T.C.

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN AĞIRLIK PARAMETRELERİ İÇEREN FARK ŞEMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Hilal KÖKSAL
DANIŞMAN: Doç. Dr. Hakkı DURU

VAN-2010

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİ ANA BİLİM DALI

HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN AĞIRLIK PARAMETRELERİ İÇEREN FARK ŞEMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Hilal KÖKSAL

VAN-2010

KABUL ve ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Hakkı DURU danışmanlığında Hilal KÖKSAL tarafından hazırlanan ‘‘Hiperbolik Denklemler İçin Ağırlık Parametreleri İçeren Fark Şemaları’’ isimli bu çalışma 11/02/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. E. İnan ÇINAR	imza:
Üye: Doç. Dr. Hakkı DURU	İmza:
Üye: Yrd. Doç. Dr. Bahattin ERDİNÇ	İmza:
Üye: …………………………….	İmza:
Üye: …………………………….	İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun …/…/2010 gün ve ………… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

ÖZET

HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN AĞIRLIK PARAMETRESİ İÇEREN FARK ŞEMALARI

Hilal KÖKSAL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hakkı DURU

Ocak 2010, 40 sayfa

Bu çalışmada hiperbolik denklem için başlangıç-sınır değer probleminin sonlu fark metoduyla nümerik çözümü incelenmiştir. Bu tip problemler matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin çeşitli alanlarında kullanılmaktadır. Ele alınan problem için önce ağırlık parametreli fark şemaları kurularak ayrık norma göre yaklaşık çözümün kararlılığı incelenmiştir. Daha sonra problem için enerji eşitsizliği metodu kullanılarak çözümün varlığı, tekliği ve başlangıç verilerine bağlılığı ele alınmıştır.

Son olarak düzgün olmayan (köşe oluşturan) çözümler fark metoduyla belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik denklem, Başlangıç-sınır değer problemi, Fark şeması, Kararlılık, Enerji eşitsizliği metodu.

ABSTRACT

DIFFERENCE SCHEMES WITH WEIGHTS

FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

KÖKSAL, Hilal

Msc Thesis, Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hakki DURU

January 2010, 40 pages

In this study, the numerical solution of the initial-boundary value problem for hyperbolic equation was investigated by the finite difference method. The problems of this type arise are used in many areas of mathematical physics and fluid mechanics. Firstly, difference schemes with weight for this problem were constructed; with respect to discrete norm stability of approximated solution were investigated. Then for the problem existence of solution, uniqueness and adherence to the initial datas has been taken by using energy inequality method.

Finally, non-uniform (vertex) solutions were determined by difference method.

Key words: Hyperbolic equation, Initial-boundary value problem, Difference scheme, Stability, The energy inequality method.

ÖNSÖZ

Diferansiyel denklem içeren uygulamalarda verilen bir diferansiyel denklemin genel çözümünden ziyade verilen yardımcı şartları sağlayan çözümün bulunması istenir. Özellikle Fizik ve Mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde anlam kazanan bu tür problemler başlangıç-sınır değer problemi olarak bilinirler.

Bir diferansiyel denklem, bağımsız değişkenin verilen değerleri için bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde verilen yardımcı şartlarla birlikte bir başlangıç-sınır değer problemini teşkil eder. Başlangıç-sınır değer probleminin kesin çözümü için yüksek hesaplama maliyetiyle karşılaşılır veya her zaman kesin çözümü bulmak mümkün olmayabilir. Bu sebeple, diferansiyel denklemin bir yaklaşık çözümünü elde etmek hem uygulamalı bilimlerde hem de matematiksel olarak daha pratiktir. Zira bir fizik nesnenin modellemesi olan diferansiyel denklemler bu sayede teknolojide kullanılır hale gelir. Çalışmamızda bir başlangıç-sınır değer hiperbolik probleminin ağırlık parametresi içeren yaklaşık çözümü ve kararlılığı incelenmiştir.

Bu çalışma süresince göstermiş oldukları yakın ilgi ve yardımlarından dolayı saygı değer hocam ve danışmanım Doç. Dr. Hakkı DURU'ya, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Gabil AMİRALİYEV'e, arkadaşlarıma, aileme ve yüksek lisans süresi boyunca yüksek lisansımı destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Hilal KÖKSAL

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	**Anlamı**
L, Λ	Diferansiyel operatörler
H	Hilbert uzayı
E	Özdeşlik operatörü
N	Şebeke elemanlarının sayısı
h, τ	Sabit şebeke adımları
i, j	Şebekedeki nokta indeksleri
x, t	Bağımsız değişkenler
u	Diferansiyel denklemin kesin çözümü
y	Diferansiyel denklemin nümerik çözümü
$(\rightarrow), (\leftarrow)$	i’den $i+1$’ e ve $i+1$’den i’ye indeks sırasının yönünü gösterir
R	Kalan terim
$O(h^k)$	Yakınsama hızı k Yakınsaklık mertebesi
$\varpi_{h\tau}$	$\overline{D}$ Bölgesinde düzgün şebeke
C	$\overline{G}$ ’nin tanım aralığında keyfi kapalı eğri
$\sigma, \overline{\sigma}$	Ağırlık parametresi(h ve τ ’dan bağımsız keyfi sabit)
L_2 Uzayı	$[a, b]$’de karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
A^{-1} Normu	A’nın tersi

1.GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİLİŞLERİ

Mekanik fizik ve başka uygulama dallarında esas araştırma konuları adi veya kısmi diferansiyel denklemlerle modellendirilir. Bu diferansiyel denklemlere başlangıç veya sınır şartlarının eklenmesiyle; başlangıç-değer, sınır-değer veya başlangıç sınır değer problemi ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda bir telin titreşim hareketi, bir sarkacın salınım hareketleri ve benzeri olaylar hiperbolik denklemlerle modellendirilir. Telin başlangıç anındaki durumu, zamana göre değişimi verildiğinde ve tel sınırlı olduğunda problemimiz başlangıç-sınır değer problemi adını alır (Young, 1972).

Adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri, parabolik ve eliptik tip kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin çözümüyle ilgili araştırmalarda (çözümün varlığı, tekliği vb) sıkça kullanılan tekniklerden biri maksimum prensibidir (Murray, Protter ve Weinberger, 1984). Hiperbolik denklemler için çözümün değerlendirilmesinde bu tekniğin kullanılması yerine enerji eşitsizlikleri metodunun kullanılması daha avantajlıdır. Zamana bağlı diferansiyel denklemlerde özellikle çok boyutlu durumlarda enerji eşitsizlikleri denilen yöntem daha yaygın biçimde kullanılmaktadır (M. Lees (1960)).

Bu tür problemlerin çözümleri çoğu kez bulunamaz veya yüksek hesaplama maliyetinden dolayı pratikte çözümden faydalanılamaz. Bu sebeple, nümerik çözümler önem arz etmektedir. Bu sayede modele bilgisayar desteği sağlanarak pratikte faydalanılır hale getirilmiş olur.

Bu çalışmaya paralel olarak, hiperbolik denklemler için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümüyle ilgili çeşitli nümerik yöntemler sunulmuştur. Bunlarla ilgili bazı çalışmalar aşağıdaki biçimde özetlenebilir.

Ascher, Matheij ve Russel (1988) adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin nümerik çözümünü incelediler. Singüler pertürbe özellikli başlangıç ve sınır şartlı birinci ve ikinci mertebe ile birlikte adi diferansiyel denklem sistemleri için adaptiv şebeke üzerinde sonlu fark metotları Amiraliyev (2005) tarafından verildi.

Samarskii (2001), değişken katsayılı ikinci mertebeden hiperbolik denklemler ve ısı denklemleri için düzgün olmayan şebekeler üzerinde değişik homojen fark şemaları inceledi. Hasio ve Weinacht (1983), lineer ve semilineer hiperbolik- parabolik Cauchy probleminin çözümü için düzgün yakınsak asimptotik açılımlar oluşturdular. Doolan ve ark.(1980), adi ve kısmi diferansiyel denklemler için fark metotlarını verdiler. George ve Twizell (2006), ikinci mertebeden karışık sınır katlı bir boyutlu hiperbolik ve parabolik denklemler için ikinci mertebeden sonlu fark şemalarını incelediler.

Bu çalışmada aşağıdaki hiperbolik denklem için başlangıç-sınır değer problemi ele alınmaktadır:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x,t) \qquad 0 < x < L,\ 0 < t \le T$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x), \quad 0 \le x \le L$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(L,t) = \mu_2(t) \quad 0 \le t \le T .$$

Burada f, u_0, $\bar{u}_0$, μ_1 ve μ_2 yeterince düzgün fonksiyonlardır.

Ele alınan problem için çözümün değerlendirilmesi enerji eşitsizliği metoduyla yapılmış, ağırlık parametreleri içeren fark şeması oluşturulmuş ve bu şemanın matematiksel özellikleri (problemin kararlılığı, yaklaşım hatası ve yaklaşım hızı) incelenmiştir.

Ek bölümde de konuyla ilgili bir C Programı yapılarak teorik sonuçlar için bilgisayar desteği sağlanmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde düzgün şebekede fark şemasının kurulmasında ihtiyaç duyulan notasyonlar, tanımlar ve eşitsizlikler ispatsız olarak verilmektedir.

2.1. Düzgün Şebeke İçin Gerekli Tanımlar

Tanım 2.1.1.

a) $\varpi = \{x_i \mid x_i = ih, i = 1,2,..., N-1\}; h = 1/N$ ifadesine $[0,l]$ aralığındaki *düzgün şebeke* denir.

b) $g_i \equiv g(x_i)$, ω_h'da tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. $\|g\|_{C(\omega_H)} = \max\limits_{x_i \in \omega_h} |g_i|$ ifadesine *düzgün şebeke* normu denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Tanım 2.1.2.

g herhangi bir fonksiyon olsun. Buna göre;

a) $g_{x,i} = \dfrac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{h}$ ifadesine *birinci mertebeden ileri fark türevi* denir.

b) $g_{\bar{x},i} = \dfrac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{h}$ ifadesine *birinci mertebeden geri fark türevi* denir.

c) $g_{\overset{0}{x},i} = \dfrac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1})}{2h}$ ifadesine *birinci mertebeden merkezi fark türevi* denir.

d) $g_{\bar{x}x,i} = \dfrac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1})}{h^2}$ ifadesine *ikinci mertebeden fark türevi* denir (Memmedov,1980).

Tanım 2.1.3

Basit $Lu = u''$ operatörü için

$\int_a^b u(kv')' dx = -\int_a^b ku'v'dx + kuv' |_a^b$ denklemi *1. Green formülü* olarak adlandırılır (Samarskii,2001).

Tanım 2.1.4

$\forall \; i = 1,2,..., N-1$ için $A_i \neq 0$ ve $B \neq 0$ olmak üzere

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i , i = 1,2,..., N-1,$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1 \quad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2 \qquad (2.1)$$

sınır değer problemini ele alalım.

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (2.2)$$

α_i ve β_i belirsiz katsayılar olmak üzere (2.2) denkleminin doğruluğunu kabul edelim. O halde $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ olur. Bu (2.1) de yerine yazılırsa,

$(A_i\alpha_i - C_i) y_i + A_i\beta_i + B_i y_{i+1} = -F_i$ olur. Burada (2.2) denkleminden dolayı

$[(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i] y_{i+1} + A_i\beta_i + (A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} = -F_i$ elde edilir.

$(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i = 0$, $A_i\beta_i + (A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} + F_i = 0$ şartı uygulanırsa denklemin herhangi y_i için doğru olduğu görülür. Bu yüzden $C_i - A_i\alpha_i \neq 0$ olduğunu varsayarak, α_{i+1} ve β_{i+1}'in belirlenmesi için (2.2) denkleminin kabulü altında

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad i = 1,2,..., N-1 \qquad (2.3)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad i = 1,2,...,N-1 \tag{2.4}$$

rekürans formülünü kurarız. α_i ve β_i ’yi bulmak için ileri eliminasyon, y_i ’yi bulmak için geri eliminasyon uygulanır. α_i ve β_i ’nin bilinmesiyle (2.2)’ye göre, $i+1$’den i ’ye hareket ederek y_i değerlerinin hepsi belirlenir. α_i ve β_i ’yi bulmak için (2.3) ve (2.4) formüllerine göre aksi yön (i'den $i+1$’e) takip edilir.

$i=0$ ’ı (2.2)’ de yerine yazarsak $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$ yani $y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1$ sınır şartını tayin ederiz.

$$\alpha_1 = \chi_1 \tag{2.5}$$

$$\beta_1 = \mu_1 \tag{2.6}$$

Burada α_i ve β_i bilinerek y_N sınır değeri $1-\alpha_N\chi_2 \neq 0$ kısıtlaması altında

$$y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2$$

$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$$

denklem sisteminden elde edilir. Böylece başlangıç şartı (2.2) denklemi için

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2}{1-\alpha_N\chi_2} \tag{2.7}$$

olur. (2.2) ve (2.7) hesaplama formülleri ileri eliminasyonu inşa eder. Genel durum için yöntem;

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad i = 1,2,...,N-1, \alpha_1 = \chi_1$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad i = 1,2,...,N-1, \beta_1 = \mu_1$$

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2}{1-\alpha_N\chi_2}$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \; i = N-1, N-2,...,1,0$$

şeklindedir. Bu sunulan algoritmaya *sağ eliminasyon metodu* denir (Samarskii,2001).

Eşitsizlik 2.2.1

μ Eşitsizliği:

Keyfi a,b için

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2, \qquad \mu > 0$$

olur (Amiraliyev ve Duru,2002).

Eşitsizlik 2.2.2

Cauchy Bunyakovski Schwarz Eşitsiliği:

$f(x) \in L_2$ ve $g(x) \in L_2$ ise Cauchy Bunyakovski Schwarz eşitsizliği

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$$

gerçeklenir (Amiraliyev ve Duru,2002).

Eşitsizlik 2.2.3

Gronwall Eşitsizliği:

Kullanılan fonksiyonlar sürekli ve negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$v(t) \leq u_0 + \int_0^t [p(s)v(s) + q(s)] ds, \; p(t) \geq 0 \text{ ise}$$

$$v(t) \leq u_0 e^{\left(\int_0^t p(\xi) d\xi \right)} + \int_0^t q(s) e^{\left(\int_t^t p(\xi) d\xi \right)} ds$$

olur. Ayrıca

$$v(t) \le g(t) + \int_0^t p(s)v(s)\,ds, \; p(t) \ge 0 \text{ ise}$$

$$v(t) \le g(t) + \int_0^t g(s)p(s)\,e^{\int_s^t p(\xi)d\xi}\,ds$$

olur (Amiraliyev ve Duru,2002).

Eşitsizlik 2.2.4

$\hat{\varpi}_h = \{x_i = ih, h = l/N; x_0 = 0, x_N = l\}$ keyfi şebekesi üzerinde ve $x = 0$ ve $x = l$ uç noktalarında tanımlı herhangi bir $y(x)$ fonksiyonu için;

$$\|y\|^2 \le \frac{l^2}{4} \| y_{\bar{x}}]|^2 \qquad\qquad y_0 = y_N = 0$$

eşitsizliği doğrudur (Samarskii,2001).

Eşitsizlik 2.2.5

$\varpi_h = \{x_i = ih, i = 0,1,..., N, x_0 = 0, x_N = l\}$ eşit adımlı şebeke üzerinde ve $x = 0$ ve $x = l$ uç noktalarında tanımlı herhangi bir $y(x)$ fonksiyonu için;

$$\frac{h^2}{4} \| y_{\bar{x}}]|^2 \le \|y\|^2 \le \frac{l^2}{8} \| y_{\bar{x}}]|^2$$

eşitsizliği doğrudur (Samarskii,2001).

3. BİR TELİN TİTREŞİMLERİNİN DENKLEMİ İÇİN FARK ŞEMALARI

3.1. Fark Probleminin İfadesi ve Yaklaşık Hatanın Hesaplamaları

Bu kesimde, bir telin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x_1, t_1),\ 0 < x_1 < l,\ t_1 > 0$$

biçimindeki titreşim denklemi üzerinde çalışacağız. Buna göre, orijinal denklemin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \ \ 0 < x < 1, 0 < t \le T \qquad (3.1)$$

ile temsil edilmesinden dolayı, $x = \frac{x_1}{l}$ ve $t = \frac{a t_1}{l}$ boyutsuz değişkenlere geçiş yapmak daha makul görünmektedir. Başlangıç konumu $u_0(x)$ ve başlangıç hızı $\bar{u}_0(x)$ olmak üzere, başlangıç anındaki ek şartlar

$$u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x) \qquad \ldots(3.2)$$

ile belirlenir. Telin uçları

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(1,t) = \mu_2(t) \qquad (3.3)$$

olarak bilinen kurala uygun hareket eder. Problemimizin tanımlı olduğu $\overline{D} = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ dikdörtgen bölgede $\varpi_{h\tau}$ şebekesini sunalım. (3.1) denklemi, t'ye göre ikinci türevi içerdiğinden fark şemasının katı da üçten küçük olamaz.

Aşağıdaki gösterimleri göz önüne alalım.

$$y = y^j, \hat{y} = y^{j+1}, \breve{y} = y^{j-1}, y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, y_{\bar{t}} = \frac{y - \breve{y}}{\tau}$$

$$\Lambda y = y_{\bar{x}x}$$

$$y_{\bar{t}t} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}, \; y_t^0 = \frac{y_t + y_{\bar{t}}}{2} = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}$$

göz önüne alalım. Bu formülleri (3.1) denklemindeki türevlerde yerleştirelim. Bunun için;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sim u_{\bar{t}t} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \Lambda u = u_{\bar{x}x}, \quad f \sim \varphi$$

formülleriyle inşa edilen yaklaşık türevleri (3.1) denkleminde yerine yazalım. Tartışmalarımızda anahtar rol,

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}) + \varphi, \qquad \varphi = f(x, t_j),$$

$$y_0 = \mu_1(t), \qquad y_N = \mu_2(t), \qquad y(x,0) = u_0(x), y_t(x,0) = \tilde{u}_0(x) \qquad \ldots(3.4)$$

ağırlıklı şemalar ailesi tarafından oynandı. Burada $\tilde{u}_0(x)$ ilerde belirlenecektir.

Sınır şartları ve $u(x,0) = u_0(x)$ birinci başlangıç şartı, $\varpi_{h\tau}$ şebekesi üzerinde kesin olarak sağlanır. $\tilde{u}_0(x)$'in seçimi için, $\tilde{u}(x) - \partial u(x,0)/\partial t = \tilde{u}_0(x) - \bar{u}_0(x)$ yaklaşım hatasının $O(\tau^2)$ mertebesine sahip olması şart koşulmaktadır.

$$u_t(x,0) = \dot{u}(x,0) + \frac{1}{2}\tau\ddot{u}(x,0) + O(\tau^2)$$

$$= \bar{u}_0(x) + \frac{1}{2}\tau(u''(x,0) + f(x,0)) + O(\tau^2)$$

$$= \bar{u}_0(x) + \frac{1}{2}\tau(u_0''(x) + f(x,0)) + O(\tau^2)$$

bağıntılarından,

$$\tilde{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + \frac{1}{2}\tau(u_0''(x) + f(x,0)) \qquad (3.5)$$

olduğunu kabul edersek, $\tilde{u}_0(x) - u_t(x,0) = O(\tau^2)$ olduğu hemen görülür. Bu nedenle (3.4) ve (3.5) fark problemi tam olarak konulmuş olur. Burada $\hat{y} = y^{j+1}$ kabulüyle, herhangi bir $\sigma > 0$ için kararlı olan ve sağ eliminasyon metoduyla çözülebilen;

$$\sigma\gamma^2 (y_{i+1}^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}) - (1+2\sigma\gamma^2) y_i^{j+1} = -F_i\,, \quad 0 < i < N$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2\,, \qquad \gamma = \tfrac{\tau}{h}$$

$$F_i = (2y_i^j - y_i^{j-1}) + \tau^2(1-2\sigma)\Lambda y^j + \sigma\tau^2\Lambda y^{j-1} + \tau^2\varphi$$

sınır-değer problemini (3.4) denkleminin temeli üzerinde kurarız.

Sonraki adım, (3.4)-(3.5) probleminin bir y çözümü ve (3.1)-(3.3) probleminin $u = u(x,t)$ çözümü arasındaki farkı araştırarak $\varphi = f(x,t_j)$ durumunda (3.4)'ün yaklaşım hatasını hesaplamaktır. $u = u(x,t)$ çözümüne göre $\psi = \Lambda(\sigma\hat{u} + (1-2\sigma)u + \sigma\breve{u}) + \varphi - u_{\bar{t}t}$ (3.4)'ün yaklaşım hatası ve $v = \tilde{u}_0(x) - u_t(x,0)$, $y_t = \tilde{u}_0(x)$ ikinci başlangıç şartı için yaklaşım hatası olmak üzere, $y = z + u$ 'yu (3.4)'de yerine yazma,

$$z_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma\hat{z} + (1-2\sigma)z + \sigma\breve{z}) + \psi\,,$$

$$z_0 = z_N = 0, \quad z(x,0) = 0, \quad z_t(x,0) = v(x) \tag{3.6}$$

verir. Yukarıda söylenenlere uygun olarak $v = O(\tau^2)$ olur. İyi tespit edilmiş $\hat{u} = u + \tau u_t$ ve $\breve{u} = u - \tau u_t$ ifadeleri

$$\sigma\hat{u} + (1-2\sigma)u + \sigma\breve{u} = u + \sigma\tau^2 u_{\bar{t}t}\,,$$

sonucunu çıkarmayı,

$$\psi = \Lambda u + \sigma\tau^2\Lambda u_{\bar{t}t} + \varphi - u_{\bar{t}t}$$

$$= Lu + \sigma\tau^2 L\ddot{u} + f - \ddot{u} + O(h^2 + \tau^2) \tag{3.7}$$

ifadesini sağlayarak izin verir. Ayrıca τ ve h'a bağlı olmayan bir keyfi sabit σ için $\psi = O(h^2 + \tau^2)$ olur.

$\sigma = \bar{\sigma} - h/(12\tau^2)$ alalım. Burada $\bar{\sigma}$ sabiti (3.4) şemasının kararlılığını sağlayacak biçimde h ve τ'dan bağımsız seçilir. Şimdilik gözlemlendiği kadarıyla,

$\sigma \geq \frac{1}{4}\left(1-\varepsilon\right)^{-1} - \frac{1}{4}\gamma^{-2}, \;\; \gamma = \tau / h, \quad \varepsilon > 0$ için (3.4) şeması kararlı olduğundan, $\bar{\sigma} \geq \frac{1}{4}\left(1-\varepsilon\right)^{-1}$ almak yeterlidir.

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12} f'' \tag{3.8}$$

ile (3.4) şeması, daha yüksek yaklaşım mertebesi elde etmemize ve $\psi = O\left(h^2 + \tau^2\right)$ almamıza izin verir.

Üçüncü tip

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \beta_1 u(0,t) - \mu_1(t), \;\; -\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \beta_2 u(1,t) - \mu_2(t)$$

sınır şartlarına aşağıdaki fark denklemleriyle yaklaşılır;

$$\rho_1 y_{\bar{t}t} = \Lambda^{-}\left(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}\right) + \varphi^{-}, \qquad i = 0$$
$$\rho_2 y_{\bar{t}t} = \Lambda^{+}\left(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}\right) + \varphi^{+}, \;\; i = N,$$

burada

$$\Lambda^{-} y = \frac{y_x - \beta_1 y}{h/2}, \;\; \Lambda^{+} y = -\frac{y_{\bar{x}} + \beta_2 y}{h/2}$$

$$\varphi^{-} = \rho_1\varphi + \frac{v_1}{h/2}, \;\; \varphi^{+} = \rho_2\varphi + \frac{v_2}{h/2}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada sınır şartlar için yaklaşım hatası,

$$\varphi = f(x,t), \qquad \rho_1 = \rho_2 = 1, \qquad v_1 = \mu_1(t), \quad v_2 = \mu_2(t)$$

ise $O(h^2 + \tau^2)$ mertebesindedir.

Az sonra yazılacak

$$\sigma = -\frac{h^2}{12\tau^2} + \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} = sbt$$

$$\rho_1 = 1 + \frac{h\beta_1}{3}, \qquad \rho_2 = 1 + \frac{h\beta_2}{3}$$

$$\varphi = f(x,t) + \frac{h^2}{12} f''$$

$$v_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h^2}{6}\left(\frac{\ddot{\mu}_1(t)}{2} + f'(0,t) - \beta_1 f(0,t)\right),$$

$$v_2(t) = \mu_2(t) + \frac{h^2}{6}\left(\frac{\ddot{\mu}_2(t)}{2} + f'(1,t) - \beta_2 f(1,t)\right)$$

yer değiştirmeler, $x=0$ ve $x=1$ düğümlerindeki başlangıç denkleminin yaklaşımı $O(h^4+\tau^2)$ kesinliğinden $O((h^4+\tau^2)/h)$ kesinliğine ve sınır şartlarının $O(h^4+\tau^2)$ kesinliğine şemanın tasarımı için en uygun olanlarıdır.

3.2. Kararlılık Analizi

Şimdi homojen sınır şartlı ve denklemin sıfır sağ taraflı olma durumunda başlangıç verisine göre (3.4) şemasının kararlılığını inceleyeceğiz. Problemin makul ifadesi;

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}) = \Lambda y^{(\sigma)},$$

$$y_0 = y_N = 0, \qquad y(x,0) = u_0(x), \qquad y_t(x,0) = \tilde{u}_0(x) \tag{3.4a}$$

olur. Bunun çözümünü değişkenlere ayırma metoduyla arayacağız (Young, 1972). Burada özel çözüm $y(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ çarpımı olarak aranacaktır. Burada $y = XT$ 'yı (3.4a) denkleminde yerine koyarak

$$\frac{\Lambda X}{X} = \frac{T_{\bar{t}t}}{T^{(\sigma)}} = -\lambda \tag{3.9}$$

sonucunu verir. Bunları $y_0 = y_N = 0$ sınır şartları ile birlikte ele alarak, $X(x)$ için

$$\Lambda X + \lambda X = 0, \quad x \in \omega_h, \quad X(0) = X(1) = 0, \quad X(x) \neq 0$$

özdeğer problemini kuralım, bunların çözümleri

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi kh}{2}, \quad X^{(k)}(x) = \sqrt{2}\sin \pi kx$$

olur. Denklem (3.9)'dan $T_k(t)$ için ikinci mertebe

$$(T_k)_{\bar{t}t} + \lambda_k T_k^{(\sigma)} = 0$$

fark denklemi veya

$$\hat{T}_k - 2(1-\alpha_k)T_k + \breve{T}_k = 0, \qquad \alpha_k = \frac{\frac{1}{2}\tau^2\lambda_k}{1+\sigma\tau^2\lambda_k} \tag{3.10}$$

biçiminde tekrar yazabilen

$$(1+\sigma\tau^2\lambda_k)\hat{T}_k - 2\left(1+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau^2\lambda_k\right)T_k + (1+\sigma\tau^2\lambda_k)\breve{T}_k = 0$$

denklemi elde ederiz.

$T_k = T_k(t_j) = q_k^j$ biçiminde sunulan denklemin bir çözümüne kalkışabiliriz. Bu nedenle, q için kuadratik denklem (3.10)'dan meydana gelir. $q^2 - 2(1-\alpha)q + 1 = 0$ (bir süre için k indisi ihmal edildi). $q_{1,2} = 1-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha}$ köklerinin dikkatli analizi, $0 < \alpha < 2$ için $q_{1,2} = 1-\alpha \pm i\sqrt{\alpha(2-\alpha)}$ değerlerinin $|q_{1,2}| = 1$ ile kompleks olduğunu gösterir. Denklem (3.10)'a genel çözüm olması sebebiyle $q_1^{(k)} = e^{i\varphi k}$ ve $q_2^{(k)} = e^{-i\varphi k}$ yı elde etmenin mümkün kılınmasının

$$T_k(t_j) = C_k\left(q_1^{(k)}\right)^j + D_k\left(q_2^{(k)}\right)^j = A_k\cos j\varphi_k + B_k\sin j\varphi_k$$

ile temsil edilebildiği

$$\cos\varphi_k = 1-\alpha_k, \quad \sin\varphi_k = \sqrt{\alpha_k(2-\alpha_k)}$$

için yeni bir φ_k değişkenine geçmek anlamlıdır. Burada A_k ve B_k keyfi sabitler olarak yer alır.

Bundan sonra, özel çözümlerin bir

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} (A_k \cos j\varphi_k + B_k \sin j\varphi_k) X^{(k)}(x) \tag{3.11}$$

toplamı olarak (3.4a) probleminin bir çözümüne bakalım. u_{0k} ve $\tilde{u}_{0k}$, $u_0(x)$ ve $\tilde{u}_0(x)$'in ilgili

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{N-1} u_{0k} X^{(k)}(x), \quad \tilde{u}_0(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_{0k} X^{(k)}(x) \tag{3.12}$$

açılımlarındaki uygun katsayıları olsun. Denklem (3.11) toplamı için elde edilecek $y^0 = u_0$ ve $y_t^0 = (y^1 - y^0)/\tau = \tilde{u}_0(x)$ başlangıç şartlarıyla ilgili olarak, A_k ve B_k katsayılarının belirlenmesi için

$$A_k = u_{0k}, \qquad B_k = \frac{1 - \cos\varphi_k}{\sin\varphi_k} u_{0k} + \frac{\tau}{\sin\varphi_k} \tilde{u}_{0k} \tag{3.13}$$

ifadesini bulmamızı mümkün kılan

$$A_k = u_{0k}, \qquad A_k \frac{\cos\varphi_k - 1}{\tau} + B_k \frac{\sin\varphi_k}{\tau} = \tilde{u}_{0k}$$

bağıntılarını belirleriz. A_k ve B_k ifadelerini denklem (3.11) de yerini koyarak, küçük değişikliklerle

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\cos(j - \frac{1}{2})\varphi_k}{\cos\frac{1}{2}\varphi_k} u_{0k} + \frac{\tau \sin j\varphi_k}{\sin\varphi_k} \tilde{u}_{0k} \right) X^{(k)}(x) \tag{3.14}$$

sonucuna ulaşırız.

Birinci safhadan sonra (3.4a) şeması için $\|y^j\|$'nin değerlendirilmesi,

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda y, \quad y_0 = y_N = 0, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad y_t(x,0) = \tilde{u}_0(x) \tag{3.15}$$

şemasına bağlı olarak $\sigma = 0$ için türetilecektir. Şu halde,

$$\alpha_k \frac{1}{2}\tau^2 \lambda_k = \mu_k, \ \cos\varphi_k = 1 - \mu_k, \sin\varphi_k = \sqrt{\mu_k(2 - \mu_k)}$$

olur. Buradan $\varepsilon > 0$ bir keyfi sayı olmak üzere, $\omega_{h\tau}$ şebekesinin adımları

$$\frac{\tau^2}{h^2} \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \tag{3.16}$$

ile ilişkilendirildiğinde,

$$\mu_k \leq \frac{2}{1+\varepsilon}, \qquad k = 1,2,\ldots.,N-1 \tag{3.17}$$

ifadesini buluruz. Öyle ki

$$\cos\frac{1}{2}\varphi_k = \sqrt{1-\frac{\mu_k}{2}} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tag{3.18}$$

eşitsizliğini verir.

$$\frac{\sin\varphi_k}{\tau} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi_k}{\tau}\cos\frac{1}{2}\varphi_k \geq \frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi_k}{\tau}\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

ve

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi_k}{\tau} = -\frac{\sqrt{2(1-\cos\varphi_k)}}{\tau} = \frac{\sqrt{2\mu_k}}{\tau} = \sqrt{\lambda_k}$$

bağıntılarından dolayı,

$$\frac{\sin\varphi_k}{\tau} \geq \sqrt{\lambda_k\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tag{3.19}$$

değerlendirmesine ulaşılır. Denklem (3.14)'ün açılımının

$$\left\|y^j\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\cos\left(j-\frac{1}{2}\right)\varphi_k}{\cos\frac{1}{2}\varphi_k}u_{0k}X^{(k)}\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\tau\sin j\varphi_k}{\sin\varphi_k}u_{0k}X^{(k)}\right\|$$

ifadesini sağladığını gözleriz. Kalan denklem (3.18) ve denklem (3.19) değerlendirmelerini kullanarak, sonuçta

$$\|y^j\| \le \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\|u_0\| + \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\tilde{u}_{0k})^2}{\lambda_k}\right)^{1/2}\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bahsi geçen,

$$\left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\tilde{u}_{0k})^2}{\lambda_k}\right)^{1/2}$$

ifadesinin

$$\|\tilde{u}_0\|_{A^{-1}} = (A^{-1}\tilde{u}_{o,}\tilde{u}_o)^{1/2}$$

negatif norm olarak bilinen $H_{A^{-1}}$ uzayı üzerinde kabul edilen bir normdan başkası olmadığını not edelim. Burada $\overline{\omega}_h$ şebekesi üzerinde tanımlı bütün y fonksiyonlar uzayında ve $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sıfırlanarak $A_y = -\Lambda_y = -y_{\bar{x}x}$ olur. Gerçekten,

$$(A^{-1}\tilde{u}_o, \tilde{u}_o) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\tilde{u}_{0k})^2}{\lambda_k}$$

eşitliğini sağlayarak

$$A^{-1}\tilde{u}_0 = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_{ok} A^{-1} X^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tilde{u}_{ok}}{\lambda_k} X^{(k)}$$

elde edilir. Böylece (3.16) şartı altında (3.15) şemasının

$$\|y^j\| \le \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}(\|u_0\| + \|\tilde{u}_0\|_{A^{-1}}) \qquad (3.20)$$

değerlendirmesini kabul ettiğini ispatladık. Bu değerlendirme $\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olmak üzere, (3.4a) şeması için

$$\sigma \ge \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2} \qquad (3.21)$$

kısıtlaması altında geçerliliğini sürdürür. Bunu temin etmek için, yukarıdaki ispatta μ_k 'yı her yerde $\alpha_k = \left(\frac{1}{2}\tau^2\lambda_k\right)(1+\sigma\tau^2\lambda_k)^{-1}$ ile yer değiştirelim.

Superpozisyon ilkesi, çözümü bir

$$y^{j} = \sum_{j'=0}^{j} \tau Y^{j,j'} \tag{3.22}$$

toplam olarak araştırılan

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda y^{(\sigma)} + \varphi, \quad y_0 = y_N = 0, \quad y(x,0) = 0, \quad y_t(x,0) = 0 \tag{3.4b}$$

problemini göz önüne alarak sağ tarafa göre (3.4) şemasının kararlılığını araştırmada bir potansiyel ortaya koyar. Burada, j 'nin bir fonksiyonu olarak $Y^{j,j'}$, sabit tutulan j' için homojen denklemi

$$Y_{\bar{t}t}^{j,j'} = \Lambda\left(\sigma Y^{j+1,j'} + (1-2\sigma)Y^{j,j'} + \sigma Y^{j-1,j'}\right), \quad 0 \le j' < j \tag{3.23}$$

olarak çözer. Öyle ki bu çözüm

$$Y_0^{j,j'} = Y_N^{j,j'} = 0 \tag{3.24}$$

sınır şartları ve

$$Y^{j',j'} = 0, \qquad Y_t^{j',j'} = \frac{Y^{j'+1,j'} - Y^{j',j'}}{\tau} = \frac{Y^{j'+1,j'}}{\tau} = \phi^{j'} \tag{3.25}$$

başlangıç şartları tarafından desteklenir. Buradaki $\phi^{j'}$, (3.4b) homojen olmayan denklemi sağlayacak biçimde seçilir.

Benzer problem, doğal olarak ϕ^{j} fonksiyonu için ortaya çıkar. $Y^{j,j'}$ nin tanımıyla,

$$y_{\bar{t}t}^{j} = \frac{1}{\tau} Y^{j+1,j} + \sum_{j'=0}^{j-1} \tau Y_{\bar{t}t}^{j,j'}$$

$$\Lambda y^{(\sigma)} = \sigma \tau \Lambda Y^{j+1,j} + \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \Lambda\left(Y^{j,j'}\right)^{(\sigma)}$$

olur. Denklem (3.4b) ile beraber bunları yerine koyarak,

$$Y^{j+1,j} - \sigma \tau^2 \Lambda Y^{j+1,j} = \tau \phi^{j'} \tag{3.26}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik, $\phi = \phi^{j} = Y^{j+1,j} \tau^{-1}$ için;

$$\phi - \sigma\tau^2 \Lambda\phi = \varphi, \quad \phi_0 = \phi_N = 0 \tag{3.27}$$

denklemini türetmemize izin verir. Bu kesimin amacı için, (3.21) kararlılık şartı elde edildiğinden, sağ taraftaki φ terimine göre (3.4b) probleminin bir y^j çözümünü değerlendirelim. Bu şart garanti edilerek, (3.20) değerlendirmesi, (3.23) probleminin bir çözümü için kesinlikle doğrudur ve şimdilik

$$\left\|Y^{j,j'}\right\| \le \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left\|Y_t^{j',j'}\right\|_{A^{-1}} = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left\|Y^{j'+1,j'}\right\|_{A^{-1}}$$

şeklini alır. Üçgen eşitsizliği ile (3.22)'den

$$\left\|y^j\right\| \le \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{j'=0}^{j-1} \left\|Y^{j'+1,j'}\right\|_{A^{-1}}$$

sonucunu çıkarırız. (3.27) denklemi, ϕ ve φ'nin $\{X^{(k)}\}$ sisteminin öz fonksiyonlarına göre

$$\phi = \sum_{k=1}^{N-1} \phi_k X^{(k)}, \qquad \varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k X^{(k)} \tag{3.28}$$

serilerine açıldığı $\left\|Y^{j'+1,j'}\right\|_{A^{-1}}$ normunun bir sınırını belirlemeye ihtiyaç duyar. (3.28)'i (3.27)'de yerine yazarak $\phi_k = \varphi_k (1 + \sigma\tau^2\lambda_k)^{-1}$ ifadesine ulaşılır. Elde edilen bu bağıntılarla, $\sigma \ge 0$ için

$$\left\|\Phi\right\|_{A^{-1}}^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Phi_k^2}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k^2}{(1+\sigma\tau^2\lambda_k)^2 \lambda_k} \le \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k^2}{\lambda_k} = \left\|\varphi\right\|_{A^{-1}}^2$$

buluruz. Bu

$$\left\|Y^{j'+1j'}\right\|_{A^{-1}} \le \tau \left\|\varphi^{j'}\right\|_{A^{-1}}$$

anlamına gelir.

Böylece, $\sigma \ge 0$ olur ve (3.21) şartı yerine getirilirse, değerlendirme (3.4b) şeması için

$$\left\| y^{j} \right\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \left\| \varphi^{j'} \right\|_{A^{-1}}$$

olur. Aynı muhakemeyle, önceki gibi (3.4) problemi için $y_0 = y_N = 0$ sınır şartıyla (3.21) koşulu ve $\sigma \geq 0$ kısıtlaması altında

$$\left\| y^{j} \right\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\left\| y^{0} \right\| + \left\| y_t^{0} \right\|_{A^{-1}} + \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \left\| \varphi^{j'} \right\|_{A^{-1}} \right)$$

olduğunu çıkarırız. Böyle durumda $y^1 = y(\tau)$ bir özel seçimi için (3.15) şemasının kararlılığının $\tau \leq h$ kısıtlaması altında L_2 uzayında kanıtlandığını görürüz.

$$y_{\bar{t}t}^{j} = y_{\bar{x}x}^{j}, \qquad j = 1,2,... \tag{3.29}$$

$$y^{0} = u_0, \qquad y_t^{0} = \bar{u}_0 + \frac{1}{2}\tau\, y_{\bar{x}x}^{0} \tag{3.30}$$

fark şemasının (3.1) ve (3.2) denklemine $O(h^2 + \tau^2)$ mertebesinde bir yaklaşım sağladığını biliyoruz. Diğer fikirler $y^0 = u_0$ ve $\bar{u}_0$ aracılığıyla y^j'nin çözümünün ifadeleriyle bağlantılıdır. Belirlendiği gibi,

$$y^{j} = \sum_{k=1}^{N-1} \left(u_{0k} \cos j\varphi_k + \frac{\tau\, \bar{u}_{0k}}{\sin \varphi_k} \sin j\varphi_k \right) X^{(k)} \tag{3.31}$$

olduğunu buluruz. Burada $\bar{u}_{0k}$, u_{0k} ve φ_k büyüklüklerinin anlamı korunacak biçimde, $\bar{u}_0(x)$'in Fourier katsayılarıdır. Denklem (3.31)'in karesini alıp

$$2\left(\frac{\tau\, \bar{u}_{0k}}{\sin \varphi_k} \cos j\varphi_k \right) u_{0k} \sin j\varphi_k \leq \tau^2 \frac{\bar{u}_{0k}^{2}}{\sin^2 \varphi_k} \cos^2 j\varphi_k + u_{0k}^{2} \sin^2 j\varphi_k$$

değerlendirmeyi uygulayarak

$$\left\| y^{j} \right\|^2 \leq \left\| u_0 \right\|^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\bar{u}_{0k}^{2}}{\sin^2 \varphi_k}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$\frac{\tau^2}{\sin^2\varphi_k} = \frac{1}{\lambda_k\left(1-\frac{1}{4}\tau^2\lambda_k\right)}$$

şeklinde yazılır.

İfadesinin alt sınırını hesaplamak için $\gamma = \tau / h \le 1$ alırız. Bu doğrular boyunca

$$\lambda_k\left(1-\frac{\tau^2\lambda_k}{4}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi kh}{2}\left(1-\gamma^2\sin^2\frac{\pi kh}{2}\right)$$

$$\ge \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi kh}{2}\left(1-\sin^2\frac{\pi kh}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi kh}{2}\cos^2\frac{\pi hk}{2}$$

$$\ge \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}\cos^2\frac{\pi h}{2} = \sin^2\frac{\pi h}{h^2}.$$

olduğu açıktır. Kesim 2.2.5'de, $h_1 \le \frac{1}{2}$ ise $4h_1^{-2}\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi h_1\right) \ge 8$ olduğu önceden gösterilmişti. Bu nedenle, $h_1 = 2h$ alınarak,

$$\frac{\sin^2\pi h}{h^2} = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2} \ge 8, \quad h \le \frac{1}{4}$$

olduğunu buluruz. Böylece, $\tau \le h$ ve $h \le \frac{1}{4}$ olursa (3.29) ve (3.30) probleminin çözümü için uygun değerlendirme

$$\left\|y^j\right\|^2 \le \left\|u_0\right\|^2 + \frac{1}{8}\left\|\bar{u}_0\right\|^2$$

olur.

.3. Enerji Eşitsizliği Metodu

Telin titreşim denklemi için fark şemalarının incelenmesi (bölüm 3.1) enerji eşitsizliği metoduyla tamamlanabilir. Burada, probleme ilişkin

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\breve{y})$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad y_t(x,0) = \tilde{u}_0(x) \tag{3.32}$$

başlangıç verisine göre kararlılığa kendimizi kısıtlayacağız. $\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\breve{y} = y + \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}$ olduğunu akılda tutarak ve E özdeşlik operatörü olmak üzere,

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda)y_{\bar{t}t} = \Lambda y \tag{3.33}$$

biçimindeki (3.32) denklemini kast ederek, elde edilen (3.33) denkleminin iç çarpımını ve $y_{\overset{0}{t}} = (y_t + y_{\bar{t}})/2$ büyüklüğünü alırız. Bunun sonucu

$$\left((E - \sigma\tau^2\Lambda)y_{\bar{t}t}, y_{\overset{0}{t}}\right) = \left(\Lambda_y, y_{\overset{0}{t}}\right) \tag{3.34}$$

olur. Aşağıdaki aşikar özdeşlikler,

$$\left(y_{\bar{t}t}, y_{\overset{0}{t}}\right) = \frac{1}{2}\left(\|y_{\bar{t}}\|^2\right)_t \qquad -\left(\Lambda y_{\bar{t}t}, y_{\overset{0}{t}}\right) = \left(y_{\bar{x}\bar{t}t}, y_{\overset{0}{\bar{x}t}}\right] = \frac{1}{2}\left(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|^2\right)_t$$

(3.34) denkleminin sol tarafını

$$\left((E - \sigma\tau^2\Lambda)y_{\bar{t}t}, y_{\overset{0}{t}}\right) = \frac{1}{2}\left(\|y_{\bar{t}}\|^2 + \sigma\tau^2\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2\right)_t \tag{3.35}$$

biçiminde yeniden düzenlememize yardım eder.

Ayrıca, $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sıfırlanan herhangi $y = y(x, t_n)$ fonksiyon için

$$-\left(\Lambda_y, y_{\overset{0}{t}}\right) = \frac{1}{8}\left(\|y_{\bar{x}} + \breve{y}_{\bar{x}}]|^2\right)_t - \frac{\tau^2}{8}\left(\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2\right)_t \tag{3.36}$$

olduğunu göstereceğiz. Gerçekten birinci Green formülünden $v = y_{\bar{x}}$ ile

$$-\left(\Lambda y, y_{\overset{0}{t}}\right) = \left(v, v_{\overset{0}{t}}\right]$$

olduğu çıkar. Öteki

$$v.v_{\overset{0}{t}} = \frac{1}{8}\left((\hat{v}+\check{v})^2\right)_t - \frac{\tau^2}{8}\left((v_{\bar{t}})^2\right)_t$$

gelişmeleri dahil ederek, (3.36) özdeşliğine ulaşırız.

(3.35) denklemini ve (3.36) özdeşliğini (3.34) denkleminde yerine yazarak

$$\left(\|y_{\bar{t}}\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \frac{1}{4}\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}]|^2\right)_t = 0 \tag{3.37}$$

enerji özdeşliğini veya $\varepsilon^{j+1} = \varepsilon^j$ eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\varepsilon^j := \|y_{\bar{t}}^j\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \|y^j{}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \frac{1}{4}\|y^j{}_{\bar{x}} + \check{y}^{j-1}]|^2 \tag{3.38}$$

olur.

$$\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 \le \frac{4}{h^2}\|y_{\bar{t}}\|^2$$

ve

$$\|y_{\bar{t}}\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 \ge \left(\frac{1}{4}h^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2\right)\|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2$$

olan basit gözlemlerle, y^j ve y^{j-1} keyfi alındığında negatif olamayan ε^j büyüklüğü için σ 'nin değerlerini bulalım. Hatırlandığı gibi,

$$\sigma \ge \frac{1}{4} - \frac{1}{4\gamma^2}, \quad \gamma = \frac{\tau}{h} \tag{3.39}$$

ise (3.38) eşitliğinin sağ tarafının negatif olmadığı sonucuna varırız. Burada, $\left(\varepsilon^j\right)^{1/2} = \|y^j\|_*$ ifadesi ,

$$\varepsilon^j = \|y^j\|_*^2 = \|y_{\bar{t}}^j\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \|y^j{}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \frac{1}{4}\|y^j{}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}^{j-1}]|^2 \tag{3.40}$$

yazmamızı sağlayan bir norm (veya daha çok bir semi norm gibi) olarak görülebilir. Çoklu katlardaki y 'nin değerlerine bağlı olarak bir araya gelen böyle normların çok katlı şemalar için tipik olduğunu not edelim. Bu, özellikle üç katlı şemalar için doğrudur.

(3.37) özdeşliği, (3.40) normunda: her $j = 0,1,2,...$ için $\|y^{j+1}\|_* = \|y^0\|_*$ başlangıç verisine göre kararlılığı sağlar.

Böylece, (3.39) şartı,(3.40) normundaki başlangıç verisine göre (3.32) şemasının kararlılığı için yeterlidir. Özellikle $\sigma = 0$ ile (3.32) şeması

$$\tau \le h \tag{3.41}$$

şartı altında başlangıç verisine göre kararlıdır. Ekseriya, bu kararlılık şartına, ilk kez R. Caurant, C. Friedrichs ve G. Levy tarafından 1928'de ispatlandığı için Courant şartı denir (Godunov ve Ryabenkii, 1964, syf 248).

Uzay değişkenlerine göre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.42}$$

denklemi için (3.41) şartı $\tau \le h/a$ şeklini alır. Burada a ses hızıdır.

3.4. Düzgün Olmayan Çözümlerin Fark Metoduyla Belirlenmesi

Gazlar, sıvılar ve katılarda şok süreçleri belirleyen matematik fiziğin çeşitli problemleri, bir telin titreşiminin (3.42) denklemi olan en basit ikinci mertebeden hiperbolik denklemlerin düzgün olmayan çözümlerinin belirlenmesi problemine götürür. Bu çözümler, denklemde bulunan ikinci merteben türevlere sahip olmadığından, "çözüm denklemi sağlar" sözü bazı genellemelere göre anlaşılmalıdır. Genelleştirilmiş çözümlerin mümkün tanımlarından biri, diferansiyel denklemin, (3.42) denkleminde ortaya çıkan sürekli türevleri mevcutsa integralin korunumu kanunundan çıkması gerçeğinden dolayıdır. Bu durumda genel çözümlerin mümkün tanımlarından biri mevcuttur. Bu durumda genel çözüm, $\overline{G} = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ tanım aralığında sınırlı parçalı sürekli $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ türevlerine sahip olan ve

$$\oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = 0,$$

integral denklemini sağlayan bir $u(x,t)$ fonksiyonu olarak anlaşılır. Burada C, $\overline{G}$ tanım aralığında keyfi bir kapalı eğridir. Şayet birinci türevler süreksiz ise $x \pm at = sabit$ karakteristikleri için;

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \pm a \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad [f] := f(\xi + 0) - f(\xi - 0) \quad \xi = x \pm at$$

sıçrama şartları sağlanmalıdır.

Problemin bir genelleştirilen çözümünde verilene

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} dx = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} 0,\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{3.43}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x),\ u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0$$

ek şartların uygunluğu ile ağırlık parametreli şemaya

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}),\ \ \Lambda y = a^2 y_{\bar{x}x} \tag{3.44}$$

güveniriz. Ağırlık parametreli şemanın yaklaşım hatasını incelerken (3.43) probleminin bir çözümünün var ve yeterince düzgün olduğu kabul edilir. Başlangıç verisinin düzgünlüğüne bağlı belirli şartlar altında mümkündür.

Şayet $u = u(x,t)$ genelleştirilmiş bir çözüm ise aynı şema yakınsar mı? (3.44) probleminin şebeke çözümü $O\left(\sqrt{\sqrt{t} + \tau}\right)$ kesinliğiyle genelleştirilmiş çözüme yakınsama meydana gelir. Bu ifadeyi doğrulama üzerinde durmayacağız.

(3.43) probleminin genelleştirilmiş bir çözümünü bulmaya çalışarak, şebeke çözümünün salınımları ve şemanın doğruluğunu azaltan türevleri (dalgacık) rastlaşır. Dahası, türevlerin süreksizlik doğruları, uygun süreksiz yayılma hızının belirlenmesinde zorluklara sebep olan birkaç şebeke aralıkları üzerinde yayılır. Bu, fark yaklaşımında sürtünmesiz (dissipasyonu) sunumunun sonucudur.

Diferansiyel denklem için bütün harmonikler aynı a hızına sahip olduğundan, dalgacık fark harmonilerinin dispersiyonun (serpintilerinin) ortaya çıkışı gerçeği, yani harmonik hızın belirlenmesinin sayısına bağlı olma gerçeğiyle şarta bağlanır. Bir şemanın kalitesini iyileştirmek için dispersiyonu minimize etmeye ihtiyaç duyulur. Ağırlık parametreli (3.44) şeması ile ilişki kurulursa

$$\sigma = \sigma_* = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right), \quad \gamma = \frac{a\tau}{h}$$

ifadesine bağlı fark şemaları arasında en az yayılma vardır ve yukarıda bahsedilen engelin üstesinden gelmemizi sağlar. Yakınsama 4. mertebedendir, yani yeterince düzgün $u = (x,t)$ çözümleri üzerinde $O(\tau^4 + h^4)$ olur. Düzgün olmayan genelleştirilmiş çözümler üzerinde $\sigma = \sigma_*$ ağırlık parametreli (3.44) şeması için yaklaşım hatası, herhangi $\sigma \neq \sigma_*$ ağırlık parametreli şemanınki kadar büyük olur. Bununla birlikte indirgenmiş dispersiyona göre $\sigma = \sigma_*$ ağırlık parametreli şema daha kesindir ve genelleştirilmiş çözümlerin karakteristik özellikleri çok daha iyi üretilir.

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{4\gamma^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

gibi (3.44) şeması için belirlenen kararlılık şartı, $\gamma \leq 1$ veya $\tau \leq h/a$ ise, yani açık şemaya göre aynı şartlar altında $\sigma = \sigma_*$ ağırlık parametreli şema için kesin olarak doğrudur. Bu bağlamda

$$\sigma_* = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \leq 0$$

olur.

Viskoziteyi sunarak dalgacığı gevşetme teşebbüsünde, çözümün görüntüsünde ve kesinliğin kayıplarında sapmanın oluştuğunu burada vurgulayalım.

EK BÖLÜM

Nümerik Örnek ve Program

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0,\ 0 < x < 1, 0 < t,$$

hiperbolik diferansiyel denkleminin

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, 0 < t$$

sınır şartları ve

$$u(x,0) = \sin(\pi x), 0 \le x \le 1 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, 0 \le x \le 1$$

başlangıç şartlarını göz önüne alalım. Bu problemin kesin çözümü

$u(x,t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$ ’dir.

Sonlu fark sağ eliminasyon algoritması, $m = 10,\ T = 1,\ N = 20$ ile $h = 0.1,\ \tau = 0.05$ ve $\lambda = 1$ olacak şekilde kullanılmıştır

C++ programı ve sonuçları aşağıdadır. Örneğin sonuçları gerçekleşmiştir. Öyle ki kesme hatası $O(\tau^2 + h^2)$ olarak sonuçlanmıştır.

```
#include<math.h>
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#define M1 50
#define pi 3,14159265358979323 85
float x,x0,x1,t,t0,t1,yb,ys,h,k,T1;
int n,i,j,m;
float w[M1][M1],;
float f(float x)
        {return(sin(pi*x));}
```

```
float g(float x)
        {return(x-x);}
float fi(float x,float t)
        {return(x-x-t+t);}
float u(float x,float t)
        {return(sin(pi*x)*cos(2*pi*t));}
main()
{printf("x0 sayısını giriniz....");     scanf("%f",&x0);
 printf("x1 sayısını giriniz....");     scanf("%f",&x1);
 printf("t0 sayısını giriniz....");     scanf("%f",&t0);
 printf("t1 sayısını giriniz....");     scanf("%f",&t1);
 printf("y0 alt sınır değerini giriniz....");scanf("%f",&yb);
 printf("ys üst sınır değerini giriniz....");scanf("%f",&ys);
 printf("n sayısını giriniz....");      scanf("%d",&n);
 printf("m sayısını giriniz....");      scanf("%d",&m);
 h=(x1-x0)/n;
 k=(t1-t0)/m;
 T1=2*k/h;
 for (j=1;j<=m;j++)
     {w[0][j]=yb;
      w[n][j]=ys;}
  w[0][0]=f(x0);
  w[n][0]=f(x1);
 for (i=1;i<=n-1;i++)
     {x=x0+i*h;
     w[i][0]=f(x);
     w[i][1]=(1-T1*T1)*f(x)+(T1*T1/2)*(f(x0+(i+1)*h)+f(x0+(i-
1)*h))+k*g(x);}
 for (j=1;j<=m-1;j++)
    {t=t0+j*k;
     for (i=1;i<=n-1;i++)
       {x=x0+i*h;
```

```
        w[i][j+1]=2*(1-T1*T1)*w[i][j]+(T1*T1)*(w[i+1][j]+w[i-1][j])
                  -w[i][j-1]+(k*k)*fi(x,t);
        }
    }
for (j=0;j<=m;j++)
   {t=t0+j*k;
    for (i=0;i<=n;i++)
        {x=x0+i*h;
        printf("t= %10.8f  x= %10.8f  y=  %11.8f u=%11.8f  hata=%10.8f \n",
                   t,x,w[i][j],u(x,t),fabs(w[i][j]-u(x,t)));}
    }
 getch();
   }
```

x0 sayısını giriniz....0 x1 sayısını giriniz....1 t0 sayısını giriniz....0 t1 sayısını giriniz....1 y0 alt sınır değerini giriniz....0 ys üst sınır değerini giriniz....0 n sayısını giriniz....10 m sayısını giriniz....20				
t	**x**	**y**	**u**	**Hata**
0.00000000	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.00000000	**0.10000000**	**0.30901700**	**0.30901700**	**0.00000000**
0.00000000	**0.20000000**	**0.58778524**	**0.58778524**	**0.00000000**
0.00000000	**0.30000001**	**0.80901700**	**0.80901700**	**0.00000000**
0.00000000	**0.40000001**	**0.95105654**	**0.95105654**	**0.00000000**
0.00000000	**0.50000000**	**100000000**	**100000000**	**0.00000000**
0.00000000	**0.60000002**	**0.95105648**	**0.95105648**	**0.00000000**
0.00000000	**0.69999999**	**0.80901700**	**0.80901700**	**0.00000000**
0.00000000	**0.80000001**	**0.58778524**	**0.58778524**	**0.00000000**
0.00000000	**0.90000004**	**0.30901688**	**0.30901688**	**0.00000000**
0.00000000	**100000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.05000000	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.05000000	**0.10000000**	**0.29389262**	**0.29389262**	**0.00000000**
0.05000000	**0.20000000**	**0.55901700**	**0.55901700**	**0.00000000**
0.05000000	**0.30000001**	**0.76942086**	**0.76942092**	**0.00000006**
0.05000000	**0.40000001**	**0.90450847**	**0.90450853**	**0.00000006**
0.05000000	**0.50000000**	**0.95105648**	**0.95105654**	**0.00000006**
0.05000000	**0.60000002**	**0.90450847**	**0.90450847**	**0.00000000**
0.05000000	**0.69999999**	**0.76942086**	**0.76942092**	**0.00000006**
0.05000000	**0.80000001**	**0.55901694**	**0.55901694**	**0.00000000**
0.05000000	**0.90000004**	**0.29389262**	**0.29389253**	**0.00000009**
0.05000000	**100000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.10000000	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.10000000	**0.10000000**	**0.25000000**	**0.25000000**	**0.00000000**
0.10000000	**0.20000000**	**0.47552824**	**0.47552827**	**0.00000003**
0.10000000	**0.30000001**	**0.65450847**	**0.65450853**	**0.00000006**
0.10000000	**0.40000001**	**0.76942080**	**0.76942086**	**0.00000006**
0.10000000	**0.50000000**	**0.80901694**	**0.80901700**	**0.00000006**
0.10000000	**0.60000002**	**0.76942086**	**0.76942086**	**0.00000000**
0.10000000	**0.69999999**	**0.65450841**	**0.65450853**	**0.00000012**
0.10000000	**0.80000001**	**0.47552824**	**0.47552824**	**0.00000000**
0.10000000	**0.90000004**	**0.25000006**	**0.24999991**	**0.00000015**
0.10000000	**100000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.15000001	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**

t	x	y	u	Hata
0.15000001	0.10000000	0.18163562	0.18163562	0.00000000
0.15000001	0.20000000	0.34549147	0.34549150	0.00000003
0.15000001	0.30000001	0.47552818	0.47552824	0.00000006
0.15000001	0.40000001	0.55901694	0.55901694	0.00000000
0.15000001	0.50000000	0.58778518	0.58778524	0.00000006
0.15000001	0.60000002	0.55901688	0.55901694	0.00000006
0.15000001	0.69999999	0.47552824	0.47552824	0.00000000
0.15000001	0.80000001	0.34549153	0.34549147	0.00000006
0.15000001	0.90000004	0.18163562	0.18163556	0.00000006
0.15000001	100000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.20000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.20000000	0.10000000	0.09549147	0.09549150	0.00000003
0.20000000	0.20000000	0.18163556	0.18163562	0.00000006
0.20000000	0.30000001	0.24999994	0.24999999	0.00000004
0.20000000	0.40000001	0.29389256	0.29389262	0.00000006
0.20000000	0.50000000	0.30901688	0.30901697	0.00000009
0.20000000	0.60000002	0.29389256	0.29389259	0.00000003
0.20000000	0.69999999	0.25000000	0.24999999	0.00000001
0.20000000	0.80000001	0.18163562	0.18163562	0.00000000
0.20000000	0.90000004	0.09549147	0.09549146	0.00000001
0.20000000	100000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.25000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.25000000	0.10000000	-0.00000006	0.00000000	0.00000006
0.25000000	0.20000000	-0.00000006	0.00000000	0.00000006
0.25000000	0.30000001	-0.00000006	0.00000000	0.00000006
0.25000000	0.40000001	-0.00000012	0.00000000	0.00000012
0.25000000	0.50000000	-0.00000006	0.00000000	0.00000006
0.25000000	0.60000002	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.25000000	0.69999999	-0.00000006	0.00000000	0.00000006
0.25000000	0.80000001	-0.00000006	0.00000000	0.00000006
0.25000000	0.90000004	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.25000000	100000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.30000001	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.30000001	0.10000000	-0.09549153	-0.09549153	0.00000000
0.30000001	0.20000000	-0.18163568	-0.18163568	0.00000000
0.30000001	0.30000001	-0.25000012	-0.25000006	0.00000006
0.30000001	0.40000001	-0.29389268	-0.29389268	0.00000000
0.30000001	0.50000000	-0.30901700	-0.30901706	0.00000006
0.30000001	0.60000002	-0.29389268	-0.29389268	0.00000000
0.30000001	0.69999999	-0.25000006	-0.25000006	0.00000000
0.30000001	0.80000001	-0.18163568	-0.18163566	0.00000001
0.30000001	0.90000004	-0.09549153	-0.09549149	0.00000004

t	x	y	u	Hata
0.30000001	100000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.34999999	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.34999999	0.10000000	-0.18163562	-0.18163562	0.00000000
0.34999999	0.20000000	-0.34549159	-0.34549150	0.00000009
0.34999999	0.30000001	-0.47552830	-0.47552824	0.00000006
0.34999999	0.40000001	-0.55901700	-0.55901694	0.00000006
0.34999999	0.50000000	-0.58778530	-0.58778524	0.00000006
0.34999999	0.60000002	-0.55901706	-0.55901694	0.00000012
0.34999999	0.69999999	-0.47552830	-0.47552824	0.00000006
0.34999999	0.80000001	-0.34549153	-0.34549147	0.00000006
0.34999999	0.90000004	-0.18163568	-0.18163556	0.00000012
0.34999999	100000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.40000001	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.40000001	0.10000000	-0.25000006	-0.25000000	0.00000006
0.40000001	0.20000000	-0.47552824	-0.47552827	0.00000003
0.40000001	0.30000001	-0.65450847	-0.65450853	0.00000006
0.40000001	0.40000001	-0.76942092	-0.76942092	0.00000000
0.40000001	0.50000000	-0.80901706	-0.80901700	0.00000006
0.40000001	0.60000002	-0.76942092	-0.76942086	0.00000006
0.40000001	0.69999999	-0.65450853	-0.65450853	0.00000000
0.40000001	0.80000001	-0.47552830	-0.47552824	0.00000006
0.40000001	0.90000004	-0.25000000	-0.24999993	0.00000007
0.40000001	100000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.45000002	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.45000002	0.10000000	-0.29389262	-0.29389265	0.00000003
0.45000002	0.20000000	-0.55901694	-0.55901700	0.00000006
0.45000002	0.30000001	-0.76942086	-0.76942092	0.00000006
0.45000002	0.40000001	-0.90450853	-0.90450853	0.00000000
0.45000002	0.50000000	-0.95105654	-0.95105654	0.00000000
0.45000002	0.60000002	-0.90450853	-0.90450853	0.00000000
0.45000002	0.69999999	-0.76942092	-0.76942092	0.00000000
0.45000002	0.80000001	-0.55901700	-0.55901700	0.00000000
0.45000002	0.90000004	-0.29389262	-0.29389253	0.00000009
0.45000002	100000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.50000000	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.50000000	0.10000000	-0.30901688	-0.30901700	0.00000012
0.50000000	0.20000000	-0.58778524	-0.58778524	0.00000000
0.50000000	0.30000001	-0.80901700	-0.80901700	0.00000000
0.50000000	0.40000001	-0.95105648	-0.95105654	0.00000006
0.50000000	0.50000000	-100000000	-100000000	0.00000000
0.50000000	0.60000002	-0.95105654	-0.95105648	0.00000006
0.50000000	0.69999999	-0.80901700	-0.80901700	0.00000000

t	x	y	u	Hata
0.50000000	0.80000001	-0.58778524	-0.58778524	0.00000000
0.50000000	0.90000004	-0.30901700	-0.30901688	0.00000012
0.50000000	100000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.55000001	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.55000001	0.10000000	-0.29389262	-0.29389262	0.00000000
0.55000001	0.20000000	-0.55901694	-0.55901700	0.00000006
0.55000001	0.30000001	-0.76942086	-0.76942086	0.00000000
0.55000001	0.40000001	-0.90450847	-0.90450847	0.00000000
0.55000001	0.50000000	-0.95105648	-0.95105648	0.00000000
0.55000001	0.60000002	-0.90450847	-0.90450847	0.00000000
0.55000001	0.69999999	-0.76942086	-0.76942086	0.00000000
0.55000001	0.80000001	-0.55901700	-0.55901694	0.00000006
0.55000001	0.90000004	-0.29389262	-0.29389250	0.00000012
0.55000001	100000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.60000002	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.60000002	0.10000000	-0.25000006	-0.24999997	0.00000009
0.60000002	0.20000000	-0.47552824	-0.47552821	0.00000003
0.60000002	0.30000001	-0.65450841	-0.65450847	0.00000006
0.60000002	0.40000001	-0.76942086	-0.76942080	0.00000006
0.60000002	0.50000000	-0.80901694	-0.80901688	0.00000006
0.60000002	0.60000002	-0.76942080	-0.76942080	0.00000000
0.60000002	0.69999999	-0.65450847	-0.65450847	0.00000000
0.60000002	0.80000001	-0.47552824	-0.47552818	0.00000006
0.60000002	0.90000004	-0.25000000	-0.24999988	0.00000012
0.60000002	100000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.65000004	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.65000004	0.10000000	-0.18163562	-0.18163557	0.00000004
0.65000004	0.20000000	-0.34549153	-0.34549141	0.00000012
0.65000004	0.30000001	-0.47552824	-0.47552812	0.00000012
0.65000004	0.40000001	-0.55901688	-0.55901682	0.00000006
0.65000004	0.50000000	-0.58778518	-0.58778507	0.00000012
0.65000004	0.60000002	-0.55901694	-0.55901682	0.00000012
0.65000004	0.69999999	-0.47552818	-0.47552812	0.00000006
0.65000004	0.80000001	-0.34549147	-0.34549138	0.00000009
0.65000004	0.90000004	-0.18163562	-0.18163551	0.00000010
0.65000004	100000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.69999999	0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.69999999	0.10000000	-0.09549147	-0.09549153	0.00000006
0.69999999	0.20000000	-0.18163562	-0.18163568	0.00000006
0.69999999	0.30000001	-0.25000000	-0.25000006	0.00000006
0.69999999	0.40000001	-0.29389256	-0.29389268	0.00000012
0.69999999	0.50000000	-0.30901688	-0.30901706	0.00000018

t	x	y	u	Hata
0.69999999	**0.60000002**	**-0.29389256**	**-0.29389268**	**0.00000012**
0.69999999	**0.69999999**	**-0.24999994**	**-0.25000006**	**0.00000012**
0.69999999	**0.80000001**	**-0.18163556**	**-0.18163566**	**0.00000010**
0.69999999	**0.90000004**	**-0.09549147**	**-0.09549149**	**0.00000002**
0.69999999	**100000000**	**0.00000000**	**-0.00000000**	**0.00000000**
0.75000000	**0.00000000**	**0.00000000**	**-0.00000000**	**0.00000000**
0.75000000	**0.10000000**	**0.00000000**	**-0.00000000**	**0.00000000**
0.75000000	**0.20000000**	**0.00000006**	**-0.00000000**	**0.00000006**
0.75000000	**0.30000001**	**0.00000006**	**-0.00000000**	**0.00000006**
0.75000000	**0.40000001**	**0.00000000**	**-0.00000000**	**0.00000000**
0.75000000	**0.50000000**	**0.00000006**	**-0.00000000**	**0.00000006**
0.75000000	**0.60000002**	**0.00000012**	**-0.00000000**	**0.00000012**
0.75000000	**0.69999999**	**0.00000006**	**-0.00000000**	**0.00000006**
0.75000000	**0.80000001**	**0.00000006**	**-0.00000000**	**0.00000006**
0.75000000	**0.90000004**	**0.00000006**	**-0.00000000**	**0.00000006**
0.75000000	**100000000**	**0.00000000**	**-0.00000000**	**0.00000000**
0.80000001	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.80000001	**0.10000000**	**0.09549153**	**0.09549153**	**0.00000000**
0.80000001	**0.20000000**	**0.18163568**	**0.18163568**	**0.00000000**
0.80000001	**0.30000001**	**0.25000006**	**0.25000006**	**0.00000000**
0.80000001	**0.40000001**	**0.29389268**	**0.29389268**	**0.00000000**
0.80000001	**0.50000000**	**0.30901700**	**0.30901706**	**0.00000006**
0.80000001	**0.60000002**	**0.29389268**	**0.29389268**	**0.00000000**
0.80000001	**0.69999999**	**0.25000012**	**0.25000006**	**0.00000006**
0.80000001	**0.80000001**	**0.18163568**	**0.18163566**	**0.00000001**
0.80000001	**0.90000004**	**0.09549153**	**0.09549149**	**0.00000004**
0.80000001	**100000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.85000002	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.85000002	**0.10000000**	**0.18163568**	**0.18163568**	**0.00000000**
0.85000002	**0.20000000**	**0.34549153**	**0.34549159**	**0.00000006**
0.85000002	**0.30000001**	**0.47552830**	**0.47552836**	**0.00000006**
0.85000002	**0.40000001**	**0.55901706**	**0.55901712**	**0.00000006**
0.85000002	**0.50000000**	**0.58778530**	**0.58778536**	**0.00000006**
0.85000002	**0.60000002**	**0.55901700**	**0.55901712**	**0.00000012**
0.85000002	**0.69999999**	**0.47552830**	**0.47552836**	**0.00000006**
0.85000002	**0.80000001**	**0.34549159**	**0.34549156**	**0.00000003**
0.85000002	**0.90000004**	**0.18163562**	**0.18163560**	**0.00000001**
0.85000002	**100000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.90000004	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.90000004	**0.10000000**	**0.25000000**	**0.25000003**	**0.00000003**
0.90000004	**0.20000000**	**0.47552830**	**0.47552833**	**0.00000003**
0.90000004	**0.30000001**	**0.65450853**	**0.65450865**	**0.00000012**

t	**x**	**y**	**u**	**Hata**
0.90000004	**0.40000001**	**0.76942092**	**0.76942104**	**0.00000012**
0.90000004	**0.50000000**	**0.80901706**	**0.80901712**	**0.00000006**
0.90000004	**0.60000002**	**0.76942092**	**0.76942098**	**0.00000006**
0.90000004	**0.69999999**	**0.65450847**	**0.65450865**	**0.00000018**
0.90000004	**0.80000001**	**0.47552824**	**0.47552830**	**0.00000006**
0.90000004	**0.90000004**	**0.25000006**	**0.24999996**	**0.00000010**
0.90000004	**100000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.94999999	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
0.94999999	**0.10000000**	**0.29389262**	**0.29389262**	**0.00000000**
0.94999999	**0.20000000**	**0.55901700**	**0.55901700**	**0.00000000**
0.94999999	**0.30000001**	**0.76942092**	**0.76942086**	**0.00000006**
0.94999999	**0.40000001**	**0.90450853**	**0.90450847**	**0.00000006**
0.94999999	**0.50000000**	**0.95105654**	**0.95105648**	**0.00000006**
0.94999999	**0.60000002**	**0.90450853**	**0.90450847**	**0.00000006**
0.94999999	**0.69999999**	**0.76942086**	**0.76942086**	**0.00000000**
0.94999999	**0.80000001**	**0.55901694**	**0.55901694**	**0.00000000**
0.94999999	**0.90000004**	**0.29389262**	**0.29389250**	**0.00000012**
0.94999999	**100000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
100000000	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**
100000000	**0.10000000**	**0.30901700**	**0.30901700**	**0.00000000**
100000000	**0.20000000**	**0.58778524**	**0.58778524**	**0.00000000**
100000000	**0.30000001**	**0.80901700**	**0.80901700**	**0.00000000**
100000000	**0.40000001**	**0.95105654**	**0.95105654**	**0.00000000**
100000000	**0.50000000**	**100000000**	**100000000**	**0.00000000**
100000000	**0.60000002**	**0.95105648**	**0.95105648**	**0.00000000**
100000000	**0.69999999**	**0.80901700**	**0.80901700**	**0.00000000**
100000000	**0.80000001**	**0.58778524**	**0.58778524**	**0.00000000**
100000000	**0.90000004**	**0.30901688**	**0.30901688**	**0.00000000**
100000000	**100000000**	**0.00000000**	**0.00000000**	**0.00000000**

KAYNAKLAR

Amirali, G., Duru, H., 2002. ***Nümerik Analiz***. Pegama Yayıncılık. Ankara.

Amiraliyev, G.M., 2005. ***The Convergence of A Finite Diferrence Method on Layer Adapted Mesh for A Singularly Perturbed System***. Applied Mathematics and Computation, 162, 1023-1034.

Ascher, U. M., Mattheıj, R. M. M., Russel, R. D., 1988. ***Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations***. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.; 595 pp.

Doolan, E. P., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A., 1980**. *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers.*** Boole Press, Dublin.

George, K., Twizell, E. H., 2006. ***Stable Second Order Finite-Difference Methods for Linear Initial-Boundary Value Problems.***, Applied Mathematics Letters, 19, 146-154.

Godunov, S., Ryabenkii, V., 1964. ***Introduction to the Theory of Difference Schemes***. Interscience: New York.

Hsiao, G. C., Weinacth, R. J., 1983. ***Singulary Perturbation for A Semilinear Hyperbolic Equation,*** SIAM J. Math. Anal. 14, 6.

Lees, M., 1960. ***Energy Inequalities for The Solution of Differential Equations***, Trans. Amer. Math. Soc., 94, 1, 58-73.

Memmedov, Y. C., 1980. ***Eşitsizlikler Hakkında Teoremler***, İlim, Aşkabad.

Murray H. Protter, Hans F. Weinberger, 1984. ***Maximum Principles in Differential Equations.*** Newyork.

Samarskii, A. A., 2001. ***The Theory of Difference Schemes.*** Marcel Dekker, Inc. New York (English).

Young C. E.,1972, ***Partial Differential Equations an Introduction***. Allyn and Bacon inc. Boston.

ÖZ GEÇMİŞ

1984 yılında Aksaray / Merkez’de doğdu. İlk, orta ve lise öğretimini Aksaray’da tamamladı. 2002 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliğini kazandı. 2007 yılında bölüm birincisi olarak bitirdi ve aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.