T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SMARANDACHE YAKIN HALKALARI VE ONLARIN GENELLEŞTİRİLMELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Zafer BELİKIRIK
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ

VAN – 2008

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ danışmanlığında, Zafer BELİKIRIK tarafından sunulan " Smarandache Yakın Halkaları ve Onların Genelleştirilmeleri" isimli bu çalışma "Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği" ve "Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi"nin ilgili hükümleri gereğince 04/08/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Cemil Tunç İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Necat Görentaş İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. İ. Hakkı DENİZLER İmza:

ÖZET

SMARANDACHE YAKIN HALKALARI ONLARIN GENELLEŞTİRİLMELERİ

BELİKIRIK, Zafer
Yüksek Lisans Tezi , Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ
TEMMUZ 2008, 34 sayfa

Bu tezde Smarandache Yakın Halkaları kavramı üzerinde çalışılmıştır. İlk önce halkalarla ilgili bazı temel tanımlar verildi. Daha sonra Smarandache halkasının tanımını verip, Smarandache halkalarla ilgili özellikleri inceleyeceğiz. Son olarak Smarandache yakın halkalarını ve onların genelleştirilmeleri ile ilgili olarak birçok yeni sınıflar verilecektir.

Anahtar kelimeler : Halka, Yarı-yakın halka, Smarandache yarı-yakın halka, Smarandache yakın halka, Anti-Smarandache yarı-yakın halka, Smarandache yarı yakın halka homomorfizmi.

ABSTRACT

SMARANDACHE NEAR RINGS AND THEIR GENERALIZATIONS

BELİKIRIK, Zafer
Msc Thesis, Mathematics Science
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Necat GÖRENTAŞ
July 2008, 34 pages

In this thesis, we have studied concept of the Smarandache near-ring. First, it has given some basic definitions related to rings.

Later, we have given the definition of Smarandache ring and dissussed properties of this ring.

Finally, a few new classes, which are related to Smarandache near rings and generalizations of them, have been introduced.

Key words: Near ring, Semi-near ring, Smarandache semi-near ring, Smarandache near ring, Anti-Smarandache semi-near ring, Smarandache semi-near ring homomorphism.

ÖN SÖZ

Bir halkanın cisim olan özalt kümesi varsa Smarandache halkası denir.Yakın halka ve yarı yakın halkaların tanımları yardımıyla Smarandache yakın halka ve Smarandache yarı yakın halkaları tanımlanabilir.Bu doğrultuda yakın halkalar yardımıyla Smarandache yakın halkaları ile ilgili birçok farklı sınıflar elde edilerek onların genelleştirilmeleri incelenmektedir.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Necat GÖRENTAŞ'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Zafer BELİKIRIK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

G	:	Grup
R	:	Halka
I	:	İdeal
C	:	Cisim
$\in$	:	Eleman
$\notin$	:	Eleman değil
$\subset$	:	Alt küme
$\not\subset$	:	Alt küme değil
$\cup$	:	Birleşim
$\varnothing$	:	Boş küme
$\exists$	:	Bazı
$\exists!$	:	En az, en çok, bir tane var.
Z	:	Tam sayılar
Z^+	:	Pozitif tam sayılar.

1.GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bu tez, 3 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, gerekli olan tanım ve özellikler, yarı grup, grup, monoid, değişmeli grup,halka, alt halka,yarı halka ve yakın halka kavramları verilmiştir Hungerford (1974). Belirtelim ki bu kavramlar tezin sonraki bölümlerinde kullanılacaktır.

İkinci bölümde ise Smarandache halkasının tanımı verilerek, bu kavram örnekler yardımı ile açıklanmıştır. Ayrıca yine bu bölümde Smarandache halkalarındaki Smarandache birim elemanı (s-birim eleman), Smarandache idenpotent elemanı (S-idenpotent eleman), Smarandache sıfır bölen (S-sıfır bölen) elemanları tanımlanarak, bunlarla ilgili birçok örnekler verilmiştir. Daha sonra, yine aynı bölümde, Smarandache yakın halkası, Smarandache alt yakın halkası, Smarandache yarı yakın halkası kavramları tanımlanarak, örneklerle yardımı ile bu kavramalar açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde ise, Smarandache yakın halkaları ile ilgili birçok yeni sınıflar tanıtılmış ve bunların genelleştirilmeleri verilmiştir. Bunlara ek olarak, tezin üçüncü bölümünde, Smarandache yakın halkalarının birkaç türü için Smarandache karışık doğrudan çarpımlarının beş türü tanıtılmıştır.

Yakın halkalarla ilgili Pilz (1977) yılında detaylı bir çalışmada bulundu. Daha sonra yarı yakın halkalar ve idenpotentlerle ile ilgili çalışmaları Vasantha Kandasamy (1991) yaptı. Smarandache halkaları ve halkalarda Smarandache özel elemenları üzerine Vasantha Kandasamy (2002a) çalışmalarda bulundu. Smarandache yakın halkaları üzerine ilk detaylı çalışmaları Vasantha Kandasamy (2002b) yaptı. Smarandache yakın hakları ve onların genelleştirilmeleri üzerine çalışmaları ise Vasantha Kandasamy (2004) yaptı.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak tanım ve teoremler verilecektir (Hungerford, 1974).

TANIM 2.1.(Yarı grup, Monoid, Grup, Değişmeli grup)

Boş olmayan bir G kümesi üzerinde

$*$:GxG $\rightarrow$ G

(a,b) $\rightarrow$ a$*$b

İkili işlemi tanımlansın. Bu durumda G,

i) $\forall a,b\in G$ için $a*b\in G$ (kapalılık özelliği)

ii) $\forall a,b,c\in G\, için\ (a*b)*c = a*(b*c)$ (birleşme özelliği)

iii) $\exists e\in G$ var $öyleki\ \forall a\in G\ için\ a*e = e*a = a$ (birim eleman özelliği)

iv) $\forall a\in G\, için\, \exists b\in G$ var öyleki $a*b = b*a = e\ \left(b = a^{-1}\ ters\ eleman\ \right)$

v) $\forall a,b\in G\, için\ a*b = b*a$ (değişme özelliği)

özelliklerinden sırasıyla

i,ii sağlanıyorsa yarı grup,

i,ii,iii, sağlanıyorsa monoid,

i,ii,iii,iv, sağlanıyorsa grup,

i,ii,iii,iv,v, sağlanıyorsa Abel grup veya değişmeli grup adını alır.

Notasyon: G bir grup ve $*$ G de tanımlı ikili işlem olsun. üzerinde tanımlı işlemin belirtilmesi gerektiğinde G grubu (G,$*$) ile gösterilir. Üstelik

$$\forall a\in A\ ve\ \forall n\in N\ için\ \ a^n = \underset{n\tan a}{a*a*......a} \qquad a^{-n} = \underset{n-\tan a}{a^{-1}*a^{-1}*a^{-1}......a^{-1}}$$

ile tanımlıdır. n=0 için a^n=e dir. İşlem belirtilmedikçe $a,b\in G\ için\ a*b$ yerine ab kullanacağız.

TEOREM 2.1

G bir grup olsun. Bu durumda

i) $\exists! e \in G$ (birim eleman tektir)

ii) $\forall a \in G$ *için* $a^2 = a$ *ise* $a = e$ *dir*. (idenpotent eleman yanız e)

iii) $\forall a,b,c \in G$ *için* $ab = ac$ *veya* $ba = ca$ *ise* $b = c$ *dir*. (Sırasıyla soldan ve sağdan kısalma)

iv) $\forall a \in G$ *için* $\exists! a^{-1} \in G$ (her elemanın tersi var tek)

v) $\forall a \in G$ *için* $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

vi) $\forall a,b \in G$ *için* $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

TANIM 2.2 (Homomorfizma)

G ve H birer yarı grup olsun. $\forall a,b \in G$ için $f(ab) = f(a)f(b)$ sağlayan f:G → H fonksiyonuna bir homomorfizma denir.

TANIM 2.3.(Alt grup)

G bir grup ve $H \subseteq G$ boş olmayan bir küme olsun. H, G'de tanımlı işlem altında bir grup oluşturuyorsa H ye G'nin bir alt grubudur denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma örnek olarak $G \leq G$ *ve* $\{e\} \leq G$ birer gruptur. Bunlardan ikincisi özel olanak aşikâr alt grup denir. İkisinin dışında, $H \leq G$ sağlayan her H altgrubuna G'nin altgrubu yada has alt grubu denir. H<G ile gösterilir.

TANIM 2.4.(Halka)

$R \neq \emptyset$ bir küme**, +, •** (sırasıyla, toplama ve çarpma) R de iyi tanımlı işlemler olsun. Bu durumda

i) $(R,+)$ sistemi Abel grup

ii) $(R,\bullet)$ sistemi yarı grup

iii) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği mevcut, yani; $\forall a,b,c \in R$

$a \bullet (b+c) = (a \bullet b) + (a \bullet c) \quad (a+b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$

sağlanması halinde $(R,+,\bullet)$ sistemi bir halkadır denir (ya da sadece R bir halkadır deriz)

Bu tanımda verilen a.b çarpımını kısaca ab ile göstereceğiz. (+)'nin birimi O olup, bu eleman halkanın sıfırı olarak adlandırılır. Şayet $(R-\{0\},1)$ sistemi grup ise R ye bölümlü halka (division ring) denir.

(R, $\bullet$) sistemi Abel ise R ye değişmeli halka, (R, $\bullet$) sistemi birim elemanına sahip ise R'ye birimli halka denir.

Mesalâ; [0,1] aralığından $\mathbb{R}$ ye sürekli fonksiyonlar kümesi, fonksiyonların toplamı ve çarpımı işlemleri altında bir halka oluşturur. Yine boştan farklı bir X kümesinden $\mathbb{R}$ ye tüm fonksiyon R kümesi de bir halka oluşturur.

TANIM 2.5. (Birimsel)

R bir halka ve $a,b \in R$ olsun. $ab = 1 ise\ a \in R$ ye R nin bir birimseli denir.

TANIM 2.6. (Cisim)

Her elemanı birimsel olan birimli ve değişmeli halkaya cisim denir.

TANIM 2.8. (Alt halka)

$(R,+,\bullet)$ bir halka ve $S \leq R$ olsun $(S \neq \emptyset)$. Bu durumda S nin R'nin bir alt halkası olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall a,b \in S\ için\ a-b \in S$

ii) $\forall a,b \in S\ için\ ab \in S$ olmasıdır.

TANIM 2.9. (Nilpotent)

R bir halka $a \in R ve\ \exists n \in Z^{+}\ için\ a^{n} = 0$ olsun.

Bu durumda $a \in R\ ye$ nilpotent eleman denir.

TANIM 2.10 (İdenpotent)

R bir halka ve $a \in R$ olsun. Şayet $a^{2} = a$ sağlayan $a \in R\ ye$ idenpotent eleman denir.

(Birimli Bir halka için 0 ve 1 idempotenttir)

TANIM 2.11. (İdeal)

R bir halka olsun sye Rnin bir sağ ideali (yada, sol ideali) denir. Şayet

i) $a,b \in s \, ise \, a-b \in s$

ii) $a \in s \, ve \, r \in R \, ise \, ar \in s$ (yada $ra \in s$)

Hem sağ hemde sol ideal şartlarını taşıyan bir I idealine ikiyanlı ideal yada çiftyanlı ideal denir. Şayet halka değişmeli ise her ideali ikiyanlıdır. Bir R halkasının bir I ideali, açıkça bir alt halkadır. Her alt halkanın bir ideal olması gerekmez. Öte yandan, (0) ve R, R'nin aşikar idealidir denir.

TANIM 2.12. (Halka homomorfizmi)

R ve S birer halka, f:R→S bir dönüşüm olsun. $a,b \in R$ *için*

i)f(a+b)=f(a)+f(b)

ii) f(ab)=f(a). f(b)

oluyorsa f ye bir halka homomorfizmi denir.

TANIM 2.13. (Minimal ideal)

R bir halka, I, R'nin bir sağ (sol) ideali olsun. Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda I'ya bir minimal sağ (sol) ideal denir;

i) $I \neq (0)$;

ii) eğer J, R'nin $J \neq (0)$ sağlayan bir sağ (sol) ideali ve $J \leq I \, ise \, I = J' dir.$

TANIM 2.14. (Eşmaksimal)

R bir halka, A, B iki ideal olsun. A+B=R oluyorsa A ve B eşmaksimaldir.

TANIM 2.15. (Maksimal ideal)

Bir R halkasının bir A idealine, aşağıdaki şartları sağlanması durumunda maksimal ideal denir.

i) $A \neq R$

ii) $A \leq B$ sağlayan bir B ideali için B=A yada B=R'dir.

TANIM 2.16. (Asal ideal)

A, B ve P, bir R halkasının idealleri olsun. Bu durumda $AB \leq P\, ise\, A \leq P\; yada\; B \leq P$ sağlıyorsa P'ye bir asal ideal denir.(İdealler çarpımı için bakınız. Hungerford,1974)

TANIM 2.17. (Nil ideal)

Bir R halkasının, her elemanı nilpotent olan bir A sağ (sol) idealine nil ideal denir.

TANIM 2.18. (Yarı halka)

$N \neq \emptyset$ farklı olmak üzere (N, +, $\bullet$) cebirsel sistemi aşağıdaki iki özellikleri sağlıyorsa N ye cebirsel sistemine yarı halka denir.

i) (N,+) değişmeli monoid

ii) (N, $\bullet$) yarı grup

iii) $\forall a,b,c \in N\; (a+b)\bullet c = a\bullet c + b\bullet c\; ve\, a(b+c) = a\bullet b + a\bullet c$

TANIM 2.19. (Yakın halka)

(N, +, $\bullet$) cebirsel sistemine aşağıdaki şartların sağlanması halinde bir yakın halka (veya bir sağ yakın halka) denir (Pilz,1977).

i) (N,+) bir grup ((N, +) abelyen olması gerekmez.)

ii) (N, •) yarı grup

iii) $\forall n_1, n_2, n_3 \in N\, için$ çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği vardır. Yani;

$(n_1+n_2)n_3=n_1.n_3+n_2.n_3$ olur.

Eğer çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği olursa yani $\forall n_1, n_2, n_3 \in N\, için$

$n_1(n_2+n_3) = n_1.n_2 + n_1.n_3$ sol yakın halka denir.

TANIM 2.20. (Yarı yakın halka)

(S, +, $\bullet$) cebirsel sistemine aşağıdaki şartların sağlanması halinde yarı yakın halka veya (sağ yarı yakın halka) denir (Pilz,1977).

i) (S,+) yarı grup

ii) (S, $\bullet$) bir yarı grup

iii) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall n_1, n_2, n_3 \in S$ *için*

$(n_1 + n_2).n_3 = n_1, n_3 + n_2.n_3$ dır.

3.SMARANDACHE YAKIN HALKALARI

Bu bölümde ise Smarandache halkasının tanımı verilerek, bu kavram örnekler yardımı ile açıklanmıştır. Ayrıca yine bu bölümde Smarandache halkalarındaki Smarandache birim elemanı (s-birim eleman), Smarandache idenpotent elemanı (S-idenpotent eleman), Smarandache sıfır bölen (S-sıfır bölen) elemanları tanımlanarak, bunlarla ilgili birçok örnekler verilmiştir. Daha sonra, yine aynı bölümde, Smarandache yakın halkası, Smarandache alt yakın halkası, Smarandache yarı yakın halkası kavramları tanımlanarak, örnekler yardımı ile bu kavramalar açıklanmıştır.

TANIM 3.1.

R bir halka olsun. Eğer R nin R deki işlemlere göre cisim olan bir özalt kümesi varsa R ye Smarandache halkası (S-halkası) denir.Burada kastedilen özalt küme boş küme ve birim elemandan farklı bir küme olacak. Bundan sonra S-halkasını S-halka I olarak adlandıracağız.(Vasantha Kandasamy, 2002a)

ÖRNEK 3.1.

$Z_6 = \{0,1,...5\}$halkası bir S halkasıdır. Çünkü, $A = \{0,2,4\}$ Z_6nın cisim olan bir özalt kümesidir.

ÖRNEK 3.2.

$Z_{12} = \{0,1,...11\}$halkasını göz önüne alalım. Bu durumda $4 \in Z_{12}$ elemanın ürettiği A ideali; $A = \langle 4 \rangle = \{0,4,8\}$, olup bir cisimdir. Dolayısıyla Z_{12} bir S- halkadır.

TANIM 3.2

R bir halka olsun Eğer R aşağıdaki şartları sağlayan bir A özalt kümesine sahipse R ye ikinci aşamadan S-halka veya S-halka II denir (Vasantha Kandasamy, 2002a).

1) $(A,+)$ değişmeli grup

2) $(A,\bullet)$ yarı grup

3) $a,b \in A$ için a.b=0 $\Leftrightarrow$ a=0 veya b=0 dır.

TEOREM 3.1

Eğer R bir S halka I ise R bir S-halka II dir.(Vasantha Kandasamy,2002a)

İspat:

S-halka I ve S-halka II tanımlar gereğince S-halka I S-halka II'nin bütün şartlarını sağladığından bir S-halka II dir.

TEOREM 3.2

Her S-halka II S-halka I olmak zorunda değildir (Vasantha Kandasamy, 2002a).

İspatı:

$Z[x]$ polinom halkasını alalım. $Z \subset Z[x]$ olduğundan $Z[x]$ bir S-halka II dir. Fakat $Z[x]$ bir S-halka I değildir.

TEOREM 3.3.

Eğer R bir S halka I(veya S-halka II) ve R [x], R üzerinde bir polinom halkası ise bu durumda R[x] de bir S-halka I (S-halka II) dir.

İspat:

R bir S-halka I (veya S-halka II) ise $A \subset R$ (A bir cisim, bir tamlık bölgesi veya bir bölüm halkasıdır). Böylelikle $A[x] \subset R[x]$ bir tamlık bölgesi veya bölüm halkadır. Bu yüzden R bir S- halka II veya $A \subset R[x] dir$. Yani Eğer, R bir S-halka I ise R[x] de bir S-halka I dir.

TEOREM 3.4.

$M_{nxn} = \{a_{IJ} \mid a_{ij} \in Z\}$ matrisler halkası olsun. M_{nxn} bir S-halka II dir (Vasantha Kandasamy, 2002a).

İspat:

$A = \{a_{ij} : a_{ij} \in Z - \{0\} ve a_{ij} = 0, i \neq j\} \cup (0)$ olsun, A sadece köşegen matrisleri içerir. A bir tamlık bölgesidir. Böylece M_{nxn} bir S-halka II'dir ve S-halka I değildir.

TANIM 3.3.

S – bir halka ve A, S’nin bir alt halkası olsun. Eğer, A, cisim olan bir B özalt kümesine sahipse, S’nin bu A özalt kümesine S’nin bir Smarandache alt halkası (S-alt halka) denir.

TEOREM 3.5.

S bir halka olsun. Eğer, S bir S-alt halkaya sahipse S bir S-halka I dir (Vasantha Kandasamy, 2002a).

İspat:

Açıktır ki, eğer halka bir A S-alt halkasına sahipse A ayrıca S’de bir alt cisim olan bir cisim içerir. Dolayısıyla, S bir S-halka I olur. Varsayalım S bir S-halka olsun. S’de daima bir S-alt halka bulmak olası olmayabilir. Veya daha açık olarak bir S-halka I’in her alt halkası genel olarak S nin bir S-alt halkası olmak zorunda değildir.

ÖRNEK 3.3.

$Z_6 = \{0,1,...5\}$halkasını alalım. Z_6 bir S-halka I dir. Fakat Z_6’nın hiçbir S- alt halkası yoktur.

ÖRNEK 3.4.

$Z_{12} = \{0,1,...,11\}$halkasını alalım Z_{12} bir S-halkadır. Gerçekten $p = \{0,2,4,6,8,10\}, Z_{12}$ nin bir alt halkası ve $A = \{0,4,8\}$alırsak (burada A, Z_{12}’nin bir alt cismi), $A = \{0,4,8\}, p$ nin cisim olan bir öz alt kümesidir. Dolayısıyla p, Z_{12} nin bir S-alt halkası olur.

TEOREM 3.6.

R bir S-halka I olsun. R alt halklara sahip olabilir. Fakat R, S-alt halklara sahip olmayabilir.

İspat:

$Z_6 = \{0,1,...5\}$bir S-halka I dir. Açıkça $Z_6, S_1 = \{0,3\} ve S_2 = \{0,2,4\}$alt haklarına sahiptir. Fakat hiçbir S-alt halkaya sahip değildir.

TANIM 3.4.

R birimli bir halka ve $\times \in R-\{1\}$olsun. Bu takdirde, eğer bir $y \in R$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, x' e bir Smarandache birim (S-birim) denilir.

1) xy=1

2) $\exists\ a,b \in R-\{x,y,1\}$

i) xa=y veya gx=y

ii) yb=x veya by=x

iii) ab=1

ÖRNEK 3.5.

$Z_9\ \{0,1,...,8\}$ mod 9'da çarpmaya göre bir grup olup, $Z \in Z_9$ bir S-birimidir.Çünkü, $5 \in Z_9$ *için* $2.5 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)\,ve\,7{,}4 \in Z_9$ *için* $7.4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)\,iken$ $2.7 \equiv 5(\mathrm{mod}\,9)\,ve\,5.4 \equiv 2(\mathrm{mod}\,9)$

ÖRNEK 3.6.

$Z_5 = \{0,1,...,4\}$olsun. Bu takdirde, $3 \in Z_5\ bir$ S-birimidir.

Çünkü: $2.3 \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)\,ve\,4 \in Z_5$ *için* $2.4 \equiv 3(\mathrm{mod}\,5), 3.4 \equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$

$4^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)\,dir.$

TEOREM 3.7.

Bir halkadaki her S-birim bir birimdir. Fakat bir halkadaki tüm birimler genel olanak bir S-birim olmak zorunda değildir (Vasantha Kandasamy, 2002a).

İspat:

S-birimin tanımı gereğince bir birim olduğu açıktır. Fakat her birim bir S-birim olmak zorunda değildir. Bunu bir örnekle gösterelim: $Z_9 = \{0,1,....8\}$halkasını alalım. Açıkça $7.4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ olduğundan 7 bir birimseldir. Fakat S-birim değildir. Çünkü

$ab \equiv 1(\bmod 9)$ $7a \equiv 4(\bmod 9)\, veya\, 4b \equiv 7(\bmod 9)$ olacak şekilde $a, b \in Z_9 - \{4,7\}$ bulamayız.

TEOREM 3. 8.

R, 1 birimine sahip bir halka olsun. Eğer, $x \in R - \{1\}, x\,y = 1$ olacak şekilde bir S-birimse $x \neq y\, dir.$ (Vasantha Kandasamy, 2002a)

İspat:

$x \in R - \{1\}$ bir S-birim olsun. Tanımdan xy=1 öyleki $a, b \in R - \{x, y, 1\}$ için xa=y veya ax=y ve ab=1 dir. Eğer x=y ise $x^2=1$ ve xa=x yani $x^2a=x^2$ olur. Burada a=1 demektir. Bu da S-birimin tanımıyla çelişir.

TEOREM 3.9.

$Z_n = \{0,1,..., n-1\}$ halkasının her birimi S-birim değildir.

İspat:

$n-1 \in Z_n$ elemanını alalım.

(n-1) (n-1)=1 (mod n) olduğundan, bir birimdir. Fakat, S-birim değildir. Bunun için, karekteristiği p olan bir asal cisimde (p bir asal sayı) her zaman bir birimdir fakat karakteristiği sıfır olan asal cisimlere zıt olarak Zp'deki her zaman bir S-birim değildir.

TEOREM 3.10.

Q rasyonel sayılar cismindeki her birim bi S-birimdir.

İspat:

Q rasyonel sayılan cismi olsun m herhangi bir tam sayı olsun.

$$m\frac{1}{m} = 1, m.\frac{2}{m^2} = \frac{1}{m}, m^2\frac{1}{m} = m\, ve \frac{1}{m^2}m^2 = 1 dir.$$

Eğer, $m = \dfrac{p}{q}(q \neq 0)\, ise\, m_1 = \dfrac{q}{p}$ alalım.

Buradan, $m_1 m = 1 dir.\ \dfrac{p}{q}\dfrac{q^2}{p^2} = \dfrac{q}{p}\, ve \dfrac{q}{p}\dfrac{p^2}{q^2} = \dfrac{p}{q}\, ve \dfrac{p^2}{q^2}\,\dfrac{q^2}{p^2} = 1$'dir. Bu nedenle, Q'daki her birim bir S-birimidir.

TANIM 3.5.

R bir halka olsun. Eğer xy=0 iken $\exists\ a, b \in R - \{0, x, y\}$ *için*

1) xa=0 veya ax=0 ve
2) yb=0 veya by=0 ve
3) $ab \neq 0$ veya $ba \neq 0$ *oluyorsa* $x, y \in R'$ *ye* Smarandache sıfır bölen (S-sıfır bölen) denir.

ÖRNEK 3.7.

$Z_{20} = \{0,1,...,19\}$ halkasını alalım. Açıkça 10,16 bir S- sıfır bölendir. Çünkü:

$5,6 \in Z_{20} | \{0\}$ *için*

$5.16 \equiv 0 (\bmod 20)$

$6.10 \equiv 0 (\bmod 20)$

$6.5 \equiv 10 (\bmod 20)$

TEOREM 3.11.

R bir halka olsun Her S-sıfır bölen bir sıfır bölendir. Fakat genel olarak bir sıfır bölen bir S-sıfır bölen değildir (Vasantha Kandasamy, 2002a).

İspat:

S-sıfır bölen tanımından, eğer x,y bir S-sıfır bölense bir sıfır bölendir. Fakat bir sıfır bölenin S-sıfır bölen olmadığını bir örnekle gösterelim. $Z_{10} = \{0,1,..9\}$Halkasını alalım. Açıkça $2.5 \equiv 10 = 0 (\bmod 10)$ bir sıfır bölendir fakat S-sıfır bölen değildir.

TANIM 3.6.

R bir halka olsun. x, R'nin aşikar olmayan bir idepotent elemanı olsun. Bu takdirde, bir $a \in R - \{0,1, x\}$için

i) a^2=x ve

ii) xa=a (ax=a) veya ax=a (xa=x) şartlarını sağlıyorsa x'e R'nin bir Smarandache idenpotent (S-idenpotent) elemanı denir (Vasantha Kandasamy,1991)

ÖRNEK 3.8

$Z_6 = \{0,1,...,5\}$halkasını alalım. $4^2 \equiv 4(\bmod 6)$ ve $2 \in Z_6 - \{4\}$ için $2^2 \equiv 4(\bmod 6)$ ve $2.4 \equiv 2(\bmod 6)$ olduğundan, $4 \in Z_6, Z_6$ 'nın bir S- idenpotentidir.

TEOREM 3.12.

Her S-idenpotent bir idenpotenttir fakat her idenpotent bir S-idenpotent değildir (Vasantha Kandasamy, 2002a).

İspat:

Her S-idenpotentin bir idenpotent olduğu tanımdan açıktır. Fakat bunun tersi doğru olmayabilir. Bunu bir örnekle açıklayacak olursak $Z_6 = \{0,1,...5\}$halkasını alalım. 3^2=3 (mod 6) olup $3 \in Z_6, Z_6$ *nıı* bir idenpotentidir fakat S-idenpotenti değildir.

TEOREM 3.13.

R bir halka olsun Eğer R bir S-idenpotente sahipse R en az iki aşikar olmayan sıfır bölene sahiptir (Vasantha Kandasamy, 2002a).

İspat:

R de a bir S-idenpotent olsun. Böylece a^2=a ve bir $b \in R / \{a,0,1\}$için, b^2=a ve ab=b'dir. Buradan (a-1) b=0 olur. Ayrıca a^2=a olması a(a-1)=0 olmasını gerektirir.

Açıkça $b \neq 0 ve a \neq 1$dir. Bu da istenendir.

TEOREM 3.14.

$Z_n = \{0,1,...,n-1\}$halkası verilsin, p bir asal sayı ve n=2p ise Z_n, S-idenpotent olmayan idenpotentlere sahiptir.

İspat:

p bir asal tek sayı, n=2p ve $Z_n = \{0,1,...n-1\}$, n modülündeki tamsayıların halkası olsun. $p^2 \equiv p(\bmod 2p)$ *ise* $p^2 + p \equiv 0(\bmod 2p)$ *yani* $p(p+1) \equiv 0(\bmod 2p)$ *dir*. $p \in Z_{2p}$ bir idenpotenttir fakat bir S-idenpotent değildir.

Çünkü, $mp \equiv m,\ m^2 \equiv p$ olacak şekilde, $a, m \in Z_{2p} - \{p,0,1\}$ yoktur. Fakat, p asalsa $m^2 \equiv p$ imkansızdır. Bunun için, P asal bir sayı ise p, Z_{2p}'nin S-idenpotent olmayan bir idenpotenttir.

ÖRNEK 3.9.

$Z_{30} = \{0,1,...29\}$ halkasını alalım. Bu halkada, 6,10,15,16,21 ve 25 aşikar olmayan idenpotentlendir. $6^2 \equiv 6(\text{mod}\,30), 24^2 \equiv 6(\text{mod}\,30)\ ve 6.24 \equiv 24(\text{mod}\,30$ olduğundan $6 \in Z_{30}$ bir S-idenpotenttir. Benzer olarak 20, $b \in Z_{30} - \{0,1,10\}$'$nün$ rolünü üstlendiğinde 10 bir S-idenpotenttir. 15 bir S-idenpotent değildir, 16 bir S-idenpotenttir.

TEOREM 3.15.

R değişmeli olmayan bir halka olsun. $a, b \in R - \{0, x, y\}$ olmak üzere $x, y \in R - \{0\}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir S- sıfır bölen olsun.

1) $ax = 0\ \ ve \qquad xa \neq 0$

2) $yb = 0\ \ ve \qquad by \neq 0$

3) $ab = 0\ \ ve \qquad ba \neq 0$

Bu takdirde $(xa+by)^2=0$ yani xa+by, R'nin bir nilpotent elemanıdır (Vasantha Kandasamy, 2002a).

İspat:

$x, y \in R - \{0\}$ bir sıfır bölen olsun. Yani, xy=0=yx olsun $a, b \in R - \{0, x, y\}\ ve\ \ ax = 0,\ \ xa \neq 0,\ \ yb = 0,\ \ by \neq 0,\ \ ab = 0\ \ ve\ \ ba \neq 0$ olsun.

$(xa+by)^2$=xaby+byxa+xaxa+byy'dir.

xy=yx=0, ab=0, yb=0 ve ax=0 olduğunu kullanarak xa+by'nin mertebesi 2 olan bir nilpotent eleman olduğunu elde ederiz.

TANIM 3.7.

Eğer $(N,+,\bullet)$ bir yakın halka ve N, $(A,+,\bullet)$ bir yapısı yakın cisim olacak şekildeA alt cümlesine sahip ise bu takdirde N'ye Smarandache yakın halkası (S-yakın halkası) denir.

ÖRNEK 3.10.

$Z_2 = \{0,1\}$ yakın cismi verilsin. Bir G grubu alalım öyle ki Z_2 G, bu grubun Z_2 yakın cismi üzerinde grup yakın halkası olsun. Bu durumda $Z_2 \subset Z_2$ G olup Z_2 G bir S – yakın halkası ve Z_2 bir yakın cisimdir. (Yakın cisim tanım için bakınız Vasantha Kandasamy 2002b)

TANIM 3.8.

$(T,+,\bullet)$ bir S-yakın halka, yani T bir yakın alt cisim olan bir alt cümleye sahip ise, bu takdirde T'ye bir S-alt yakın halka denir.(Vasantha Kandasamy 2002b)

ÖRNEK 3.11.

Z_2 bir yakın cisim olsun. S_n n. Dereceden bir simetrik grup olsun. $Z_2 S_n$ bir grup yakın halkasıdır.

Açıkça

$$H = \left\{ 1 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 1 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 3\ 1\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

S_n bir alt grubu ve $Z_2 \subset Z_2 H$ olmak üzere $Z_2 H$ bir S-alt yakın halkadır.(Grup yakın halkası için bakınız. Vasantha Kandasamy 2002b)

ÖRNEK 3.12.

$M_{3x3} = \{(a_{ij} : a_{ij} \in Z_2 = \{0,1\}, Z_2 \ yakıa\ cisim\}$tüm 3x3 basamaktan matrislerin cümlesi olsun. Bilenen matrislerdeki toplama ve Z_2'de tanımlanan çarpma işlemi altında M_{3x3} bir yakın halka olur. Bu yakın halka aynı zamanda S-yakın halkadır. Bu yakın halka ayrıca sıfırdan farklı olan S-alt yakın halkaya sahiptir.

ÖRNEK 3.13.

Z_2 yakın cismi verilsin. Buna göre $Z_2[x]$ bir S-yakın cisimdir. Her $p(x)\ q(x) \in Z_2[x]$ *için* $p(x).q(x) = p(x)$ alınarak $(Z_2[x],+,\bullet)$ yapısının bir S-yakın halka olduğu görülür. $Z_2[x]$ sıfırdan farklı (aşikar olmayan) S-alt yakın halkadır

TANIM 3.9.

$N \neq \emptyset$ bir cümle olsun. Eğer $(N,+,\bullet)$ bir yarı yakın halka A $\subseteq$ N olmak üzere $(A,+,\bullet)$ bir yakın halka ise bu takdirde N cümlesine Smarandache yarı yakın halkası (S-yarıyakın halkası) denir.

ÖRNEK 3.14.

$Z_{18} = \{0,1,2,...17\}$ çarpma işlemi altında mod 18'e göre tamsayılar cümlesi olsun. Z_{18} cümlesi üzerinde x ve (ikili) işlemler aşağıdaki gibi tanımlansın.

x bilinen çarpma işlemi

$\forall\, a,b \in Z_{18}$ *için* $a \bullet b = a$ şeklinde tamlanır.

$\mathrm{A} = \{1,5,7,11,13,17\}\ A \subset Z_{18}$

(Z,x) bir yarı gruptur.

$(Z,\bullet)$ bir yarı gruptur.

Dolayısıyla $(Z,x,\bullet)\ \forall\, a,b,c \in Z_{18}\ (axb) \bullet c = (axc) \bullet (bxc)$ dolayısıyla $(Z,x,\bullet)$ yarı yakın halkadır.

$A = \{1,5,7,11,13,17\}$ için,

(A,x) bir grup $(A,\bullet)$ bir yarı grup olduğundan $(A,+,\bullet)$ bir yakın halkadır.

Dolayısıyla $(Z,x,\bullet)$ bir Smarandache yarı yakın halkadır.

Not:

Bir yakın halkanın alt cümlesi aynı işlemler altında bir yarı yakın halka ise bu halkaya anti-Smarandache yarı yakın halkası denir.

TANIM 3.10.

K bir indis kümesi, N bir yakın halka ve $\{S_k\}$ *ise N'nin tüm* S ideallerinin bir koleksiyonu olsun. $(k \in K)$

$$\sum_{k \in K} Sk = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n + ...ye \;\; eğer \sum S_k \; nu$$ her bir elemanı farklı

$S_k$lar için elemanlarının bir sonlu toplananı olarak bir tek temsile sahipse Smarandache iç doğrudan toplananı denir.

TEOREM 3.16.

Eğer yakın halka S- iç doğrudan (direct) toplanana sahip ise bu takdirde bu yakın halka iç doğrudan toplanana sahiptir (Vasantha Kandasamy,2002b).

TANIM 3.11.

N bir yakın halka ve I yakın bu halkanın Bir S- ideali olsun. Eğer N=I+J olacak şekilde bir J ideali var ise I ya N'nin bir S-doğrudan toplananı (Sumandı) denir.

Eğer N=I+j olacak şekilde bir S-ideal J var ise I ya bir Smarandache kuvvetli doğrudan toplananı (Summandı) denir.

TEOREM 3.17.

Eğer N'nin S-ideal I'sı bir S-kuvvetli doğrudan toplananı (summandı) ise bu takdirde bu ideal bir S- doğrudan toplananıdır (Summandıdır) (Vasantha Kandasamy,2002b).

.

TEOREM 3.18.

N bir yakın halka ve eğer N'nin S-ideal I'sı bir S- kuvvetli doğrudan toplananı (Sumandı) veya S-doğrudan toplananı ise bu takdirde açıkca I bir doğrudan toplanandır.

TANIM 3.12.

N bir yakın halka N'nin S-alt yakın Ni halkalarının

$N = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset ... \supset N_n = \{0\}$ sonlu bir dizisine ancak ve ancak $\forall i \in \{1,2,...n\}$ *için* N_i, N_{i-6}*'in* S-ideali ise, N'nin bir Smarandache normal dizisi (S-normal dizisi) denir.

Özel durumda eğer tüm Ni ler N'nin bir S- ideali ise bu takdirde bu normal diziye bir Smarandache değişmez dizisi denir.

S- değişmez dizisi n'ye dizinin Smarandache genişlikteki (uzunluktaki) (s-uzunluktaki) dizisi ve Ni-$_1$/Ni'ye dizinin Smarandache çarpanları (S-çarpanları) denir.

TANIM 3.13.

N bir yakın halka olsun. Eğer N, aşikar olmayan S-ideallerinin Bir doğrudan toplamı veya N aşikar olmayan doğrudan toplanana sahip ise, N'ye Smarandache ayrışabilir (decompasable) veya Smarandache S-ayrışabiliri denir. Aksi takdirde N'ye S-ayrışılamaz (indecomposable) denir. Böylece eğer N ayrışılamaz ve henüz Bir S-idealleri değilse N hala S-ayrışılamazdır.

TANIM 3.14.

P, yakın N halkasının bir S ideali olsun Eğer her N'nin her S-idealler I ve J için $I.J \subseteq P$ idealleri $I \subset P$ veya $J \subset P$ olmasını gerektiyor ise P'ye smarandache asal idealleri denir.

TEOREM 3.19.

N bir yakın halka olsun. Eğer P bir S-asal ideal ise bu takdirde bir asal idealdir.

İspat: Bu teorem kolaylıkla ispatlanabilir.

Eğer P bir asal ideal ise genelde P bir S-asal ideal değildir. Bir P asal idealinin bir S – asal ideali olması gerekmez.

TANIM 3.15

N bir yakın halka P, N'de bir S-ideal olsun P bir Smarandache yan asaldır. (S-yan asaldır) ancak ve ancak N'nin her S- ideali I için $I^2 \subset P$ olmasını gerektirir.

TANIM 3.16

I, N'nin bir S-ideali olsun. I'nın Smarandache asal (radical) kök (S-asal radical) ideali $S(P(I)\Pi P ile$ temsil edilir. Böylece S(P(I) bir S-asal radikali ise, bu takdirde S(P(I) bir asal köke sahiptir.

TANIM 3.17

N bir yakın halka olsun $0 \neq x \in N$ etkisiz elemanına eğer $x^n=0$ ve bir $y \in R - |(o, x)$mevcut öyleki $x^r y = 0 ise$ bir Smarandache etkisiz elemanı (S-etkisiz elemanı) denir.

ÖRNEK 3.15

$Z_{12} = \{0,1,...11\}$halkasını alalım. Açıkça $6^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,12) ve 6.8 \equiv 0(\mathrm{mod}\,12)$ dir. Fakat herhangi bir m>0 için $8^3 \equiv 8(\mathrm{mod}\,12)$ olduğundan $8^m \neq 0(\mathrm{mod}\,12) dir$. Bunun için 6 Z_{12}'nin bir S-nilpotent elemanıdır.

TANIM 3.18.

N bir yakın halka olsun. Eğer $O \neq \in IN$ S-etkisiz ise x etkisiz elemandır.

.

TANIM 3.19.

S_1 bir- S- ideal olsun $S \subset N$ etkisiz elemandır. Ancak ve ancak

$S^k = \{0\} olur. S \subset N' ye\, her\ S \in S\, için\, S_1\, S -$nilpotent eleman olur.

4.SMARANDACHE YAKIN HALKALARI VE ONLARIN GENELLEŞTİRİLMELERİ

Bu bölümde ise, Smarandache yakın halkaları ile ilgili birçok yeni sınıflar tanıtılmış ve bunların genelleştirilmeleri verilmiştir. Bunlara ek olarak, tezin bu bölümünde, Smarandache yakın halkalarının birkaç türü için Smarandache karışık doğrudan çarpımlarının beş türü tanıtılmıştır.

TEOREM 4.1.

Bütün yarı yakın halkalar Smarandache yarı yakın halkası değildirler (Vasantha Kandasamy,2004).

İspatı:

Bu teoremin ispatı bir ters örnek yardımıyla verilecektir.

Z^+ pozitif tamsayılar cümlesi olsun Z^+ + işlemi altında bir yarı gruptur. Ayrıca Z^+ cümlesi üzerinde $\bullet$ işlemi $\forall a,b \in Z^+$ için a$\bullet$b=a biçiminde tanımlansın Açıkça $Z^+, \bullet$ işlemine göre bir yarı gruptur. Kolaylıkla görülebilir.(Z^+,+, $\bullet$)bir yarı yakın halka olup Smarandache yarı yakın halkası değildir.

Şimdi sonsuz bir Smarandache yarı yakın halka ile ilgili olarak bir örnek verilecektir.

ÖRNEK: 4.1

$M_{nxn} = \{(aij) : aij \in Z\}$olsun. M_{nxn} cümlesi üzerinde bir işlem olarak matrislerdeki çarpma işlemi tanımlansın. Bu durumda (M_{nxn},x)'in yarı gruptur. Ayrıca M_{nxn} cümlesi üzerinde $\bullet$ işlemi $A, B \in M_{nxn}$ *için* $A \bullet B = A$biçiminde tanımlansın. Buna bağlı olarak $|A| \neq 0$olmak üzere tüm nxn basamaktan (tipindeki) A matrislerinin cümlesi için (M_{nxn},x, $\bullet$) Smarandache yarı yakın halkasıdır. ($|A|$, A nın determinantıdır)

A_{nxn} A_{nxn} C M_{nxn} olduğundan (A_{nxn}, x) yarı gruptur.

ÖRNEK: 4.2

$Z_{24} = \{0,1,...23\}$ tamsayıları mod 24'e göre kalanlar sınıfı t>1 için $P_1, P_2, \ldots P_t$ farklı asallar olmak üzere $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} .... p_t^{\alpha_t}$ olsun. Z_n cümlesi üzerinde x ve $\bullet$ işlemleri sırasıyla x alışılmış çarpma işlemi ve $\bullet$ $\forall a,b \in Z$ için $a \bullet b=a$ olarak tanımlansın. Ayrıca $q_1, q_2, \ldots p_r$ ise $p_1, p_2, \ldots p_t$ den farklı tek asallar ve $q_1, q_2, .. q_r$ $\in Z_n$ olsun Açıkça A cümlesi x işlemine göre bir gruptur.

SONUÇ 4.1

$Z_n = \{0,1,2,...(n-1)\}$ örneklerde tanımlanan x ve $\bullet$ işlemine göre bir Smaranadache yarı yakın halkasıdır. Böylece tamsayıların pozitif her cümlesi için Smarandache yarı yakın halkalarının bir sınıfı elde edilir. t=1 durumunda aşağıdaki farklılıklar ortaya çıkar.

ÖRNEK 4.3

$Z_4 = \{0,1,2,3\}$ Smarandache yarı yakın halkadır. Çünkü $(Z_4, x, \bullet)$ bir yarı yakın halka ve $(A = \{1,3\}, x, \bullet)$ bir yakın halkadır. $\left(A \subset Z_4\right)$

ÖRNEK 4.4

$Z_9\ \{0,1,...8\}$ gözününe alalım. (Z_9, X_1) bir yarı yakın halkadır. $\{A = \{1,8\}, x_1\}$ bir yakın halkadır. Böylece Z_9 Smarandache yakın halkasıdır. Açıkça 8 bir asal sayı değildir.

ÖRNEK 4.5

$Z_{25} = \{0,1,2,....24\} olsun (Z_{25}, x)$ Bir yarı yakın halka $(A = \{1,24\}, x)$ bir yakın halkadır. Böylelikle Z_{25} bir Smarandache yarı yakın halkadır.

TEOREM 4.2

(Z_{p^2}, x) Bir yarı yakın halka olsun. Açıkça $\left(Z_{p^2},\ x\right)$ bir Smarandache yarı yakın halkasıdır (Vasantha Kandasamy,2002b).

İspat:

(Z_{p^2}, x)Bir yarı yakın halka olsun. Açıkça (Z_{p^2}, x) bir Smarandache yarı yakın halkasıdır.

$(A = \{1, p^2 - 1\}, x)$ bir yakın halkadır. Bundan dolayı (Z_{p^2}, x) Bir Smarandache yarı yakın halkadır. Buna bağlı olarak t>1 kabul edilir. çünkü asal olmayanlar için x işlemi altında yanı halkaya katkıda bulunabilir.

SONUÇ:

(Z_{p^n}, x) bir yarı yakın halka olsun (Z_{p^n}, x) bir Smarandache yakın halkasıdır.

İspat:

$A = \{1, p^n - 1\} alalıl$ $A = \{1, p^n - 1\}$Buna bağlı olarakta (Z_{p^n}, x) Bir Smarandache yarı yakın halkadır.

Böylece sonlu Smarandache yanı yakın halkalarının doğal bir sınıfı elde edilir.

TANIM 4.1

N ve N_1 iki Smarandache yarı yakın halka olsun. Bu durumda;

h: N $\rightarrow N_1$dönüşümü, h bir homomorfizm ise bir Smarandache yarı yakın halka homomorfizmidir.

Benzer olarak Anti-Smandache yarı yakın halka homomorfizmi tanımlanır.

TANIM 4.2

$N=N_1xN_2x\ldots xNn$ yarı yakın halka ve yakın halkaların Smarandache karışık doğrudan I çarpımı (S-karışık doğrudan I çarpımı) olsun. Burada Ni'ler S-karışık doğrudan I çarpımı olarak adlandırılan yakın halka ve yarı yakın halkanın sınıflarıdır.

S karışık doğrudan I çarpımının kullanımı iki adımdır.

TEOREM 4.3

$N=N_1 x N_2 \ldots xNn$ S-karışık doğrudan I çarpımı olsun. Bu takdirde N bir S-yarı yakın halkadır (Vasantha Kandasamy,2002b).

TEOREM 4.4

$N=N_1 x N_2 \ldots x N_r$ S-doğrudan I çarpımı olsun Bu takdirde N, S-alt yakın halkalar ve S-ideallerine sahiptir (Vasantha Kandasamy,2002b).

TANIM 4.3

$N=N_1xN_2x\ldots Nr$ olsun. Bunada bazı Ni'ler yakın halka onların bazıları ise yakın cisimlerdir. Bu takdirde yakın halkaların karışık doğrudan Smarandache çarpımına S-karışık doğrudan II çarpımı denir.

TANIM 4.4

$N=N_1 x N_2 \ldots x N_r$ yakın halkalar ve halkaların Smarandache karışık doğrudan III çarpımı olsun. Ni'lerin bazıları halka ve bazı Ni'ler ise kesinlikle yakın halkadır.

TANIM 4.5

N bir yakın halka olsun Eğer N muhtemel bir P alt cümlesine sahip, P bir halka olmak üzere $P \subset N$ ise, bu takdirde N'ye II. mertebeden bir Smanandache yakın halkası (S-yakın halka II) denir.

Böylece, S-karışık doğrudan çarpım II'nin daima bir S-yakın halka II olduğu görülür. S-yakın halka II elde edilebilir ancak bunun için halkalar olan bir yakın halkadaki alt cümleyi elde etmek kolay değildir. Ayrıca, S-yakın halka I ve S- yakın halkalar genelde birbiriyle ilgili değillerdir. Bunlar farklı iki sınıf olarak ortaya çıkar.

TANIM 4.6

$N=N_1x\ldots xNt$ olsun. Burada Ni'lerin bazıları yarı yakın halka, bazıları ise yakın halkalarıdır. Bu takdirde N'ye yarı yakın halkaların Smanandache karışık doğrudan Çarpımı IV'ü (S-karışık doğrudan çarpımı IV) denir.

S-Karışık doğrudan çarpımı IV aşağıdaki tanıma öncülük yapar.

TANIM 4.7

N bir yarı yakın halka olsun. Eğer N bir yarı halka olan muhtemel bir P alt cümlesini kapsıyor ise, N'ye II. Seviyede Smarandache yarı yakın halka denir. Açıkça S-karışık doğrudan çarpım IV, S-yarı yakın halka II'yi verir. Burada şunu ifade edecek olursak S-yarı yakın halka I ve S-yarı yakın halka V farklı notasyonlardır. Bu durum aşağıdaki örnekle açıklanmaktadır.

ÖRNEK 4.6

$Z^0 x Z_{15}$ olsun. Burada $Z^0 = Z^t \cup \{0\}$ alışılmış + ve $\bullet$ işlemler altında bir yarı halkadır. (Z_{15}, x_1) ise bir yarı yakın halkadır. Açıkça N bir S- yarı yakın halka II'dir. Bu aynı zamanda P bir yakın halka olmak üzere Z_{15} bir olası P alt cümlesine sahip olduğunda bir S- yarı yakın halkasıdır. Böylelikle genel bir S- yarı yakın halka I asla bir S-yarı yakın halka II olmadığı söylenebilir.

Bir Smanandache pseudo yanı yakın halkasını elde etmek için, S-karışık doğrudan çarpımlarını inşa etmek pozisyonunda değiliz. İlginçtir ki birleşmeli olmayan yakın halkalar (NA- yakın halkalar) ve birleşmeli olmayan yarı yakın halkaların ((NA- yarı yakın halkalar) durumunda farklı tiplerdeki S-karışık doğrudan çarpımı S-NA- yarı yakın halkalar ve S-NA- yakın halkalarını inşa etmemize yardımcı olur.

TANIM 4.8

$N = N_1 x N_2 x \ldots x N_n$ birleşmeli olmayan yarı yakın halkalar ve birleşmeli olmayan yakın halkaların Smanandache karışık doğrudan çarpımı V (S-karışık doğrudan çarpım V) olsun. Açıkça N bir S- quasi yakın halkadır.

Böylece, bu S- karışık doğrudan çarpım V'i kullanan S- quasi yarı yakın halkaların bir sınıfı elde edilir. eğer S-karışık doğrudan çarpımdaki yarı halkaları dahil edersek bu takdir S-quasi yarı yakın halkaları elde ederiz.

Böylece, S-karışık doğrudan çarpımlarına ihtiyaç duyulduğunda yukarıda verilen bilgiler kullanılabilir. Ancak, doğal herhangi bir vasıta ile NA- yakın halka veya NA-yarı yakın halkalar inşa edilemez. Bunu yapmanın tek yolu, yakın-loop (ilmik) halkalar, groupoid yakın halkalar, loop yarı yakın halkalar inşa edilerek NA- yakın halkalar ve NA-yarı yakın halkalar elde etmektir.

KAYNAKLAR

Hungerford, T. W., 1974. ***Algebra***. Springer. 504 pp

Pilz, G.,1977.***Near ring. The theory and its applications***. Nort-Holland Publ. Comp. Amsterdam.

Vasantha Kandasamy, W. B.,1991. Idempotents in group seminear rings. *Polytech* ***Inst. Bucharest Sci. Bull. Mech. Engrg***. **53** , no. 1-2, 13-17.

.Vasantha Kandasamy, W. B.,2002a. ***Smarandache rings***. American Research Press, Rehoboth, NM, 220 pp.

Vasantha Kandasamy, W. B.,2002b. **Smarandache near rings**. American Research Press, Rehoboth, NM, 200 pp.

Vasantha Kandasamy, W. B.,2004. ***Smarandache semi-near-ring and their generalizations***. Smarandache Notions Journal **14** , no 1 315 - 319

ÖZ GEÇMİŞ

1980 yılında Kahramanmaraş'ta doğdu. İlk öğrenimini Kahramanmaraş Afşin Afşinbey İlköğretim Okulu'nda, orta öğretimi Afşin Ortaokulunda, lise öğrenimini ise Afşin Lisesinde tamamladı. 1999 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2003 yılında da mezun oldu. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen Özel Eğitim Kurumunda matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.