \sin \theta_0 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & (b - a) \cos \theta_0 \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir ve

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (b - a) \sin \theta_0 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & (b - a) \cos \theta_0 \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos \theta_0 \\ b \sin \theta_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\theta_0 + \theta) \\ b \sin(\theta_0 + \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır. O halde $(x_0, y_0) = (a \cos \theta_0, b \sin \theta_0)$ noktasının E_θ matrisi altındaki yörüngesi $(a \cos(\theta_0 + \theta), b \sin(\theta_0 + \theta))$ elipsidir. $E_{\theta_0 + \theta}$ matrisi altında $(a, 0)$ noktasının yörüngesi hesaplanacak olursa aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$(a, 0)$ olduğu için $\theta_0 = 0$ olur ve öteleme vektörünün bileşenleri de şu şekildedir:

$$d_1 = (b - a) \sin \theta_0 \sin(\theta_0 + \theta) = (b - a) \sin 0 \sin \theta = 0$$

$$d_2 = (b - a) \cos \theta_0 \sin(\theta_0 + \theta) = (b - a) \cos 0 \sin \theta = (b - a) \sin \theta$$

bulunan değerler $E_{\theta_0 + \theta}$ matrisinde yerine yazılır ve matris $(a, 0)$ ile çarpılırsa:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_0 + \theta) & -\sin(\theta_0 + \theta) & 0 \\ \sin(\theta_0 + \theta) & \cos(\theta_0 + \theta) & (b - a) \sin(\theta_0 + \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\theta_0 + \theta) \\ b \sin(\theta_0 + \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $(a, 0)$ ve $(x_0, y_0) = (a \cos \theta_0, b \sin \theta_0)$ noktalarının yörüngeleri aynı elipsi verir.

4.2. Lie Grup Özelliğinin İncelenmesi

Her bir θ değeri için yazılan E_θ matrislerinin oluşturduğu cümlenin grup yapısını inceleyelim. Öncelikle kapalılık özelliğine bakılacak olursa:

$$\begin{aligned}
 (x', y') E_{\theta_2(x_0, y_0)} E_{\theta_1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & (b-a) \sin(\theta_0 + \theta_1) \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & (b-a) \cos(\theta_0 + \theta_1) \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & (b-a) \sin \theta_0 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & (b-a) \cos \theta_0 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & (b-a) \sin \theta_0 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & (b-a) \cos \theta_0 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &=_{(x_0, y_0)} E_{\theta_1 + \theta_2}
 \end{aligned}$$

çarpım matrisi de

$$E_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (b-a) \sin \theta_0 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & (b-a) \cos \theta_0 \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisiyle aynı formdadır. O halde kapalılık özelliği sağlanır.

E_θ matrisinin tersi bulunacak olursa:

$$\begin{aligned}
 E_\theta^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (b-a) \sin \theta_0 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & (b-a) \cos \theta_0 \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -(b-a) \sin(\theta_0 + \theta) \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & -(b-a) \cos(\theta_0 + \theta) \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Görülmektedir ki E_{θ}^{-1} matrisi de E_{θ} matrisiyle aynı formdadır. Şimdi de

$E_{\theta_2} E_{\theta_1}^{-1}$ matrisi hesaplanacak olursa:

$$\begin{aligned}
 E_{\theta_2} E_{\theta_1}^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & (b-a) \sin \theta_0 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & (b-a) \cos \theta_0 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & -(b-a) \sin(\theta_0 + \theta_1) \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & -(b-a) \cos(\theta_0 + \theta_1) \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2 - \theta_1) & -\sin(\theta_2 - \theta_1) & (b-a) \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_0 + \theta_1) \\ \sin(\theta_2 - \theta_1) & \cos(\theta_2 - \theta_1) & (b-a) \sin(\theta_2 - \theta_1) \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

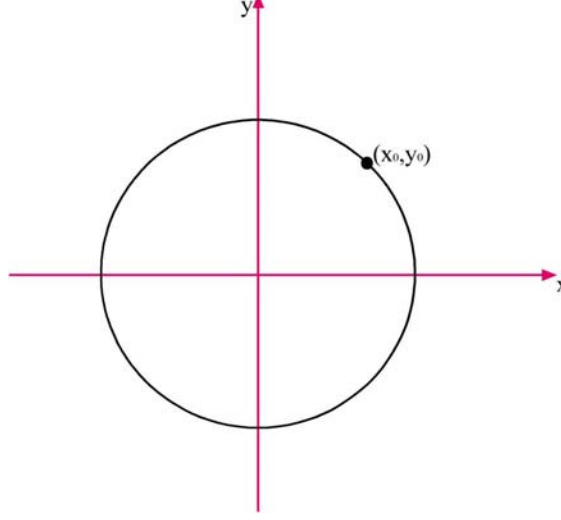
elde edilir. $E_{\theta_2} E_{\theta_1}^{-1}$ matrisi de yine

$$E_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (b-a) \sin \theta_0 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & (b-a) \cos \theta_0 \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisiyle aynı formdadır.

4.3. Çember Üzerinde Uygulamalar

E_θ matrisi çember üzerinde uygulanacak olursa aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:



Şekil 4.2. Yörüngesi çember olan nokta.

Çember için $a = b$ olduğu bilinmektedir. O halde öteleme vektörleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$d_1 = (b - a) \sin \theta_0 \sin \theta = 0$$

$$d_2 = (b - a) \cos \theta_0 \sin \theta = 0$$

E_θ matrisi yazılacak olursa:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Bu ise bildiğimiz z-ekseninde (x-y düzleminde) dönme matrisidir. Daha sonra herhangi bir (x_0, y_0) noktasının bu matris altındaki yörüngesi hesaplanırsa:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta \\ x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bulunan noktalar cümlesi, yarıçapı;

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = R$$

olan çemberi verir. Bu çember üzerinde bir AB kirişi ve bu kirişin üzerinde herhangi bir nokta da χ olarak verilsin. χ noktası AB kirişini λ oranında bölsün ($0 \leq \lambda \leq 1$). O zaman ;

$$\begin{matrix} A(x_0, y_0) \\ B(x_1, y_1) \end{matrix} \text{ ve } x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2 = R^2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{\chi} = (x', y') &= \vec{A} + \lambda \vec{AB} \\ &= (x_0, y_0) + \lambda((x_1, y_1) - (x_0, y_0)) \\ &= (x_0 + \lambda(x_1 - x_0), y_0 + \lambda(y_1 - y_0)) \\ &= ((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1, (1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1) \end{aligned}$$

olarak bulunur. χ noktasının yörüngesi bulunursa:

$$C(\chi) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve bulunan (x', y') değeri yerine yazılırsa;

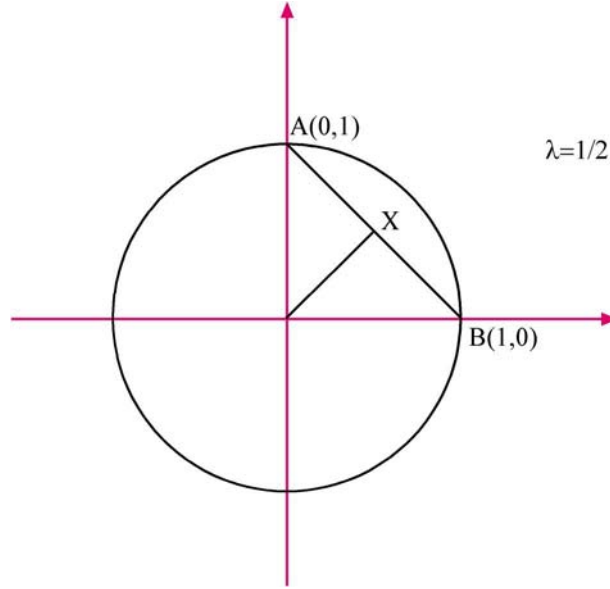
$$\begin{aligned} C(\chi) &= ([(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1] \cos \theta - [(1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1] \sin \theta, \\ &[(1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1] \sin \theta + [(1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1] \cos \theta) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan noktanın temsil ettiği vektörün normu alınırsa:

$$R_x = \|C(\chi)\| = \sqrt{2\lambda(\lambda - 1)(R^2 - \langle A, B \rangle) + R^2}$$

bulunur. Bu sonuç χ noktasının çizdiği çemberin yarıçapını verir.

Örnek 4.1.



Şekil 4.3. Çember

$A = (0,1), B = (1,0), \lambda = \frac{1}{2}$ verilsin. O halde;

$$R_x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

yazılabilir. Buradan R_x hesaplanırsa;

$$R_x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olarak bulunur.

$$R_x = \sqrt{2\lambda(\lambda-1)(R^2 - \langle A, B \rangle) + R^2}$$

formülünde verilenler yazılırsa;

$$R_x = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) (1^2 - \langle (0,1), (1,0) \rangle) + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

elde edilir.

İki çember arasında kalan alan yani $C(A)$ (veya $C(B)$) ile $C(\chi)$ çemberleri arasındaki alan hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} Alan(C(A) - C(\chi)) &= \pi R^2 - \pi R_x^2 = \pi R^2 - \pi(2\lambda(\lambda - 1)(R^2 - \langle A, B \rangle) + R^2) \\ &= \pi(R^2 - 2\lambda(\lambda - 1)(R^2 - \langle A, B \rangle) + R^2). \end{aligned}$$

Gerekli işlemler ve kısaltmalar yapılırsa aradaki alan;

$$Alan(C(A) - C(\chi)) = -2\pi\lambda(\lambda - 1)(R^2 - \langle A, B \rangle)$$

ya da

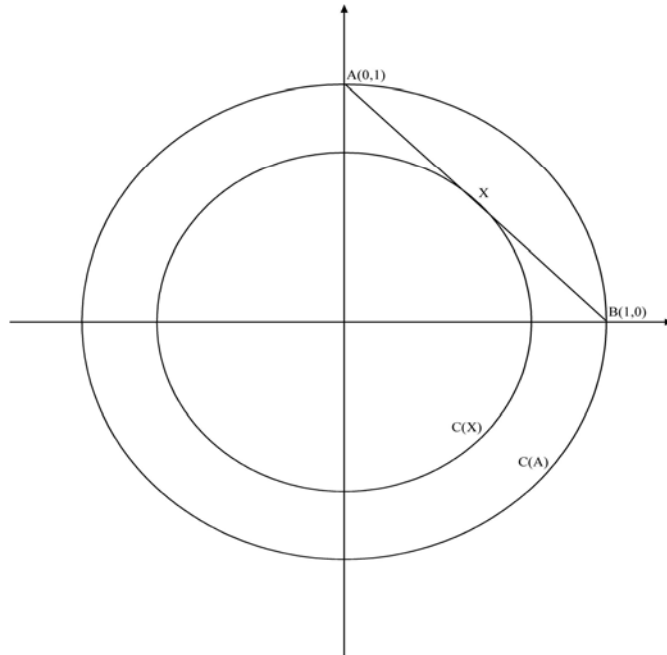
$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \|A\| \|B\| \cos \phi \\ &= R^2 \cos \phi \end{aligned}$$

eşitliği yerine yazılarak A ve B vektörleri arasındaki açı ϕ olmak üzere;

$$Alan(C(A) - C(\chi)) = -2\pi R^2 \lambda(\lambda - 1)(1 - \cos \phi)$$

şeklinde elde edilebilir ($0 \leq \phi \leq \pi$). Bulunan değer aradaki alanın eğriden bağımsız olduğunu göstermektedir.

Örnek 4.2.



Şekil 4.4. Çember ve X noktasının yörüngesi arasındaki alan.

$A = (0,1), B = (1,0), \lambda = \frac{1}{2}$ verilsin. ($R = 1$). O halde aradaki alan;

$$\begin{aligned} \text{Alan}(C(A) - C(\chi)) &= -2\pi\lambda(\lambda - 1)(R^2 - \langle A, B \rangle) \\ &= -2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right)(1^2 - 0) \\ &= \frac{\pi}{2} br^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada A ve B vektörleri arasındaki açı $\phi = \frac{\pi}{2}$ olup,

$$\begin{aligned} \text{Alan}(C(A) - C(\chi)) &= -2\pi R^2 \lambda(\lambda - 1)(1 - \cos \phi) \\ &= -2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right)(1 - \cos \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{\pi}{2} br^2 \end{aligned}$$

ve son olarak a ve b sırasıyla χ noktasının A ve B noktalarına olan uzaklığı olmak üzere Holditch teoremi sonucu aradaki alanı yazarsak;

$$\begin{aligned} \text{Alan}(C(A) - C(\chi)) &= \pi ab \\ &= \pi \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} br^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.4 Pascal Programında Bilgisayar Uygulamaları

4.4.1 Elips Ve Çember Programı

```

uses crt, graph;
var
  grDriver: Integer;
  grMode: Integer;
  ErrCode: Integer;
  tempr : real ;
  q0 : real;
  a,b : real ;
  x0,y0 : real ;
  q1 : integer ;
  sonx,sony : array [0..360] of real;
begin
  clrscr;
  write('X0 degerini girin '); readln(x0) ;
  write('Y0 degerini girin '); readln(y0) ;
  write('b degerini girin '); readln(b) ;
  a := x0*b/sqrt(b*b-y0*y0 );
  q0 := arctan(sqrt(1-sqr(x0/a*pi/180))/x0/a*pi/180);

  {q1 := 0-360}
  readln ;
  clrscr;
  for q1 := 0 to 360 do begin
    gotoxy(1,1);writeln(' ');
    gotoxy(1,2);write(' ', cos(q1*pi/180), ' ', -sin(q1*pi/180), ' ', (b-
a)*sin(q0*pi/180)*sin(q1*pi/180));
    writeln(' ', a*cos(q0*pi/180), ' ');
    gotoxy(1,3);write(' ', sin(q1*pi/180), ' ', cos(q1*pi/180), ' ', (b-
a)*cos(q0*pi/180)*cos(q1*pi/180));
    writeln(' ', b*sin(q0*pi/180), ' ');
    writeln(' 0 0 1 0 ');
  ');
  writeln(' ');
  writeln ;
  {tempr :=a*cos(q0*pi/180)*cos(q1*pi/180)-b*sin(q0*pi/180)*sin(q1*pi/180)+(b-
a)*sin(q0*pi/180)*sin(q1*pi/180);}
  sonx[q1] := a*cos((q0+q1)*pi/180);
  sony[q1] := b*sin((q0+q1)*pi/180);

  writeln(sonx[q1]);
  writeln(sony[q1]);
  writeln(' 1');
  delay(10);

end ;
readln ;
grDriver := Detect;
InitGraph(grDriver, grMode,'c:\program files\tp\egavga.bgi');
ErrCode := GraphResult;

if ErrCode = grOk then
begin { Do graphics }

  for q1 := 0 to 360 do begin
    circle(300+round(8*sonx[q1]),200+round(8*sony[q1]),1);
    delay(10);
  end ;
end ;

```

4.4.2 Holditch Hareketi

```

uses crt, graph;
var
  grDriver: Integer;
  grMode: Integer;
  ErrCode: Integer;

  xa,ya,xasp,yasp : word;
  tempr : real ;
  q0 : real;
  a,b : real ;
  x0,y0 : real ;
  k : real ;
  sayac,q1 : integer ;
  sonx,sony : array [0..360] of real;
  sonxint : array[0..360] of integer ;
  ypoints : array [-400..400] of real ;

begin
  clrscr;
  write('X0 degerini girin '); readln(x0) ;
  write('Y0 degerini girin '); readln(y0) ;
  write('b degerini girin '); readln(b) ;
  a := x0*b/sqrt(b*b-y0*y0) ;
  q0 := arctan(sqrt(1-sqr(x0/a*pi/180))/x0/a*pi/180);

  {q1 := 0-360}
  readln ;
  clrscr;
  for q1 := 0 to 360 do begin
    gotoxy(1,1);writeln('É                                     » É                                     »');
    gotoxy(1,2);write('°', cos(q1*pi/180),' ', -sin(q1*pi/180),' ', (b-
a)*sin(q0*pi/180)*sin(q1*pi/180));
    writeln('° °',a*cos(q0*pi/180),'°');
    gotoxy(1,3);write('°', sin(q1*pi/180),' ',cos(q1*pi/180),' ', (b-
a)*cos(q0*pi/180)*cos(q1*pi/180));
    writeln('° °',b*sin(q0*pi/180),'°');
    writeln('° 0          0          1          ° °          °');
    writeln('É                                     ¼ É                                     ¼');
    writeln ;
    {tempr :=a*cos(q0*pi/180)*cos(q1*pi/180)-b*sin(q0*pi/180)*sin(q1*pi/180)+(b-
a)*sin(q0*pi/180)*sin(q1*pi/180);}
    sonx[q1] := a*cos((q0+q1)*pi/180);
    sony[q1] := b*sin((q0+q1)*pi/180);
    sonxint[q1] := round(100*sonx[q1]);
    writeln(sonx[q1]);
    writeln(sony[q1]);
    writeln(' 1');
  end;

```

```
end ;
```

```
readln ;
```

```
grDriver := Detect;
```

```
InitGraph(grDriver, grMode, ' ');
```

```
ErrCode := GraphResult;
```

```
if ErrCode = grOk then
```

```
begin { Do graphics }
```

```
for q1 := 0 to 360 do begin
```

```
circle(350+round(8*sonx[q1]),175+round(8*sony[q1]),1);
```

```
delay(15);
```

```
end ;
```

```
setcolor(5);
```

```
for q1 := 0 to 360 do begin
```

```
setcolor(q1 mod 16);
```

```
line(350+round(8*sonx[q1]),175+round(8*sony[q1]),350+round(8*sonx[(q1+100) mod  
360]),175+round(8*sony[(q1+100) mod 360]));
```

```
delay(15);
```

```
end ;
```

```
Readln;
```

```
CloseGraph;
```

```
end
```

```
else
```

```
Writeln('Graphics error:', GraphErrorMsg(ErrCode));
```

```
end.
```

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak 1858 yılında yayınlanan ve daha sonra oldukça ilgi toplayıp üzerinde çok çalışılan Holditch teoremini Lie Grup etkileriyle ele alıp,iki kapalı eğri için Holditch hareketinin bir Lie Grup etkisi ile verilebileceği gösterildi. Kapalı eğri olarak elips ve çember eğrileri üzerinde inceleme yapıldı ve bulunan sonuçlara ilişkin birkaç örnek verildi. Ayrıca Pascal programlama dilinde bilgisayar programları yazıldı.

Çalışmanın 4.1.bölümünde bir noktaya etkisi elips eğrisi olan matris elde edildi. 4.2.bölümünde bulunan matrisin Lie grup yapısı incelendi ve elde edilen E_θ matrisinin grup şartlarını sağladığı gözlemlendi. 4.3.bölümde elde edilen sonuçların çember üzerinde uygulaması yapıldı ve çember için elde edilen sonuçlara birkaç örnek verildi. 4.4.bölümde ise çember elips ve Holditch teoremi için Turbo Pascal 7.0 programları yazıldı.

KAYNAKLAR

- Brickell, F., Clark, R.S., 1970. *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand Reinhold Company, London. 289.
- Bottema, O., Roth, B., 1979. *Theoretical Kinematics*. North- Holland Publishing Company, Amsterdam. 557.
- Broman, A., 1981. A Fresh look at a long-forgotten theorem. *Mathematics Magazine*, 54(3): 99-108.
- Düldül, M., Kuruoğlu, N., 2005. On the polar moment of inertia of the projection curve. *Applied Mathematics E-Notes*, 5: 124-128.
- Fu, K.S., Gonzalez, R. C., Lee, C. S. G., 1987. *Robotics*. Mc Graw-Hill International Editions, Singapore. 580.
- Güneş, R., Keleş, S., Hacısalihoğlu, H.H., 1989. Two corollaries of Holditch's theorem for one-parameter closed spatial motions. *Fac. Sci. Univ. Ank. Series A₁. Math.Statist.*,38. (1-2): 53-58.
- Hacısalihoğlu, H.H., 1983. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi, 30, Ankara. 128.
- Hacısalihoğlu, H.H., 1989. Two corollaries of Holditch's theorem for the parts of surface in E^3 . *Fac. Sci. Univ. Ank. Series A₁. Math.Statist.*,38. (1-2): 59-66.
- Hacısalihoğlu, H.H., 1998. *Lineer Cebir*. 6.Baskı. Ankara Üniversitesi, Ankara. 480.
- Hacısalihoğlu, H.H., Amirov, A. Kh., 1995. On Holditch and Liouville theorems. *Fac. Sci. Univ. Ank. Series A₁. Math.Statist.*,44. (1-2): 59-66.
- Hacısalihoğlu, H.H., 1995. *Diferensiyel Geometri*. Ankara Üniversitesi, Ankara. 300.
- Holditch, H., 1858. Geometrical theorem. *Q. J. Pure Appl. Math.* 2 , 38-39.
- Karadağ, B. H., Keleş, S., 1996. Paralel projection area and holditch's theorem. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A₁*, 45: 75-84.
- Karger, A., Novak, J., 1978. *Space Kinematics and Lie Groups*. Gordon and Breach Science Publishers, Montreux. 422.
- Kılıç, E., Keleş, S., 1994. On holditch's Theorem and polar inertia momentum. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A₁*, 43: 41-47.
- Kuruoğlu, N., Yüce, S., 2004. The generalized holditch theorem for the homotetic motions on the planar kinematics. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54(129): 337-340.

- McCarthy, J. M., 1990. *An Introduction to Theoretical Kinematics*. The MIT Press, Massachusetts. 130.
- Parkin, R. E., 1991. *Applied Robotics Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 420.
- Pottmann, H., 1985. Holditch sickles. *Arch. Math.*, **44**(4): 373-378.
- Pottmann, H., 1986. An isotropic analogue to holditch's theorem. *J. Geom.*, **26**(1): 35-42.
- Schilling, R. J., 1990. *Fundamentals of Robotics*. Prentice Hall, New Jersey. 425.
- Spring, K. W., 1986. Euler parameters and the use of quaternion algebra in the manipulation of finite rotations: a review. *Mechanism and Machine Theory*, **21**: 365-373.
- Tutar, A., Kuruoğlu, N., 1999. The Steiner formula and the holditch theorem for the homothetic motions on the planar kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, **34**(1): 1-6.
- Yahşi, O. S., Özgören, K., 1984. Minimal joint motion optimization of manipulators with extra degrees of freedom. *Mechanism and Machine Theory*, **19**(3): 325-330.
- Yüce, S., Kuruoğlu, N., 2004. Holditch-type theorems for the planar lorentzian motions. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **17**(4): 467-471.
- Yüce, S., Kuruoğlu, N., 2005. A generalization of the Holditch theorem for the planar homothetic motions. *Applications of Mathematics*, **50**(2): 87-91.
- Yüce, S., Kuruoğlu, N., 2006. The steiner formulas for the open planar homothetic motions. *Applied Mathematics E-Notes*, **6**: 26-32.

ÖZ GEÇMİŞ

Sultan ÖZDEMİR 19/07/1982 tarihinde Manisa'da doğdu. İlköğrenimini Konya'nın Doğanhisar ilçesi Atatürk ilköğretim okulunda, orta öğrenimini Doğanhisar çok programlı lisesinde tamamladı. Yüksek öğrenimini Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde, fakülte ve bölüm birincisi olarak, tamamladı. 2004 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2006 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaya başladı. Halen öğrenimine ve araştırma görevliliğine devam etmektedir.