TC
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

FARK GREEN FONKSİYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet Ali AKTÜRK
DANIŞMAN: Doç. Dr. Hakkı DURU

VAN-2009

TC
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

FARK GREEN FONKSİYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet Ali AKTÜRK

VAN-2009

KABUL ve ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Hakkı DURU danışmanlığında Mehmet Ali AKTÜRK tarafından hazırlanan "Fark Green Fonksiyonu" isimli bu çalışma 12/03/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Hakkı DURU İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Kamil ARI İmza:

Üye: Yrd. Doç Dr. Sebahattin ŞEVGİN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 27/03/2009 gün ve 2009/10-VIII sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

ÖZET

FARK GREEN FONKSİYONU

Mehmet Ali AKTÜRK
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hakkı DURU
Mart 2009, 51 sayfa

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümde konu ile ilgili olarak tarihsel gelişim ve kaynak bildirişi verilmektedir.

Üçüncü bölümde ise daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve bazı önbilgiler verilmektedir.

Dördüncü bölümde ise ikinci mertebeden fark denklemi için sınır-değer probleminin çözümünün değerlendirmesinde Green fonksiyonunun ifade biçimini içerebileceği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde ise tek boyutlu Shishkin şebekesi üzerinde singüler pertürbe özellikli konveksiyon-difüzyon denklemi için bazı monoton fark şemalarının düzgün yakınsama derecesi küçük parametre değerlendirmelerine göre kuruldu. Bu değerlendirmelerin bulunan uygun çözümünün maksimum noktası ayrık (diskret) problemlerin çözümlerinin uygun *a priori* değerlendirmelerinden türetilmiştir. Bu hata değerlendirmelerini bulmak için ayrık (diskret) Green fonksiyonunun uygun değerlendirmeleri kullanılmıştır.

Altıncı bölümde ise bir lineer singüler pertürbe özellikli reaksiyon-difüzyon denklem için iki noktalı sınır-değer problemi göz önüne alınmış ve şebeke probleminde Green fonksiyonu kullanılmasıyla *a priori* değerlendirme elde edilmiştir.

Son bölüm ise tezin değerlendirildiği tartışma ve sonuç kısmından oluşmaktadır.

Anahtar kelimeler: Fark Green fonksiyonu, Green fonksiyonu, singüler pertürbe, konveksiyon-difüzyon problem, reaksiyon-difüzyon problem, fark şeması, sınır değer problemi.

ABSTRACT

DIFFERENCE GREENS FUNCTION

AKTÜRK, Mehmet Ali
Msc Thesis, Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hakki DURU
March 2009, 51 pages

This study consists of seven chapters. In the first and second section as about the historical development and is provided to a source.

In the third section the basic definitions will be used in later chapters, and gives some preliminary information.

The fourth section of the second order difference equation, the solution of the boundary-value problems in the evaluation of the format may contain the expression of Green's functions are shown.

The fifth section on one-dimensional Shishkin mesh with a singularly perturbed convection-diffusion equations for some smooth convergence of monotone difference schemes for very small according to the parameters was established. These estimates of the maximum point solution suitable for the solution of discrete problems are derived from *a priori* estimates. To find these error to estimates the appropriate estimates of the discrete Green's functions are used.

In the sixth section, a linear singularly perturbed reaction-diffusion equations two-point boundary-value problem was considered, and grid problem using *a priori* estimate of the Green's functions have been obtained.

In the last section of the thesis consists of the estimate of the discussion and conclusions.

Key words: Difference Green’s function, Green function, singular perturbed, convection-diffusion problems, reaction-diffusion problem, difference scheme, boundary value problem.

ÖN SÖZ

Bu çalışmada homojen olmayan denklem için homojen sınır şartlı Strum-Liouville problemi, singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler için fark Green fonksiyonu incelenmiştir. Bunlara uygun singüler pertürbe özellikli sınır değer problemleri ele alınmıştır. Bu problemler için düzgün şebekelerde üstel katsayılı fark şeması kurulmuş ve bunların özellikleri verilmiştir. Yaklaşık çözümün kesin çözüme ε'a göre düzgün yakınsak olduğu ispatlanmış ve yakınsama hızı belirlenmiştir.

Bu çalışmalarım esnasında göstermiş oldukları yakın ilgi ve yardımlarından dolayı başta danışmanım Doç. Dr. Hakkı DURU, sayın hocam Prof. Dr. Gabil AMİRALİ, bana uygun çalışma ortamı sağlayan arkadaşlarıma ve bu çalışmada emeği geçen herkese teşekkür ederim.

Mehmet Ali AKTÜRK

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. ÖN BİLGİLER	5
4. FARK GREEN FONKSİYONU	10
4.1. *A Priori* Değerlendirmeler	14
5. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ KONVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN FARK GREEN FONKSİYONU	19
5.1. Sürekli Problemin İfade Edilmesi	19
5.2. Ayrık(Diskret) Problem	20
5.3. Kısmi Toplam Formülleri ve Ayrık(Diskret) Green Formülleri	20
5.4. Adjoint Ayrık(Diskret) Problem	21
5.5. Ayrık(Diskret) Green Fonksiyonu ve Özellikleri	22
5.6 Shishkin Şebekesi Üzerinde Kesme Hatası	24
5.7. Yakınsaklık	27
6. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN FARK GREEN FONKSİYONU	31
6.1. Green Fonksiyonunun Değerlendirilmesi	32
6.2. *A Priori* Değerlendirmeler	34
6.3. Kesme Hatasının Değerlendirmesi	36
6.4. Yakınsaklık	42
7. TARTIŞMA ve SONUÇ	46
KAYNAKLAR	48
ÖZ GEÇMİŞ	51

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	**Anlamı**
G	Green fonksiyonu
H	Hilbert uzayı
l^h	Sonlu fark operatörü
ε	Pertürbasyon parametresi
L, Λ	Diferansiyel operatörler
N	Şebeke elamanlarının sayısı
C_a	ε ile N 'den bağımsız genel sabit
$G_0(x,\xi)$	Özelleştirilmiş Green fonksiyonu
h	Sabit şebeke adımları
h_i	Değişken şebeke adımı
$\hbar_i$	Değişken şebeke ortalaması
ω_h	I bölgesinde düzgün şebeke
ϖ_h	$\omega_h \cup \{x=0, x=l\}$
$\overline{\Omega}$	Bakhvalov şebeke
$C^1[0,1]$	$[0,1]$ aralığında birinci dereceden türevlenebilir sürekli fonksiyonlar kümesi
$O(h^k)$	Yakınsama hızı
R, r_i	Hata
ψ_i	Kesme hatası
p	Yakınsaklık mertebesi
u	Diferansiyel denklemin kesin çözümü
y	Diferansiyel denklemin nümerik çözümü

1. GİRİŞ

Matematiksel fizik, fen bilimleri, mühendislik ve tıp bilimlerinde ortaya çıkan birçok problemin matematik modeli Green fonksiyonları yardımıyla çözülebilmektedir. Bu çalışmada Green fonksiyonları için nümerik yöntemler ele alınmış ve bunun matematiksel özellikleri incelenmiştir. Bu yöntem üç farklı probleme uygulanmıştır. Bunlar, homojen olmayan denklem için homojen sınır şartlı self adjoint lineer problemi, singüler pertürbe özellikli konveksiyon-difüzyon problemi ve singüler pertürbe özellikli reaksiyon-difüzyon problemidir.

Bu çalışmada kullanılan singüler pertürbe özellikli problemler yüksek türevler karşısında küçük bir pozitif parametrenin bulunduğu problemler olarak bilinir. Bu tür problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında çok hızlı değişime sahip olur, dolayısıyla sınırsız türevler içerir. Pertürbasyon parametresi olan ε küçük alındığında, klasik nümerik metotlar genelde istenilen nümerik sonuçlar vermemektedir. Klasik ve standart nümerik yöntemlerin kararsızlıkları yahut ıraksak olmaları nedeniyle uygulanması imkansız olur (Doolan ve ark., 1980; O'Malley, 1991; Nayfeh, 1993). Böylece, gerçek çözüme yaklaşım imkanı sağlayan uygun metotların kurulması önem kazanmaktadır.

Sunulan çalışmada, ilk olarak ele alınan problem aşağıdaki lineer ikinci mertebeden sınır değer problemidir:

$$Lu := \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{1.1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad k(x) \geq c_1 > 0. \tag{1.2}$$

Burada, $q(x) \geq 0$ ve $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ fonksiyonları $[0,1]$ aralığında tanımlı yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu problemin çözümü için fark Green fonksiyonu oluşturulup *a priori* değerlendirmesi yapılmıştır. İkinci olarak, $r(x) \geq \alpha > 0$, $\alpha \in R$ ve $r(x), f(x) \in C^1[0,1]$ olmak üzere aşağıdaki

$$Lu := -\varepsilon u''(x) - r(x)u'(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1.3}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{1.4}$$

konveksiyon-difüzyon problemi incelenmiştir. Bu problem için Shishkin şebekede fark Green şeması sunulmuştur. Değerlendirmeler yapılmış daha sonra bu değerlendirmeler kullanarak problemin yaklaşık çözümü sunulmuştur. Yaklaşık çözüm için değerlendirme yapılmış ve yakınsaklığı incelenmiştir. Hata değerlendirmesiyle yaklaşım mertebesi $O(h^2)$ bulunmuştur.

Kesinliğin en hassas ölçümü için en iyi yaklaşım normunun, singüler pertürbe özellikli problemler için nümerik metotların yakınsama derecesini analiz ettiğimizde maksimum-modül-normu (L_∞^h-normu) olduğu iyi bilinir (Farrell ve ark., 2000). Mevcut durumda, bariyer fonksiyon tekniği bu normda hata değerlendirmesini elde etmek için geniş biçimde kullanıldı. Araştırılan şemanın monotonluğunu kabul eden bu teknik, çok kesin bir metottur, fakat bariyer fonksiyonun kurulması çok zor olabilir.

Bu çalışmadaki amaç, maksimum-modül-normunda sonlu fark şemasının kesinliğini analiz etmek için, Green fonksiyonları kullanılarak bulunan ayrık (diskret) problemin çözümlerinin bir *a priori* değerlendirmesinin uygulamasını göstermektir.

Son olarak, $[0,1]$ aralığında tanımlı $P \geq p(x) \geq p > 0$, $Q \geq q(x) \geq q > 0$, $p,q \in R$ ve $f(x)$ fonksiyonları yeterince düzgün olmak üzere,

$$Lu := -\varepsilon^2 \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx} \right) + q(x)u(x) = f(x), \qquad 0<x<1, \tag{1.5}$$

$$u(0)=u(1)=0 \tag{1.6}$$

problemi ele alındı ve bu problem için düzgün olmayan bir keyfi şebeke (adaptive şebeke) tanıtıldı. Bakhvalov şebekesi denen bu şebeke, sınır katları dışında düzgün artışlı ve aralığın sınır (veya başlangıç) katlarında belirli bir kurala göre uç noktalara doğru sıklaşan düğüm noktalarına sahiptir. Bakhvalov şebekesi üzerinde tanımlı ayrık problemin çözümünün, (1.5)-(1.6) problemin çözümüne ε-a göre düzgün olarak ve şebeke düğümlerine göre $O(N^{-2})$ mertebesinde yakınsadığı ispatlandı.

(1.5) probleminin regüler ($\varepsilon = 1$) durumu için $O(N^{-2})$ oranında düzgün olmayan bir keyfi şebekede oluşturulan fark şemasının yakınsaklığı; sağ taraf zayıf $W_{-1,1}^h$-normuna göre çözümün L_∞^h-normu için *a priori* değerlendirmelerinin ayrık (diskret) Green fonksiyonunun kullanımıyla elde edilmiş olan ve daha önce geliştirilen teknik Tikhonov ve Samarskii (1961) esas alınarak, Tikhonov ve Samarskii (1962) tarafından ispatlandı.

Ayrıca, Bakhvalov şebekesinin singüler pertürbe özellikli konveksiyon-difüzyon denklemleri için de kullanılabildiği Liseikin ve Yanenko (1981); Andreev (1998) tarafından gösterildi. Daha sonra, konveksiyon-difüzyon denklemi için ikinci mertebe fark şeması durumuna göre, yaklaşım hızında bir kayıp olmaksızın, ardışık adımların yakın olduğu kabulü ihmal edilerek, yani sınır katı dışında sadece $h_i = O(N^{-1})$ sınırlamasıyla keyfi düzgün olmayan şebeke ele alınarak, Bakhvalov şebekesinin genelleşebileceği Liseikin ve Yanenko (1981)'de ispatlandı. Bu sonuçlar, reaksiyon-difüzyon denklemine genelleştirilecektir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Singüler pertürbasyonun doğuşu, akışkanlar dinamiğindeki sınır katı teorisiyle Prandtl (1905) tarafından ileri sürüldü. Singüler pertürbasyon terimi ilk kez Friedrichs ve Wasow (1946) tarafından ortaya atıldı. Rusya'da başta Moskova Devlet Üniversitesi'nde adi diferansiyel denklemler için singüler pertürbasyon ile ilgili aktif araştırmalar ve geliştirmeler Tikhonov (1952) tarafından yapıldı. Ve onun öğrencilerinin, özellikle Vasil'eva'nın (1963) sürekli olarak etkin bir biçimde geliştirmesiyle bugünkü düzeye gelmiştir.

Yüksek mertebeli türev terimlerinin, küçük ε parametresiyle çarpılarak elde edilen denklemlere singüler pertürbe denir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri normal olarak sınır katına sahiptir. Singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler, fen bilimlerinde ve mühendislikte matematiksel problemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tip problemler için bazı fark şemaları üzerinde durulmuş ve bu fark şemaları için Green fonksiyonları oluşturulmuştur. Fark Green fonksiyonlara örnek olarak n. dereceden lineer diferansiyel denklemler üzerinde n. dereceden lineer fark denklemleri için fark Green fonksiyonlarını Hartman (1978)'de fark şemalarının birinci türev değerlendirmesiyle merkezi fark oranı çalışmalarında Andreev ve Kopteva (1995)'te fark Green fonksiyonlarını kullanmışlardır.

Cheng ve Lın (1997)'de lineer kısmi fark şemaları için Green fonksiyonlarını incelemişlerdir. Ters çevrilebilen problemin kararlılığı için Sturm-Liouville fark denklemlerinde Davies-Harrell tip için fark Green fonksiyonunu Chernyavskaya (1999)'da, Chernyavskaya (2000)'de ise iki taraflı değerlendirmeler için Green fonksiyonunu diagonal değerlerde de işlemiştir.

Samarskii (2001)'de Fark Şemaları Teorisi adlı kitabında fark Green fonksiyonlarını konu almıştır. Andreev (2001)'de Green fonksiyonu ve monoton üç noktalı singüler pertürbe özellikli sonlu fark şemalarinin çözümünün *a priori* değerlendirmelerinde, Andreev (2001)'de tek boyutlu Shishkin şebekesi üzerinde singüler pertürbe özellikli konveksiyon-difüzyon denklemi için monoton fark şemalarının Green fonksiyonu ve düzgün yakınsamasında, Andreev (2002)'de noktasal ve ağırlıklı singüler pertürbe özellikli konveksiyon-difüzyon denklemi için birinci türevinin ve çözümünün *a priori* değerlendirmelerinde fark Green fonksiyonunu incelemiştir.

Axelsson ve Gololobov (2003)'te fiziksel süreçlerde singüler pertürbe özellikli konveksiyon-difüzyon problemlerini için merkezi fark metodu ve lokal Green fonksiyonlarını birleştirme metodunda fark Green fonksiyonlarından yararlanmışlardır. Thomee ve Larsson

(2003)’te Kısmi Diferansiyel Denklemler ile Nümeriksel Metotlar adlı kitabında Green fonksiyonlarından bahsetmektedir. Andreev (2004)’de ise singüler pertürbe özellikli reaksiyon-difüzyon problemlerin için fark Green fonksiyonundan yararlanmıştır.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde düzgün şebekede fark şemasının kurulmasında ihtiyaç duyulan notasyonlar, sürekli bölgede tanımlanmış fonksiyonlar için tanımlar ve eşitsizlikler verilmektedir.

3.1. Düzgün Şebeke İçin Gerekli Tanımlar

Tanım 3.1.1.

a) $\varpi = \{x_i | x_i = ih, i = 1,2,..., N-1\}$, $h = l/N$ ifadesine $[0,l]$ aralığındaki *düzgün şebeke* denir.

b) $g_i \equiv g(x_i)\omega_h$'da tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun.

c) $\|g\|_{C(\omega_h)} = \max\limits_{x_i \in \omega_h} |g_i|$ ifadesine *düzgün şebeke* normu denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Tanım 3.1.2.

g herhangi bir fonksiyon olsun. Buna göre;

a) $g_{x,i} = \dfrac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{h}$ ifadesine *birinci mertebeden ileri fark türevi* denir.

b) $g_{\bar{x},i} = \dfrac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{h}$ ifadesine *birinci mertebeden geri fark türevi* denir.

c) $g_{\overset{0}{x},i} = \dfrac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1})}{2h}$ ifadesine *birinci mertebeden merkezi fark türevi* denir.

d) $g_{\bar{x}x,i} = \dfrac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1})}{h^2}$ ifadesine *ikinci mertebeden ileri fark türevi* denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Tanım 3.1.3.

$f(x)$, $[0,l]$'de tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyon olsun.

a) $C^{(n)}[0,l]$ ifadesi $[0,l]$ aralığında x'e göre n. dereceden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi olmak üzere, $g_i = g(x_i)$ ifadesine ω_h'ta tanımlanmış *şebeke fonksiyonu* denir.

b) $\| f \|_{C[0,l]} = \max_{x\in[0,l]} |f(x)|$ ifadesine $[0,l]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar için *maksimum norm* denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Tanım 3.1.4.

a) $(y,v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ ifadesine *açık ayrık(diskret) iç çarpımı* denir.

b) $(y,v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h$ ifadesine *yarı açık ayrık(diskret) iç çarpımı* denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Tanım 3.1.5.

a) $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \ , & i = k \\ 0 \ , & i \neq k \end{cases}$ ifadesine *Kronecker deltası*, δ_{ik} fonksiyonuna *Kronecker delta fonksiyonu* denir.

b) $L_2(a,b)$ uzayı: $\int_a^b f^2(x)dx$ integralinin mevcut olması halinde (a,b) aralığı üzerinde kuadratik olarak integre edilebilir fonksiyonların oluşturduğu sınıftır. $L_2(a,b)$ veya kısaca L_2 ile göstereceğiz.

$f(x) \in L_2$ ve $g(x) \in L_2$ olsun. Bu iki fonksiyonun skaler çarpımı

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ile ve $f(x)$'in normu

$$\| f \|^2 = (f,f) = \int_a^b f^2(x)dx \text{ veya } \| f \| = \sqrt{(f,f)}$$

ile tanımlanır (Amiraliyev ve Duru, 2002).

3.2. Shishkin Şebeke İçin Gerekli Tanımlar

Tanım 3.2.1.

$[0,1]$ aralığında düzgün olmayan keyfi

$$\overline{\omega} = \{x_i | 0 = x_0 < \ldots < x_N = 1\}, \quad \omega = \overline{\omega} \setminus \{0,1\}$$

şebekesini ele alalım. $h_i = (x_i - x_{i-1})$ formülü x_i düğümündeki şebeke adımı ve $\hbar = (h_i + h_{i+1})/2$ ortalama şebeke adımıdır. $\overline{\omega}$ şebekesi üzerinde tanımlı herhangi $\upsilon_i = \upsilon(x_i)$ şebeke fonksiyonu için aşağıdaki sonlu farkları

a) $\upsilon_{\bar{x},i} = (\upsilon_i - \upsilon_{i-1})/h_i$,

b) $\upsilon_{x,i} = (\upsilon_{i+1} - \upsilon_i)/h_{i+1}$,

c) $\upsilon_{\hat{x},i} = (\upsilon_{i+1} - \upsilon_i)/\hbar_i$,

d) $\upsilon_{\check{x},i} = (\upsilon_i - \upsilon_{i-1})/\hbar_i$,

e) $\upsilon_{\overset{\circ}{x},i} = (\upsilon_{\hat{x},i} + \upsilon_{\check{x},i})/2$

biçiminde tanımlansın.

f) $(i = 0,1,\ldots,n)$ düğüm noktaları ve υ_i'ler ise bu noktalardaki fonksiyon değerleri olsun

$$\Delta \upsilon_i = \upsilon_{i+1} - \upsilon_i$$

ifadesine *birinci mertebe ileri sonlu fark* denir.

g) $(i = 0,1,\ldots,n)$ düğüm noktaları ve υ_i'ler ise bu noktalardaki fonksiyon değerleri olsun

$$\nabla \upsilon_i = \upsilon_i - \upsilon_{i-1}$$

ifadesine *birinci mertebe geri sonlu fark* denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Tanım 3.2.2.

$i = 0$ *ve* $i = N$ noktalarını göz ardı ederek ve ϖ şebekesinde tanımlı υ_i şebeke fonksiyonu için

a) $\|\upsilon\|_1 = \|\upsilon\|_{L_1^\infty} = (|\upsilon|, 1)$

b) $\|\upsilon\|_\infty = \|\upsilon\|_{L_\infty^h} = \max\limits_{x_i \in \omega} |\upsilon_i|$

ifadeleri şebekede tanımlı normlardır (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Tanım 3.2.3.

N 'yi bir çift sayı alalım. Bu takdirde

$$\left.\begin{aligned} &\varpi = \{ x_i \mid x_i = ih, \quad i = 0,1,\ldots,N/2; \quad x_i = \sigma + (i - N/2)H, \\ &i = N/2+1,\ldots,N; \qquad h = 2\sigma/N, \qquad H = 2(1-\sigma)/N, \\ &\sigma = \min\left(\frac{\varepsilon}{r}\ln N, 1/2\right) \end{aligned}\right\}. \tag{3.1}$$

Bu, $i = 1,\ldots,N/2$ için $h_i = h$ ve $i = N/2+1,\ldots,N$ için $h_i = H$ şebeke adımlarıyla parçalı düzgün bir şebekedir. (3.1) şebekesine *Shishkin şebekesi* denir (Andreev, 2001).

Tanım 3.2.4.

Eğer A singüler olmayan $A^{-1} \geq 0$ ve $a_{ij} \leq 0$, tüm $i \neq j$ 'ler için $1 \leq i, j \leq n$ ise gerçek bir nxn A matrisi bir $M - matrisi$ dir. Açıkça M matrisler kümesi monoton matrisler kümesinin bir alt kümesidir (Farrell ve ark., 2000).

3.3. Bakhvalov Şebeke İçin Gerekli Tanımlar

Tanım 3.3.1.

ε parametresine bağlı bire bir sürekli diferansiyellenebilir yol gösterici [0,1] aralığının kendi üzerinde

$$x(t) = \begin{cases} t\,, & \varepsilon \ge \varepsilon_0 \quad için \\ -a\varepsilon \ln(1 - t/b)\,, & 0 \le t \le \theta \quad için \\ 1/2 - d(1/2 - t)\,, & \theta \le t \le 1/2\, \varepsilon < \varepsilon_0 \quad için \\ 1 - x(1-t)\,, & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

formülleriyle tanımlayalım.

$$b = \theta + \frac{a\varepsilon(1-2\theta)}{1 + 2a\varepsilon \ln(1-\theta/b)}, \qquad d = \frac{1 + 2a\varepsilon\, \ln(1-\theta/b)}{1-2\theta}, \tag{3.3}$$

$\theta \in (0,1/2)$ bir keyfi sayı ve a, aşağıda özelleştirilmiş bir parametre olsun. *Bakhvalov tip bir şebeke* veya *düzgün olmayan bir Bakhvalov tip şebeke* (3.2) ile verilen $x(t)$,

$$\overline{\Omega} = \left\{ x_i \middle| x_i = x(t_i),\ \ t_i \in \varpi,\ \ (t_i - t_{i-1}) = O(N^{-1}) \right\}, \tag{3.4}$$

formun bir şebekesi olarak tanımlayalım. (3.4)'teki ϖ şebeke düzgün ise bazı $t_i = i/N$ bu takdirde (3.2), (3.4) şebekesi uygun anlamda bir Bakhvalov şebekesidir (Andreev, 2004).

4. FARK GREEN FONKSİYONU

İkinci mertebeden fark denklemi için sınır-değer probleminin çözümünün değerlendirmesinde, bu çözümün Green fonksiyonunun yardımıyla ifade biçiminden yararlanılabilir. Bunu L operatörü H Hilbert uzayında self adjoint ve pozitif tanımlı bir operatör olmak üzere

$$Lu := \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{4.1}$$

$$u(0)=0, \quad u(1)=0, \quad k(x) \ge c_1 > 0, \quad q(x) \ge 0$$

sınır-değer problemi örneğinde gösterelim. Bilindiği gibi bu problemin çözümü aşağıdaki integral ile verilebilir

$$u(x) = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{4.2}$$

burada $G(x,\xi)$ kaynak fonksiyon veya Green fonksiyondur. Eğer x'in fonksiyonu olarak $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu her bir ξ için

$$L_x G(x,\xi) = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) - q(x)G(x,\xi) = 0, \qquad x \ne \xi,\ 0 < x < 1,$$

$$G(0,\xi) = G(1,\xi) = 0, \tag{4.3}$$

şartlarını sağladığı takdirde (4.2) fonksiyonu (4.1) denklemini ve $u(0)=0$ *ve* $u(1)=0$ sınır şartlarını sağlar.

$$[G] = G(\xi+0;\ \xi) - G(\xi-0;\ \xi) = 0, \qquad \left[k\frac{dG}{dx}\right] = -1 \quad \text{için} \quad x = \xi$$

Söz konusu tanımdan Green fonksiyonunun negatif olmadığı ve simetrik olduğu görülür:

$$G(x,\xi) \ge 0, \qquad G(x,\xi) = G(\xi,x).$$

$G(x,\xi)$ fonksiyonunun açık ifadesi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(x)\beta(\xi)}{\alpha(1)}, & x \le \xi \\[2ex] \dfrac{\alpha(\xi)\beta(x)}{\alpha(1)}, & x \ge \xi \end{cases} \tag{4.4}$$

$\alpha(x)$ *ve* $\beta(x)$ sırasıyla aşağıdaki başlangıç-değer problemlerinin çözümüdür:

$$L\alpha = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha(0) = 0, \quad k(0)\alpha'(0) = 1, \tag{4.5}$$

$$L\beta = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \beta(1) = 0, \quad k(1)\beta'(1) = -1,$$

$\Delta(x)\neq 0$, ayrıca x>0 için $\alpha(x)$>0 ve $0\leq x$<1 için $\beta(x)$>0 olduğundan $\alpha(x)$ *ve* $\beta(x)$ fonksiyonları lineer bağımsızdırlar (Samarskii, 2001).

Örnek.

$$\frac{d^2u}{dx^2}=f(x), \qquad (0\leq x\leq 1)$$
$$u(0)=u(1)=0$$

probleminin Green fonksiyonunu ve çözümünü bulunuz.

Çözüm. Homojen problemin sadece aşikar çözüme sahip olduğunu göstermek kolaydır ve böylece Green fonksiyonu mevcuttur. $u''=0$ diferansiyel denklemin genel çözümü

$$u(x)=Ax+B$$

$u(0)=0$ şartını sağlayan bir çözüm $u_1(x)=x$ olarak kolayca bulunur. $u(1)=0$ şartını sağlayan bir çözüm $u_2(x)=x-1$ ile verilir. Görüldüğü gibi bu iki fonksiyon lineer bağımsızdır. Wronskian $W(u_1;u_2;u_3)=u_1u_2'-u_1'u_2=1$'dır. Böylece Green fonksiyonu

$$G(x;\xi)=\begin{cases} x(\xi-1), & 0\leq x\leq \xi \\ \xi(x-1), & \xi\leq x\leq 1 \end{cases}$$

olur ve problemin genel çözümü

$$u(x)=\int_0^1 G(x;\xi)f(\xi)d\xi$$

olur. Özellikle $f(x)=1$ ise

$$u(x)=x(x-1)/2$$

şeklinde bulunur (Eutiquio, 1972).

İkinci mertebeden genel bir fark denklemi $A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-F_i$ şeklindedir ve bunu

$$a_{i+1}(y_{i+1}-y_i)-a_i(y_i-y_{i-1})-d_iy_i=-\varphi_i$$

biçiminde yazılır. Burada φ_i yerine $h^2\varphi_i$ ve d_i yerine h^2d_i yazılırsa:

$$\Lambda y_i=\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y_{i+1}-y_i)-a_i(y_i-y_{i-1})\right]-d_iy_i=-\varphi_i, \qquad i=1,2,...,N-1$$

durumu diferansiyel denkleme oranla daha uygun hale gelmiş olur.

İndissiz biçimde yazılmış

$$\Lambda_y=(ay_{\bar{x}})_x-dy=-\varphi(x), \qquad x=ih, \tag{4.6}$$

$$a(x) \geq c_1 > 0\,, \qquad d(x) \geq 0, \qquad i = 1,2,...,N-1$$

fark denklemini ele alalım. Ayrıca $i = 0(x = 0)$ ve $i = N(x = 1)$ için birinci tip sınır şartlarını:

$$y_0 = 0, \qquad y_N = 0 \tag{4.7}$$

(4.6) probleminin çözümünü aşağıdaki biçimde arayalım

$$y_i = \sum_{k=1}^{N-1} G_{ik}\varphi_k h = (G_{ik}, \varphi_k) \tag{4.8}$$

ve talep edelim ki bu fonksiyon $\Lambda y_i = -\varphi_i$ denklemini sağlasın. $\Lambda_{(i)} G_{ik} = -\delta_{ik}/h$ şartı dahilinde (4.6) denklemi $\Lambda y_i = \sum_{k=1}^{N-1} \Lambda_{(i)} G_{ik}\varphi_k h$ eşitliğinden kolayca görülür. $y_0 = y_N = 0$ şartlarının, $G_{ok} = G_{Nk} = 0$ seçimi için sağlanacağı da açıktır. Böylece, i'e göre bir fonksiyon olarak $G_{ik} = G(x_i, x_k)$ her bir $k = 1,2,...,N-1$ için

$$\Lambda_{(i)} G_{ik} = (a_i (G_{ik})_{\bar{x},i})_{x,i} - d_i G_{ik} = -\frac{\delta_{ik}}{h}, \qquad i,k = 1,2,...,N-1 \tag{4.9}$$

$$G_{0k} = G_{Nk} = 0$$

şartlarını sağladığı takdirde, (4.8) formülü (4.6)-(4.7) probleminin çözümünü verecektir.

Bu biçimde tanımlanmış Green fonksiyonu mevcuttur ve bu fonksiyonun (4.4)'e benzer açık ifadesi elde edilir. Bu amaçla aşağıdaki başlangıç-değer problemiyle tanımlanmış α_i ve β_i fonksiyonlarını dahil edilir.

$$\begin{aligned}
&\Lambda\alpha_i = 0\,, && i = 1,2,...,N-1\,,\\
&\alpha_0 = 0\,, && a_1\,\alpha_{x,0} = a_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{h} = 1\,,\\
&\Lambda\beta_i = 0\,, && i = 1,2,...,N-1\,,\\
&\beta_N = 0\,, && a_N\,\beta_{\bar{x},N} = a_N \frac{\beta_N - \beta_{N-1}}{h} = -1\,,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

α_i ve β_i fonksiyonlarının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu açık bir şekilde doğrulanacaktır:

1) α_i monoton artan ve β_i monoton azalan olmak üzere α_i ve β_i pozitif fonksiyonlardır:

$$\alpha_i \leq \alpha_{i+1} \leq \alpha_N\,, \qquad \beta_i \leq \beta_{i-1} \leq \beta_0\,,$$

$i = 1,2,...,N$ için $\alpha_i > 0$ ve $i = 1,2,...,N-1$ için $\beta_i > 0$. Gerçekten, (4.10) şartları

$$a_i\,\alpha_{\bar{x},i}=1+\sum_{k=1}^{i-1} h\,d_k\alpha_k\ , \qquad\qquad \alpha_1=\frac{h}{a_1}>0\,,$$

eşitliklerini sağlar.

Eğer $k=1,2,...,i-1$ için $\alpha_k>0$ ise, bu takdirde $a_i\,\alpha_{\bar{x},i}>0$ ve $\alpha_i>\alpha_{i-1}>0$ olur. Benzer biçimde $\beta_{\bar{x},i}<0$ ve $0<\beta_i<\beta_{i-1}$ dir.

2) $\alpha_N=\beta_0$ veya $\alpha(1)=\beta(0)$. İkinci Green formülünden

$$(\alpha,\Lambda\beta)=(\beta,\Lambda\alpha)+a_N\,(\alpha\beta_{\bar{x}}-\beta\alpha_{\bar{x}})_N-a_1\,(\alpha\beta_x-\beta\alpha_x)_0\,,$$

(4.10) şartlarından dolayı $\alpha_N=\beta_0$ olduğu ortaya çıkar.

3) Determinant $\Delta_i=a_i\,(\alpha_{\bar{x},i}\beta_i-\alpha_i\beta_{\bar{x},i})=sbt=\alpha_N$ $0<i\le N$ için pozitiftir. $\left\{0\le x_i=ih\le x_{i_0}=x\right\}$ bölgesinde ikinci Green formülünü uygulayarak

$$0=\sum_{i=1}^{i_0-1}(\alpha\Lambda\beta-\beta\Lambda\alpha)_i\,h=a_{i_0}(\alpha\beta_{\bar{x}}-\beta\alpha_{\bar{x}})-a_1(\alpha\beta_x-\beta\alpha_x)_0$$

$$=-\Delta(x_{i_0})+\beta(0)\,a_1\,\alpha_{\bar{x},i}=-\Delta(x_{i_0})+\beta_0$$

bulunur. $x_{i_0}=x$, ω_h şebekesinin keyfi bir düğümü olduğundan,

$$\Delta(x)=sbt=\beta(0)=\alpha(1)\,.$$

Green fonksiyonu

$$G_{ik}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_i\,\beta_k}{\alpha_N} & için\quad i\le k,\\[2mm] \dfrac{\alpha_k\,\beta_i}{\alpha_N} & için\quad i\ge k\end{cases} \tag{4.11}$$

biçiminde düzenlenebilir. Buradan $G_{0k}=G_{Nk}=0$ olduğu ortaya çıkar.

Formül (4.11)'deki denklemin $\Lambda_{(i)}G_{ik}=-\delta_{ik}/h$ denklemini çözmesiyle özelleştiğini göstermeyi başarırsak önceki gösterim ispatlanacaktır. Gerçekten $\Lambda\alpha_i=0$ ve $\Lambda\beta_i=0$ gerçeklerinden dolayı $i\ne k$ için $\Lambda_{(i)}G_{ik}=0$ olur. $i=k$ için $\Lambda_{(i)}G_{ik}$ ifadesi incelenmelidir:

$$(\Lambda_{(i)}G_{ik})_{i=k}=\frac{1}{\alpha_N h^2}\left[a_{k+1}\,(\alpha_k\beta_{k+1}-\alpha_k\beta_k)-a_k\,(\alpha_k\beta_k-\alpha_{k-1}\beta_k)\right]-d_kG_{kk} \tag{4.12}$$

$\Lambda_{k+1}=a_{k+1}\,(\alpha_{k+1}\,\beta_k-\alpha_k\,\beta_{k+1})\,/\,h=\alpha_N$ şartından $a_{k+1}\,\alpha_k\beta_{k+1}=a_{k+1}\,\alpha_{k+1}\beta_k-h\alpha_N$ ifadesini türetilir ve (4.12) formülünün sağ tarafında yerine yazılır. Sonuç olarak

$$(\Lambda_{(i)}G_{ik})_{i=k}=\frac{\beta_k}{\alpha_N}(a\,\alpha_{\bar{x}})_{x,k}-\frac{1}{h}-\frac{d_k\,\beta_k}{\alpha_N}\,\alpha_k=\frac{\beta_k}{\alpha_N}\,\Lambda\alpha_k-\frac{1}{h}=-\frac{1}{h}$$

elde edilir.

(4.11) formülünün anlamı şudur $G_{ik}>0$ için $i,k \neq 0,N$ ve $G_{ik}=G_{ki}$ olur. Ayrıca, i sabiti için k 'nın bir fonksiyonu olarak G_{ik}

$$\Lambda_{(k)}G_{ik} = -\frac{\delta_{ik}}{h}, \qquad G_{i0}=G_{iN}=0$$

şartlarını sağlar. Sınır şartlarının $y_0=\chi_1 y_1$ ve $y_N=\chi_2 y_N$ olması durumunda Green fonksiyonu benzer bir yolla oluşturulabilir. İlgili özel durum $d(x)\equiv 0$ olmasıdır. Burada $\alpha=\overset{\circ}{\alpha}(x)$ ve $\beta=\overset{\circ}{\beta}(x)$ fonksiyonları açık biçimde (4.10) denklemlerinden belirlenebilir:

$$\overset{\circ}{\alpha}_i=\sum_{s=1}^{i}\frac{h}{a_s}, \qquad \overset{\circ}{\beta}_i=\sum_{s=i+1}^{N}\frac{h}{a_s} \tag{4.13}$$

ve

$$(ay_{\bar{x}})_x=-\varphi, \quad x\in\omega_h, \qquad y_0=0,\ y_N=0, \tag{4.14}$$

problemle ilgili Green fonksiyonu

$$G_{ik}=\begin{cases}\sum_{s=1}^{i}\frac{h}{a_s}\sum_{s=k+1}^{N}\frac{h}{a_s}\Big/\sum_{s=1}^{N}\frac{h}{a_s}, & i\leq k\\[2ex] \sum_{s=1}^{k}\frac{h}{a_s}\sum_{s=i+1}^{N}\frac{h}{a_s}\Big/\sum_{s=1}^{N}\frac{h}{a_s}, & i\geq k\end{cases} \tag{4.15}$$

fonksiyonuna indirgenir.

Samarskii (2001)'de sayfa 153-154'deki (15), (17) şemalarından dolayı, G_{ik}, bir diferansiyel denklem için Green fonksiyonu ile w_h şebekesi üzerinde rastlaşır.

4.1 *A Priori* Değerlendirmeler:

Green fonksiyonuyla ilgili olarak (4.6)-(4.7) probleminin bir çözümünün (4.8) aşikâr gösterimi, sağ tarafla alakalı olarak bir çözümün çeşitli hata değerlendirmelerinin zemininde yatar. (4.8)'den kolayca görülür ki

$$|y_i|\leq (G_{ik},|\varphi_k|)=\sum_{k=1}^{N-1}G_{ik}|\varphi_k|h \tag{4.16}$$

ve bundan dolayı y_i'nin bulunabilen bir düzgün değerlendirmesi $\max_{i,k}G_{ik}$ değerlendirmesiyle bulunabilir. Bu doğruda, φ_i,

$$\varphi = \eta_x, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \eta_i = \sum_{s=1}^{i-1} h\varphi_s, \quad i = 2,3,...,N \tag{4.17}$$

olarak düzenlenir. Bu ifadeleri yukarıdaki (4.8) formülünde yerine yazılarak,

$$y(x) = (G(x,\xi),\eta_{\xi}) = -(G_{\bar{\xi}}(x,\xi), \eta(\xi)], \; x,\xi \in \omega_h \tag{4.18}$$

olduğu formülün kısımlarının toplamından çıkarılır.

Sonraki adım $\left|G_{\bar{\xi}}(x,\xi)\right|$ ile ilgilidir (Samarskii, 2001).

Lemma 4.1. *(4.6)-(4.7) problemiyle ilişkili* $G(x,\xi)$ *Green fonksiyonundan dolayı, düzgün değerlendirmeler bütün* $x,\xi \in \omega_h$ *için*

$$G(x,\xi) \le \frac{1}{c_1}, \tag{4.19}$$

$$\left|G_{\bar{x}}(x,\xi)\right| \le \frac{2}{c_1}, \qquad \left|G_{\bar{\xi}}(x,\xi)\right| \le \frac{2}{c_1} \tag{4.20}$$

geçerlidir (Samarskii, 2001).

İspat.

1) (4.6)-(4.7) probleminin bir çözümü için

$$\|y\|_c \le \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{a_{i+1}} \sum_{s=1}^{i} \left|h^2 \varphi_s\right| \le \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{s=1}^{i} \left|h^2 \varphi_s\right| \tag{4.21}$$

olduğu biliniyor.

(4.21)'deki y_i ile G_{ik}'yı ve φ_s ile δ_{sk}/h'ı yer değiştirerek,

$$i<k \text{ için } S_{ik} = \sum_{s=1}^{i} \delta_{sk}, \quad S_{ik} = 0 \;\; i \ge k \text{ için } S_{ik} = 1$$

olmak üzere

$$\max_{i,k} G_{ik} \le \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} hS_{ik} \le \frac{1-x_k}{c_1} \le \frac{1}{c_1},$$

bağıntılarını oluşturulur.

2) $d(x) \equiv 0$ ve $G = G_0(x,\xi)$ Green fonksiyonunu (4.15) formülüyle özelleştirilir. Bu durumu varsayarak,

$$G_{0\bar{x}}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\overset{\circ}{\alpha}_{\bar{x}}(x)\ \overset{\circ}{\beta}(\xi)}{\overset{\circ}{\alpha}(1)} & için \quad x \le \xi, \\ \dfrac{\overset{\circ}{\alpha}(\xi)\ \overset{\circ}{\beta}_{\bar{x}}(x)}{\overset{\circ}{\alpha}(1)} & için \quad x \ge \xi \end{cases}$$

eşitliğini bulunur.

$$\overset{\circ}{\alpha}_{\bar{x},i} = \frac{1}{a_i} \le \frac{1}{c_1}, \qquad \overset{\circ}{\beta}_{\bar{x},i} = \frac{1}{a_i} \le \frac{1}{c_1}, \qquad \overset{\circ}{\alpha}(\xi) \le \overset{\circ}{\alpha}(1), \qquad \overset{\circ}{\beta}(\xi) \le \overset{\circ}{\alpha}(1)$$

bağıntılarına dayanarak

$$\left| G_{0\bar{x}}(x,\xi) \right| \le \frac{1}{c_1} \tag{4.22}$$

sonucuna ulaşılır. Aynı şekilde,

$$\left| G_{0\bar{\xi}}(x,\xi) \right| \le \frac{1}{c_1}$$

$\upsilon(x,\xi) = G_0(x,\xi) - G(x,\xi)$ olsun. G_0 *ve* G için denklemler

$$\Lambda_\alpha\, \upsilon(x,\xi) = -d(x)\, G_0(x,\xi), \qquad \upsilon(0,\xi) = \upsilon(1,\xi) = 0$$

ifadesini sağlar. Bu denklemin her iki tarafının ξ'ye göre sol fark türevi hesaplanabilir, $\omega(x,\xi) = \upsilon_{\bar{\xi}}$ için problemi düzenlenirse

$$\Lambda_x\, \omega(x,\xi) = (a(x)\ \omega_{\bar{x}}(x,\xi))_x - d(x)\ \omega(x,\xi) = -d(x) G_{0\bar{\xi}}(x,\xi),$$

$$\omega(0,\xi) = 0,\ \omega(1,\xi) = 0.$$

Buradan

$$\max_x \left| \omega(x,\xi) \right| \le \max_x \left| G_{0\bar{\xi}}(x,\xi) \right| \le \frac{1}{c_1} \tag{4.23}$$

(4.22) ve (4.23) değerlendirmeleri kullanılarak bunlardan başka, bilinen eşitsizlikten

$$\left| G_{\bar{\xi}}(x,\xi) \right| \le \left| G_{0\bar{\xi}}(x,\xi) \right| + \left| \omega(x,\xi) \right|$$

istenen (4.20) değerlendirmesi türetilir (Samarskii, 2001).

Teorem 4.1. *(4.6)-(4.7) probleminin çözümü için şu değerlendirmeler geçerlidir:*

$$\| y \|_C \le \frac{2}{c_1} \left(1, \left| \sum_{s=i}^{N-1} h\ \varphi_s \right| \right) = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=i}^{N-1} h\ \varphi_s \right|, \tag{4.24}$$

$$\| y \|_C \le \frac{2}{c_1} \left(1, \left| \sum_{s=1}^{1} h\ \varphi_s \right| \right) = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^{1} h\ \varphi_s \right|. \tag{4.25}$$

Ayrıca eğer $\varphi(x)$; $\varphi = \eta_x + \varphi^*$ biçiminde ise, (4.6)-(4.7) probleminin çözümü,

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{i-1} h\,\varphi_k^* \quad \textit{için} \quad i = 2,3,...,N \quad \textit{ve} \quad \mu_1 = 0$$

olmak üzere

$$\| y \|_C \le \frac{2}{c_1} \{ (1, |\eta|] + (1, |\mu|] \}, \tag{4.26}$$

değerlendirmesini sağlar (Samarskii, 2001).

İspat. $\mu = \eta_x$ alarak ve daha sonra (4.18) formülünü uygulayarak önceki Lemma yardımıyla

$$| y_i(x) | \le \left(\left| G_{\bar{\xi}}(x,\xi) \right|, |\eta(\xi)| \right] \le \frac{2}{c_1} \left(1, |\eta(\xi)| \right] \tag{4.27}$$

sonucu çıkar. $\eta(x)$ fonksiyonu $\eta_x = \varphi$ şartından keyfi bir sabitle

$$\eta_{i+1} - \eta_i = h\varphi_i$$

tekrar düzenlenebilir. Fark denkleminin bir çözümü ya

$$\eta_N = 0 \text{ ise } \eta_i = \eta_N - \sum_{s=i}^{N-1} h\varphi_s = -\sum_{s=i}^{N-1} h\,\varphi_s$$

veya

$$\eta_1 = 0 \text{ ise } \eta_{i+1} = \eta_1 + \sum_{s=1}^{i} h\,\varphi_s = \sum_{s=1}^{i} h\,\varphi_s$$

ile ifade edilebilir. Bu formülleri (4.27) eşitsizliğinin sağ tarafına η_i için yerine yazma (4.24) ve (4.25) değerlendirmelerine götürür.

(4.26) eşitsizliğini ispatlamak için, $\varphi^* = \mu_x$ yerleştirmek yeterlidir, öyle ki $\varphi = (\eta + \mu)_x$ ve önceki argümanları tekrar alınır (Samarskii, 2001).

Uyarı 4.1. (4.16) formülünden,

$$\| y \|_C \le \frac{1}{c_1} (1, |\varphi|) \le \frac{1}{c_1} \| \varphi \| \le \frac{1}{c_1} \| \varphi \|_C$$

değerlendirmesi çıkar. Bu

$$\left\| \sum_{k=1}^{i} h\varphi_k \right\| \le \left(1, |\varphi| \right) \le \| \varphi \| \le \| \varphi \|_C$$

belli eşitsizliklerinden açıktır.

Ayrıca,

$$\| G_{\bar{x}}(x,\xi) \|_C \leq \frac{2}{c_1}$$

değerlendirmesi kullanılarak, (4.6)-(4.7) sınır değer problemin çözümünün fark türevi için C uzayında bir hata değerlendirmesi kolayca türetilebilir. Gerçekten de aşağıdaki denklem

$$| y_{\bar{x}} | = | (G_{\bar{x}}(x,\xi), \varphi(\xi) | \leq \frac{2}{c_1} (1, | \varphi |)$$

şu eşitsizliğe yol açar:

$$\| y_{\bar{x}} \|_C \leq \frac{2}{c_1} (1, | \varphi |)$$

(Samarskii, 2001).

5. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ KONVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN FARK GREEN FONKSİYONU

Singüler pertürbe özellikli problemler için nümerik metotların yakınsama derecesi analiz edildiğinde, kesinliğin ölçümü için en uygun normun modülün maksimum normu (L_∞^h -normu) olduğu iyi bilinir (Farrell ve ark., 2000). Mevcut durumda, bariyer fonksiyon tekniği bu normdaki hata değerlendirmesini elde etmek için geniş biçimde kullanılır. Araştırılan şemanın monotonluğunu kabul eden bu teknik, çok kesin bir metottur, fakat uygun bariyer fonksiyonun kurulması çok zor olabilir.

Bu bölümdeki amaç, modülün maksimum-normunda sonlu fark şemasının kesinliğini analiz etmek için, Green fonksiyonu kullanılarak bulunan ayrık (diskret) problemin çözümlerinin bir *a priori* değerlendirmenin uygulamasını göstermektir.

5.1 Sürekli Problemin İfade Edilmesi:

$[0,1]$ aralığında aşağıdaki sınır değer problemi göz önüne alınsın: L operatörü H Hilbert uzayında self adjoint ve pozitif tanımlı bir operatör olmak üzere

$$Lu := -\varepsilon u''(x) - r(x)u'(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = u(1) = 0. \tag{5.1}$$

Burada $\varepsilon \in (0,1]$ küçük bir parametredir.

$$r(x) \geq \alpha > 0, \qquad \alpha \in R \text{ ve } r(x), f(x) \in C^1[0,1] \tag{5.2}$$

olduğu kabul edilsin. (5.1), (5.2) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler geçerlidir (Kellogg, 1978):

$$\left| u^{(k)}(x) \right| \leq c(1 + \varepsilon^{-k} e^{-\alpha x/\varepsilon}), \quad k = 0,1,2. \tag{5.3}$$

Burada c, ε'dan bağımsız pozitif bir sayıdır. Bu değerlendirmeleri ve (5.1) diferansiyel denklemi kullanılarak, aynı (5.2) kabulleri altında çözümün üçüncü türevinin benzer bir değerlendirmesi kolayca bulunabilir:

$$\left| u'''(x) \right| \leq c(1 + \varepsilon^{-3} e^{-\alpha x/\varepsilon}). \tag{5.4}$$

Bu değerlendirmeleri kullanılarak, (5.1) probleminin çözümünün Shishkin ayrışımının

$$u(x) = U(x) + V(x), \qquad x \in [0,1], \tag{5.5}$$

ifadesinin yerini aldığı gösterilebilir, burada

$$\begin{aligned} \left|U^k(x)\right| &\le c, \quad k=0,1,2,3, \\ \left|V^k(x)\right| &\le c\,\varepsilon^{-k} e^{-\alpha k/\varepsilon}, \quad k=0,1,2,3, \end{aligned} \tag{5.6}$$

eşitsizlikleriyle

$$\begin{aligned} & LU(x)=f(x), \qquad U(1)=0, \\ LV(x)=0, \qquad & V(0)=-U(0), \qquad V(1)=0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

olur (Andreev, 2001).

5.2 Ayrık (Diskret) Problem:

$[0,1]$ aralığında düzgün olmayan keyfi $\overline{\omega}$ şebekesi üzerinde aşağıdaki ayrık (diskret) problemi

$$L^h u_i^h := -\varepsilon u_{\bar{x}\hat{x},i} - r_{i+1}^h u_{\bar{x},i}^h = f_i^h, x_i \in \omega, \qquad u_0^h = u_N^h = 0 \tag{5.8}$$

göz önüne alınsın. Örneğin,

$$r_{i+1}^h = r(x_i), \qquad f_i^h = f(x_i) \tag{5.9}$$

alınabilir (Andreev, 2001).

5.3 Kısmi Toplam Formülleri ve Ayrık (Diskret) Green Formülleri:

$\Delta \upsilon_{i-1} = \nabla \upsilon_i$ eşitliği aşikardır. Δ operatörünü $\upsilon_i = u_i\, \omega_i$ çarpımına uygulayarak

$$\Delta(u_i\, \omega_i) = u_{i+1}\omega_{i+1} - u_i\, \omega_i + (u_{i+1}\omega_i - u_{i+1}\omega_i) = u_{i+1}\Delta\omega_i + \omega_i \Delta u_i$$

elde edilir. Bu bağıntıya çarpımın diferensiyellenmesine dair fark formülü denir.

Bu bağıntının i'ye göre, 0'dan $N-1$'e kadar toplamını alırsak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta(u_i \omega_i) = u_N \omega_N - u_0 \omega_0 &= \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+1}\Delta\omega_i + \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i \Delta u_i \\ &= \sum_{j=1}^{N} u_j \nabla\omega_j + \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i \Delta u_i \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu bağıntı, kısmi integrasyon formülünün fark benzeridir ve kısmi toplam formülü olarak adlandırılır.

$$(\Delta \upsilon_i)/\hbar_i \equiv \upsilon_{\hat{x},i}, \qquad (\nabla \upsilon_i)/\hbar_i \equiv \upsilon_{\bar{x},i},$$

eşitlikleri göz önüne alınıp, kısmi toplam formülünü aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir:

$$u_N \omega_N - u_0 \omega_0 = \sum_{i=1}^{N} u_i \omega_{\bar{x},i} \hbar_i + \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i u_{\hat{x},i} \hbar_i \tag{5.10}$$

$\omega_i = r_{i+1}^h \upsilon_i$ *ve* $u_N = \upsilon_0 = 0$ olsun. Bu durumda (5.10) eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{N-1} r_{i+1}^h u_{\hat{x},i} \upsilon_i \hbar_i = -\sum_{i=1}^{N-1} (r_{i+1}^h \upsilon_i)_{\bar{x},i} u_i \hbar_i, \qquad u_N = \upsilon_0 = 0 \tag{5.11}$$

sonucu elde edilir. $u_i = \upsilon_{\bar{x},i}$ ve $\omega_0 = \omega_N = 0$ eşitlikleri (5.10)'da yerine yazılırsa, bu durumda

$$\sum_{i=1}^{N-1} \upsilon_{\bar{x}\hat{x},i} \omega_i \hbar_i = -\sum_{i=1}^{N} \upsilon_{\bar{x},i} \omega_{\bar{x},i} \hbar_i = -\sum_{i=1}^{N} \upsilon_{\bar{x},i} \omega_{\bar{x},i} \hbar_i, \qquad \omega_0 = \omega_N = 0 \tag{5.12}$$

elde edilir. Bu formül birinci fark Green formülü olarak adlandırılır (Samarskii, 1971).

(5.12)'de υ_i *ve* ω_i terimlerinin yerleri değiştirilip (5.12)'den elde edilen ifade çıkarılırsa

$$\sum_{i=1}^{N-1} \upsilon_{\bar{x}\hat{x},i} \omega_i \hbar_i = \sum_{i=1}^{N-1} \omega_{\bar{x}\hat{x},i} \upsilon_i \hbar_i, \qquad \omega_0 = \omega_N = \upsilon_0 = \upsilon_N = 0 \tag{5.13}$$

ikinci fark Green formülü elde edilir (Andreev, 2001).

5.4 Adjoint Ayrık (Diskret) Problem:

$i = 0$ *ve* $i = N$ noktalarını göz ardı ederek ve ϖ şebekesinde tanımlı u_i *ve* υ_i şebeke fonksiyonları için aşağıdaki biçiminde

$$(u, \upsilon) := \sum_{i=1}^{N-1} u_i \upsilon_i \hbar_i \tag{5.14}$$

bir iç çarpım tanıtılsın. (5.13) formülünden

$$(\upsilon_{\bar{x}\hat{x},i}, \omega_i) = (\omega_{\bar{x}\hat{x},i}, \upsilon_i),$$

olduğu çıkar, yani, $i = 0$ *ve* $i = N$ noktaları dışında ayrık (diskret) fonksiyonların bir sınıfında tanımlanan $\upsilon_{\bar{x}\hat{x}}$ sonlu fark ifadesi (5.14)'deki iç çarpım anlamında self adjointtir.

(5.11) eşitliğinden

$$(r_{i+1}^h u_{\hat{x},i}, \upsilon_i) = -((r_{i+1}^h \upsilon_i)_{\bar{x},i}, u_i)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $-(r_{i+1}^{h} u_i)_{\breve{x},i}$ ifadesinin $i=0$ *ve* $i=N$ noktaları dışında ayrık (diskret) fonksiyonların bir sınıfı üzerinde $r_{i+1}^{h} u_{\bar{x},i}$'e adjoint fark ifadesi olduğu görülür. (5.14) anlamında (5.8)'e adjonit ayrık (diskret) problemin

$$L^{h*} \upsilon_i^h := -\varepsilon \upsilon_{\bar{x}\hat{x},i}^h - (r_{i+1}^h \upsilon_i^h)_{\breve{x},i} = f_i^h, \quad x_i \in \omega, \qquad \upsilon_0^h = \upsilon_N^h = 0$$

biçimine sahip olduğunun söylenmesinden ortaya çıkar (Andreev, 2001).

5.5 Ayrık (Diskret) Green Fonksiyonu ve Özellikleri:

Problem (5.8)'in $G^h(x_i, \xi_i)$ fark Green fonksiyonu göz önüne alınsın. ξ_i sabiti için x_i'nin bir fonksiyonu olarak bu fonksiyon

$$\begin{aligned} L^h G^h(x_i, \xi_i) &= \delta^h(x_i, \xi_i), \quad x_i \in \omega, \ \xi_j \in \omega, \\ G^h(0, \xi_j) &= G^h(1, \xi_j) = 0, \qquad \xi_j \in \omega, \end{aligned} \tag{5.15}$$

bağıntılarıyla tanımlanır, burada

$$\delta^h(x_i, \xi_j) = \begin{cases} \hbar_i & \text{için} \quad x_i = \xi_j, \\ 0 & \text{için} \quad x_i \neq \xi_j \end{cases}$$

fark Green fonksiyonu kullanılarak (5.8) problemin çözümü için aşağıdaki formülü verilebileceği kolayca görülür:

$$u_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G^h(x_i, \xi_j) f_j^h \hbar_j, \quad x_i \in \varpi. \tag{5.16}$$

Gerçekten (5.15) problemi göz önüne alınırsa

$$L_i^h u_i^h := \sum_{j=1}^{N-1} L_i^h G^h(x_i, \xi_j) f_j^h \hbar_j = f_i^h, \qquad x_i \in \omega$$

sonucu elde edilir. x_i sabiti için bir ξ_j değişkeninin fonksiyonu olan $G^h(x_i, \xi_i)$ fark Green fonksiyonu adjoint problemin çözümüdür:

$$\begin{aligned} L_j^{h*} G^h(x_i, \xi_j) &= \delta^h(x_i, \xi_i), \qquad \xi_j \in \omega, \ x_i \in \omega, \\ G^h(x_i, 0) &= G^h(x_i, 1) = 0, \qquad x_i \in \omega, \end{aligned} \tag{5.17}$$

Bu aşağıdaki argümanlardan elde edilir: (5.16), (5.8) ve L^{h*} operatörünün L^h operatörüne adjoint olması kullanılarak

$$u_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G^h(x_i,\xi_j)\, f_j^h\, \hbar_j = \sum_{j=1}^{N-1} G^h(x_i,\xi_j)\; L_j^h\, u_j^h\, \hbar_j$$

$$= \sum L_j^{h*}\, G^h(x_i,\xi_j) u_j^h\, \hbar_j \Rightarrow L_j^{h*}\, G^h(x_i,\xi_j) = \delta^h(x_i,\xi_j)$$

eşitliği elde edilir (Andreev, 2001).

Teorem 5.1. $r_i^h \geq r > 0$ *ise, bu takdirde* $G^h(x_i,\xi_i)$ *fark Green fonksiyonu negatif değildir ve* ε *'a göre düzgün sınırlıdır:*

$$0 \leq G^h(x_i,\xi_j) \leq 1/r$$

(Andreev, 2001).

İspat. (5.15) lineer denklemler sisteminin matrisi bir M-matrisidir. Green fonksiyonunun negatif olmaması buradan ve (5.15) eşitliklerinden elde edilir.

Şimdi üst sınırın bulunması isteniliyor. $\xi_{j0} \in \omega$ noktası

$$\max_{\xi_j \in \omega} G^h(x_i,\xi_j) = G^h(x_i,\xi_{j0}), \qquad x_i \in \omega$$

koşulunu sağlayacak şekilde olsun.

(5.17)'yi $\hbar_j$ ile çarpılıp ve j, 1'den j_0'e toplanılsın. $G^h(x_i,0)=0$ eşitliği göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{j0} L^{h*} G^h(x_i,\xi_j)\hbar_j &= -\varepsilon\, G_{\xi}^h(x_i,\xi_{j0}) + \varepsilon\, G_{\bar{\xi}}^h(x_i,\xi_1) + r_{j0+1}^h\, G^h(x_i,\xi_{j0}) \\ &= \sum_{j=1}^{j0} \delta^h(x_i,\xi_j)\hbar_j\end{aligned} \tag{5.18}$$

eşitliği elde edilir. ξ_{j0}'ın seçiminden dolayı

$$G_{\xi}^h(x_i,\xi_{j0}) = \left[G^h(x_i,\xi_{j0+1}) - G^h(x_i,\xi_{j0})\right] h_{j0+1}^{-1} \leq 0,$$

ve $G^h(x_i,\xi_i)$ negatif olmayan olduğundan bu durumda

$$G_{\bar{\xi}}^h(x_i,\xi_1) = G^h(x_i,\xi_1)\; h_1^{-1} \geq 0$$

(5.18) ifadesindeki ilk iki terimden herhangisi negatif olmadığı görülür ve bundan dolayı

$$r_{j0+1}^h\, G^h(x_i,\xi_{j0}) \leq \sum_{j=1}^{j0} \delta^h(x_i,\xi_j)\, \hbar_j \leq 1$$

ifadesi, istenen değerlendirmeyi sağlar (Andreev, 2001).

Uyarı 5.1. (5.1) denklemi için (5.8) fark şemasıyla birlikte aşağıdaki fark şeması sıklıkla kullanılır:

$$\tilde{L}^h u_i^h := -\varepsilon u_{\bar{x}\hat{x},i}^h - r_{i+1}^h u_{x,i}^h = f_i^h . \tag{5.19}$$

Eğer r_{i+1}^h'ın yerine $r_{i+1}^h \hbar_i / h_{i+1}$ yazılıp bu fark şeması (5.8) biçiminde yazılabilir. (5.19)'dan $\tilde{L}^h$'a adjoint olan operatörün aşağıda verilen operatör olduğu kolayca kontrol edilebilir:

$$\tilde{L}^{h*} v_i^h := -\varepsilon v_{\bar{x}\hat{x},i}^h + (r_{i+1}^h \hbar_i / h_{i+1} v_i^h)_{\bar{x},i}$$

Bu ve Teorem 5.1'in ispatından, (5.19) fark şemasının Green fonksiyonunun

$$\frac{2h_{i+1}}{r_{i+1}^h (h_i + h_{i+1})} \le \frac{2}{r}$$

fonksiyonunu değerlendiren sabit değerle sınırlandığı ortaya çıkar (Andreev, 2001).

Teorem 5.2. *Eğer $r_i^h \ge r > 0$ ise bu takdirde, (5.8) problemin çözümü için*

$$\| u^h \|_{L_\infty^h} \le \frac{1}{r} \| f^h \|_{L_1^h}$$

a priori değerlendirmesi elde edilir (Andreev, 2001).

İspat. İspat**,** (5.16) ve Teorem 5.1'deki çözümün gösteriminden doğrudan ispatlanır (Andreev, 2001).

5.6 Shishkin Şebekesi Üzerinde Kesme Hatası:

u_i^h, (5.8) ayrık (diskret) problemin çözümü ve $u(x_i)$ ϖ şebekesinin düğümlerinde orijinal sürekli problemin çözümünün değerleri olsun. Bu takdirde $z_i = u_i^h - u_i$ çözümün kesinliğidir. (5.8) probleminde $u_i^h = z_i + u_i$ yerine yazılır (5.9)'da göz önüne alınırsa z_i aşağıdaki problemin çözümü olduğu görülür:

$$\begin{aligned} L^h z_i &= f_i^h - L^h u_i = f_i + \varepsilon u_{\bar{x}\hat{x},i} + r_i u_{\hat{x},i} =: \psi_i , \\ z_0 &= z_N = 0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

(5.1)'i kullanarak yeni bir gösterimi

$$\psi_i = \varepsilon (u_{\bar{x}\hat{x},i} - u_i'') + r_i (u_{\hat{x},i} - u_i') \tag{5.21}$$

elde edilir. Şimdi Shishkin şebekesi üzerinde ψ_i kesme hatası değerlendirilsin.

(5.8) problemi için tanımlanmış olan Shishkin şebekesi göz önüne alınsın.

Öncelikli olarak, $i \neq N/2$ için kesme hatası incelensin. Taylor formülü kullanılarak $i < N/2$ için

$$u_{\bar{x}\hat{x},i} \equiv u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$
$$= \frac{1}{h^2}\left(u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u'''(\xi_i) - 2u_i + u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u'''(\eta_i) \right)$$
$$= u_i'' + \frac{h}{6}\left[u'''(\xi_i) - u'''(\eta_i)\right], \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}), \qquad \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

elde edilir. Buradan

$$\left| u_{\bar{x}\hat{x},i} - u_i'' \right| \leq \frac{h}{6}\left(\left| u'''(\xi_i) \right| + \left| u'''(\eta_i) \right| \right), \quad i < N/2. \tag{5.22}$$

Benzer değerlendirme, $i > N/2$ için de

$$\left| u_{\bar{x}\hat{x},i} - u_i'' \right| \leq \frac{H}{6}\left(\left| u'''(\xi_i) \right| + \left| u'''(\eta_i) \right| \right), \qquad i > N/2 \tag{5.23}$$

elde edilir. Yukarıdaki gibi düşünerek,

$$u_{\hat{x},i} - u_i' = u_{x,i} - u_i' = \frac{h}{2}u''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \;\; i > N/2 \tag{5.24}$$

ve

$$u_{\hat{x},i} - u_i' = \frac{H}{2}u''(\xi_i), \quad i > N/2 \tag{5.25}$$

olduğu görülür. Elde edilen bağıntılar, (5.21) ve (5.3), (5.4) değerlendirmelerinden,

$$\begin{aligned} \left| \psi_i \right| &\leq \frac{h\varepsilon}{3}c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^3}e^{-r\varepsilon^{-1}x_{i-1}} \right) + \frac{r_i h}{2}c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e^{-r\varepsilon^{-1}x_i} \right), \\ &\leq c_1\left(h + \frac{h}{\varepsilon^2}e^{-r\varepsilon^{-1}x_{i-1}} \right) \end{aligned} \qquad i > N/2 \tag{5.26}$$

ve

$$\left| \psi_i \right| \leq c_1\left(H + \frac{H}{\varepsilon^2}e^{-r\varepsilon^{-1}x_i} \right), \qquad i > N/2 \tag{5.27}$$

alınır. Sonra $\psi_{N/2}$ değerlendirilsin. Herhangi $\varphi(x) \in C^2\left[x_{i-1}, x_{i+1}\right]$ fonksiyonu için aşağıdaki

$$\varphi_{\bar{x}\hat{x},i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(\eta)\varphi''(\eta)\,d\eta,$$

gösterimi elde edilebileceği kolayca görülebilir, burada

$$g(\eta)=\frac{1}{\hbar_i}\begin{cases}(\eta-x_{i-1})/h_i\,, & x\le x_i\,,\\ (x_{i+1}-\eta)/h_{i+1}\,, & x\ge x_i\,,\end{cases}\qquad \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(\eta)\,d\eta=1\,.$$

Ortalama Değer Teoremi kullanılarak,

$$\varphi_{\bar{x}\hat{x},i}=\varphi''(\lambda_i)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(\eta)\;d\eta=\varphi''(\lambda_i),\qquad \lambda_i\in[\,x_{i-1}\,,x_{i+1}\,]$$

elde edilir. Lagrange formülü kullanılarak,

$$\varphi_{\hat{x},i}=\frac{h_{i+1}}{\hbar_i}\varphi_{x.i}\;=\;\frac{h_{i+1}}{\hbar_i}\,\varphi'(\xi_i)$$

bulunur. Son iki bağıntıyı

$$\psi_{N/2}=\varepsilon\big(u''(\lambda_i)-u''(x_{N/2})\big)+r_{N/2}\left(\frac{h_{N/2+1}}{\hbar_{N/2}}u'(\xi_{N/2})-u'(x_{N/2})\right)\tag{5.28}$$

olarak (5.21)'i tekrar yazmak mümkündür. Şimdi, (5.3) değerlendirmeleri kullanılarak,

$$\left|\psi_{N/2}\right|\le c\left[1+\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{r\,x_{N/2-1}}{\varepsilon}\right)\right]\tag{5.29}$$

elde edilir.

ψ_i'nin tüm yerel değerlendirmeleri elde edilir fakat $i=N/2+1$ için (5.29) değerlendirmesi ve (5.27) değerlendirmesi küçük ε ise, amaç için oldukça kabadır. Bu değerlendirmeler daha kesin yapılacak. Bunun için (5.1) probleminin çözümünün (5.3), (5.4) *a priori* değerlendirmelerinin yerine (5.5) ayrışımı ve (5.6) değerlendirmeleri kullanılır. (5.20), (5.5), (5.7) ve (5.21)'den

$$\psi_{N/2}=f^h_{N/2}-L^h\,U_{N/2}-L^h\,V_{N/2}=:\psi_{1,N/2}+\psi_{2,N/2}$$

eşitliği çıkar. Burada (5.9) dikkate alınarak,

$$\psi_{1,N/2}=f_{N/2}-L^h\,U_{N/2}=\varepsilon\big(U_{\bar{x}\hat{x}}-U''_{N/2}\big)+r_{N/2}\big(U_{\hat{x},N/2}-U'_{N/2}\big),\tag{5.30}$$

$$\psi_{2,N/2}=-\,L^h\,V_{N/2}=\varepsilon V_{\bar{x}\hat{x}}+r_{N/2}\,V_{\hat{x},N/2}\,.\tag{5.31}$$

$u(x)$'in yerine $U(x)$ var olmak üzere, $\psi_{1,N/2}$ için (5.28) gösterimine sahip olunur. (5.6)'nin ilk değerlendirmesi kullanılarak

$$\left|\psi_{N/2}\right|\le c\tag{5.32}$$

elde edilir.

$\psi_{2,N/2}$'yi değerlendirmek için, önce (5.31)'yi

$$\psi_{2,N/2}=\frac{1}{\hbar_{N/2}}\left[\varepsilon\left(V_x-V_{\bar{x}}\right)_{N/2}+r_{N/2}\left(V_{N/2+1}-V_{N/2}\right)\right]$$

biçiminde tekrar yazılıp ve sonra Lagrange formülü kullanılırsa

$$\psi_{2,N/2} = \frac{1}{\hbar_{N/2}}\left[\varepsilon\left(V'(\xi_{N/2})-V'(\xi_{N/2-1})\right)+ r_{N/2}\left(V_{N/2+1}-V_{N/2}\right)\right]$$

alınır. Şimdi (5.6)'nin ikinci değerlendirmesi kullanılarak

$$\left|\psi_{2,N/2}\right| \le c\,\hbar_{N/2}^{-1}\,\exp\left(-\frac{r\,x_{N/2-1}}{\varepsilon}\right)$$

olduğu görülür. Bu değerlendirme ve (5.32)'den,

$$\left|\psi_{N/2}\right| \le c\left(1+\hbar_{N/2}^{-1}\,\exp\left(-\frac{rx_{N/2-1}}{\varepsilon}\right)\right) \tag{5.33}$$

elde edilir.

Benzer düşünce kullanılarak aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\left|\psi_{N/2+1}\right| \le c\left(1+H^{-1}\,\exp\left(-\frac{rx_{N/2}}{\varepsilon}\right)\right). \tag{5.34}$$

(5.29) ve (5.33) değerlendirmeleri birleştirilerek,

$$\begin{aligned}\left|\psi_{N/2}\right| &\le c\left[1+\min\left\{\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\hbar_{N/2}}\right\}\exp\left(-\frac{r\,x_{N/2-1}}{\varepsilon}\right)\right]\\ &\le c\left[1+\frac{2}{\varepsilon+\hbar_{N/2}}\exp\left(-\frac{r\,x_{N/2-1}}{\varepsilon}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.35}$$

elde edilir. (5.27) ve (5.34)'den

$$\begin{aligned}\left|\psi_{N/2+1}\right| &\le c\left[1+\min\left\{\frac{1}{\varepsilon^2},\frac{1}{H}\right\}\exp\left(-\frac{r\,x_{N/2}}{\varepsilon}\right)\right]\\ &\le c\left[1+\frac{2}{\varepsilon^2+H^2}\exp\left(-\frac{r\,x_{N/2}}{\varepsilon}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.36}$$

eşitsizliği çıkar. Bu, ψ_i'nin yerel değerlendirmelerini tamamlar (Andreev, 2001).

5.7 Yakınsaklık:

(5.20) ve Teorem 5.2'den, ψ_i kesme hatasına göre çözümünün z_i doğruluğu için aşağıdaki *a priori* değerlendirmesine sahip olunur:

$$\| z \|_{L_\infty^h} \le r^{-1} \| \psi \|_{L_1^h} .$$

Geriye ψ_i'nin L_1^h - normunu değerlendirmek kalır. (5.26), (5.27), (5.33) ve (5.34) kullanılarak,

$$\| \psi \|_{L_1^h} = \sum_{i=1}^{N/2-1} |\psi_i| h + |\psi_{N/2}| \hbar_{N/2} + |\psi_{N/2+1}| H + \sum_{i=N/2+2}^{N-1} |\psi_i| H$$

$$\le c \left(\sum_{i=1}^{N/2-1} h^2 + \hbar_{N/2} + H + \sum_{i=N/2+2}^{N-1} H^2 \right) +$$

$$+ c \left\{ \frac{h^2}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left[-r\varepsilon^{-1}(i-1)\right] + \frac{2(H+h)}{2\varepsilon + H + h} \exp\left(-r\varepsilon^{-1} x_{N/2-1}\right) + \right.$$

$$+ \frac{2H^2}{\varepsilon^2 + H^2} \exp(-r\varepsilon^{-1} x_{N/2}) +$$

$$\left. + \frac{H^2}{\varepsilon^2} \exp(-r\varepsilon^{-1} x_{N/2+1}) \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-r\varepsilon^{-1} H_j) \right\}$$

$$\le c \left[N^{-1} + \sum_{k=1}^{4} S_k \right] \tag{5.37}$$

elde edilir. S_k değerlerinin her biri ayrı ayrı değerlendirilir. Her $t>0$ için $1-e^{-t} \ge t e^{-t}$ olduğundan,

$$S_1 := (h/\varepsilon)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left[-r\varepsilon^{-1} h(i-1)\right] = \frac{(h/\varepsilon)^2}{1-e^{-rh/\varepsilon}} \le \frac{h}{r\varepsilon} e^{rh/\varepsilon} .$$

Fakat (3.1) ile

$$\frac{h}{\varepsilon} = \frac{2\sigma}{N\varepsilon} = \begin{cases} 2(\ln N)/(Nr), & \varepsilon r^{-1} \ln N \le 1/2, \\ 1/N \le c(\ln N)/N, & \varepsilon r^{-1} \ln N \ge 1/2, \end{cases}$$

ve bundan dolayı

$$S_1 = O(N^{-1} \ln N). \tag{5.38}$$

Ayrıca,

$$S_4 := \left(\frac{H}{\varepsilon}\right)^2 \exp(-r\varepsilon^{-1} x_{N/2+1}) \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-r\varepsilon^{-1} H_j)$$

$$= \left(\frac{H}{\varepsilon}\right)^2 \frac{e^{-rH/\varepsilon}}{1-e^{-rH/\varepsilon}} \exp(-r\varepsilon^{-1} x_{N/2}) \le$$

$$= \le \begin{cases} N^{-1}/r^2 \ \max\limits_{t} \dfrac{t^2 e^{-t}}{1-e^{-t}}, & \varepsilon r^{-1} \ln N \le 1/2, \\ 2r^{-2} N^{-1} \ln N \ \max\limits_{t \succ 0} \dfrac{t e^{-t}}{1-e^{-t}} \, e^{-r/(2\varepsilon)}, & \varepsilon r^{-1} \ln N \ge 1/2. \end{cases}$$

Buradan

$$S_4 = O(N^{-1} \ln N) \tag{5.39}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$S_2 + S_3 \le 2 \begin{cases} \left(\dfrac{H+h}{2\varepsilon + H + h} + \dfrac{H^2}{\varepsilon^2 + H^2} \right) N^{-1} \exp(N^{-1} \ln N), & \varepsilon r^{-1} \ln N \le 1/2, \\ \dfrac{2 \ln N}{r N} \left(1 + \dfrac{2 \ln N}{r N} \right) \exp(-r\varepsilon^{-1} (1/2 - 1/N)), & \varepsilon r^{-1} \ln N \ge 1/2 \end{cases}$$

ve ayrıca

$$S_2 + S_3 = O(N^{-1} \ln N). \tag{5.40}$$

(5.37)-(5.40) den

$$\|\psi\|_{L_\infty^h} = O(N^{-1}) \ln N$$

eşitliği ortaya çıkar. Bununla da ispatlanmış olunur (Andreev, 2001).

Teorem 5.3. *$u(x)$, (5.1)-(5.2) problemin çözümü ve u^h, (5.8),(5.9), (3.1) ayrık (diskret) probleminin çözümü olsun. Bu takdirde $\left\| u_i^h - u(x_i) \right\|_{L_\infty^h} = O(N^{-1} \ln N)$ ε'e göre düzgündür* (Andreev, 2001).

Uyarı 5.2. (5.8) ile birlikte, Shishkin şebekesi üzerinde (5.1) diferansiyel denklemini diskretize için hybrid şema denen şemada kullanılabilir (Linss ve Stynes, 1999). Bu şemada, (3.1) şebekesinin ince kısmı üzerinde $r(x)u'(x)$'in diskretizasyonu için $r_i u_{x,i}^h$ yerine $r_i u_{\overset{\circ}{x},i}^h$ kullanılır. Bulunan şemanın (5.8)'e karşı gelmesi için onun yeni denklemleri aşağıdaki gibi yazılmalıdır

$$\tilde{\tilde{L}}^h u_i^h := -\varepsilon\left(\left(1-\frac{r_i h}{2\varepsilon}\right)u_{\bar{x}}^h\right)_{x,i} - \frac{r_i + r_{i+1}}{2} u_{x,i}^h = f_i^h, \qquad i = 1,\ldots,N/2-1,$$

ve $x_{N/2}$ düğümündeki denklem $\left(1 - r_{N/2}h/(2\varepsilon)\right)$ ile çarpılmalıdır ve

$$\begin{aligned} &= -\varepsilon\frac{u_{x,N/2}^h - \left(1 - r_{N/2}h/(2\varepsilon)\right)u_{\bar{x},N/2}^h}{\hbar_{N/2}} - r_{N/2}\left(1-\frac{r_{N/2}h}{2\varepsilon}-\frac{h}{2H}\right)u_{\bar{x},N/2}^h \\ &= f_{N/2}\left(1-\frac{r_{N/2}h}{2\varepsilon}\right) \end{aligned} \tag{5.41}$$

biçimine dönüştürülmelidir. (3.1) Shishkin şebekesi üzerinde $h/(2\varepsilon) = (\ln N)/(rN)$ ve $h/H = \sigma/(1-\sigma) \leq 1$ olduğundan, bu durumda, örneğin

$$1-\frac{r_i \ln N}{rN}-\frac{\sigma}{2(1-\sigma)} \geq \frac{1}{2} - \frac{R\ln N}{rN} \geq \frac{1}{4}, \qquad R = \max_{i=1,\ldots,N/2} r_i,$$

ise bu takdirde Teorem 5.1 ve 5.2 geçerlidir ve şemanın doğruluğu $O(N^{-1})$ şeklinde artar. Önceki (5.41) denklemini yenisiyle yer değiştirilirse aynı sonuç

$$-\varepsilon\frac{u_{x,N/2}^h - \left(1 - r_{N/2}h/(2\varepsilon)\right)u_{\bar{x},N/2}^h}{\hbar_{N/2}} - r_{N/2}\, u_{\bar{x},N/2}^h = f_{N/2}$$

elde edilir (Andreev, 2001).

6. SİNGÜLLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN FARK GREEN FONKSİYONU

$[0,1]$ aralığında, $\varepsilon \in (0,1]$ küçük bir parametre ve L operatörü H Hilbert uzayında self adjoint ve pozitif tanımlı bir operatör olmak üzere

$$Lu := -\varepsilon^2 \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx} \right) + q(x)u(x) = f(x), \qquad 0<x<1, \tag{6.1}$$

$$u(0)=u(1)=0$$

sınır değer problemi ele alınsın. (6.1) denkleminin katsayılarının

$$P \geq p(x) \geq p > 0\,,\ Q \geq q(x) \geq q > 0 \tag{6.2}$$

şartları sağlandığı kabul edilsin. $[0,1]$ aralığında, düzgün olmayan bir keyfi şebeke

$$\overline{\omega} = \{x_i | 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1\}, \qquad \omega = \overline{\omega} \setminus \{0,1\},$$

tanıtılsın ve şebeke adımı olarak

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1,\ldots,N,$$

bağıntısına ve ortalama adım olarak

$$\hbar_i = (h_i + h_{i+1})/2, \qquad i = 1,\ldots,N-1,$$

ifadesine başvurulsun. $\overline{\omega}$ şebekesi üzerinde tanımlanmış $\upsilon(x_i)=\upsilon_i$ fonksiyonları için

$$(\upsilon_i - \upsilon_{i-1})/h_i = \upsilon_{\bar{x},i}, \qquad (\upsilon_{i+1} - \upsilon_i)/h_{i+1} = \upsilon_{x,i}, \qquad (\upsilon_{i+1} - \upsilon_i)/\hbar_i = \upsilon_{\hat{x},i}$$

fark türevleri belirtilsin. Normlar ve yarı normlar $\upsilon_0 = \upsilon_N = 0$ biçimindeki υ_i fonksiyonları için tanımlansın:

$$\begin{aligned}
&\|\upsilon\|_1 := \|\upsilon\|_{L_1^h} := \sum_{i=1}^{N-1} |\upsilon_i| \hbar_i, \quad \|\upsilon\|_{1,1} := \|\upsilon\|_{\overset{\circ}{W}{}_{1,1}^{h}} := \sum_{i=1}^{N} |\upsilon_{\bar{x},i}| h_i, \\
&\|\upsilon\|_\infty := \|\upsilon\|_{L_\infty^h} := \max_{x_i \in \omega} |\upsilon_i|, \quad \|\upsilon\|_{1,\infty} := |\upsilon|_{W_{1,\infty}^h} := \max_{i=1,\ldots,N} |\upsilon_{\bar{x},i}|, \\
&\|\upsilon\|_{1,\infty;\varepsilon^2} := \|\upsilon\|_W := \varepsilon^2 |\upsilon|_{1,\infty} + \|\upsilon\|_{-1,\infty}, \\
&\|\upsilon\|_{-1,\infty} := \|\upsilon\|_{W_{-1,\infty}^h} := \min_C \max_{x_i \in \omega} \left| \sum_{j=i}^{N-1} \upsilon_j \hbar_j - C_a \right|.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$W_{-1,\infty}^h$ uzayı, olağan anlamda $\overset{\circ}{W}{}_{1,1}^{h}$ 'nın dual uzayıdır (Andreev, 2001; Kopteva, 2001).

$\overline{\omega}$ şebekesi üzerinde (6.1) problemine

$$L^h u_i^h := L^h(p^h, q^h)u_i^h := -\varepsilon^2 (p^h u_{\bar{x}}^h)_{\hat{x},i} + q_i^h u_i^h = f_i^h, \quad x_i \in \omega, \qquad (6.4)$$
$$u_0^h = u_N^h = 0,$$

fark şemasıyla yaklaşalım, burada

$$p_i^h := p(x_i - h_i/2), \quad q_i^h := q(x_i), \quad f_i^h := f(x_i). \qquad (6.5)$$

(Şimdilerde Bakhvalov şebekesi olarak atfedilen) özel bir şebeke tanıtılmıştır (Andreev, 2004); bu şebeke üzerinde belirli bir (6.4), (6.5) probleminin çözümünün ε'a göre düzgün olarak ve şebeke düğümlerine göre $O(N^{-2})$ oranında (6.1) problemin çözümüne yakınsadığı burada ispatlandı. Bakhvalov şebekesi sınır katlarının dışında düzgün ve birbirini izleyen artışların farkının kendi artışlarından daha yüksek mertebeden son derece daha az olduğu belirli bir kurala göre aralığın uç noktalarına doğru (sınır katlarında) yoğunlaşır. Daha sonra, Bakhvalov şebekesinin singüler pertürbe özellikli konveksiyon-difüzyon denklemleri için de kullanılabildiği gösterilmiştir (Liseikin ve Yanenko, 1981; Andreev, 1998). Ayrıca, konveksiyon-difüzyon denklemi için ikinci mertebe fark şeması durumunda, Bakhvalov şebekesinin yaklaşım hızını belirtmeksizin aşağıdaki gibi genelleştirilebileceği ispatlanmıştır (Liseikin ve Yanenko, 1981): ardışık adımların yakın olduğu varsayımı ihmal edilebilir; yani sınır katı dışında, sadece $h_i = O(N^{-1})$ sınırlaması ile keyfi düzgün olmayan şebeke ele alınır. Bu çalışmanın amacı, reaksiyon-difüzyon denklemine ait bu sonucu genelleştirmektir.

(6.1) probleminin regüler ($\varepsilon = 1$) durumu için $O(N^{-2})$ oranında düzgün olmayan bir keyfi şebekede (6.4), (6.5) fark şemasının yakınsaklığı ilk defa Tikhonov ve Samarskii (1961)'de fark Green fonksiyonunun kullanılmasıyla elde edilen sağ taraftaki zayıf $W_{-1,1}^h$-normu vasıtasıyla çözümün L_∞^h-normu için hata değerlendirmesindeki tekniğin esası üzerine ispatlanmıştır (Tikhonov ve Samarskii, 1962). Bir "negatif" normun (bir norm $W_{-1,1}^h$-normuna denktir) gerçekte bazı fark şemaları teorisini tanıttığı ayrıca zikredilsin (Tikhonov ve Samarskii, 1961).

Çalışma boyunca c ile ε *ve* N'den bağımsız değişik sabitler gösterilecek (Andreev, 2004).

6.1 Green Fonksiyonunun Değerlendirilmesi

(6.4) problemin Green fonksiyonunu her $\xi_j \in \omega$ için

$$L^h G^h(x_i,\xi_j) = \delta^h(x_i,\xi_j), \quad x_i \in \omega, \qquad G^h(0,\xi_j) = G^h(1,\xi_j) = 0 \qquad (6.6)$$

alınarak tanıtılsın. Samarskii (2001)'e göre, Green fonksiyonu simetriktir, yani $G^h(x_i,\xi_j) = G^h(\xi_j,x_i)$ ve (6.4) probleminin çözümü için

$$u_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G^h(x_i,\xi_j) f_j^h \hbar_j \qquad (6.7)$$

gösterimi kabul edilsin (Andreev, 2004).

Lemma 6.1. *(6.7)'deki ilk iki şart sağlanırsa, bu durumda, (6.4)-(6.5) probleminin fark* $G^h(x_i,\xi_j)$ *Green fonksiyonu*

$$0 \le G^h(x_i,\xi_j) \le \frac{1}{\sqrt{pq}\,\varepsilon}, \quad \sum_{j=1}^{N} \left| G^h_{\bar{\xi}}(x_i,\xi_j) \right| h_j \le \frac{2}{\sqrt{pq}\,\varepsilon}, \quad \sum_{j=1}^{N} \left| G^h_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_i,\xi_j) \right| h_j \le \frac{2}{\varepsilon^2 p}$$

değerlendirmesini sağlar (Andreev, 2004).

İspat. Farklı sabitli birinci değerlendirmesi yapılmıştır (Savin, 1995). Lemmanın iddiasını kanıtlamak için ilgili argüman hatırlanmalı ve sabit en iyi hale getirilmelidir. Ayrıca, Andreev (2001)'deki Lemma 1.3,

$$\sum_{j=1}^{N} \left| G^h_{\bar{\xi}}(x_i,\xi_j) \right| h_j = 2G^h(x_i,\, x_i)$$

bağıntısını sağlar ve ikinci değerlendirme birinciden çıkar. Üçüncü değerlendirmenin ispatı Andreev (2001)'de Lemma 5'teki bazı sadeleştirmelerle gösterilir. Böylelikle Lemmanın ispatı tamamlanır (Andreev, 2004).

Uyarı 6.1. Daha az sınırlayıcı $[q(x) \ge 0]$ koşulları altında, Tikhonov ve Samarskii (1961)'de $G^h(x_i,\xi_j) \le 1/(p\varepsilon^2)$ ve $\left| G^h_{\bar{\xi}}(x_i,\xi_j) \right| \le 2/(p\varepsilon^2)$ olduğu ispatlanmıştır (Andreev, 2004).

Lemma 6.2. $\upsilon_0 = 0$ *ve* $\upsilon_N = 0$ *olacak biçimde* $\bar{\omega}$ *şebekesinde tanımlı her* υ_i *şebeke fonksiyonu, her* $\mu > 0$ *için* $\|\upsilon\|_\infty \le 2\left(\mu |\upsilon|_{1,\infty} + \mu^{-1} \|\upsilon\|_{-1,\infty}\right)$ *eşitsizliğini sağlar* (Andreev, 2004).

İspat. $\overset{\circ}{G}{}^h(x_i,\xi_j)$, $\varepsilon = \mu$ ile $L^h(1,1)$ operatörünün (6.6) fark Green fonksiyonu olsun. Bu durumda (6.7) ile

$$\upsilon_i = \sum_{j=1}^{N-1} \overset{\circ}{G}{}^h (x_i, \xi_j)\,(-\mu^2\, \upsilon_{\bar{\xi}\bar{\xi}} + \upsilon)_j\, \hbar_j \tag{6.8}$$

olur. C_a keyfi bir sabit olmak üzere

$$-V_{\bar{\xi},j} = \upsilon_j, \qquad j = 1,\ldots,N-1, \qquad V_N = -C_a, \tag{6.9}$$

alarak bir V_j fonksiyonu tanımlayalım.

$$V_j := S_j(\upsilon, C_a) = \sum_{l=j}^{N-1} \upsilon_l\, \hbar_l - C_a \tag{6.10}$$

olduğu kolayca görülebilir. (6.10) 'in, $\upsilon(\xi)$'nin $V(\xi)$ ters türevine karşı gelen şebeke olduğu not edilebilir. Bu bağıntı değişik υ_j fonksiyonları için sık sık kullanılacaktır.

(6.8)'de sağ tarafındaki ikinci terim için (6.9) gösterimi yerine yazılıp ve Samarskii and Andreev (1976)'daki (10) formülü vasıtasıyla, toplamın kullanıldığı sonuç ifadesi dönüştürülsün. $\overset{\circ}{G}{}^h$ için sınır şartları göz önüne alınırsa

$$\upsilon_i = -\sum_{j=1}^{N-1} \overset{\circ}{G}{}^h (x_i, \xi_j)\,(\mu^2\, \upsilon_{\bar{\xi}} + \upsilon)_{\bar{\xi},j}\, \hbar_j = \sum_{j=1}^{N} \overset{\circ}{G}{}^h_{\bar{\xi}} (x_i, \xi_j)\,(\mu^2\, \upsilon_{\bar{\xi}} + V)_j\, \hbar_j \tag{6.11}$$

elde edilir. Bu, Lemma 6.1 ve (6.10) ile birlikte istenen değerlendirmeyi sağlar ve Lemmanın ispatını tamamlar (Andreev, 2004).

6.2 *A Priori* Değerlendirmeler

(6.4) problemin çözümünün istenen *a priori* değerlendirmeleri elde etmek için Green fonksiyonu değerlendirmeleri kullanılmıştır (Andreev, 2004).

Teorem 6.1. *(6.2) şartları ve*

$$\sum_{i=1}^{N} \left| q^h_{\bar{x},i} \right| h_i \le Q', \qquad \sum_{i=1}^{N} \left| \left(\frac{1}{q^h} \right)_{\bar{x},i} \right| h_i \le Q'', \tag{6.12}$$

şartları sağlanırsa, bu takdirde (6.4), (6.5) problemin çözümü iki taraflı

$$c_1 \left\| f^h \right\|_{-1,\infty} \le \left\| u^h \right\|_{1,\infty;\varepsilon^2} \le c_2 \left\| f^h \right\|_{-1,\infty}, \tag{6.13}$$

değerlendirmelerini sağlar, burada:

$$c_1 = \left(Q + Q' + 2P \right)^{-1}, \qquad c_2 = \left(1 + 2P/p\right) Q'' + \left(1 + 4P/p\right)/q \tag{6.14}$$

(Andreev, 2004).

İspat. $\mu = 0$ ile (6.7), (6.9), (6.10) ve (6.11) göz önüne alındığında

$$u_i^h = \sum_{j=1}^{N} G_{\xi}^h (x_i, \xi_j) \left[\sum_{l=j}^{N-1} f_l^h \hbar_l - C_a \right] h_j$$

elde edilir. Buradan $u_{\bar{x},i}^h$ 'i bulup ve Lemma 6.1'i kullanılırsa:

$$\varepsilon^2 \left| u^h \right|_{1,\infty} \le (2/p) \left\| f^h \right\|_{-1,\infty} \tag{6.15}$$

sonuç olarak alınır.

Dahası $\hbar_i / q_i^h$ ile (6.4) denklemi çarpılıp ve i, k'dan $N-1$'e göre sonuç bağıntısı birleştirilirse:

$$\sum_{i=k}^{N-1} u_i^h \hbar_i = \sum_{i=k}^{N-2} \frac{f_i^h}{q_i^h} \hbar_i + \frac{f_{N-1}^h}{q_{N-1}^h} \hbar_{N-1} + \varepsilon^2 \sum_{i=k}^{N-1} \left(p^h u_{\bar{x}}^h \right)_{\bar{x},i} \frac{1}{q_i^h} \hbar_i \tag{6.16}$$

eşitliği elde edilir. (6.9) ve (6.10)'de υ_1 ile f_1^h yerine $F_j^h = S(f^h, C_a)$ yazılıp ve (6.16)'de sağ taraftaki ilk ifadeyi dönüştürmek için (6.9) bağıntısı kullanılsın. Samarskii ve Andreev (1976)'da (8) kısmi formül toplamı kullanılarak ve $F_{N-1}^h = F_N^h + f_{N-1}^h \hbar_{N-1}$ bağıntısı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{N-2} \frac{f_i^h}{q_i^h} \hbar_i + \left(\frac{f^h \hbar}{q^h} \right)_{N-1} &= -\sum_{i=k}^{N-2} F_{x,i}^h \frac{1}{q_i^h} h_{i+1} + \left(\frac{f^h \hbar}{q^h} \right)_{N-1} \\ &= \sum_{i=k+1}^{N-1} \left(\frac{1}{q^h} \right)_{\bar{x},i} F_i^h h_i - \frac{F_N^h}{q_{N-1}^h} + \frac{F_k^h}{q_k^h} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bunu (6.16)'de yerine koyup ve aynı anda Samarskii ve Andreev (1976)'da (11) kısmi formül toplamının kullanılmasıyla (6.16)'in sağ tarafındaki en son toplamı dönüştürülsün. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{N-1} u_i^h \hbar_i + \frac{F_N^h}{q_{N-1}^h} &= \sum_{i=k+1}^{N-1} \left(\frac{1}{q^h} \right)_{\bar{x},i} F_i^h h_i + \frac{F_k^h}{q_k^h} - \\ &\quad - \varepsilon^2 \left[\sum_{i=k}^{N-1} p_i^h u_{\bar{x},i}^h \left(\frac{1}{q^h} \right)_{\bar{x},i} h_i - \frac{p_N^h}{q_{N-1}^h} u_{\bar{x},N}^h + \frac{p_k^h}{q_{k-1}^h} u_{\bar{x},k}^h \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu özdeşliğin her iki tarafının tam değeri alınıp ve (6.3), (6.5), (6.2) ve (6.12)'e göre değerlendirmeler yapılsın. Bu takdirde

$$\left\| u^h \right\|_{-1,\infty} \le \left(\frac{1}{q} + Q'' \right) \max_{x_i \in \varpi} \left| F_i \right| + \varepsilon^2 P \left(\frac{2}{q} + Q'' \right) \left| u^h \right|_{1,\infty}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu, (6.13)'deki sağ değerlendirme (6.10) (υ_1 yerine f_1^h yazılmasıyla), (6.3) ve (6.15) ile birlikte ifade edilir.

Benzer bir yolda sol değerlendirme ispatlanabilir: $W^h_{-1,\infty}$'de u^h değerlendirmeye alınmış ve benzer normda f^h değerlendirmesi yapılır. Böylelikle teoremin ispatı tamamlanmış olur (Andreev, 2004).

Teorem 6.2. *Eğer (6.2) ve (6.12) şartları sağlıyor ise bu takdirde (6.4), (6.5) problemin çözümü için a priori değerlendirme*

$$\| u^h \|_\infty \leq 2c_2\, \varepsilon^{-1} \| f^h \|_{-1,\infty}$$

şeklindedir ve burada c_2 *(6.14) ile verilmiştir* (Andreev, 2004).

İspat. Teorem 6.1 ve Lemma 6.2'den istenen kolayca çıkar.
Teorem 6.2 ile verilen *a priori* değerlendirme düzgün olmayan bir şebekede yakınsama oranının değerlendirmesinde açıktır. Ancak, Samarskii (2001)'de çok iyi bilinen değerlendirmeye ihtiyaç vardır (Andreev, 2004).

Teorem 6.3. *(6.2) şartı altında (6.4), (6.5) problemin çözümünün a priori değerlendirmesi* $\| u^h \|_\infty \leq q^{-1} \| f^h \|_\infty$ *şeklindedir* (Andreev, 2004).

6.3 Kesme Hatasının Değerlendirmesi

(6.4), (6.5) şemasının hata çözümü $z_i = u_i^h - u(x_i)$ olsun, burada $u(x)$, (6.1) problemin tam bir çözümüdür. Bu takdirde

$$L^h z_i = \psi_i, \qquad x_i \in \omega, \qquad z_0 = z_N = 0, \tag{6.17}$$

ki burada kesme hatası

$$\psi_i := \psi_i(u) := f_i^h - L^h u(x_i) = f_i + \varepsilon^2 (p^h u_{\bar{x}})_{\hat{x},i} - q_i u_i \tag{6.18}$$

şeklinde verilmiştir.

$\varepsilon \to 0$ için (6.1) probleminin çözümüne dair Shishkin (1983)'deki sonuçlara ihtiyaç var (Andreev, 2004).

Lemma 6.3. *(5.2) şartları altında ve* $p'(x), q(x), f(x) \in C^l[0,1]$ *ise bu takdirde (6.1) problemin* $u(x)$ *çözümü*

$$u(x) = U(x) + V(x), \tag{6.19}$$

formunda gösterilebilir ki burada

$$LU(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad LV(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{6.20}$$

ve ayrıca

$$\left| U^{(k)}(x) \right| \le c, \qquad x \in [0,1], \qquad k = 0,\ldots,l, \tag{6.21}$$

$$\left| V^{(k)}(x) \right| \le c\,\varepsilon^{-k} \left[e^{-\gamma x/\varepsilon} + e^{-\gamma(1-x)/\varepsilon} \right], \quad x \in [0,1], \qquad k = 0,\ldots,l, \tag{6.22}$$

ve $\gamma \in \left(0, \sqrt{q/P}\right)$ *keyfidir.*

(6.18) de ψ_i kesme hatası analiz edilsin (Andreev, 2004).

Teorem 6.4. *(6.1) denkleminin katsayılarının (6.2) şartlarını ve* $l = 4$ *için Lemma 6.3'in varsayımlarını sağladığını kabul edelim. Eğer belli* $\kappa \ge 1$ *için* ω *şebeke artışları*

$$\kappa^{-1} \le h_i / h_{i+1} \le \kappa, \qquad i = 1,\ldots,N-1, \tag{6.23}$$

eşitsizliklerini sağlarsa, bu takdirde

$$\|\psi\|_{-1,\infty} \le \frac{c\varepsilon}{\gamma - \gamma'} \left\{ \max_{i=1,\ldots,N} h_i^2 + \max_i \left(\min\left[(h_i/\varepsilon)^2, 1 \right] \exp\left(-\frac{\gamma' x_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right) \right.$$
$$\left. + \max_i \left(\min\left[(h_i/\varepsilon)^2, 1 \right] \exp\left(-\frac{\gamma'(1 - x_{i+1})}{\varepsilon} \right) \right) \right\}, \tag{6.24}$$

olur ki burada γ *ve* γ'

$$0 < \gamma' < \gamma < \sqrt{q/P} \tag{6.25}$$

eşitsizliğiyle bağlantılı keyfi sayılardır (Andreev, 2004).

İspat. (6.18)'de $\psi_i(u)$ kesme hatası gösterimi için çözümün (6.19) parçalanması aşağıdaki formda kullanılsın

$$\psi_i(u) = \psi_i(U) + \psi_i(V) \tag{6.26}$$

ve bu takdirde $\|\psi(U)\|_{-1,\infty}$ ve $\|\psi(V)\|_{-1,\infty}$'i ayrı ayrı değerlendirilsin. (6.21)'e dayanarak $\psi(U)$ bileşeni kesme hatası $(\varepsilon = 1)$ regüler durumunda ψ tam kesme hatasından farksızdır; Tikhonov ve Samarskii (1961)'den

$$\|\psi(U)\|_{-1,\infty} \le c\varepsilon^2 \max_{i=1,\ldots,N} h_i^2 \tag{6.27}$$

değerlendirmesi elde edilir.

$\| \psi(V) \|_{-1,\infty}$ değerlendirmesi, $\psi(V)$ kesme hatasının (6.18) gösterimi (u 'nun yerine V yazılmasıyla)'nün bir dönüşümüdür. (6.18)'in sağ tarafına

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} LV(x)dx = 0$$

ifadesi eklenip ifadeler yeniden düzenlensin. V için (6.20) denklemi homojen olduğundan

$$\psi_i(V) = \eta_{\bar{x},i} + \overset{\circ}{\psi}_i(qV), \qquad x_i \in \omega, \tag{6.28}$$

eşitliği elde edilir. Burada ki bilinmeyen parametrele

$$\overset{\circ}{\psi}_i(\upsilon) = -\left[\upsilon_i - \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \upsilon(x)dx \right] \qquad \text{ve} \qquad \eta_i := \eta_i(V) = \varepsilon^2 p(x_{i-1/2})\left(V_{\bar{x},i} - V'(x_{i-1/2})\right) \tag{6.29}$$

ifadelerine eşittir. (6.28)'in sağ tarafındaki ilk ifade $W_{-1,\infty}^h$ [bkz (6.3)]'in normunda değerlendirmek için çok uygundur, ilaveten ikinci ifadede dönüştürülmelidir.

$$\overset{\circ}{\Psi}_i(\upsilon) := S_i\left(\overset{\circ}{\psi}_i(\upsilon), 0\right),$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Psi}_i(\upsilon) = \sum_{l=i+1}^{N-1} \left[\int_{x_{l-1}}^{x_l} \upsilon(x)dx - \frac{\upsilon_{l-1} + \upsilon_l}{2} h_l \right] + \left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \upsilon(x)dx - \frac{\upsilon_i h_i}{2} \right] \\ + \left[\int_{x_{N-1}}^{x_{N-1/2}} \upsilon(x)dx - \frac{\upsilon_{N-1} h_N}{2} \right] \end{aligned} \tag{6.30}$$

olarak alınsın (bkz (6.10)). Bu takdirde (6.28) ile [bkz (6.9)] bağıntısından $\psi_i(V) = \left(\eta(V) - \overset{\circ}{\Psi}(qV) \right)_{\bar{x},i}$ formu elde edilir. Bu, (6.3) ile birlikte

$$\| \psi(V) \|_{-1,\infty} \le \max_{i=1,\ldots,N} |\eta_i(V)| + \max_{i=1,\ldots,N-1} \left| \overset{\circ}{\Psi}(qV) \right|, \tag{6.31}$$

ifadesi ve $\eta_i(V)$ ve $\overset{\circ}{\Psi}_i(qV)$ değerlendirmesinden biridir.

Bu değerlendirmelerle ilerlenecektir.

$$\eta_i(V) = \varepsilon^2 h_i^2 p_{i-1/2} V'''(\xi_i)/24, \; \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

bağıntısındaki sonuçlar (6.29) için Taylor formülünün (6.22) ile birlikte uygulanmasıyla

$$|\eta_i(V)| \le c\varepsilon (h_i/\varepsilon)^2 \left(e^{-\gamma x_{i-1}/\varepsilon} + e^{-\gamma(1-x_i)/\varepsilon} \right) \tag{6.32}$$

değerlendirmesi elde edilir. Diğer yandan, (6.22) ile birlikte $\eta_i(V)=\varepsilon^2 p_{i-1/2}\left(V'(\zeta_i)-V'_{i-1/2}\right),\ \zeta_i\in(x_{i-1},x_i)$ formu (6.29)'e Lagrange formülünü uyguladıktan sonra

$$\left|\eta_i(V)\right|\le c\varepsilon\left(e^{-\gamma x_{i-1}/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x_i)/\varepsilon}\right)$$

ifadesi elde edilir. Bu değerlendirmeyle (6.32) birleştirilirse,

$$\left|\eta_i(V)\right|\le c\varepsilon\min\left[\left(\mathrm{h_i}/\varepsilon\right)^2,1\right]\left(e^{-\gamma x_{i-1}/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x_i)/\varepsilon}\right) \tag{6.33}$$

ifadesi elde edilir.

[bkz (6.30)] $\overset{\circ}{\Psi}_i(qV)$ için değerlendirmesine tekrar dönülürse: ispattaki en zor değerlendirme budur. (6.30)'ta parantez içindeki ikinci ifade tarafından gösterilen ifadeden başlansın.

$$-\int_a^b w(x)dx+w(b)(b-a)=\int_a^b (x-a)w'(x)dx \tag{6.34}$$

Eşitliği kolayca görülebilir. Bu eşitlik (6.22) ile birlikte

$$\left|-\int_{x_i-1/2}^{x_i} q(x)V(x)dx+\frac{q_iV_ih_i}{2}\right|\le c\varepsilon\left(\frac{h_i}{\varepsilon}\right)^2\left(e^{-\gamma x_{i-1/2}/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x_i)/\varepsilon}\right) \tag{6.35}$$

eşitsizliğini ifade eder.

Bu ifadenin alternatif bir değerlendirmesi zor olur. (6.34)'den

$$e^{-\gamma x_i/\varepsilon}\frac{h_i}{2}\le\int_{x_i-1/2}^{x_i} e^{-\gamma x/\varepsilon}\,dx<\frac{\varepsilon}{\gamma}e^{-\gamma x_{i-1/2}/\varepsilon} \tag{6.36}$$

elde edilir. (6.34) bağıntısı $\left(b=x_i\ ve\ a=x_{i+1/2}\ için\right)$ ve (6.23)'yi kullanarak

$$e^{-\gamma(1-x_i)/\varepsilon}\frac{h_i}{2}\le\kappa e^{-\gamma(1-x_i)/\varepsilon}\frac{h_{i+1}}{2}\le\kappa\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} e^{-\gamma(1-x)/\varepsilon}\,dx\le\kappa\frac{\varepsilon}{\gamma}\,e^{-\gamma(1-x_{i+1/2})/\varepsilon} \tag{6.37}$$

eşitsizliği elde edilir. (6.22) vasıtasıyla,

$$\left|-\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} q(x)V(x)\,dx+\frac{q_i\,V_i\,h_i}{2}\right|\le c\left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_i}(e^{-\gamma x/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x)/\varepsilon})\,dx+(e^{-\gamma x_i/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x_i)/\varepsilon})\frac{h_i}{2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlikteki integral ve (6.36) ve (6.37) değerlendirmeleri göz önüne alınırsa

$$\left|-\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} q(x)V(x)\,dx+\frac{q_i\,V_i\,h_i}{2}\right|\le c\varepsilon\left(e^{-\gamma x_i-1/2/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x_{i+1/2})/\varepsilon}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bundan dolayı (6.35) için alternatif bir değerlendirme elde edilmiş olunur. (6.35) ile bu değerlendirme birleştirildiğinde

$$\left| -\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} q(x)V(x)\,dx + \frac{q_i\,V_i\,h_i}{2} \right| \le c\varepsilon\,\min\left[\left(\frac{h_i}{\varepsilon}\right)^2,1\right]\left(e^{-\gamma x_{i-N/2}/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x_{i+1/2})/\varepsilon}\right) \tag{6.38}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer bir yolla

$$\left|\frac{(qV)_{N-1}\,h_N}{2} - \int_{x_{N-1}}^{x_{N-1/2}} q(x)V(x)\,dx\right| \le c\varepsilon\,\min\left[\left(\frac{h_i}{\varepsilon}\right)^2,1\right]\left(e^{-\gamma x_{N-3/2}/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x_{N+1/2})/\varepsilon}\right) \tag{6.39}$$

değerlendirmesi bulunabilir.

(6.30)'deki toplamda değerlendirilen niceliklere tekrar dönülsün: kısacası w_l vasıtasıyla mutlak değerler belirtilmelidir. Diğer taraftan

$$\int_{x_{l-1}}^{x_l}\left(x-x_{l-1/2}\right)\upsilon'(x)\,dx = \int_{x_{l-1}}^{x_l}\frac{\left(x-x_{l-1}\right)\left(x_l-x\right)}{2}\upsilon''(x)\,dx \tag{6.40}$$

basit- doğru bağıntısını ve (6.22) değerlendirmesi göz önünde alınırsa

$$w_l := \left|\int_{x_{N-1}}^{x_{N-1/2}} q(x)V(x)\,dx - \frac{q_{l-1}\,V_{l-1}+q_l\,V_l}{2}h_l\right| \le c\left(\frac{h_l}{\varepsilon}\right)^2\int_{x_{l-1}}^{x_l}\left(e^{-\gamma x/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x)/\varepsilon}\right)dx \tag{6.41}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan,

$$w_l \le c\left[\int_{x_{l-1}}^{x_l}\left(e^{-\gamma x/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x)/\varepsilon}\right)dx+\left(e^{-\gamma x_{l-1}/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x_l)/\varepsilon}\right)h_l\right] \tag{6.42}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlikte sağ taraftaki integralin dışındaki ifadeler değerlendirilsin. (6.23) ve (6.24)'den

$$e^{-\gamma x_{l-1}/\varepsilon}\,h_l \le \kappa e^{-\gamma x_{l-1}/\varepsilon}\,h_{l-1} \le \kappa\int_{x_{l-2}}^{x_{l-1}} e^{-\gamma x/\varepsilon}\,dx$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı şekilde

$$e^{-\gamma x_{l-1}/\varepsilon}\,h_l \le \kappa\int_{x_{l-2}}^{x_{l+1}} e^{-\gamma(1-x)/\varepsilon}\,dx$$

eşitsizliği de vardır. Bu değerlendirmeler (6.42) ile birlikte

$$w_l \le c\int_{x_{l-2}}^{x_{l+1}}\left(e^{-\gamma x/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x)/\varepsilon}\right)dx$$

(6.41) için alternatif değerlendirmeyi gerektirir. (6.41) ile bu değerlendirme ve devam eden değerlendirmelerle birleştirilirse

$$w_l \le c\ \min\left[\left(\frac{h_i}{\varepsilon}\right)^2,1\right]\int_{x_{l-2}}^{x_{l+1}}\left(e^{-\gamma x/\varepsilon}+e^{-\gamma(1-x)/\varepsilon}\right)dx$$

$$\le c\ \min\left[\frac{h_l^2}{\varepsilon^2},1\right]\left[e^{-\gamma' x_{l-2}/\varepsilon}+e^{-\gamma'(1-x_{l+1})/\varepsilon}\right]\times\int_{x_{l-2}}^{x_{l+1}}\left\{\exp\left[\frac{(\gamma-\gamma')x}{\varepsilon}\right]+\exp\left[\frac{(\gamma-\gamma')(1-x)}{\varepsilon}\right]\right\}dx$$

eşitsizliği elde edilir ki burada γ', (6.25)'da verilmiştir. Şimdi (6.24)'e göre bu değerlendirmeler toplanarak ve integraller dışındaki toplamın yaklaşık bir katsayı dönüşümüyle integrasyon

$$\sum_{l=i+1}^{N-1} w_l \le \frac{c\varepsilon}{\gamma-\gamma'}\max_{l=i+1,\ldots,N-1}\min\left[\left(\frac{h_l}{\varepsilon}\right)^2,1\right]\left[e^{-\gamma' x_{l-2}/\varepsilon}+e^{-\gamma'(1-x_{l+1})/\varepsilon}\right],\qquad x_i\in\omega \tag{6.43}$$

olarak elde edilir. Fakat (6.23) ile

$$\min\left[(h_l/\varepsilon)^2,1\right]\le\kappa^2\min\left[(h_{l-1}/\varepsilon)^2,1\right]$$

eşitsizliği vardır. Bu göz önüne alınırsa ve (6.38), (6.39)'e (6.43) eklenirse

$$\max_{i=1,\ldots,N-1}\left|\overset{\circ}{\Psi}_i(qV)\right|$$

(6.24)'in sağ tarafı vasıtasıyla yukarıdaki değerlendirme bulunabilir. Buda (6.33) ve (6.31) ile birlikte $\|\psi(V)\|_{-1,\infty}$ için istenen değerlendirmedir. En son değerlendirme ve (6.27) kullanılarak (6.26)'dan dolayı (6.24) değerlendirmesi elde edilir. Böylelikle teoremin ispatı tamamlanmış olur (Andreev, 2004).

Uyarı 6.2. Teoremin (6.23) şartları bazı $\varpi\subset\omega$ alt kümesinde bulunamaması ve sınırlı ϖ şebekesinde (N ve ε'dan bağımsız) düğümlerin sayısı alınsın. $\psi_i(u)=\tilde{\psi}_i+\overset{\circ}{\psi}_i$ biçiminde $\psi_i(u)$ kesme hatası gösterilecek ki burada [bkz (6.26)]

$$\overset{\circ}{\psi}_i=\begin{cases}\psi_i(U), & x_i\in\varpi\ için\\ \psi_i(u), & x_i\notin\varpi\ için\end{cases},\qquad \tilde{\psi}_i=\begin{cases}\psi_i(V), & x_i\in\varpi\ için\\ 0\ , & x_i\notin\varpi\ için\end{cases}, \tag{6.44}$$

şeklindedir. Bu takdirde Teorem 6.1, kesme hatasının $\overset{\circ}{\psi}_i$ bileşeni için de doğrudur (Andreev, 2004).

6.4 Yakınsaklık

Teorem 6.5. *(6.1) denkleminin katsayıları* $l=4$ *için Lemma 6.3'ün şartlarını sağlasın ve (3.2), (3.4) şebekesi üzerinde (6.4), (6.5) problemi verilsin. Şebeke parametresi*

$$a > 2/\gamma \tag{6.45}$$

şartını sağlıyorsa ve $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ *artışları* ϖ *yardımcı şebekesinin belirli* $\kappa' \geq 1$ *sabiti için*

$$(\kappa')^{-1} \leq \Delta t_i / \Delta t_{i+1} \leq \kappa' \tag{6.46}$$

şartlarını sağlıyorsa, bu takdirde (6.4), (6.5), (3.2), (3.4) probleminin çözümü L_∞^h*'de, (6.1) problemin çözümüne* $O(N^{-2})$ *hızıyla* ε*'a göre düzgün yakınsar* (Andreev, 2004).

İspat. $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ ise bu takdirde (6.1) probleminin çözümünün ≤ 4 mertebeden tüm türevleri sınırlıdır ve teoremde iddia edilen Samarskii (2001)'deki gibidir. Bundan dolayı $\varepsilon < \varepsilon_0$ durumuna odaklanılacaktır. $u_i^h - u(x_i) = z_i$ hata çözümü için (6.17) problemin bir çözümü $\|z\|_\infty \leq 2c_2\varepsilon^{-1}\|\psi\|_{-1,\infty}$ Teorem 6.2'den devam eder. Aksi gibi (3.2), (3.4) şebekesi için ve $\|\psi\|_{-1,\infty}$ değerlendirmesi için doğrudan Teorem 6.4 kullanılamayacağından (6.23) şartı ihmal edilir. Ancak Uyarı 6.2 kullanılabilir. Sonuçta $z_i = \overset{\circ}{z}_i + \tilde{z}_i$ formunda. [bkz (6.17)]

$$L^h \overset{\circ}{z}_i = \overset{\circ}{\psi}_i\,,\;\; x_i \in \Omega\,,\;\; \overset{\circ}{z}_0 = \overset{\circ}{z}_N = 0\,,\;\; L^h = \tilde{z}_i = \tilde{\psi}_i\,,\;\; x_i \in \Omega\,,\;\; \tilde{z}_0 = \tilde{z}_N = 0 \tag{6.47}$$

hata çözümü gösterilmelidir ve soruda şebeke için ϖ, (6.44) ile $\overset{\circ}{\psi}_i$, $\tilde{\psi}_i$ verilmiştir. Bu $\overset{\circ}{z}_i$ için istenen değerlendirmeye yol açar. Sonra ki adımda hata çözümünün $\tilde{z}_i$ bileşeni ayrı ayrı değerlendirilir.

(3.2), (3.4) şebeke çalışması alınsın. Bu şebeke $t = 1/2$ etrafında simetriktir; bundan dolayı $0 < t < 1/2$ için çalışması yeterlidir. Lagrange formülü ve (3.4) ile $h_i = \Delta t_i\, x'(\tilde{t}_i)$'dür ve burada $t_{i-1} < \tilde{t}_i < t_i$'dır. Şayet $t_{i+1} \leq \theta$ ise bu takdirde (3.2) ile beraber

$$\frac{a\varepsilon\,\Delta t_i}{b - t_{i-1}} \leq h_i = \frac{a\varepsilon\,\Delta t_i}{b - \tilde{t}_i} \leq \frac{a\varepsilon\,\Delta t_i}{b - t_i}, \qquad \frac{a\varepsilon\,\Delta t_{i+1}}{b - t_i} \leq h_{i+1} \leq \frac{a\varepsilon\,\Delta t_{i+1}}{b - t_{i+1}},$$

ve (6.46) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{1}{\kappa'}\frac{b - t_{i+1}}{b - t_{i-1}} \leq \frac{h_i}{h_{i+1}} \leq \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i+1}} \leq \kappa', \qquad t_{i+1} \leq \theta \tag{6.48}$$

elde edilir. Buradan h_i/h_{i+1} [bkz (6.23) eşitsizliği] için bir üst sınır elde edilmiş olunur ve kalanlardan da bir alt sınır elde edilmiş olunur. $t_{i+2} \le \theta$ alınsın. Bu takdirde (6.46) ile $\alpha = (1-\alpha)\kappa'$ alınsın; buradan $\alpha = 1/(1+\kappa')$ ve

$$t_{i+1} \le \theta - \frac{\Delta t_i + \Delta t_{i+1}}{\kappa'(1+\kappa')} = \theta - \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{\kappa'(1+\kappa')}$$

olmak üzere

$$t_{i+1} \le \theta - \Delta t_{i+2} \le \theta - \frac{1}{\kappa'}\Delta t_{i+1} = \theta - \frac{\alpha \Delta t_{i+1}}{\kappa'} - \frac{(1-\alpha)}{\kappa'}\Delta t_{i+1} \le \theta - \frac{\alpha}{\kappa'}\Delta t_{i+1} - \frac{(1-\alpha)}{(\kappa')^2}\Delta t_i$$

elde edilir. $(\theta - t_{i+1})$ için bu eşitsizlik çözümüyle, bulduğumuz

$$\left(1+\kappa'+\kappa'^2\right)(\theta - t_{i+1}) \ge (\theta - t_{i-1}), \qquad t_{i+2} \le \theta$$

eşitsizliğine denktir, sırasıyla

$$\left(1+\kappa'+\kappa'^2\right)(b - t_{i+1}) \ge (b - t_{i-1}) + \kappa(1+\kappa')(b-\theta) \ge b - t_{i-1}, \qquad t_{i+2} \le \theta$$

zincirindeki ilk eşitsizliği denkleştirilsin. $b-\theta > 0$ için (3.4) ile (6.48)'den

$$\frac{1}{\kappa'\left(1+\kappa'+\kappa'^2\right)} \le \frac{h_i}{h_{i+1}} \le \kappa', \qquad t_{i+2} \le \theta \tag{6.49}$$

ifadesi elde edilir. n bir tam sayı olmak üzere $t_n \in \varpi$ için $t_n \le \theta < t_{n+1}$ olarak alınsın. Bu takdirde (3.2) ile

$$1/\kappa' \le h_i/h_{i+1} \le \kappa', \qquad t_{n+2} \le t_i \le 1/2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu (6.49) ile beraber t_{n-1}, t_n *ve* t_{n+1} için hariç tüm düğümlerde $0 < t_i \le 1/2$ için $\kappa = \kappa'\left(1+\kappa'+\kappa'^2\right)$ ile (6.23) şartları doğrudur. Ω, $t = 1/2$ etrafında simetrik olduğundan

$$\varpi = \left\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, t_{n'-1}, t_{n'}, t_{n'+1}\right\} \tag{6.50}$$

elde edilir ve burada n', bazı $t_{n'-1} < (1-\theta) \le t_{n'}$ için n'nin bir benzeridir. Uyarı 6.2'deki formda tanımlanan ω şebeke gösteriminin mümkünlüğü bu yolla ispatlanır. Bu Andreev ve Kopteva (1998)'deki Teorem 4 ile beraber hata çözümünün $\overset{\circ}{z}_i$ bileşenini ifade eder, yani (6.47)'da birinci problemin çözümü

$$\left\| \overset{\circ}{z}_i \right\|_\infty = O\left(N^{-2}\right) \tag{6.51}$$

değerlendirmesini sağlar. $\tilde{z}_i$ bileşeni değerlendirmesi alınsın, yani (6.47)'da ikinci problemin bir çözümüdür. (6.50) ve $\psi_i(V)$ ile çakışmasıyla ϖ üzerinde verilen (6.44) ile bu problemin yalnız sağ tarafı sıfır değildir. Buradan $h_i = O(N^{-1})$ olduğundan

$$\|\tilde{\psi}\|_1 \le c \max_i h_i \|\tilde{\psi}\|_\infty \le c\, N^{-1} \max_{t_i \in \varpi} |\psi_i(V)|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu Teorem 6.2 ve $\|\cdot\|_{-1,\infty} \le \|\cdot\|_1$ değerlendirmesiyle birlikte

$$\|\tilde{z}\|_\infty \le 2c_2\, \varepsilon^{-1} \|\tilde{\psi}\|_1 \le c(\varepsilon N)^{-1} \max_{t_i \in \varpi} |\psi_i(V)|$$

eşitsizliğini ifade eder. Diğer yandan Teorem 6.3 ile

$$\|\tilde{z}\|_\infty \le q^{-1} \|\tilde{\psi}\|_\infty \le c \max_{t_i \in \varpi} |\psi_i(V)|$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikleri birleştirip ve

$$\min\left[(\varepsilon N)^{-1}, 1\right] \le 2(1+\varepsilon N)^{-1} \tag{6.52}$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\|\tilde{z}\|_\infty \le c(1+\varepsilon N)^1 \max_{t_i \in \varpi} |\psi_i(V)| \tag{6.53}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\psi_i(V)$ değerlendirmesi alınsın. Taylor formülü kullanılarak (6.18) ve (6.20) den

$$|\psi_i(V)| := \varepsilon^2 \left| \left[\left(p_{i-1/2} V_{\bar{x}}\right)_{\hat{x},i} - \left(pV'\right)'_i \right] \right| \le c\varepsilon^2 N^{-1} \max_{x_{i-1} \prec x \prec x_{i+1}} |V'''(x)| \tag{6.54}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\left(p_{i-1/2} V_{\bar{x}}\right)_{\hat{x},i} = p_{i-1/2} V''(\xi_i) + p'(\eta_i) V'(\zeta_i), \qquad \xi_i, \eta_i, \zeta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}),$$

eşitliğinden

$$|\psi_i(V)| \le c\varepsilon^2 \max_{x_{i-1} \prec x \prec x_{i+1}} \left[|V''(x)| + |V'(x)| \right] \tag{6.55}$$

değerlendirmesi elde edilir. Şimdi (6.22) değerlendirmesi ve (6.52) göz önüne alınarak (6.54) ve (6.55)'den

$$|\psi_i(V)| \le c(1+\varepsilon N)^1 \left(e^{-\gamma x_{i-1}/\varepsilon} + e^{-\gamma(1-x_{i+1})/\varepsilon} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Andreev (1998)'deki (3.14) formülüyle $e^{-\gamma x_{i-1}/\varepsilon} \le c e^{-\gamma(1-x_{i+1})/\varepsilon}$ değerlendirmesi $i = n-1, \ldots, n+1$ ve $e^{-\gamma x_{n-2}/\varepsilon} \le c(\varepsilon + N^{-1})^{\gamma a}$ için doğrudur. Buradan (6.48) ile

$$|\psi_i(V)| \le c\, N^{-2}(1+\varepsilon N), \qquad i = n-1, \ldots, n+1$$

değerlendirmesi elde edilir. Benzer bir değerlendirme $i = n' - 1, \dots, n' + 1$ için de doğrudur. Bu (6.53) eşitsizliğiyle birlikte $\|\tilde{z}\|_\infty$ için istenen değerlendirmeyi ifade eder. Teorem'de ifade edilen değerlendirmenin ispatı

$$\|z\|_\infty \le \left\|\overset{\circ}{z}\right\|_\infty + \|\tilde{z}\|_\infty$$

(Andreev, 2004).

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada fen bilimleri, mühendislik ve tıp bilimleri gibi çeşitli bilimlerde geçen ikinci mertebeden fark denklemi için sınır değer probleminin çözümünün değerlendirmesinde fark Green fonksiyonu oluşturuldu ve singüler pertürbe özellikli lineer ikinci mertebeden sınır değer problemi için sonlu fark metoduyla yaklaşık nümerik sonuçlar incelendi. Bu problemlerin çözümü için $O(N^{-1})$ kesinliğe sahip fark şemasının kurulması, bu fark şemasının hatasının değerlendirmesi, ε'a göre düzgün yakınsaklığının, yakınsaklık hızının belirlenmesi ve kararlığının incelenmesi temel amaçtır.

Singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler, yüksek türevler karşısında küçük bir pozitif parametrenin bulunduğu problemler olarak bilinir. Bu nedenle bu tür problemlerin çözümü, çok değişkenli bir karakter gösterir. Yani ince geçiş katlarında çözüm hızlı ve diğer yerlerde düzenli ve yavaş değişir. Böylece singüler petürbe problemlerin işleyişlerinde ciddi zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu özellikler nümerik çözümde de kendisini göstermektedir. Dolayısıyla, klasik ve standart nümerik yöntemler kararsızlıkları ya da ıraksak olmaları nedeniyle imkansız olmaktadır. Bu nedenle, ε'a göre düzgün yakınsaklık özelliğine sahip nümerik metotların kurulması büyük önem arz etmektedir.

Bu çalışmada başta (1.1)-(1.2) problemi tanıtıldıktan sonra bu probleme uygun fark Green fonksiyonu oluşturup çözüm için *a priori* değerlendirmesi yapıldı.

Bu çalışmaya temel teşkil eden singüler pertürbe özellikli problemler için, giriş bölümünde belirtildiği gibi nümerik çözüm yapılmıştır.

(1.3)-(1.4) singüler pertürbe özellikli konveksiyon-difüzyon problemi için maksimum-modülün-normunda sonlu fark şemasının kesinliğini analiz etmek için, Green fonksiyonları kullanılarak bulunan ayrık (diskret) problemin çözümlerinin bir *a priori* değerlendirmesi uygulandı.

Son olarak (1.5)-(1.6) singüler pertürbe özellikli problemin şimdilerde Bakhvalov şebekesi olarak atfedilen şebeke üzerinde özel hale getirilen belirli bir problemin çözümünün ε'a düzgün olarak ve şebeke düğümlerine göre $O(N^{-2})$ oranında çözümüne yakınsadığı burada ispatlandı. Bakhvalov şebekesi sınır katlarının dışında düzgün ve birbirini izleyen artışların farkının kendi artışlarından daha yüksek mertebeden son derece daha az olduğu belirli bir kurala göre aralığın uç noktalarına doğru (sınır katlarında) yoğunlaşır. Daha sonra, singüler pertürbe özellikli konveksiyon-difüzyon denklemleri için de kullanılabildiği gösterildi. Ayrıca, konveksiyon-difüzyon denklemi için ikinci mertebe fark şeması durumunda, Bakhvalov şebekesinin yaklaşım hızını belirtmeksizin genelleştirilebileceği ispatlandı: ardışık adımların yakın olduğu varsayımı ihmal edilebilir; yani sınır katı dışında, sadece $h_i = O(N^{-1})$ sınırlaması ile keyfi düzgün olmayan şebeke ele alınır. Bu problemdeki çalışmada asıl amaç olan reaksiyon-difüzyon denklemine ait bu sonuç genelleştirildi.

KAYNAKLAR

Amirali, G., Duru, H., 2002. ***Nümerik Analiz***. Pegema Yayıncılık. Ankara.

Andreev, V. B., Kopteva, N. V., 1995. A study of difference schemes with the first derivative approximated by a central difference ratio**. *Comp. Maths Math. Phys.***, vol. 36, no. 8, pp.1065- 1078, 1996.

Andreev, V. B., 1998. On the convergence of modified Samarskii monotone scheme on a smoothly condensing grid. ***Comp. Maths. Math. Phys.,*** vol. 38, no. 8, pp. 1212–1224.

Andreev, V. B., Kopteva, N. V., 1998. On the convergence, uniform with respect to a small parameter, of monotone three-point difference schemes. ***Differential Equations.,*** vol. 34, no. 7, pp. 921-929.

Andreev, V. B., 2001. Green's function and uniform convergence of monotone difference schemes for a singularly perturbed convection-diffusion equaiton on Shishkin's mesh in one- and two-dimensions. ***Preprint*** MS-01-15, ***Dublin City University,*** Ireland.

Andreev, V. B., 2001. The Green function and a priori estimates of solutions of monotone three-point singularly perturbed finite-difference schemes. ***Differantial Equations***, vol. 37, no. 7, pp.923- 933. ***Translated from Differential'nye Uravneniya***, vol. 37, no. 7, pp.880- 890.

Andreev, V. B., 2002. Pointwise and weighted a priori estimates of the solution and its first derivative for a singularly perturbed convection-diffusion equation. ***Differential Equations***, vol. 38, no. 7, pp.972- 984. ***Translated from Differential'nye Uravneniya***, vol. 38, no. 7, pp.918- 929.

Andreev, V. B., 2004. On the theory of singularly perturbed equations. ***Differantial Equations***, vol. 40, no.7, pp.959- 970. ***Translated from Differential'nye Uravneniya***, vol.40, no.7, pp.898- 907.

Axelsson, O., Gololobov, S. V., 2003. A combined method of local Green' s functions and central difference method for singularly perturbed convection-diffusion problems. ***Journal of Comp. and Applic. Math.***, (161): 245-257.

Cheng, S. S., Lın, G. H., 1997. Green' s function and stability of a linear partial difference scheme**. *Comp. Math. Applic.***, vol.35, no.5, pp.27- 41, 1998.

Chernskaya, N. A., 1999. Regularity of the inversion problem for the Sturm-Liouville difference equation. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications.,*** 246, 150-163 2000.

Chernskaya, N. A., 2000. Regularity of the inversion problem for the Sturm-Liouville difference equation. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications.,*** 254, 371-384 2001.

Doolan, E. P., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A., 1980. ***Uniform Numerical Methods for Problem with Initial and Boundary Layers.*** Boole Press, Dublin.

Eutiquio, C. Y., 1972. ***Partial Differential Equaitons***. Ally and Bacon, Inc. Boston.

Farrel, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan, E., Shishkin, G. I., 2000. ***Robust Computational Techniques for Boundary Layers.*** Chapmen & Hall / CRC, Boca Raton, FL.

Friedrichs, K. O., Wasow, W., 1946. Singular perturbations of nonlinear oscillations. ***Duke Math. J., (13):*** 367-381.

Hartman, P., 1978. Difference equations: disconjugacy, principal solutions, Green's function, complete monotonicity. ***Trans. of the American Mathematical Society.,*** vol.246, pp.1- 30.

Kellogg, R. B., Tsan, A., 1978. ***Analysis of Some Difference Approximations for a Singular Perturbatin Problem without Turning Points.*** Math. Comp. 32, 1025-1038.

Kopteva, N., 2001. Maximum norm a posteriori error estimates for a one-dimensional convection-diffusion problem. ***SIAM J. Numer. Anal.,*** vol.39, no.2, pp. 423-441.

Linss, T., Stynes, M., 1999. ***A Hibrid Difference Scheme on a Shishkin Mesh for Linear Convection-Diffusion Problems.*** Appl. Numer. Math. 31, 255-270.

Liseikin, V. D., Yanenko, N. N., 1981. ***in Chislennye metody mekhaniki sploshnoi sredy*** (Numerical Methods in Solid Mechanics), Novosibirsk, vol. 12, no. 2, pp. 1266-1278.

Nayfeh, A. H., 1993. ***Introduction to Perturbation Techniques.*** Wiley, New York.

O'Malley, R. E. Jr., 1991. ***Singular Perturbation Method for Ordinary Differential Equations.*** Springer-Verlag, New York.

Prandtl, L., 1905. Uber flussigkeits-bewegung bei klenier reibung. ***Verhandlungen, III Int. Math. Kong.*** Teubner, Leibzig. 484-491.

Samarskii, A. A., 1971. ***Theory of Difference Schemes.*** M. Nauka, Russian.

Samarskii, A. A., Andreev, V. B., 1976. ***Raznostnye metody dlya ellipticheskikh uravnenii*** (Finite- Difference Methods for Elliptic Equations), Moscow.

Samarskii, A. A., 2001. ***The Theory of Difference Schemes***. Marcel Dekker, Inc. New York.

Savin, I. A., 1995. On the rate of convergence, uniform with respect to a small parameter, of a difference scheme for an ordinary differential equation. ***Comp. Maths. Math. Phys.,*** vol. 35, no. 11, pp. 1411–1422.

Shishkin, G. I., 1983. Difference scheme on a nonuniform grid for a differential equation with small parameter multiplying the highest derivative. ***Zh. Vychislit. Mat. Mat. Fiz.,*** vol. 23, no. 3, pp. 609–619.

Thomee, V., Larsson, S., 2003. ***Partial Differential Equation with Numerical Methods.*** *Springer-Verlag,* Berlin, Almanya.

Tikhonov, A. N., 1952. Systems of differential equations containing small parameters multiplying some of the derivatives. ***Mathematic Sbovenic, (31):*** 575-586.

Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A., 1961. Homojen difference scheme. ***Zh. Vychislit. Mat. Mat. Fiz.,*** vol. 1, no. 1, pp. 5–63.

Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A., 1962. Homojen difference scheme on irregular mesh. ***Zh. Vychislit. Mat. Mat. Fiz.,*** vol. 2, no. 5, pp. 812–832.

Vasil'eva, A. B., 1963. Asymptotic behavior of solutions to certain problems involving nonlinear ordinary differential equations containing a small parameter multiplying the highest derivatives. ***Russian Mathematical Surveys, (18):*** 13-84.

ÖZ GEÇMİŞ

1984 yılında Mersin / Merkez'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Mersin'de tamamladı. 2002 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2006 yılında bölüm üçüncüsü olarak bitirdi ve aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.