T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN KARARSIZLIĞI VE PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN : Melike KARTA
DANIŞMAN : Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN - 2010

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN KARARSIZLIĞI VE PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN : Melike KARTA
DANIŞMAN : Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN - 2010

KABUL ve ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda, Prof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, Melike KARTA tarafından sunulan "*Diferansiyel Denklemlerde Çözümlerin Kararsızlığı ve Periyodik Çözümlerin Varlığı*" isimli bu çalışma "Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği" ve "Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi"nin ilgili hükümleri gereğince 26/02/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:	Prof. Dr. Cemil TUNÇ	İmza:
Üye :	Doç. Dr. E. İnan ÇINAR	İmza:
Üye :	Doç. Dr. Zeynel YALÇIN	İmza:
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Fevzi ERDOĞAN	İmza:
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN	İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..…/..…/…….. gün ve ………….. ……………………..sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN KARARSIZLIĞI VE PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

KARTA, Melike
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Şubat 2010, 66 Sayfa

Bu tez birinci ve ikinci bölümleri sırasıyla Giriş, Materyal ve Yöntem bölümleri olmak üzere toplam altı bölümden oluşmaktadır. Tezin üçüncü bölümünde, tez konusu ile ilgili olan bazı temel tanımlar, teoremler ve bir lemma verilecektir. Dördüncü bölümde, beşinci basamaktan lineer olmayan vektör diferansiyel denklemlerinin sıfır çözümlerinin kararsız olduklarını göstermek için bazı Lyapunov fonksiyonları tanımlanarak ispatlar yapılacaktır. Yapılan ispatlarda Krasovskii kriterleri esas alınacaktır. Beşinci bölümde, dördüncü bölümde ifade edilen beşinci basamaktan lineer olmayan vektör diferansiyel denklemlerinin sıfırdan başka periyodik çözümlerinin olmadığı durumu ele alınacaktır. Tezin son bölümünde ise altıncı ve yedinci basamaktan lineer olmayan bazı vektör diferansiyel denklemlerin sıfırdan başka periyodik çözümlerinin mevcut olmadığı durumu incelenecektir.

Anahtar kelimeler: Diferansiyel denklemler, Lyapunov fonksiyonu, Kararsızlık, Periyodik çözümler.

ABSTRACT

INSTABILITY OF THE SOLUTIONS AND EXISTENCE OF THE PERIODIC SOLUTIONS IN DIFFERENTIAL EQUATIONS

KARTA, Melike
Ph.D. Thesis Mathematics Science
Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
February 2010, 66 Pages

This thesis consists of six chapters, first and second of which are Introduction and Material and Method. In the third chapter of the thesis, some fundamental definitions, theorems and a lemma related to the subject of the thesis are given. In the fourth chapter, to show that the zero solution of fifth order nonlinear vector differential equations is unstable, some Lyapunov functions are defined and the results are proved. In the proofs, Krasovskii criteria are taken as a basis. In the fifth chapter, the result that fifth order nonlinear vector differential equations defined in fourth chapter has no periodic solution other than the trivial solution is handled. In the last chapter of the thesis, the situation that sixth and seventh order nonlinear vector differential equations have no periodic solution other than the trivial solution is investigated.

Key words: Differential equation, Lyapunov function, Instability, Periodic solutions.

ÖN SÖZ

Bilindiği üzere adi diferansiyel denklemlerin temel özellikleri yaygın biçimde bu denklemlerin niteliksel teorileri ile ilgilidir.

Diferansiyel denklemlerde niteliksel teori, diferansiyel denklemleri çözmeksizin bu denklemlerin yörüngelerinin davranışlarını ele alır. Bir dinamik sistemi temsil eden bir diferansiyel denklemin veya inceleme altındaki bir diferansiyel denklemin çözümü bulunabilirse bu denklemlerin çözümlerinin kararlılık, kararsızlık, sınırlılık vb. özellikleri söz konusu kavramlara ait tanımlar doğrudan uygulanarak belirlenebilir. Ancak genelde nümerik metotlar hariç lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemleri bazı özel durumlar hariç çözmek mümkün değildir. Ayrıca yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması daha zordur. Bu nedenle diferansiyel denklemleri çözmeksizin çözümlerinin davranışları hakkında bilgiler elde etmek son derece önemlidir.

Matematik literatüründe şimdiye kadar diferansiyel denklemleri çözmeksizin onların çözümlerini temsil eden yörüngelerinin davranışlarını yorumlama ile alakalı bazı yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler arasında Lyapunov'un ikinci metodu veya Doğrudan metodu en iyi bilinenler arasındadır. Şöyleki; bu metot diferansiyel denklemlerin çözümlerini kararlılık, kararsızlık, sınırlılık, periyodik çözümlerin varlığı vb. durumlarını incelemede temel bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemin temel avantajı çözümler hakkında herhangi bir bilgiye sahip olmaksızın onların niteliksel davranışları hakkında bahsetmemize imkân verir. Metodun esası inceleme altındaki denklem veya sistem için uygun bir fonksiyon inşa edilmesine dayanmaktadır. Bu fonksiyon ise Lyapunov fonksiyonu olarak bilinir. Ancak yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler için uygun bir Lyapunov fonksiyonu oluşturmak veya tanımlamak çok zordur. Biz bu tez çalışmasında uygun bazı Lyapunov fonksiyonu tanımlayarak belli bir biçimde verilen yüksek basamaktan lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin kararsızlığını inceleyeceğiz. Belirtelim ki bilinen yöntemlerle inceleme altındaki denklemleri çözmek çok zordur. Çözümlerin kararsızlığı ile ilgili teoremleri ispatlamada Lyapunov fonksiyonu kullanılırken Krasovskii kriterleri esas alınacaktır. Yine tez çalışmasında periyodik çözümleri incelerken literatürde daha önceden tanımlanmış olan Lyapunov fonksiyonu kullanılacaktır. İspatlanacak olan teoremlerde literatürde kullanılmış olan prosedür uygulanacaktır.

Tezin her aşamasında beni yönlendiren danışman hocam Prof. Dr. Cemil Tunç'a teşekkür ederim. Bitirmem için hep bir neden bulup beni teşvik eden maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen canım aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Diferansiyel denklemler fizik, mühendislik vb. anabilim dallarında pek çok uygulamada yer almaktadır. Bu tezde, diferansiyel denklemlerde çözümlerin kararsızlığı ve periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili bir çalışmada bulunulacaktır.

Matematik literatürünü incelememiz boyunca beşinci basamaktan farklı biçimde lineer olmayan, skaler ve vektör diferansiyel denklemlerde çözümlerin kararsızlığı günümüze kadar incelendiği ve halen bu konuda çalışmaların sürdüğü görülmüştür.

Bu konuda çalışmaların bir kısmı sırası ile aşağıdaki gibi özetlenebilir; yaptığımız araştırmalara göre ilk olarak Ezeilo (1978b), beşinci basamaktan lineer olmayan skaler ve farklı biçimde verilen üç diferansiyel denklem için sıfır çözümünün kararsız olmasını sağlayan ve yeter şartlar içeren bazı teoremler ispatladı. Daha sonra Ezeilo (1979a), farklı bir lineer olmayan skaler diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsız olmasını sağlayan ve yeter şartlar içeren bir teorem ispatladı. Yine benzer bir sonuç, aynı türden ancak farklı modeldeki lineer olmayan skaler bir diferansiyel denklem için Tiryaki (1987) tarafından oluşturuldu.

Li ve Yu (1990), farklı biçimde verilen lineer olmayan bir diferansiyel denklem modelinin sıfır çözümünün kararsızlığını inceledi. Yine konu ile alakalı benzer bazı sonuçlar farklı biçimdeki skaler ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri için Li ve Duan (2000) tarafından oluşturuldu.

Konu ile alakalı olarak yapılan benzer çalışmalar farklı modeldeki bazı skaler diferansiyel denklemler için Villari (1964), Losprime (1966), Reissig ve ark. (1974), Ezeilo (1978a), Ezeilo (1979b), Skrapek (1980), Ezeilo (1982a), Liao ve Lu (1988), Sun ve Hou (1990), Andres (1996), Athanassov (1999), Dong ve Zhong (1999), Ezeilo (2000), De la Sen (2003), Tunç (2009a) gibi kaynaklara başvurulabilir.

Farklı modelde verilen beşinci basamaktan vektör diferansiyel denklemlerinin sıfır çözümünün kararsızlığı için yeter şartlar içeren bazı sonuçlar Sadek (2003), Tunç (2004), Tunç(2005), Tunç ve Şevli (2005), Tunç (2007), Tunç(2008), Tunç ve Karta (2008) tarafından ispatlandı.

Ayrıca yine matematik literatürünü incelememiz boyunca altıncı ve yedinci basamaktan bazı lineer olmayan vektör diferansiyel denklemlerinin de periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili günümüze kadar birçok çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar Bereketoğlu (1992), Tejumola (1995) gibi araştırmacılar tarafından gerçekleştirilmiştir.

Konu ile alakalı olarak altıncı ve yedinci basamaktan bazı lineer olmayan skaler diferansiyel denklemler için Tiryaki (1990), Tunç (2008) ve Tunç (2009b) gibi kaynaklara başvurulabilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tezde, materyal olarak literatür bildirişlerinde ve tezin kaynaklar kısmında bulunan makale ve kitaplar kullanılmaktadır. Tezde, yöntem olarak kararsızlık teoremlerini ispatlamada Krasovskii (1955) kriterleri esas alınarak Lyapunov (1966) ikinci metodu kullanılmaktadır. Periyodik ile ilgili teoremler ise yine Lyapunov fonsiyonları yardımı ile ispatlanmaktadır.

.

3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler örnekleriyle birlikte gösterilecektir. Bunun yanı sıra bir lemma verilecektir. Bu temel bilgiler için LaSalle ve Lefschetz (1961), Liu (2003), Jordan ve Smith (2007) gibi araştırmacıların kitaplarına bakılabilir.

Tanım 3.1.

$Q \subset R^n$ sıfır vektörünü içinde bulunduran bir bölge *ve* $V: Q \to [0,\infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $V(0) = 0$, $x \neq 0$ için $V(x) > 0$ ise V fonksiyonuna pozitif tanımlıdır denir. Eğer $V(x) \geq 0$ ise V fonksiyonuna pozitif yarı tanımlıdır denir.

Örnek:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

fonksiyonu R^2 de pozitif tanımlıdır. Çünkü

$$V(0,0) = 0, x_1 \neq 0 \text{ ve } x_2 \neq 0 \text{ için } V(x_1, x_2) > 0$$

olur.

Tanım 3.2

$Q \subset R^n$ sıfır vektörünü içinde bulunduran bir bölge olsun. $V: Q \to [0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer V pozitif tanımlı ve V sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahip ise V ye bir Lyapunov fonksiyonu denir.

Örnek:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

fonksiyonu bir Lyapunov fonksiyonudur. Çünkü V fonksiyonu R^2 de pozitif tanımlı ve V sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahiptir.

$Q \subset R^n$ sıfır vektörünü içinde bulunduran bir bölge olmak üzere $D = [0,\infty)xQ$ bölgesinde

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{3.1}$$

denklemi göz önüne alınsın. $(t_0, x_0) \in D = [0,\infty)xQ$ için (3.1) denkleminin $x(t_0) = x_0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığında bir tek $x(t, t_0, x_0)$ çözümüne sahip olduğu varsayılmaktadır.

Tanım 3.3.

$\varphi(t) = \varphi(t, t_\varphi)$ fonksiyonu $[t_0, \infty), t_0 \geq 0$ üzerinde (3.1) denkleminin bir çözümü olsun:

(a) Herhangi bir $t_\varphi \geq t_0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - \varphi(t_0)| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $|x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon, t_0) \leq \varepsilon)$ sayısı varsa (3.1) denkleminin $\varphi(t, t_\varphi)$ çözümü kararlıdır.

(b) $\varphi(t, t_\varphi)$ çözümü kararlı ve her $\varepsilon > 0$ için $t_0 \geq t_\varphi$ ve $|x_0 - \varphi(t_0)| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $|x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\varphi(t, t_\varphi)$ çözümü düzgün kararlıdır.

(c) $\varphi(t, t_\varphi)$ çözümü kararlı ve herhangi bir $t_0 \geq t_\varphi$ için $|x_0 - \varphi(t_0)| \leq r(t_0)$ iken $\lim_{t\to\infty} |x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)| = 0$ olacak şekilde bir $r(t_0) > 0$ sayısı varsa $\varphi(t, t_\varphi)$ çözümü asimptotik kararlıdır.

(d) $\varphi(t, t_\varphi)$ çözümü düzgün kararlı $|x_0 - \varphi(t_0)| \leq r$ iken $t_0 \geq t_\varphi$ için düzgün olarak $\lim_{t\to\infty} |x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)| = 0$ olacak şekilde ve $t_0 \geq t_\varphi$den bağımsız $r > 0$ sayısı varsa $\varphi(t, t_\varphi)$ çözümü düzgün asimptotik kararlıdır. Yani, her $\varepsilon > 0$ için $\{ t_0 \geq t_\varphi,$

$\left|x_0-\varphi(t_0)\right|\leq r, \quad t\geq t_0+T \;\}$ için $\left|x(t,t_0,x_0)-\varphi(t)\right|\leq\varepsilon$ olacak şekilde bir $T=T(\varepsilon)$ sayısı varsa $\varphi(t,t_\varphi)$ çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

(e) $\varphi(t,t_\varphi)$ çözümü kararlı değilse kararsızdır denir.

Örnek:

$$x''+\frac{2}{t+1}x'+x=0$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin lineer bağımsız çözümleri

$$\frac{\sin t}{t+1},\frac{\cos t}{t+1}, \quad t\geq 0$$

olur. Ayrıca yukarıdaki denklem $x=0$ çözümüne sahiptir. Yukarıda verilen kararlılık tanımları uygulandığında söz konusu denklemin sıfır çözümünün kararlı, düzgün kararlı ve asimptotik kararlı olduğu kolaylıkla görülür.

Örnek:

$$x''+9x=0$$

denklemini düşünelim. Bu denklemin lineer bağımsız çözümleri $\sin 3t$ ve $\cos 3t$ olur. Ayrıca bu denklem $x=0$ çözümüne de sahiptir. Yukarıda verilen kararlılık tanımları uygulandığında sıfır çözümünün kararlı ve düzgün kararlı olduğu, ancak asimptotik kararlı olmadığı görülür.

Örnek:

$$\dot{x}=x$$
$$x(t_0)=x_0$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Bu problem çözüldüğünde

$$x(t) = x(t_0)e^{(t-t_0)} = x_0\, e^{(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$$

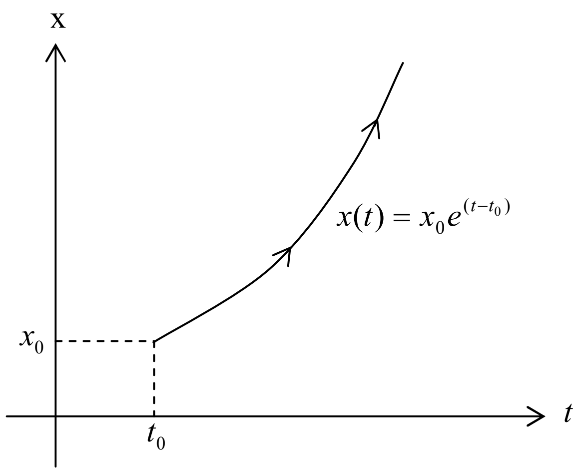
elde edilir. $t \to \infty$ için $x(t) = x_0\, e^{(t-t_0)} \to \infty$ olacağı açıktır. O halde verilen problemin sıfır çözümü kararsızdır. Gerçekten kararsızlık tanımı uygulandığında

$$|x(t_0) - 0| = |x(t_0)| = |x_0| < \delta$$

iken

$$\begin{aligned} |x(t) - 0| &= \left|x_0 e^{t-t_0}\right| \\ &= |x_0| e^{t-t_0}, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

elde edilir. $t \geq t_0$ olduğundan, bu ifadenin yeterince büyük t ler için ε dan küçük bırakılamayacağı açıktır. Bu durum grafikten kolaylıkla görülebilir:



Örnek:

Şimdi ise ikinci basamaktan

$$x'' - \frac{2}{t+1}x' + x = 0, \quad t \geq 0$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklem $\sin t - (t+1)\cos t$ ve $\cos t + (t+1)\sin t$ lineer bağımsız çözümlerine sahiptir. Ayrıca $x = 0$ da bu denklemin bir çözümüdür. Kararlılık tanımları uygulandığında $x = 0$ çözümünün kararsız olduğu görülür.

Şimdi kararlılık durumları ile ilgili olarak aşağıdaki teoremler ifade edilebilir.

$Q \subset R^n$ sıfır vektörünü içinde bulunduran bir bölge ve $D = [0,\infty)xQ$ olmak üzere, bu bölgede otonom

$$\dot{x}(t) = g(x(t)), g(0) = 0 \tag{3.2}$$

diferansiyel denklem sistemi göz önüne alınsın. Ayrıca herhangi bir $(t_0, x_0) \in D$ için (3.2) denkleminin $x(t_0) = x_0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde var olan bir tek $x(t, t_0, x_0)$ çözümünün olduğu kabul edilmektedir.

Teorem 3.1.

Yukarıda verilen kabuller altında (3.2) denklem sistemini göz önüne alınsın. V bir Lyapunov fonksiyonu olsun:

(i) Eğer $\dot{V}(x) \leq 0$ ise, bu taktirde (3.2) denklem sisteminin $\varphi = 0$ çözümü düzgün kararlıdır.

(ii) Eğer $x \neq 0$ için $\dot{V}(x) < 0$ (veya $-\dot{V}(x)$ pozitif tanımlıdır) ise $\varphi = 0$ çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

(iii) Eğer $x \neq 0$ için $\dot{V}(x) > 0$ ise, $\varphi = 0$ çözümü kararsızdır (Liu, 2003).

Teorem 3.2.

(Cetaev Kararsızlık Teoremi): $\Omega : \|x\| < A, x \in R^n, A$ pozitif bir sayı, Ω orijinin bir komşuluğu, $V(x)$ verilen bir fonksiyon, Ω_1 ise Ω de bir bölge olsun. V fonksiyonunun aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu kabul edelim:

1) $V(x), \Omega_1$ de birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir;

2) $V(x)\, ve\, \dot{V}(x), \Omega_1$ de pozitiftir;

3) Ω_1 in sınır noktalarında $V(x) = 0$;

4) Orijin Ω_1 bölgesinin bir sınır noktasıdır.

Bu şartlar altında orijin kararsızdır (LaSalle ve Lefschetz,1961).

Yukarıdaki teorem Cetaev kararsızlık teoremi olarak bilinmektedir. Bu teoreme ilave olarak literatürde geçen başka bir kararsızlık teoremleri de aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Teorem 3.3.

$\Omega \subset R^n$ bir bölge ve Ω orijini içinde bulundursun. $V(x)$ fonksiyonu Ω bölgesinde birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve $V(0) = 0$ olsun. Ayrıca $\dot{V}$ pozitif tanımlı ve V orijinin keyfi bir komşuluğunda pozitif değerler alsın. Bu taktirde orijin kararsız olur (LaSalle ve Lefschetz,1961).

Teorem 3.4.

$x(t) = 0,\ (t \geq t_0)$, n boyutlu (3.2) denklem sisteminin bir çözümü olsun. Burada $x(0) = 0$ dır. $\|x\| \leq k$ olmak üzere $U(x)$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

1) $U(x)$ ve kısmi türevleri süreklidir;

2) $U(0)=0$

3) $\dot{U}(x)$ pozitif tanımlıdır;

4) Orijinin her komşuluğunda en az bir x noktası vardır öyle ki $U(x)>0$ dır.

Bu takdirde (3.2) denklem sisteminin sıfır çözümü (dolayısıyla her çözümü) kararsızdır (LaSalle ve Lefschetz,1961).

Örnek:

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2^2$$

$$\dot{x}_2=-x_2-x_1x_2$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Lyapunov fonksiyonu olarak

$$V(t)=V(x_1(t),x_2(t))=\frac{1}{2}[x_1^2(t)+x_2^2(t)]$$

seçelim. V fonksiyonunun sistem boyunca türevi

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=x_1(t))\dot{x}_1(t)+x_2(t)\dot{x}_2(t)\\&=x_1(-x_1+x_2^2)+x_2(-x_2-x_1x_2)\\&=-(x_1^2+x_2^2)=-2V(t)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan integral alındığında,

$$\frac{dV}{dt}=-2V(t)\Rightarrow\frac{dV}{V}=-2dt$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{dV}{V}=-2\int_{t_0}^{t}dt$$

$$InV(t) - InV(t_0) = -2(t - t_0)$$

$$\frac{V(t)}{V(t_0)} = e^{-2(t-t_0)}$$

$$V(t) = V(t_0)e^{-2(t-t_0)}$$

elde edilir. Bu ise $t \to \infty$ için $\frac{1}{2}[x_1^2(t) + x_2^2(t)] \to 0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak verilen sistemin sıfır çözümü asimptotik kararlı olur.

Örnek:

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{2} + x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1 x_2$$

diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için Lyapunov fonksiyonu

$$V(t) = V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}[x_1^2(t) + x_2^2(t)]$$

olsun. V fonksiyonunun sistem boyunca türevi

$$\frac{dV}{dt} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

$$= x_1(-\frac{x_1}{2} + x_2^2) + x_2(-x_2 - x_1 x_2)$$

$$= -(\frac{x_1^2}{2} + x_2^2)$$

$$\leq -(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}) = -V(t)$$

olarak bulunur. Buradan integral alındığında,

$$\frac{dV}{dt} \leq -V(t) \Rightarrow \frac{dV}{V} \leq -d(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dV}{V} \leq -\int_{t_0}^{t} dt$$

$$InV(t) - InV(t_0) \leq -(t - t_0)$$

$$V(t) \leq V(t_0)e^{-(t-t_0)}$$

elde edilir. Bu ise $t \to \infty$ için $V(t) \to 0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak verilen sistemin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

Örnek:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1 x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_1^2 x_2$$

denklem sistemini göz önüne alalım. Lyapunov fonksiyonu olarak

$$V(t) = V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}[x_1^2(t) + x_2^2(t)]$$

seçelim. Bu fonksiyonun pozitif tanımlı olduğu açıktır. Fonksiyonun sistem boyunca türevi alındığında

$$\frac{dV}{dt} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

$$= x_1(x_2 - x_1x_2^2) + x_2(-x_1 + x_1^2x_2)$$

$$= 0$$

elde edilir. O halde verilen sistemin sıfır çözümü kararlı olur.

Örnek:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 x_2$$

denklem sistemini ele alalım. Lyapunov fonksiyonu

$$V(t) = V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}[x_1^2(t) + x_2^2(t)]$$

olsun. *V* fonksiyonunun sistem boynuca türevi

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(x_1 - x_1 x_2^2) + x_2(x_2 + x_1^2 x_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 = 2V(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan integral alındığında

$$\frac{dV}{dt} = 2V(t) \Rightarrow \frac{dV}{V} = 2d(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dV}{V} = 2\int_{t_0}^{t} dt$$

$$In V(t) - In V(t_0) = 2(t - t_0)$$

$$V(t) = V(t_0)e^{2(t-t_0)}$$

olarak bulunur. Bu ise $t \to \infty$ için $\frac{1}{2}[x_1^2(t) + x_2^2(t)] \to \infty$ olduğunu gösterir. Böylece sistemin sıfır çözümü kararsız olur.

Örnek:

$$x''+x'+g(x)=0$$

$$x=x(t)\in R,\ \ g(0)=0,$$

$$xg(x)>0,\ \ (x\neq 0)$$

sarkaç denklemini göz önüne alalım. Bu denklem

$$x_1=x,\ \ x_2=x'$$

konumu ile eşdeğer sistem olarak

$$x_1^{'}=x_2$$

$$x_2^{'}=-x_2-g(x_1)$$

biçiminde ifade edilebilir. Söz konusu denklem için Lyapunov fonksiyonu

$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_2^2+\int_0^{x_1}g(s)ds,\ \ xg(x)>0$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Bu fonksiyonun yukarıda verilen sistem boyunca türevi alındığında

$$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2)=V_{x_1}\frac{dx_1}{dt}+V_{x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

$$=g(x_1)\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2$$

$$=g(x_1)x_2+x_2(-x_2-g(x_1))$$

$$-\dot{V}(x_1,x_2)=x_2^2$$

bulunur.

Bu ise verilen denklemin $x=0$ çözümünün kararlı olduğunu gösterir. Ayrıca, $-\dot{V}(x_1,x_2)=x_2^2$ fonksiyonunun pozitif tanımlı olmadığı açıktır. Çünkü $-\dot{V}(0,0)=0$ ve $c\neq 0$ olmak üzere $-\dot{V}(c,0)=0$ olacağı açıktır. Bu nedenle Teorem 3.1.(ii), yukarıda verilen denklemin $x=0$ çözümünün düzgün asimptotik kararlılığını göstermek için V Lyapunov fonksiyonuna uygulanamaz.

Şimdi de yukarıda verilen sarkaç denklemi için Lyapunov fonksiyonu olarak

$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{2}[x_1+x_2]^2+q\int_0^{x_1}g(s)ds,(q>0)$$

seçelim. Bu fonksiyonunun yukarıda ki sistem boyunca türevi

$$\dot{V}(x_1,x_2)=x_2\dot{x}_2+(x_1+x_2)(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+qg(x_1)\dot{x}_1$$

$$=x_2(-x_2-g(x_1))+(x_1+x_2)(x_2-x_2-g(x_1))+qg(x_1)x_2$$

$$=-x_2^2+(q-2)g(x_1)x_2-x_1g(x_1)$$

olarak bulunur. $q=2$ için $-\dot{V}(x_1,x_2)=x_2^2+x_1g(x_1)$ pozitif tanımlıdır. Sonuç olarak Teorem 3.1. (ii) şartının sağlandığı görülür.

Lemma 3.1.

A, n×n basamaktan, reel, simetrik bir matris ve a',a sabitler ve $\lambda_i(A)$ lar ise A nın öz değerleri olmak üzere,

$$a'\geq\lambda_i(A)\geq a>0\,,\ (i=1,2,...,n)$$

olsun. Bu taktirde,

$$a'\langle x,x\rangle\geq\langle Ax,x\rangle\geq a\langle x,x\rangle$$

$$a'^2\langle x,x\rangle\geq\langle Ax,Ax\rangle\geq a^2\langle x,x\rangle$$

olur.

4. BEŞİNCİ BASAMAKTAN VEKTÖR DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN KARARSIZIĞI

4.1. Giriş

Matematik literatürünü incelememiz boyunca beşinci basamaktan farklı biçimde lineer olmayan, skaler ve vektör diferansiyel denklemlerde çözümlerin kararsızlığı günümüze kadar incelendiği ve halen bu konuda çalışmaların sürdüğü görülmüştür.

Bu konuda çalışmaların bir kısmı sırası ile aşağıdaki gibi özetlenebilir; ilk olarak Ezeilo (1978b), beşinci basamaktan lineer olmayan skaler

$$x^{(5)} + a_1 x^{(4)} + a_2 \dddot{x} + a_3 \ddot{x} + a_4 \dot{x} + f(x) = 0$$

$$x^{(5)} + a_1 x^{(4)} + a_2 \dddot{x} + h(\dot{x})\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0$$

$$x^{(5)} + \psi(\ddot{x})\dddot{x} + \varphi(\ddot{x}) + \theta(\dot{x}) + f(x) = 0$$

diferansiyel denklemlerini ele aldı. Bu denklemlerin sıfır çözümünün kararsız olmasını sağlayan ve yeter şartlar içeren bazı teoremler ispatladı. Yine benzer bir çalışma olarak, beşinci basamaktan lineer olmayan

$$x^{(5)} + a_1 x^{(4)} + a_2 \dddot{x} + g(\dot{x})\ddot{x} + h(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)})\dot{x} + f(x) = 0$$

skaler diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsızlığı Ezeilo (1979a) tarafından ele alındı.

Aynı zamanda, Tiryaki (1987) beşinci basamaktan lineer olmayan skaler

$$x^{(5)} + a_1 x^{(4)} + k(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)})\dddot{x} + g(\dot{x})\ddot{x} + h(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)})\dot{x} + f(x) = 0$$

diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsızlığını inceledi.

Daha sonra; Li ve Yu (1990), beşinci basamaktan lineer olmayan skaler

$$x^{(5)} + a x^{(4)} + b\dddot{x} + \psi(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)})\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0$$

diferansiyel denklemini ele aldı. Bu denklemin sıfır çözümünün kararsız olmasını sağlayan ve yeter şartlar içeren bir teorem ispatladı. Benzer şekilde farklı bir diferansiyel modeli olan beşinci basamaktan lineer olmayan skaler

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= x_{i+1} \qquad (i = 1,2,3,4) \\
\dot{x}_5 &= -f_5(x_4)x_5 - f_4(x_3)x_4 - f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)x_3 - f_2(x_2) - f_1(x_1)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

ve

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= x_{i+1} \qquad (i = 1,2,3,4) \\
\dot{x}_5 &= -a_5x_5 - f_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)x_4 - f_3(x_2)x_3 \\
&\quad - f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)x_2 - f_1(x_1)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

diferansiyel denklem sistemlerinin sıfır çözümünün kararsız olmasını sağlayan ve yeter şartlar içeren teoremler Li ve Duan (2000) tarafından ispatlandı.

Ayrıca, Sadek (2003) beşinci basamaktan lineer olmayan

$$X^{(5)} + \Psi(\ddot{X})\dddot{X} + \Phi(\ddot{X}) + \Theta(\dot{X}) + F(X) = 0,$$

$$X^{(5)} + AX^{(4)} + B\dddot{X} + H(\dot{X})\ddot{X} + G(X)\dot{X} + F(X) = 0$$

ve

$$X^{(5)} + AX^{(4)} + \Psi(X,\dot{X},\ddot{X},\dddot{X},X^{(4)})\dddot{X} + G(\dot{X})\ddot{X} + H(X,\dot{X},\ddot{X},\dddot{X},X^{(4)})\dot{X} + F(X) = 0$$

vektör diferansiyel denklemlerinin sıfır çözümleri için bazı kararsızlık sonuçlarını inceledi.

Yine benzer bir çalışma olarak, beşinci basamaktan lineer olmayan

$$\begin{aligned}
&X^{(5)} + AX^{(4)} + \Psi(X,\dot{X},\ddot{X},\dddot{X},X^{(4)})\dddot{X} + G(\dot{X})\ddot{X} \\
&\quad + H(X,\dot{X},\ddot{X},\dddot{X},X^{(4)})\dot{X} + F(X) = 0
\end{aligned}$$

vektör diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsızlığı Tunç (2004) tarafından ele alındı.

Aynı zamanda, Tunç (2005) beşinci basamaktan lineer olmayan

$$X^{(5)} + AX^{(4)} + B(t)\Psi(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)})\dddot{X} + C(t)G(\dot{X})\ddot{X}$$
$$+ D(t)H(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)})\dot{X} + E(t)F(X) = 0$$

vektör diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsızlığı ile ilgili bir teorem ispatladı.

Yine benzer bir çalışma modeli olarak, beşinci basamaktan lineer olmayan

$$X^{(5)} + \Psi(\dot{X}, \ddot{X})\dddot{X} + \Phi(X, \dot{X}, \ddot{X})\ddot{X} + \theta(\dot{X}) + F(X) = 0$$

vektör diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsızlığı Tunç ve Şevli (2005) tarafından ele alındı.

Ayrıca, Tunç (2008) beşinci basamaktan lineer olmayan

$$X^{(5)} + \Psi(\dot{X}, \ddot{X})\dddot{X} + \Phi(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)})\ddot{X} + \theta(\dot{X}) + F(X) = 0$$

vektör diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsızlığını inceledi.

Daha sonra Tunç ve Karta (2008) beşinci basamaktan lineer olmayan,

$$X^{(5)} + AX^{(4)} + B\dddot{X} + \Psi(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)})\ddot{X} + G(X)\dot{X} + F(X)X = 0 \qquad (4.3)$$

vektör diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsız olmasını sağlayan ve yeter şartlar içeren bir teorem ispatladı.

Biz bu bölümde (4.1), (4.2) diferansiyel denklem sistemleri ve (4.3) vektör diferansiyel denkleminin yerine,

$$X^{(5)} + \Psi(\dddot{X})X^{(4)} + \Phi(\ddot{X})\dddot{X} + \Theta(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)})\ddot{X}$$
$$+ E(\dot{X}) + H(X) = 0, \qquad (4.4)$$

$$X^{(5)} + AX^{(4)} + \Theta(X,\dot{X},\ddot{X},\dddot{X},X^{(4)})\dddot{X} + F(\dot{X})\ddot{X}$$
$$+ G(X,\dot{X},\ddot{X},\dddot{X},X^{(4)})\dot{X} + H(X) = 0, \qquad (4.5)$$

ve

$$X^{(5)} + AX^{(4)} + B\dddot{X} + \Psi(X,\dot{X},\ddot{X},\dddot{X},X^{(4)})\ddot{X} + G(X)\dot{X}$$
$$+ F(X,\dot{X},\ddot{X},\dddot{X},X^{(4)})X = 0 \qquad (4.6)$$

vektör diferansiyel denklemlerini inceleyeceğiz. Bu denklemlerin her biri için $X = 0$ çözümünün kararsız olmasını sağlayan ve yeter şartlar içeren birer teorem ispatlayacağız.

Burada elde edilecek sonuçlar (4.1) ve (4.2) diferansiyel denklem sistemlerine karşılık gelen beşinci basamaktan skaler diferansiyel denklemlerin *n*-boyutlu bir vektör genellemesi ve (4.3) vektör diferansiyel denkleminin ise daha genel bir durumu olacaktır.

4.2. (4.4) Denklemi için Kararsızlık Sonucu

Biz bu kesimde ilk olarak beşinci basamaktan lineer olmayan (4.4) vektör diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsızlık durumunu inceleyeceğiz.

Bu denklemde, $X \in R^n$; Ψ, Φ ve Θ $n \times n$- boyutlu simetrik, sürekli ve reel elemanlı matris fonksiyonları $E : R^n \to R^n$ ve $H : R^n \to R^n$ birer fonksiyon olmak üzere *E(0)=H(0)=0* dır. Burada (4.4) denklemi için sırasıyla farklı koşullar altında iki teorem ifade ve ispat edilecek ve konu ile ilgili birer örnek verilecektir.

$$\dot{X} = Y, \ddot{X} = Z, \dddot{X} = W, X^{(4)} = U$$

olmak üzere (4.4) denklemine eş değer sistem olarak

$$\dot{X} = Y, \dot{Y} = Z, \dot{Z} = W, \dot{W} = U,$$
$$\dot{U} = -\Psi(W)U - \Phi(Z)W - \Theta(X,Y,Z,W,U)Z - E(Y) - H(X) \qquad (4.7)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistem için

$$J_H(X) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right), J_\Psi(W) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial w_j}\right)$$

$$J_\Phi(Z) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}\right), J_E(Y) = \left(\frac{\partial e_i}{\partial y_j}\right), \quad (i, j = 1,2,...,n)$$

Jacobian matrisleri var, simetrik ve sürekli olduğu farz edilmektedir. Burada sırasıyla, $(h_1, h_2,...,h_n)$ ve $(x_1, x_2,...,x_n)$ ler H ve X in; $(\psi_1, \psi_2,...,\psi_n)$ ve $(w_1, w_2,...,w_n)$ ler Ψ ve W nın; $(\varphi_1, \varphi_2,...,\varphi_n)$ ve $(z_1, z_2,...,z_n)$ ler Φ ve Z nin; $(e_1, e_2,...,e_n)$ ve $(y_1, y_2,...,y_n)$ ler ise E ve Y nin elemanlarıdır.

Teorem 4.2.1.

(4.4) denkleminin katsayıları için yukarıda verilen şartlara ilave olarak aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım: $H(0) = 0$, $X \neq 0$ için $H(X) \neq 0$, $E(0) = 0$, $Y \neq 0$ için $E(Y) \neq 0$ olmak üzere,

(i) Ψ , Φ ve Θ simetrik ve $\lambda_i(J_H(X)) < 0, \ (i = 1,2,...,n)$

(ii) her $X, Y, Z, W, U \in R^n$ için $\lambda_i(\Theta(X, Y, Z, W, U)) \geq 0, \ \lambda_i(\Psi(W)) < 0$ dır.

Bu takdirde (4.4) denkleminin $X = 0$ çözümü kararsızdır.

İspat:

Teorem 4.2.1 in ispatı için kullanacağımız temel araç,

$$V_1 = -\langle Z, U\rangle - \langle Z, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W\rangle d\sigma\rangle + \frac{1}{2}\langle W, W\rangle - \int_0^1 \langle \Phi(\sigma Z)Z, Z\rangle d\sigma$$
$$- \int_0^1 \langle E(\sigma Y), Y\rangle d\sigma - \langle H(X), Y\rangle \tag{4.8}$$

olmak üzere $V_1 = V_1(X,Y,Z,W,U)$ şeklinde tanımladığımız Lyapunov fonksiyonudur. Burada Teorem 4.2.1 in şartları altında V_1 Lyapunov fonksiyonunun Krasovskii kriterlerini sağladığı gösterilecektir. (4.8) den $V_1(0,0,0,0,0) = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca keyfi $\varepsilon \in R^n$, $\varepsilon \neq 0$ için

$$V_1(0,0,0,\varepsilon,0) = \frac{1}{2}\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}\|\varepsilon\|^2 > 0$$

olduğu görülür.

Bu ise V_1 fonksiyonunun Krasovskii'nin K_1 özelliğini sağladığını gösterir. (4.7) sisteminin keyfi bir çözümü $(X,Y,Z,W,U) = (X(t),Y(t)),Z(t),W(t),U(t))$ olsun. (4.8) in (4.7) sistemi boyunca türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \langle Z, \Psi(W)U \rangle + \langle Z, \Phi(Z)W \rangle + \langle Z, \Theta(X,Y,Z,W,U)Z \rangle \\ &\quad + \langle Z, E(Y) \rangle - \left\langle \frac{d}{dt} Z, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W \rangle d\sigma \right\rangle \\ &\quad - \frac{d}{dt}\int_0^1 \langle \sigma\Phi(\sigma Z)Z, Z \rangle d\sigma - \frac{d}{dt}\int_0^1 \langle E(\sigma Y), Y \rangle d\sigma - \langle J_H(X)Y, Y \rangle \end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Şimdi, yukarıda geçen ve hesaplanmayan türevler için aşağıdaki eşitlikler kolaylıkla elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\langle Z, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W \rangle d\sigma \right\rangle &= \left\langle W, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W \rangle d\sigma \right\rangle \\ &\quad + \left\langle Z, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), U \rangle d\sigma \right\rangle \\ &\quad + \left\langle Z, \int_0^1 \langle \sigma \boldsymbol{J}_\Psi(\sigma W)U, W \rangle d\sigma \right\rangle \\ &= \left\langle W, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W \rangle d\sigma \right\rangle + \left\langle Z, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), U \rangle d\sigma \right\rangle \\ &\quad + \left\langle Z, \int_0^1 \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \langle \Psi(\sigma W), U \rangle d\sigma \right\rangle \end{aligned}$$

$$= \left\langle W, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W \rangle d\sigma \right\rangle + \left\langle Z, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), U \rangle d\sigma \right\rangle$$

$$+ \sigma \langle Z, \Psi(\sigma W) U \rangle \Big|_0^1$$

$$= \left\langle W, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W \rangle d\sigma \right\rangle + \langle Z, \Psi(W) U \rangle, \qquad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \langle \sigma\Phi(\sigma Z) Z, Z \rangle d\sigma = \int_0^1 \langle \sigma\Phi(\sigma Z) W, Z \rangle d\sigma + \int_0^1 \sigma^2 \langle J_\Phi(Z) Z W, Z \rangle d\sigma$$

$$+ \int_0^1 \langle \sigma\Phi(Z) Z, W \rangle d\sigma$$

$$= \int_0^1 \langle \sigma\Phi(\sigma Z) W, Z \rangle d\sigma + \int_0^1 \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \langle \sigma\Phi(\sigma Z) W, Z \rangle d\sigma$$

$$= \sigma^2 \langle \Phi(\sigma Z) W, Z \rangle \Big|_0^1 = \langle \Phi(Z) W, Z \rangle, \qquad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \langle E(\sigma Y), Y \rangle d\sigma = \int_0^1 \sigma \langle J_E(\sigma Y) Z, Y \rangle d\sigma + \int_0^1 \langle E(\sigma Y), Z \rangle d\sigma$$

$$= \int_0^1 \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \langle E(\sigma Y), Z \rangle d\sigma + \int_0^1 \langle E(\sigma Y), Z \rangle d\sigma$$

$$= \sigma \langle E(\sigma Y), Z \rangle \Big|_0^1 = \langle E(Y), Z \rangle \qquad (4.12)$$

(4.10), (4.11) ve (4.12) ifadeleri (4.9) da yerine yazılır ve Teorem 4.2.1 şartları göz önüne alınırsa,

$$\dot{V}_1 = -\left\langle W, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W \rangle d\sigma \right\rangle + \langle Z, \Theta(X, Y, Z, W, U) Z \rangle - \langle J_H(X) Y, Y \rangle > 0$$

elde edilir. Bu ise Krasovskii'nin (K_2) özelliğinin sağlandığını gösterir.

Böylece Teorem 4.2.1 in şartlarından her $t \geq 0$ için $\dot{V}_1 \geq 0$ olur. Yani $\dot{V}_1$ pozitif yarı tanımlıdır. Ayrıca $\dot{V}_1 = 0$ olması her $t \geq 0$ için $Y = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $X=\xi$, her $t \geq 0$ için

$$Z=\dot{Y}=0, W=\ddot{Y}=0, \dot{W}=\dddot{Y}=0$$

olur. Buna bağlı olarak

$$X=\xi, Y=Z=W=U=0$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.7) sisteminde yerine yazılırsa $X \neq 0$ için $H(X) \neq 0$ ve *H(0)=0* olduğundan dolayı *H*(ξ)=*0* olur. Bu ise ξ=*0* olduğunu gösterir. Bu takdirde $\dot{V}_1=0$ olması her *t≥ 0* için

$$X=Y=Z=W=U=0$$

olduğunu doğrular. Böylece Krasovskii'nin (K_3) özelliği de sağlanmış olur. Sonuç olarak V_1 fonksiyonu Krasovskii kriterlerinin (K_1), (K_2) ve (K_3) özelliklerini sağlar. Bu ise (4.4) denkleminin *X=0* çözümünün kararsız olduğunu gösterir.

Örnek:

(4.4) denkleminde geçen katsayı matris ve fonksiyonlarını sırası ile özel bir durum olan *n*=2 için aşağıdaki gibi seçelim:

$$\Psi=\begin{bmatrix} -2-z_1^2-z_2^2 & 1 \\ 1 & -2-z_1^2-z_2^2 \end{bmatrix}, \ \Theta=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1^2+1}+4 & 3 \\ 3 & \dfrac{1}{x_1^2+1}+4 \end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix} -\dfrac{x_1^3}{3}-5x_1 \\ -\dfrac{x_2^2}{3}-5x_2 \end{bmatrix}$$

Yukarıda geçen simetrik ve reel elemanlı matrislerin öz değerleri aşağıdaki gibi kolaylıkla hesaplanabilir:

$$\lambda_1(\Psi) = -z_1^2 - z_2^2 - 1, \; \lambda_2(\Psi) = -z_1^2 - z_2^2 - 3$$

$$\lambda_1(\Theta) = \frac{1}{x_1^2 + 1} + 1, \qquad \lambda_2(\Theta) = \frac{1}{x_1^2 + 1} + 7$$

Ayrıca H vektörü için $J_H(X)$ Jacobian matrisi

$$J_H(X) = \begin{bmatrix} -x_1^2 - 5 & 0 \\ 0 & -x_2^2 - 5 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu Jacobian matrisi için öz değerler

$$\lambda_1(J_H) = -x_1^2 - 5, \quad \lambda_2(J_H) = -x_2^2 - 5$$

olarak bulunur.

Açıkça görüldüğü üzere Teorem 4.2.1 in bütün şartları sağlanır. Yani yukarıda seçimi yapılan Ψ, Θ ve H için keyfi simetrik $2x2$ basamaktan Φ matrisi, 2- boyutlu keyfi E vektörü için karşılık gelen vektör diferansiyel denkleminin sıfır çözümü kararsız olur.

Teorem 4.2.2.

(4.4) denkleminin katsayıları için yukarıda kabul edilen şartlara ilave olarak aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $H(0) = 0$, $X \neq 0$ için $H(X) \neq 0$ ve $E(0)=0$, $Y \neq 0$ için $E(Y) \neq 0$

Ψ , Φ ve Θ simetrik ve $\lambda_i\,(J_H\,(X))>0,\ (i=1,2,...,n)$

(ii) her $X,Y,Z,W,U \in R^n$ için $\lambda_i\,(\Theta\,(X,Y,Z,W,U)) \leq 0,\ \lambda_i\,(\Psi\,(W)) > 0$

$\lambda_i(\Phi(Z)) > k,\ k>-1,\ (i=1,2,\ldots,n).$

Bu takdirde (4.4) denkleminin $X=0$ çözümü kararsızdır.

İspat:

Teorem 4.2.2 nin ispatı için

$$V_2 = \langle Z,U\rangle + \left\langle Z, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W\rangle d\sigma \right\rangle - \frac{1}{2}\langle W,W\rangle + \int_0^1 \langle \Phi(\sigma Z)Z, Z\rangle d\sigma$$

$$+ \int_0^1 \langle E(\sigma Y), Y\rangle d\sigma + \langle H(X), Y\rangle \tag{4.13}$$

olacak şekilde $V_2 = V_2\ (X,Y,Z,W,U)$ Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Burada Teorem 4.2.2 nin şartları altında V_2 Lyapunov fonksiyonunun Krasovskii kriterlerini sağladığı gösterilecektir. (4.13) den $V_2(0,0,0,0,0)=0$ dır. Keyfi bir $\varepsilon \neq 0$ olmak üzere $\varepsilon \in R^n$ için

$$V_2(0,0,\varepsilon,0,\varepsilon) = \langle \varepsilon, \varepsilon\rangle + \int_0^1 \langle \Phi(\sigma\varepsilon)\varepsilon, \varepsilon\rangle d\sigma$$

$$> \|\varepsilon\|^2 + k\|\varepsilon\|^2 = (1+k)\|\varepsilon\|^2 > 0,\ k > -1$$

olur. Bu ise Krasovskii'nin *(K_1)* özelliğini sağladığını gösterir. (4.7) sisteminin keyfi bir çözümü *(X,Y,Z,W,U)=(X(t), Y(t), Z(t), W(t), U(t))* olsun. (4.13) ün (4.7) sistemi boyunca türevi alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= -\langle Z, \Psi(W)U \rangle - \langle Z, \Phi(Z)W \rangle - \langle Z, \Theta(X,Y,Z,W,U)Z \rangle - \langle Z, E(Y) \rangle \\
&\quad + \frac{d}{dt}\left\langle Z, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W \rangle d\sigma \right\rangle + \frac{d}{dt}\int_0^1 \langle \sigma\Phi(\sigma Z)Z, Z \rangle d\sigma \\
&\quad + \frac{d}{dt}\int_0^1 \langle E(\sigma Y), Y \rangle d\sigma - \langle J_H(X)Y, Y \rangle
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

elde edilir. (4.10), (4.11) ve (4.12) ifadeleri (4.14) de yerine yazılıp ve Teorem 4.2.2 nin şartları dikkate alınırsa,

$$
\dot{V}_2 = \left\langle W, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W \rangle d\sigma \right\rangle - \langle Z, \Theta(X,Y,Z,W,U)Z \rangle + \langle J_H(X)Y, Y \rangle > 0
$$

sonucuna varılır.

Böylece Teorem 4.2.2 nin şartlarından her $t \geq 0$ için $\dot{V}_2 \geq 0$ olur. Yani $\dot{V}_2$ pozitif yarı tanımlıdır. Ayrıca $\dot{V}_2 = 0$ olması her $t \geq 0$ için $Y = 0$ olmasını gerektirir. $X = \xi$, her $t \geq 0$ için

$$
Z = \dot{Y} = 0, W = \ddot{Y} = 0, \dot{W} = \dddot{Y} = 0
$$

olur. Buna bağlı olarak

$$
X = \xi,\ Y = Z = W = U = 0
$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.7) sisteminde yerine yazılırsa $X \neq 0$ için $H(X) \neq 0$ ve $H(0)=0$ olduğundan dolayı $H(\xi) = 0$ olur. Bu ise $\xi = 0$ olduğunu gösterir. Bu takdirde $\dot{V}_2 = 0$ olması her $t \geq 0$ için

$$X = Y = Z = W = U = 0$$

olduğunu doğrular. Böylece Krasovskii'nin (K_3) özelliği de sağlanmış olur. Sonuç olarak V_2 fonksiyonu Krasovskii kriterlerinin (K_1), (K_2) ve (K_3) özelliklerini sağlar. Bu ise (4.4) denkleminin $X = 0$ çözümünün kararsız olduğunu gösterir.

Örnek:

(4.4) denkleminde geçen katsayı matris ve fonksiyonlarını sırası ile özel bir durum olan n=2 için aşağıdaki gibi seçelim:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 4z_1^2 + 3z_2^2 + 3 & 2 \\ 2 & 4z_1^2 + 3z_2^2 + 3 \end{bmatrix}, \ \Theta = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2 + x_1^2 + x_2^2} & \dfrac{2}{2 + x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{2}{2 + x_1^2 + x_2^2} & -\dfrac{3}{2 + x_1^2 + x_2^2} \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 + z_1^2 + z_2^2 & 1 \\ 1 & 2 + z_1^2 + z_2^2 \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1 \\ x_2 + x_2^3 \end{bmatrix}$$

Yukarıda geçen simetrik ve reel elemanlı matrislerin öz değerleri aşağıdaki gibi kolaylıkla hesaplanabilir:

$$\lambda_1(\Psi) = 4z_1^2 + 3z_2^2 + 1 \ , \ \lambda_2(\Psi) = 4z_1^2 + 3z_2^2 + 5,$$

$$\lambda_1(\Theta) = -\frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \qquad \lambda_2(\Theta) = -\frac{5}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

$$\lambda_1(\Phi) = z_1^2 + z_2^2 + 1, \quad \lambda_2(\Phi) = z_1^2 + z_2^2 + 3$$

Ayrıca H vektörü için $J_H(X)$ Jacobian matrisi

$$J_H(X) = \begin{bmatrix} 3x_1^2+1 & 0 \\ 0 & 3x_2^2+1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu Jacobian matrisi için öz değerler

$$\lambda_1(H) = 3x_1^2+1, \quad \lambda_2(H) = 3x_2^2+1$$

olarak bulunur.

Açıkça görüldüğü üzere Teorem 4.2.1 in bütün şartları sağlanır. Yani yukarıda seçimi yapılan Φ, Ψ, Θ matrisler, H vektörü ve keyfi E vektörü için karşılık gelen vektör diferansiyel denkleminin sıfır çözümü kararsız olur.

4.3. (4.5) Denklemi için Kararsızlık Sonucu

(4.5) denkleminde, $X \in R^n; A$ $n \times n$ boyutlu sabit, reel elemanlı simetrik matris, Θ, *F* ve *G*, $n \times n$- boyutlu simetrik sürekli matris fonksiyonları ve *H(0) = 0, H* sürekli ve $H: R^n \to R^n$ bir fonksiyondur.

$$\dot{X} = Y, \ddot{X} = Z, \dddot{X} = W, X^{(4)} = U$$

olmak üzere (4.5) denklemine eş değer sistem olarak

$$\dot{X} = Y, \dot{Y} = Z, \dot{Z} = W, \dot{W} = U$$
$$\dot{U} = -AU - \Theta(X,Y,Z,W,U)W - F(Y)Z - G(X,Y,Z,W,U)Y - H(X) \tag{4.15}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistem için

$$J_H(X) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right), \quad J_F(Y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i}\right), \quad \left(i, j = 1,2,\ldots,n\right)$$

Jacobian matrisleri var, simetrik ve sürekli olduğu farz edilmektedir. Burada sırasıyla, $(h_1, h_2, ..., h_n)$ ve $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ler H ve X in; $(f_1, f_2, ..., f_n)$ ve $(y_1, y_2, ..., y_n)$ ler ise F ve Y nin elemanlarıdır.

Teorem 4.3.1.

(4.5) denkleminin katsayıları için yukarıda verilen şartlara ilave olarak a_1 pozitif bir sabit olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) A ve $J_H(X)$ simetrik matrisler ve $\lambda_i(A) > a_1$, $(i = 1,2,...,n)$.

H(0)=0, $X \neq 0$ için $H(X) \neq 0$,

(ii) Θ, F ve G simetrik matrisler ve her $X,Y,Z,W,U \in R^n$ için

$$\lambda_i(G(X,Y,Z,W,U)) - \frac{1}{4}\left[\lambda_i(\Theta(X,Y,Z,W,U))\right]^2 > 0, \quad (i = 1,2,...,n).$$

Bu takdirde (4.5) denkleminin $X = 0$ çözümü kararsızdır.

İspat:

Teorem 4.3.1 in ispatını yapmak için

$$V = -\langle Y,U\rangle + \langle Z,W\rangle - \langle AY,W\rangle + \frac{1}{2}\langle AZ,Z\rangle - \int_0^1 \langle F(\sigma Y)Y,Y\rangle d\sigma$$
$$-\int_0^1 \langle H(\sigma X),X\rangle d\sigma \tag{4.16}$$

şeklinde $V = V(X,Y,Z,W,U)$ Lyapunov fonksiyonunu tanımlayacağız. Burada V fonksiyonunun Krasovskii kriterini sağladığı gösterilecektir. (4.16) dan $V(0,0,0,0,0) = 0$ olduğu açıktır. $\varepsilon \in R^n$ olmak üzere keyfi bir $\varepsilon \neq 0$ için Teorem 4.3.1 in (i) şartı ve 3. Bölümde verilen Lemma 3.1 göz önüne alındığında

$$V(0,0,\varepsilon,\varepsilon,0) = \langle \varepsilon,\varepsilon \rangle + \frac{1}{2}\langle A\varepsilon,\varepsilon \rangle$$

$$\geq \|\varepsilon\|^2 + \frac{1}{2}a_1\langle \varepsilon,\varepsilon \rangle > 0$$

$$= \|\varepsilon\|^2 + \frac{1}{2}a_1\|\varepsilon\|^2 > 0$$

olduğu görülür. (4.15) sisteminin keyfi bir çözümü *(X,Y,Z,W,U) = (X(t), Y(t),Z(t), W(t), U(t))* olsun. (4.16) nın (4.15) sistemi boyunca türevi alınırsa,

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V(X,Y,Z,W,U)$$
$$= \langle W,W \rangle + \langle Y,\theta(X,Y,Z,W,U)W \rangle + \langle Y,F(Y)Z \rangle$$
$$+ \langle Y,G(X,Y,Z,W,U)Y \rangle + \langle Y,H(X)Y \rangle - \frac{d}{dt}\int_0^1 \langle \sigma F(\sigma Y)Y,Y \rangle d\sigma$$
$$- \frac{d}{dt}\int_0^1 \langle H(\sigma X),X \rangle d\sigma \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) de türevi hesaplanmayan terimler için

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \langle \sigma F(\sigma Y)Y,Y \rangle d\sigma = \sigma^2 \langle F(\sigma Y)Z,Y \rangle \Big|_0^1 = \langle F(Y)Z,Y \rangle$$

ve

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \langle H(\sigma X),X \rangle d\sigma = \sigma \langle H(\sigma X),Y \rangle \Big|_0^1 = \langle H(X),Y \rangle$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.17) de yerine yazılıp ve buna bağlı olarak Teorem 4.3.1 in (ii) şartı göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \langle W, W \rangle + \langle Y, \theta(X,Y,Z,W,U)W \rangle + \langle Y, G(X,Y,Z,W,U)Y \rangle \\ &= \left\| W + \frac{1}{2}\theta(X,Y,Z,W,U)Y \right\|^2 - \frac{1}{4}\langle \theta(X,Y,Z,W,U)Y, \theta(X,Y,Z,W,U)Y \rangle \\ &\quad + \langle Y, G(X,Y,Z,W,U)Y \rangle \\ &\geq \langle Y, G(X,Y,Z,W,U)Y \rangle - \frac{1}{4}\langle \theta(X,Y,Z,W,U)Y, \theta(X,Y,Z,W,U)Y \rangle > 0\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, Teorem 4.3.1 in şartlarından her $t \geq 0$ için $\dot{V} \geq 0$ olur. Yani $\dot{V}$ pozitif yarı tanımlıdır. Ayrıca, $\dot{V} = 0$ olması $Y = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda $X = \eta$ ve her $t \geq 0$ için $Z = \dot{Y} = 0$, $W = \ddot{Y} = 0$, $\dot{W} = \dddot{Y} = 0$ olur. Buna bağlı olarak

$$X = \eta,\ Y = Z = W = U = 0$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.15) sisteminde yerine yazılırsa $X \neq 0$ için $H(X) \neq 0$ ve $H(0)=0$ olduğundan $H(\eta) = 0$ olur. Bu ise $\eta = 0$ olduğunu gösterir. O halde $\dot{V} = 0$ olması her $t \geq 0$ için

$$X = Y = Z = W = U = 0$$

olduğunu gösterir. Sonuç olarak V fonksiyonu Krasovskii kriterlerinin (K_1),(K_2) ve (K_3) özelliklerini sağlar. Bu ise (4.5) denkleminin $X=0$ çözümünün kararsız olduğunu gösterir.

Örnek:

(4.5) denkleminde geçen katsayı matris ve fonksiyonlarını sırası ile özel bir durum olan n=2 için aşağıdaki gibi seçelim:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ \Theta=\begin{bmatrix}2 & -\dfrac{2}{1+x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\\ -\dfrac{2}{1+x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}} & 2\end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix}x_1^2+y_1^2+2 & 1\\ 1 & x_1^2+y_1^2+2\end{bmatrix}$$

Yukarıda geçen simetrik ve reel elemanlı matrislerin öz değerleri aşağıdaki gibi kolaylıkla hesaplanabilir:

$$\lambda_1(A)=1,\quad \lambda_2(A)=3,$$

$$\lambda_1(\Theta)=\frac{2x_1^2+2y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2},\quad \lambda_2(\Theta)=\frac{4+2x_1^2+2y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2},$$

$$\lambda_1(G)=x_1^{\ 2}+\mathrm{y}_1^{\ 2}+1\quad ,\qquad \lambda_2(G)=x_1^2+y_1^2+3.$$

Açıkça görüldüğü üzere Teorem 4.3.1 in bütün şartları sağlanır. Yani $\lambda_i(A)>1=a_1$ ve

$$\lambda_1(G)-\frac{1}{4}\lambda_1(\Theta)^2=x_1^2+y_1^2+1-\frac{1}{4}\frac{(2x_1^2+2y_1^2)^2}{(1+x_1^2+y_1^2)^2}$$

$$=\frac{4(x_1^2+y_1^2+1)(1+x_1^2+y_1^2)^2-(2x_1^2+2y_1^2)^2}{4(1+x_1^2+y_1^2)^2}>0$$

$$\lambda_2(G)-\frac{1}{4}\lambda_2(\Theta)=x_1^2+y_1^2+3-\frac{1}{4}\frac{(4+2x_1^2+2y_1^2)^2}{(1+x_1^2+y_1^2)^2}$$

$$=\frac{4(x_1^2+y_1^2+3)(1+x_1^2+y_1^2)^2-(4+2x_1^2+2y_1^2)^2}{4(1+x_1^2+y_1^2)^2}>0$$

olduğundan dolayı

$$\lambda_i(G(X,Y,Z,W,U))-\frac{1}{4}(\lambda_i(\Theta(X,Y,Z,W,U)))^2>0,\quad (i=1,2,...,n)$$

olur. Böylece (4.5) denkleminin $X=0$ çözümünün kararsız olduğu görülür.

4.4. (4.6) Denklemi için Kararsızlık Sonucu

Bu kesimde, beşinci basamaktan lineer olmayan (4.6) vektör diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararsızlık durumunu ele alacağız.

Bu denklemde, $X\in R^n$; A ve B $n\times n$- boyutlu sabit, reel elemanlı simetrik matrisler; Ψ, G ve F ise $n\times n$- boyutlu simetrik sürekli reel elemanlı matris fonksiyonlarıdır.

Görüldüğü üzere Tunç ve Karta (2008) tarafından incelenen denklemde $F(X)X$ yerine $F(X,\dot{X},\ddot{X},\dddot{X},X^{(4)})X$ alınması durumunda, bizim incelediğimiz denklem (4.6), bu denklemin bir genellemesidir. Burada Tunç ve Karta (2008) tarafından elde edilen sonucu (4.6) denklemi için oluşturacağız.

(4.6) denklemine eş değer sistem

$$\dot{X}=Y,\ \ddot{X}=Z,\dddot{X}=W,X^{(4)}=U$$

olmak üzere

$$\dot{X}=Y,\dot{Y}=Z,\dot{Z}=W,\dot{W}=U$$
$$\dot{U}=-AU-BW-\Psi(X,Y,Z,W,U)Z-G(X)Y-F(X,Y,Z,W,U)X \tag{4.18}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu sistem için

$$J_G(X)=\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right),\quad (i,j=1,2,...,n)$$

Jacobian matrisinin var, simetrik ve sürekli olduğu varsayılmaktadır. Burada $(g_1, g_2,..., g_n)$ ve $(x_1, x_2,..., x_n)$ ler sırasıyla G ve X in elemanlarıdır.

Teorem 4.4.1.

(4.6) denkleminin katsayıları için yukarıda kabul edilen şartlara ilave olarak, a ve b sabitleri ve k_1 pozitif bir sabit olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $\lambda_i(A) \geq a,\ \lambda_i(B) \geq b,\ b\operatorname{sgn} a > 0$

(ii) $\lambda_i(F(X,Y,Z,W,U))\operatorname{sgn} a - \dfrac{1}{4|a|}\left[\lambda_i(\Psi(X,Y,Z,W,U))\right]^2 > k_1,$

$(i = 1,2,...,n)$.

Bu takdirde (4.6) nın $X = 0$ çözümü kararsızdır.

İspat:

Teorem 4.4.1 in ispatını yapmak için,

$$V = V_0(X,Y,Z,W,U)\operatorname{sgn} a \tag{4.19}$$

olmak üzere, Tunç ve Karta (2008) tarafından tanımlanan

$$V_0 = \langle Y,W\rangle + \langle Y,AZ\rangle - \langle X,U\rangle - \langle X,AW\rangle - \langle X,BZ\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\langle Z,Z\rangle + \frac{1}{2}\langle BY,Y\rangle - \int_0^1 \langle \sigma G(\sigma X)X, X\rangle d\sigma \tag{4.20}$$

şeklindeki Lyapunov fonksiyonunu kullanacağız.

Burada Teorem 4.4.1 in şartları altında $V = V(X,Y,Z,W,U)$ Lyapunov fonksiyonunun Krasovskii kriterlerini sağladığı gösterilecektir.

İlk olarak (4.19) ve (4.20) den

$$V(0,0,0,0,0) = 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca $\varepsilon \in R^n$ olmak üzere keyfi bir $\varepsilon \neq 0$ için

$$V(0, \varepsilon \operatorname{sgn} a, 0, \varepsilon, 0) = \| \varepsilon \|^2 + \frac{1}{2} b \operatorname{sgn} a \| \varepsilon \|^2 > 0$$

olduğu görülür. (4.18) sisteminin keyfi bir çözümü $(X,Y,Z,W,U) = (X(t), Y(t), Z(t), W(t), U(t))$ olsun. (4.20) nin t ye göre türevi alındığında.

$$\dot{V}_0 = \langle AZ, Z \rangle + \langle F(X)X, X \rangle + \langle X, \Psi(X,Y,Z,W,U)Z \rangle$$

elde edilir. Tunç ve Karta (2008) de geçen işlemler dikkate alındığında

$$\dot{V} \geq k_1 \|X\|^2 \geq 0 , \; k_1 > 0$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 4.4.1 ispatının geriye kalan kısmı için Tunç ve Karta (2008) bakılabilir.

Örnek:

(4.6) denkleminde geçen katsayı matris ve fonksiyonlarını sırası ile özel bir durum olan n=2 için aşağıdaki gibi seçelim:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{1+x_1^2+y_1^2} \\ -\dfrac{1}{1+x_1^2+y_1^2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2+4 & 1 \\ 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2+4 \end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix} x_1^2+x_2^2 & x_1^2 \\ x_1^2 & x_1^2+x_2^2 \end{bmatrix}$$

Yukarıda geçen simetrik ve reel elemanlı matrislerin öz değerleri aşağıdaki gibi kolaylıkla hesaplanabilir:

$$\lambda_1(A)=1, \lambda_2(A)=5,\quad \lambda_1(B)=1, \lambda_2(B)=3$$

$$\lambda_1(\Psi)=\frac{x_1^2+y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2},\quad \lambda_2(\Psi)=\frac{2+x_1^2+y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2}$$

$$\lambda_1(F)=x_1^2+y_1^2+z_1^2+3,\quad \lambda_2(F)=x_1^2+y_1^2+z_1^2+5$$

$$\lambda_1(G)=x_2^2,\qquad \lambda_2(G)=2x_1^2+x_2^2$$

Açıkça görüldüğü üzere Teorem 4.4.1 in bütün şartları sağlanır. Yani

$\lambda_i(A)>1=a_1$, $\lambda_i(B)\geq 1=b$, $b\operatorname{sgn} a>0$ ve

$$\lambda_1(F)-\frac{1}{4}\lambda_1(\Psi)^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2+3-\frac{1}{4}\frac{(x_1^2+y_1^2)^2}{(1+x_1^2+y_1^2)^2}$$

$$=\frac{4(x_1^2+y_1^2+z_1^2+3)(1+x_1^2+y_1^2)^2-(x_1^2+y_1^2)^2}{4(1+x_1^2+y_1^2)^2}>0$$

$$\lambda_2(F)-\frac{1}{4}\lambda_2(\Psi)=x_1^2+y_1^2+z_1^2+5-\frac{1}{4}\frac{(2+x_1^2+y_1^2)^2}{(1+x_1^2+y_1^2)^2}$$

$$=\frac{4(x_1^2+y_1^2+z_1^2+5)(1+x_1^2+y_1^2)^2-(2+x_1^2+y_1^2)^2}{4(1+x_1^2+y_1^2)^2}>0$$

olduğundan dolayı

$$\lambda_i(F(X,Y,Z,W,U))\operatorname{sgn} a - \frac{1}{4|a|}(\lambda_i(\Psi(X,Y,Z,W,U)))^2 > k_1 \quad (i = 1,2,...,n)$$

olur. Böylece (4.6) denkleminin sıfır çözümünün kararsız olduğu görülür.

5. BEŞİNCİ BASAMAKTAN BAZI VEKTÖR DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Bu bölümde 4. Bölümde ifade edilen beşinci basamaktan lineer olmayan vektör diferansiyel denklemlerinin sırasıyla periyodik çözümlerinin varlığı incelenecektir.

Teorem 5.1.1.

(4.4) denklemi için Teorem 4.2.1 in tüm şartlarının sağlandığını var sayalım: Bu takdirde (4.4) denkleminin X=0 dan başka bir periyodik çözümü yoktur.

İspat:

$$\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5\right)=\left(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t)\right)$$

(4.7) sisteminin keyfi bir α-periyodik bir çözümü olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\left(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t)\right)=\left(\varepsilon_1(t+\alpha),\varepsilon_2(t+\alpha),\varepsilon_3(t+\alpha),\varepsilon_4(t+\alpha),\varepsilon_5(t+\alpha)\right)$$

eşitliğinin sağlanacağı açıktır.

Teorem 5.1.1 in şartları altında yukarıdaki eşitliği sağlayan tek çözümün

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\varepsilon_5=0$$

olduğu gösterilecektir. Teorem 5.1.1 in ispatı için temel araç olarak

$$V_1=-\langle Z,U\rangle-\left\langle Z,\int_0^1\langle\Psi(\sigma W),W\rangle d\sigma\right\rangle+\frac{1}{2}\langle W,W\rangle-\int_0^1\langle\Phi(\sigma Z)Z,Z\rangle d\sigma$$
$$-\int_0^1\langle E(\sigma Y),Y\rangle d\sigma-\langle H(X),Y\rangle$$

şeklindeki $V_1 = V_1(X,Y,Z,W,U)$ Lyapunov fonksiyonunu kullanacağız.

$$\theta(t) = V_1(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t))$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada $\theta(t)$ fonksiyonu sürekli ve $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ ler t ye göre periyodik olduğundan, $\theta(t)$ sınırlıdır.

$$\dot{V}_1 = \frac{d}{dt}V_1(X,Y,Z,W,U) = -\left\langle W, \int_0^1 \langle \Psi(\sigma W), W\rangle d\sigma \right\rangle + \langle Z, \theta(X,Y,Z,W,U)Z\rangle$$
$$-\langle J_H(X)Y,Y\rangle$$

ve Teorem 5.1.1 in şartları altında $\dot{V}_1$>0 olduğu açıktır.

Buradan $\dot{\theta}(t) \geq 0$ olur. Böylece $\theta(t)$ fonksiyonu sürekli ve t ye göre monotondur. $\theta(t)$ fonksiyonu sınırlı olduğundan $t \to +\infty$ için $\theta(t)$ bir θ_0 limit değerine sahiptir. Yani

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0, \ (\theta_0 \text{ sabit})$$

keyfi her t ve keyfi her m tam sayısı için

$$\theta(t) = \theta(t+m\alpha)$$

yazılabilir. O halde $t \to +\infty$ için

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} \theta(t+m\alpha) = \theta_0$$

olur.

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0, \theta(t) = \theta(t+m\alpha)$$

olduğundan dolayı her t için

$$\theta(t) = \theta_0$$

olur. Bu nedenle her t için

$$\dot{\theta}(t) = 0$$

yazılabilir. Ayrıca $\dot{\theta}(t) = 0$ olması her t için $\varepsilon_2 = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $\varepsilon_1 = X_0$ (sabit vektör) ve Teorem 5.1.1 in şartları altında $H(0)=0$ ve $X \neq 0$ için $H(X) \neq 0$ olduğundan dolayı (4.7) sisteminde $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$ yazıldığında $H(\varepsilon_1)=H(X_0)=0$ olur. Bunun sağlanması için $\varepsilon_1 = X_0 = 0$ olmak zorundadır. Her t için

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$$

olur. Böylece $\dot{\theta}(t) = 0$ olması her t için $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$ olduğunu gösterir. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ ler (4.7) sisteminin bir çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t)\right) &= \left(X(t), Y(t), Z(t), W(t), U(t)\right) \\ &= (0,0,0,0,0)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum (4.4) denkleminin $X = 0$ den başka bir periyodik çözümünün olmadığını ispatlar.

Teorem 5.1.2.

(4.4) denklemi için Teorem 4.2.2 nin tüm şartlarının sağlandığını varsayalım: Bu taktirde (4.4) denkleminin $X = 0$ dan başka bir periyodik çözümü yoktur.

İspat:

$$\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5\right)=\left(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t)\right)$$

(4.7) sisteminin keyfi bir α-periyodik çözümü olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\left(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t)\right)=\left(\varepsilon_1(t+\alpha),\varepsilon_2(t+\alpha),\varepsilon_3(t+\alpha),\varepsilon_4(t+\alpha),\varepsilon_5(t+\alpha)\right)$$

eşitliğinin sağlanacağı açıktır.

Teorem 5.1.2 nin şartları altında yukarıdaki eşitliği sağlayan tek çözümün

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\varepsilon_5=0$$

olduğu gösterilecektir. Teorem 5.1.2 nin ispatı için temel araç

$$V_2=\langle Z,U\rangle+\left\langle Z,\int_0^1\langle\Psi(\sigma W),W\rangle d\sigma\right\rangle-\frac{1}{2}\langle W,W\rangle+\int_0^1\langle\Phi(\sigma Z)Z,Z\rangle d\sigma$$
$$+\int_0^1\langle E(\sigma Y),Y\rangle d\sigma+\langle H(X),Y\rangle$$

şeklindeki $V_2=V_2(X,Y,Z,W,U)$ Lyapunov fonksiyonudur.

$$\theta(t)=V_2(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t))$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $\theta(t)$ fonksiyonu sürekli ve $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ ler t ye göre periyodik olup, $\theta(t)$ sınırlıdır.

$$\dot{V}_2=\frac{d}{dt}V_2(X,Y,Z,W,U)=\left\langle W,\int_0^1\langle\Psi(\sigma W),W\rangle d\sigma\right\rangle-\langle Z,\Theta(X,Y,Z,W,U)Z\rangle$$
$$+\langle J_H(X)Y,Y\rangle$$

ve Teorem 5.1.2 nin şartları altında $\dot{V}_2 > 0$ olduğu görülür.

Burada $\dot{\theta}(t) \geq 0$ olur. *θ(t)* fonksiyonu sürekli ve *t* ye göre monotondur. *θ(t)* fonksiyonu sınırlı olduğundan $t \to +\infty$ için *θ(t)* bir θ_0 limit değerine sahiptir. Yani

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0, \ (\theta_0 \text{ sabit})$$

yazılabilir. Keyfi her *t* ve keyfi her *m* tam sayısı için

$$\theta(t) = \theta(t + m\alpha)$$

yazılabilir. $t \to +\infty$ için

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} \theta(t + m\alpha) = \theta_0$$

olur.

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0, \theta(t) = \theta(t + m\alpha)$$

olduğundan dolayı her *t* için

$$\theta(t) = \theta_0$$

olur. Bu nedenle her *t* için

$$\dot{\theta}(t) = 0$$

elde edilir. Ayrıca $\dot{\theta}(t) = 0$ olması her *t* için $\varepsilon_2 = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $\varepsilon_1 = \eta$ (sabit vektör) ve Teorem 5.1.2 şartları altında $H(0)=0$ ve $X \neq 0$ için $H(X) \neq 0$ olduğundan dolayı (4.7) sisteminde $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5$=0 yazıldığında $H(\varepsilon_1)=H(\eta)=0$ olur. Bunun sağlanması için $\varepsilon_1=\eta$=0 olmak zorundadır. Her t için

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$$

olur. Böylece $\dot{\theta}(t) = 0$ olması her t için $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$ olduğunu gösterir. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$ lar (4.7) sisteminin bir çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)\varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t)) &= (X(t), Y(t), Z(t), W(t), U(t)) \\ &= (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (4.4) denkleminin $X = 0$ dan başka bir periyodik çözümünün olmadığını ispatlar.

Teorem 5.1.3.

(4.5) denklemi için Teorem 4.3.1 in tüm şartlarının sağlandığını varsayalım. Bu taktirde (4.5) denkleminin $X = 0$ dan başka bir periyodik çözümü yoktur.

İspat:

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t))$$

(4.15) sisteminin keyfi bir α-periyodik bir çözümü olsun. Yani, $\alpha > 0$ için

$$(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t)) = (\varepsilon_1(t+\alpha), \varepsilon_2(t+\alpha), \varepsilon_3(t+\alpha), \varepsilon_4(t+\alpha), \varepsilon_5(t+\alpha))$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım.

Teorem 5.1.3 ün şartları altında

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$$

olduğu gösterilecektir. Teorem 5.1.3 in ispatında temel amaç Teorem 4.3.1 in ispatında da kullanılan

$$V = -\langle Y, U \rangle + \langle Z, W \rangle - \langle AY, W \rangle + \frac{1}{2}\langle AZ, Z \rangle - \int_0^1 \langle F(\sigma Y)Y, Y \rangle d\sigma$$
$$-\int_0^1 \langle H(\sigma X), X \rangle d\sigma$$

şeklindeki $V = V(X, Y, Z, W, U)$ Lyapunov fonksiyonudur. Burada

$$\theta(t) = V(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t))$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $\theta(t)$ fonksiyonu sürekli ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ ler t ye göre periyodik olduğundan, $\theta(t)$ sınırlıdır.

$$\dot{V} = \langle W, W \rangle + \langle Y, \Theta(X, Y, Z, W, U)W \rangle + \langle Y, G(X, Y, Z, W, U)Y \rangle$$

ve Teorem 4.1.3 ün şartları altında $\dot{V} > 0$ olduğu açıktır.

Böylece $\dot{\theta}(t) \geq 0$ olur. $\theta\ (t)$ fonksiyonu sürekli ve t ye göre monotondur. $\theta(t)$ fonksiyonu sınırlı olduğundan $t \to +\infty$ için $\theta(t)$ bir θ_0 limit değerine sahiptir. Yani

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \theta_0, \quad (\theta_0 \text{ sabit})$$

olur.

Keyfi her t ve keyfi her m tam sayısı için

$$\theta(t) = \theta(t + m\alpha)$$

yazılabilir. Bu durumda $t \to +\infty$ için

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \lim_{t \to +\infty} \theta(t + m\alpha) = \theta_0$$

olur

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \theta_0 ve \theta(t) = \theta(t + m\alpha)$$

olması nedeni ile her t için.

$$\theta(t) = \theta_0$$

olur. Bu nedenle her t için

$$\dot{\theta}(t) = 0$$

yazılabilir. Ayrıca $\dot{\theta}(t) = 0$ olması her t için $\varepsilon_2 = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $\varepsilon_1 = X_0$ (sabit vektör) ve Teorem 5.1.3 ün şartları altında $H(0)=0$ ve $X \neq 0$ için $H(X) \neq 0$ olduğundan dolayı (4.15) sisteminde $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$ yazıldığında $H(\varepsilon_1)=H(X_0)=0$ olur. Bunun sağlanması için $\varepsilon_1 = X_0 = 0$ olmak zorundadır. Her t için

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$$

olur. Böylece $\dot{\theta}(t) = 0$ olması her t için $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$ olduğunu gösterir. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ ler (4.15) sisteminin bir çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t)\right) &= \left(X(t), Y(t), Z(t), W(t), U(t)\right) \\ &= (0,0,0,0,0)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum (4.5) denkleminin $X = 0$ den başka bir periyodik çözümünün olmadığını ispatlar.

Teorem 5.1.4.

(4.6) denklemi için Teorem 4.4.1 in tüm şartlarının sağlandığını varsayalım. Bu taktirde (4.6) denkleminin $X = 0$ dan başka bir periyodik çözümü yoktur.

İspat:

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5)=(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t))$$

(4.18) sisteminin keyfi bir α-periyodik bir çözümü olsun. Yani, $\alpha > 0$ için

$$(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t))=(\varepsilon_1(t+\alpha),\varepsilon_2(t+\alpha),\varepsilon_3(t+\alpha),\varepsilon_4(t+\alpha),\varepsilon_5(t+\alpha))$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım.

Teorem 5.1.4 ün şartları altında

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\varepsilon_5=0$$

olduğu gösterilecektir. Teorem 5.1.4 ün ispatında temel amaç Teorem 4.4.1 in ispatında da kullanılan

$$V=V_0(X,Y,Z,W,U)\operatorname{sgn} a$$

olmak üzere $V=V(X,Y,Z,W,U)$ Lyapunov fonksiyonudur. Burada

$$\begin{aligned}V_0 &= \langle Y,W\rangle+\langle Y,AZ\rangle-\langle X,U\rangle-\langle X,AW\rangle-\langle X,BZ\rangle\\ &\quad -\frac{1}{2}\langle Z,Z\rangle+\frac{1}{2}\langle BY,Y\rangle-\int_0^1\langle \sigma G(\sigma X)X,X\rangle d\sigma\end{aligned}$$

dır.

$$\theta(t)=V_0(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t))\operatorname{sgn} a$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $\theta(t)$ fonksiyonu sürekli ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ ler t ye göre periyodik olduğundan, $\theta(t)$ sınırlıdır.

$$\dot{V}_0 = \frac{d}{dt} V_0(X,Y,Z,W,U) = \langle AZ, Z \rangle + \langle F(X)X, X \rangle + \langle X, \Psi(X,Y,Z,W,U)Z \rangle$$

ve Teorem 4.4.1 in şartları altında $\dot{V} \geq k_1 \|X\|^2 \geq 0$ olduğu açıktır.

Böylece $\dot{\theta}(t) \geq 0$ olur. *θ (t)* fonksiyonu sürekli ve *t* ye göre monotondur. *θ(t)* fonksiyonu sınırlı olduğundan $t \to +\infty$ için *θ(t)* bir θ_0 limit değerine sahiptir. Yani

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \theta_0, \ \ (\theta_0 \text{ sabit})$$

olur.

Keyfi her *t* ve keyfi her *m* tam sayısı için

$$\theta(t) = \theta(t + m\alpha)$$

yazılabilir. Bu durumda $t \to +\infty$ için

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \lim_{t \to +\infty} \theta(t + m\alpha) = \theta_0$$

olur

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \theta_0 ve \theta(t) = \theta(t + m\alpha)$$

olması nedeni ile her *t* için.

$$\theta(t) = \theta_0$$

olur. Bu nedenle her *t* için

$$\dot{\theta}(t) = 0$$

yazılabilir. Ayrıca $\dot{\theta}(t) = 0$ olması her t için $\varepsilon_1 = 0$ olmasını gerektirir. Bu ifade

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$$

olduğunu gösterir. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ ler (4.18) sisteminin bir çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t)\right) &= \left(X(t), Y(t), Z(t), W(t), U(t)\right) \\ &= (0,0,0,0,0)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (4.6) denkleminin $X = 0$ dan başka bir periyodik çözümünün olmadığını ispatlar.

6. ALTINCI VE YEDİNCİ MERTEBEDEN VEKTÖR DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ İÇİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

6.1. Giriş

Matematik literatürünü incelememiz altında altıncı ve yedinci basamaktan bazı lineer olmayan skaler ve vektör diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili günümüze kadar birçok çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların bir kısmı sırası ile aşağıdaki gibi özetlenebilir; ilk olarak Ezeilo (1982b), altıncı mertebeden lineer olmayan

$$x^{(6)} + a_1 x^{(5)} + a_2 x^{(4)} + a_3 \dddot{x} + g_4(\dot{x})\ddot{x} + g_5(\dot{x},\ddot{x})\dot{x} + g_6(x) = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)})$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümünün varlığını inceledi.

Daha sonra Bereketoğlu (1992), yedinci basmaktan lineer olmayan

$$\begin{aligned} x^{(7)} + a_1 x^{(6)} + a_2 x^{(5)} + a_3 x^{(4)} + a_4 \dddot{x} + f(\dot{x})\ddot{x} + g(x)\dot{x} \\ + h(x) = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)}) \end{aligned}$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümünün varlığı ile ilgili bir çalışmada bulundu.

Ayrıca, altıncı basamaktan lineer olmayan

$$x^{(6)} + a_1 x^{(5)} + a_2 x^{(4)} + g_3(\ddot{x})\dddot{x} + g_4(\dot{x})\ddot{x} + g_5(\dot{x},\ddot{x})\dot{x} + g_6(x) = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)})$$

$$x^{(6)} + a_1 x^{(5)} + a_2 x^{(4)} + a_3 \dddot{x} + \varphi_4(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)})\ddot{x} + \varphi_5(x)\dot{x} + \varphi_6(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)}) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} x^{(6)} + a_1 x^{(5)} + a_2 x^{(4)} + a_3 \dddot{x} + \varphi_4(\dot{x}, \ddot{x})\ddot{x} + \varphi_5(x)\dot{x} \\ + \varphi_6(x, \dot{x}, \ddot{x}) = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)}) \end{aligned}$$

diferansiyel denklemlerinin periyodik çözümleri Tejumola (1995) tarafından incelendi. Yine benzer bir çalışma da Tejumola (1995), yedinci basamaktan lineer olmayan

$$x^{(7)} + a_1 x^{(6)} + a_2 x^{(5)} + a_3 x^{(4)} + a_4 \dddot{x} + f_5(\dot{x}, \ddot{x})\ddot{x} + f_6(x)\dot{x}$$
$$+ f_7(x, \dot{x}, \ddot{x}) = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)})$$

$$x^{(7)} + a_1 x^{(6)} + a_2 x^{(5)} + a_3 x^{(4)} + \psi_4(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)})\dddot{x} + \psi_5(\dot{x})\ddot{x}$$
$$+ \psi_6(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)})\dot{x} + \psi_7(x) = 0$$

$$x^{(7)} + a_1 x^{(6)} + a_2 x^{(5)} + a_3 x^{(4)} + \psi_4(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})\dddot{x} + \psi_5(\dot{x})\ddot{x} + \psi_6(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})\dot{x}$$
$$+ \psi_7(x) = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)})$$

diferansiyel denklemlerinin periyodik çözümleri ile ilgili birer sonuç elde etti.

Biz bu bölümde sırasıyla; altıncı ve yedinci basamaktan lineer olmayan

$$X^{(6)} + AX^{(5)} + BX^{(4)} + C\dddot{X} + \Phi(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)}, X^{(5)})\ddot{X} + R(X)\dot{X}$$
$$+ H(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)}, X^{(5)})X = 0 \qquad (6.1)$$

$$X^{(7)} + AX^{(6)} + BX^{(5)} + CX^{(4)} + \Gamma(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)}, X^{(5)}, X^{(6)})\dddot{X} + \Psi(\dot{X})\ddot{X}$$
$$+ G(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)}, X^{(5)}, X^{(6)})\dot{X} + E(X) = 0 \qquad (6.2)$$

ve

$$X^{(7)} + AX^{(6)} + BX^{(5)} + CX^{(4)} + D\dddot{X} + \Omega(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)}, X^{(5)}, X^{(6)})\ddot{X}$$
$$+ \Theta(X)\dot{X} + F(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}, X^{(4)}, X^{(5)}, X^{(6)})X = 0 \qquad (6.3)$$

vektör diferansiyel denklemlerinin *X=0* çözümünün kararsızlık durumu ile ilgili Tunç (2007) tarafından verilen teoremler dikkate alınarak (6.1), (6.2) ve (6.3) denklemlerinin *X = 0* dan başka periyodik çözümlerinin olmadığı durumunu inceleyeceğiz.

6.2. (6.1) Denkleminin Periyodik Çözümünün Varlığı

Bu kısımda (6.1) denkleminin *X = 0* dan başka periyodik çözümü için yeter şartlar içeren bir teorem ifade ve ispat edilecektir.

Burada $X \in R^n$; *A, B* ve *C* sabit, reel elemanlı simetrik matrisler; Φ, *R* ve *H* ise $n \times n$- boyutlu simetrik sürekli reel elemanlı matris fonksiyonlarıdır. (6.1) denklemine eş değer sistem olarak

$$\dot{X} = Y, \ddot{X} = Z, \dddot{X} = S, X^{(4)} = T, X^{(5)} = U$$

olmak üzere

$$\dot{X} = Y, \dot{Y} = Z, \dot{Z} = S, \dot{S} = T, \dot{T} = U$$

$$\begin{aligned} \dot{U} = &-AU - BT - CS - \Phi(X,Y,Z,S,T,U)Z - R(X)Y \\ &- H(X,Y,Z,S,T,U)X \end{aligned} \tag{6.4}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca,

$$J_R(X) = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right), \ (i, j = 1,2,...,n)$$

Jacobian matrisinin var, simetrik ve sürekli olduğu varsayılmaktadır. Burada $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $(r_1, r_2, ..., r_n)$ sırasıyla *X* ve *R* nin elemanlarıdır.

Teorem 6.2.1.

(6.1) denkleminin *A,B,C,Φ,R* ve *H* katsayıları için yukarıda kabul edilen şartların yanı sıra a_2 bir sabit olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $\lambda_i(B) \leq a_2 < 0,$

(ii) her $X,Y,Z,S,T,U \in R^n$ için

$$\lambda_i(H(X,Y,Z,S,T,U)) < -\frac{1}{4a_2}\left[\lambda_i(\Phi(X,Y,Z,S,T,U))\right]^2,\ (i=1,2,...,n).$$

Bu takdirde (6.1) denkleminin *X=0* dan başka periyodik çözümü yoktur.

İspat:

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6)=(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t),\varepsilon_6(t))$$

(6.4) sisteminin keyfi bir α-periyodik çözümü olsun. Yani α > 0 için

$$(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t),\varepsilon_6(t))=(\varepsilon_1(t+\alpha),\varepsilon_2(t+\alpha),\varepsilon_3(t+\alpha),\varepsilon_4(t+\alpha),$$
$$\varepsilon_5(t+\alpha),\varepsilon_6(t+\alpha))$$

eşitliğinin sağlanacağı açıktır.

Teorem 6.2.1 in şartları altında

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\varepsilon_5=\varepsilon_6=0$$

olduğunu gösterilecektir. Teorem 6.2.1 in ispatında kullanacağımız temel araç

$$\begin{aligned}V_0 &= \langle X,U\rangle+\langle X,AT\rangle+\langle X,BS\rangle+\langle X,CZ\rangle\\ &-\langle Y,T\rangle-\langle Y,AS\rangle-\langle Y,BZ\rangle+\langle Z,S\rangle-\frac{1}{2}\langle Y,CY\rangle\\ &+\frac{1}{2}\langle Z,AZ\rangle+\int_0^1\langle \sigma R(\sigma X)X,X\rangle d\sigma \end{aligned} \tag{6.5}$$

şeklinde tanımlanan $V_0 = V_0(X,Y,Z,S,T,U)$ Lyapunov fonksiyonudur (Tunç, 2007).

$$\theta(t) = V_0(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t), \varepsilon_6(t))$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada *θ(t)* fonksiyonu sürekli ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ lar *t* ye göre periyodik olduğundan, *θ(t)* sınırlıdır.

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 = \frac{d}{dt}V_0(X,Y,Z,S,T,U) &= -\langle \Phi(X,Y,Z,S,T,U)Z, X\rangle - \langle H(X,Y,Z,S,T,U)X, X\rangle \\ &\quad - \langle BZ, Z\rangle + \langle S, S\rangle - \langle R(X)Y, X\rangle \\ &\quad + \frac{d}{dt}\int_0^1 < \sigma R(\sigma X)X, X > d\sigma \end{aligned} \tag{6.6}$$

olur. (6.6) denkleminde

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \sigma\langle R(\sigma X)X, X\rangle d\sigma = \langle R(X)Y, X\rangle \tag{6.7}$$

dir. (6.7) ifadesi (6.6) da yerine yazılırsa,

$$\dot{V}_0 = -\langle \Phi(X,Y,Z,S,T,U)Z, X\rangle - \langle H(X,Y,Z,S,T,U)X, X\rangle - \langle BZ, Z\rangle + \langle S, S\rangle$$

elde edilir. Teorem 6.2.1 in şartları altında ve $\langle S, S\rangle = \|S\|^2$ gerçeğinden

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &\geq \langle \Phi(X,Y,Z,S,T,U)Z, X\rangle - \langle H(X,Y,Z,S,T,U)X, X\rangle - a_2\langle Z, Z\rangle \\ &= -a_2\left\| Z + \frac{1}{2a_2}\Phi(X,Y,Z,S,T,U)X \right\|^2 - \langle H(X,Y,Z,S,T,U)X, X\rangle \\ &\quad - \frac{1}{4a_2}\langle \Phi(X,Y,Z,S,T,U)X, \Phi(X,Y,Z,S,T,U)X\rangle \\ &\geq -\langle H(X,Y,Z,S,T,U)X, X\rangle - \frac{1}{4a_2}\Phi\langle (X,Y,Z,S,T,U)X, \Phi(X,Y,Z,S,T,U)X\rangle > 0\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Böylece $\dot{\theta}(t) > 0$ olur. *θ(t)* fonksiyonu sürekli ve *t* ye göre monotondur. *θ(t)* fonksiyonu sınırlı olduğundan $t \to +\infty$ için *θ(t)* bir θ_0 limit değerine sahiptir. Yani

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \theta_0, \text{ } (\theta_0 \text{ sabit})$$

olur. Keyfi her *t* ve keyfi her *m* tamsayısı için

$$\theta(t) = \theta(t + m\,\alpha)$$

yazılabilir. Bu durumda $t \to +\infty$ için

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \lim_{t \to +\infty} \theta(t + m\alpha) = \theta_0$$

olur.

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \theta_0, \theta(t) = \theta(t + m\alpha)$$

olması nedeni ile her *t* için

$$\theta(t) = \theta_0$$

olur. Bu nedenle her *t* için

$$\dot{\theta}(t) = 0$$

yazılabilir. Ayrıca $\dot{\theta}(t) = 0$ olması her *t* için $\varepsilon_1 = 0$ olmasını gerektirir. Böylece (6.4) sisteminde $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$ olur. Buna bağlı olarak $\dot{\theta}(t) = 0$ olması her *t* için

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$$

olduğunu gösterir. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6)$, (6.4) sisteminin bir çözümü olduğundan

$$(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t), \varepsilon_6(t)) = \left(X(t), Y(t), Z(t), S(t), T(t), U(t)\right)$$
$$= (0,0,0,0,0,0)$$

elde edilir. Bu ise (6.4) sisteminin *X = 0* dan başka bir periyodik çözümünün olmadığını ispatlar.

6.3. (6.2) ve (6.3) Denkleminin Periyodik Çözümlerinin Varlığı

Bu kesimde (6.2) ve (6.3) denklemlerinin *X=0* dan başka periyodik çözümlerinin olmadığı durum ile ilgilenilecek ve bu denklemler için iki teorem ifade ve ispat edilecektir.

(6.2) ve (6.3) denklemlerinde $X \in R^n$; A, B, C ve D $n \times n$- boyutlu sabit, reel elemanlı simetrik matrisler; $\Gamma, \Psi, G, \Omega, \Theta$ ve F $n \times n$- boyutlu simetrik sürekli reel elemanlı matris fonksiyonlarıdır. $E : R^n \to R^n$ ve *E(0)=0* dır. Aynı zamanda, *E* fonksiyonu süreklidir. (6.2) ve (6.3) denklemleri sırasıyla:

$$\dot{X} = Y, \ddot{X} = Z, \dddot{X} = S, X^{(4)} = T, X^{(5)} = U, X^{(6)} = W$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\dot{X} = Y, \dot{Y} = Z, \dot{Z} = S, \dot{S} = T, \dot{T} = U, \dot{U} = W \\ &\dot{W} = -AW - BU - CT - \Gamma(X,Y,Z,S,T,U,W)S \\ &\quad - \Psi(Y)Z - G(X,Y,Z,S,T,W,U)Y - E(X) \end{aligned} \tag{6.8}$$

ve

$$\begin{aligned} &\dot{X} = Y, \dot{Y} = Z, \dot{Z} = S, \dot{S} = T, \dot{T} = U, \dot{U} = W \\ &\dot{W} = -AW - BU - CT - DS - \Omega(X,Y,Z,S,T,U,W)Z \\ &\quad - \Theta(X)Y - F(X,Y,Z,S,T,U,W)X \end{aligned} \tag{6.9}$$

sistemlerine eş değer olduğu kolaylıkla görülebilir. (6.8) ve (6.9) sistemleri için

$$J_E(X)=\left(\frac{\partial e_i}{\partial x_j}\right),\ J_\Theta(X)=\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}\right)\ \text{ve}\ J_\Psi(\ddot{X})=\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \ddot{x}_j}\right),\ (i,j=1,2,...,n)$$

Jacobian matrislerinin var, simetrik ve sürekli olduğu varsayılmaktadır. Burada sırasıyla $(x_1,x_2,....,x_n),(\ddot{x}_1,\ddot{x}_2,...,\ddot{x}_n),(e_1,e_2,...,e_n),(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$ ve $(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)$ ler $X,\ddot{X},E,\Theta$ ve Ψ nin elemanlarıdır.

Teorem 6.3.1.

(6.2) denkleminin katsayıları için yukarıda kabul edilen şartlara ilave olarak a_2 bir sabit olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $\lambda_i(B)\le a_2<0,$

(ii) $X\neq 0$ için $E(X)\neq 0$

(iii) her $X,Y,Z,S,T,U,W\in R^n$ için

$$\lambda_i(G(X,Y,Z,S,T,U,W))<-\frac{1}{4a_2}\left[\lambda_i(\Gamma(X,Y,Z,S,T,U,W))\right]^2,\ (i=1,2,...,n)$$

Bu takdirde (6.2) denkleminin *X=0* dan başka periyodik çözümü yoktur.

İspat:

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6,\varepsilon_7)=(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t),\varepsilon_6(t),\varepsilon_7(t))$$

(6.8) sisteminin keyfi bir α-periyodik çözümü olsun. Bu durumda α > 0

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t),\varepsilon_6(t),\varepsilon_7(t))=(&\varepsilon_1(t+\alpha),\varepsilon_2(t+\alpha),\varepsilon_3(t+\alpha),\\ &\varepsilon_4(t+\alpha),\varepsilon_5(t+\alpha),\varepsilon_6(t+\alpha),\\ &\varepsilon_7(t+\alpha))\end{aligned}$$

eşitliğinin sağlanacağı açıktır.

Teorem 6.3.1 in şartları altında

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = 0$$

olduğu gösterilecektir. Teorem 6.3.1 in ispatını yapmak için

$$V_1 = \langle Y, W\rangle + \langle Y, AU\rangle + \langle Y, BT\rangle + \langle Y, CS\rangle - \langle Z, U\rangle - \langle Z, AT\rangle - \langle Z, BS\rangle - \langle S, T\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\langle Z, CZ\rangle + \frac{1}{2}\langle S, AS\rangle + \int_0^1 \langle \sigma\Psi(\sigma Y)Y, Y\rangle d\sigma + \int_0^1 \langle E(\sigma X), X\rangle d\sigma$$

şeklinde $V_1 = V_1(X, Y, Z, S, T, U, W)$ Lyapunov fonksiyonunu kullanacağız (Tunç, 2007).

$$\theta(t) = V_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t), \varepsilon_5(t), \varepsilon_6(t), \varepsilon_7(t))$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada *θ(t)* fonksiyonu sürekli ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7$ ler *t*'ye göre periyodik olduğundan, *θ(t)* sınırlıdır.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 = \frac{d}{dt}V_1(X, Y, Z, S, T, U, W) = \langle T, T\rangle &- \langle \Gamma(X, Y, Z, S, T, U, W)S, Y\rangle \\ &- \langle G(X, Y, Z, S, T, U, W)Y, Y\rangle - \langle BS, S\rangle \\ &- \langle \Psi(Y)Z, Y\rangle - \langle E(X), Y\rangle \\ &+ \frac{d}{dt}\int_0^1 \langle \sigma\Psi(\sigma Y)Y, Y\rangle d\sigma \\ &+ \frac{d}{dt}\int_0^1 \langle E(\sigma X), X\rangle d\sigma \end{aligned} \qquad (6.10)$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \langle \sigma\Psi(\sigma Y)Y, Y\rangle d\sigma = \langle \Psi(Y)Z, Y\rangle \qquad (6.11)$$

ve

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \langle E(\sigma X), X\rangle d\sigma = \langle E(X), Y\rangle \tag{6.12}$$

elde edilir. (6.11) ve (6.12) ifadeleri (6.10) de yerlerine yazıldığı taktirde

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \langle T,T\rangle - \langle \Gamma(X,Y,Z,S,T,U,W)S,Y\rangle - \langle G(X,Y,Z,S,T,U,W)Y,Y\rangle \\
&\quad - \langle BS,S\rangle \\
&\geq \|T\|^2 - a_2\langle S,S\rangle - \langle \Gamma(X,Y,Z,S,T,U,W)S,Y\rangle - \langle G(X,Y,Z,S,T,U,W)Y,Y\rangle \\
&= \|T\|^2 - a_2\left\| S + \frac{1}{2a_2}\Gamma(X,Y,Z,S,T,U,W)Y\right\|^2 - \langle G(X,Y,Z,S,T,U,W)Y,Y\rangle \\
&\quad - \frac{1}{4a_2}\langle \Gamma(X,Y,Z,S,T,U,W)Y, \Gamma(X,Y,Z,S,T,U,W)Y\rangle \\
&\geq -\frac{1}{4a_2}\langle \Gamma(X,Y,Z,S,T,U,W)Y, \Gamma(X,Y,Z,S,T,U,W)Y\rangle \\
&\quad - \langle G(X,Y,Z,S,T,U,W)Y,Y\rangle > 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde $\dot{\theta}(t) \geq 0$ olur. Böylece *θ(t)* fonksiyonu sürekli ve *t* ye göre monotondur. *θ(t)* fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0,\ (\theta_0 \text{ sabit})$$

olmak üzere *θ(t),* $t \to +\infty$ için bir θ_0 limit değerine sahiptir. Keyfi her *t* ve her *m* tamsayısı için

$$\theta(t) = \theta(t+m\alpha)$$

yazılabilir. Bu durumda $t \to +\infty$ için

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty} \theta(t+m\alpha) = \theta_0$$

olur.

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=\theta_0,\theta(t)=\theta(t+m\alpha)$$

olduğundan dolayı her *t* için

$$\theta(t) = \theta_0$$

olur. Bu nedenle her *t* için

$$\dot{\theta}(t)=0$$

yazılabilir. Böylece, $\dot{\theta}(t)=0$ olması her *t* için $\varepsilon_2=0$ olmasını gerektirir ve aynı zamanda $\varepsilon_1=\eta$ (bir sabit vektör) olmak üzere (6.8) sisteminde $\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\varepsilon_5=\varepsilon_6$ $=\varepsilon_7=0$ yazıldığında Teorem 6.3.1 in şartları altında $E(0) = 0$ olduğundan dolayı $E(\eta)=0$ olur Bu ise $\eta=0$ olduğunu gösterir. Böylece $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6,\varepsilon_7$ ler (6.8) sisteminin bir çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\varepsilon_3(t),\varepsilon_4(t),\varepsilon_5(t),\varepsilon_6(t),\varepsilon_7(t)) &= (X(t),Y(t),Z(t),S(t),T(t),U(t),W(t))\\ &= (0,0,0,0,0,0,0)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum (6.2) denkleminin $X=0$ dan başka bir periyodik çözümünün olmadığını ispatlar.

Teorem 6.3.2.

(6.3) denkleminin A,B,C,D,Ω,Θ ve F katsayıları için kabul edilen şartların yanı sıra a_1, a_2 ve a_3 sabitleri olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $\lambda_i(A) \geq a_1,\ \lambda_i(B) \leq a_2\ (a_2 \neq 0),\ \lambda_i(C) \geq a_3\ (a_3 \neq 0),\ a_1 \operatorname{sgn} a_3 < 0$

(ii) her $X,Y,Z,S,T,U,W \in R^n$ için

$F(0,Y,Z,S,T,U,W) = 0,\ X \neq 0$ için $F(X,Y,Z,S,T,U,W) \neq 0$

ve

$$\lambda_i(F(X,Y,Z,S,T,U,W)) \operatorname{sgn} a_3 - \frac{1}{4a_3}\left[\lambda_i(\Omega(X,YZ,S,S,T,U,W))\right]^2 > 0$$

$(i = 1,2,\ldots,n)$.

Bu takdirde (6.3) denkleminin $X=0$ dan başka periyodik çözümü yoktur.

İspat:

Teorem 6.3.2 nin ispatında kullanacağımız temel araç

$$\begin{aligned} V_2(X,Y,Z,S,T,U,W) = \{ & -\langle X,W\rangle - \langle X,AU\rangle - \langle X,BT\rangle - \langle X,CS\rangle \\ & - \langle X,DZ\rangle + \langle Y,U\rangle + \langle Y,AT\rangle + \langle Y,BS\rangle + \langle Y,CZ\rangle \\ & + \int_0^1 \langle \sigma\Theta(\sigma X)X,X\rangle d\sigma - \langle Z,T\rangle + \frac{1}{2}\langle DY,Y\rangle \\ & - \frac{1}{2}\langle Z,BZ\rangle + \frac{1}{2}\langle S,S\rangle - \langle Z,AS\rangle\} \operatorname{sgn} a_3 \end{aligned}$$

şeklinde verilen $V_2 = V_2(X,Y,Z,S,T,U,W)$ Lyapunov fonksiyonudur (Tunç, 2007). Burada

$$\dot{V}_2 = \frac{d}{dt}V_2(X,Y,Z,S,T,U,W) = \{-\langle S,AS\rangle + \langle Z,CA\rangle + \langle X,F(X,Y,Z,S,T,U,W)X\rangle$$

$$+\left\langle X,\Omega(X,Y,Z,S,T,U,W,Z\right\rangle\}\operatorname{sgn} a_3 \qquad (6.13)$$

olur. Teorem 6.3.2 nin şartları ve 3. Bölümde verilen Lemma 3.1 ve (6.13) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
V_2 &\geq |a_3|\,\|Z\|^2+\operatorname{sgn} a_3[\left\langle X,F(X,Y,Z,S,T,U,W)X\right\rangle+\left\langle X,\Omega(X,Y,Z,S,T,U,W)Z\right\rangle \\
&\quad -a_1\operatorname{sgn} a_3\|S\|^2 \\
&= a_3\left\|Z+\frac{\operatorname{sgn} a_3}{2|a_3|}\Omega(X,Y,Z,S,T,U,W)X\right\|^2 \\
&\quad +\operatorname{sgn} a_3\left\langle X,F(X,Y,Z,S,T,U,W)X\right\rangle \\
&\quad -\frac{1}{4|a_3|}\left\langle\Omega(X,Y,Z,S,T,U,W)X,\Omega(X,Y,Z,S,T,U,W)X\right\rangle-a_1\operatorname{sgn} a_3\|S\|^2 \\
&\geq -a_1\operatorname{sgn} a_3\|S\|^2+\operatorname{sgn} a_3\left\langle X,F(X,Y,Z,S,T,U,W)X\right\rangle \\
&\quad -\frac{1}{4|a_3|}\left\langle\Omega(X,Y,Z,S,T,U,W)X,\Omega(X,Y,Z,S,T,U,W)X\right\rangle>0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6.3.2 nin ispatının geriye kalan kısmı Teorem 6.3.1 in ispatına benzer şekilde yapılır. Bu yüzden biz detaylı ispat vermeyeceğiz.

KAYNAKLAR

Andres, J., 1996. Existence, uniqueness and instability of large-period harmonics to the third- order nonlinear ordinary differential equations. ***J.Math. Anal. Appl.,*** **199** (2): 445-457.

Athanassov,Z.S., 1999. An instability criterion for ordinary differential equations. ***Acad. Roy.Belg. Bull. Cl. Sci.,*** **10** (7-12): 407-411.

Bereketoğlu, H., 1992. On the periodic solutions of certain class of seventh-order differential equations. ***Period. Math. Hungar.,*** **24** (1) : 13-22.

De la Sen, M., 2003. On the stability and instability of a class of nonlinear nonautonomous ordinary differential equations. ***Bull. Korean Math. Soc.,*** **40**(2): 243-251.

Dong, H.H., Zhong, Y.F., 1999. Instability of some nonlinear systems of third and fourth orders. (Chinese) ***J. Luoyang Univ.,*** **14** (4): 11-14.

Ezeilo, J.O.C., 1978a. An instability theorem for a certain fourth order differential equation. ***Bull. London Math. Soc.,*** **10** (2): 184-185.

Ezeilo, J.O.C., 1978b. Instability theorems for certain fifth-order differential equations. ***Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.,*** **84** (2): 343-350.

Ezeilo, J.O.C., 1979a. A further instability theorem for a certain fifth-order differential equation. ***Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.,*** **86** (3): 491-493.

Ezeilo, J.O.C., 1979b. Extension of certain instability theorems for some fourth and fifth order differential equations. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.,*** **66** (8): 239-242.

Ezeilo, J.O.C., 1982a. An instability theorem for a certain sixth order differential equaion. ***J. Austral. Math. Soc. Ser.,*** **32** (1) : 129-133.

Ezeilo, J.O.C., 1982b. Periodic solutions of certain sixth order differential equations. ***J. Nigerian Math . Soc.,*** **1**: 1-9.

Ezeilo, J.O.C., 2000. Further instability theorems for some fourth order differential equations. ***J. Nigerian Math. Soc.,*** **19 :** 1-7.

Jordan, D.W., Smit, P., 2007. ***Nonlinear ordinary differential equations.*** An introduction for scientists and engineers. Fourth edition. Oxford University Press, Oxford. viii+531pp.

Krasovskii, N.N., 1955. On conditions of inversion of A.M. Lyapunov's theorems on instability for stationary systems of differential equations. (Russian) ***Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S).,*** **101:** 17-20.

LaSalle, J., Lefschetz, S., 1961. ***Stability by Liapunov's direct method, with applications.*** Mathematics in Science and Engineering, Vol. 4 Academic Press. New York-London. vi+134pp.

Li, W., Duan, K., 2000. Instability theorems for some nonlinear differential systems of fifth order. ***J. Xinjiang Univ. Natur. Sci.,*** **17** (3): 1-5,18.

Li. W.J., Yu, Y.H., 1990.Instabilitiy theorems for some fourth-order and fifth-order differential equations.(Chinese) ***J. Xinjiang Univ. Natur. Sci.,*****7** (2):7-10.

Liao, Z.H.,Lu,D.Y., 1988. Instability of solution for the third order linear differential equation with varied coefficient.***Appl. Math. Mech.,***(English Ed.) **9** (10):969-984,translated from ***Appl. Math. Mech.*****9** (10):909-923 (Chinese).

Liu, J., 2003. ***A first course in the qualitative theory of differential equations.*** Pearson Education, New Jersey, 558 pp.

Losprime, G.A., 1966. Finding the regions of stability and instability of a differential equation of the third order with periodic coefficients (Russian) ***Ukrain. Math. vz.,*** **18** (4): 110-116.

Lyapunov, A.M., 1966. ***Stability of Motion.*** Academic Pres, New York-London, 203 pp.

Reissig, R., Sansone , G., and Conti, R., 1974. ***Non-linear differential equations of higher order.*** Translated from the German. Noordhoff International Publishing , Leyden. xiii+669 pp.

Sadek, A.I., 2003. Instability results for certain systems of fourth and fifth order differential equations. ***Appl . Math. Comput.,*** **145** (2-3): 541-549.

Skrapek, W.A., 1980. Instability results for fourth-order differential equations. ***Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. ,*** **85** (3-4): 247-250.

Sun, W.S., Hou. X., 1990. New results about instability of some fourth and fifth order nonlinear systems.(Chinese) ***J. Xinjiang Univ. Nadur. Sci.,*** **16** (4): 14-17.

Tejumola, H.O., 1995. On the periodic solutions of certain class of sixth and seventh orders differential equations***. J. Nigerian Math. Soc.,*** **14** : 81-88.

Tiryaki, A., 1987. Extension of an instability theorem for a certain fifth order differential equation. National Mathematics Symposium (Trabzon). ***J.Karadeniz Tech. Univ. Fac.Arts Sci. Ser. Math. Phys.,*** **11**: 225-227.

Tiryaki, A.,1990. Periodic solutions of certain sixth order differential equations. ***Studia*** **Univ.** ***Bolyai Babeş Math*.,** **35** (2): 31-38.

Tunç, C., 2004. On the instability of solutions of certain nonlinear vector differential equations of fifth order. ***Panamer. Math. J.,*** **14** (4): 25-30.

Tunç, C., 2005. An instability result for a certain non-autonomous vector differential equation of fifth order. ***Panamer. Math. J.***, **15** (3):51-58.

Tunç, C., Şevli, H., 2005. On the instability of solutions of certain fifth order nonlinear differential equations. ***Mem. Differential Equations Math. Phys.,*** **35** : 147-156.

Tunç, C., 2007. New results about instability of nonlinear ordinary vector differential equations of sixth and seventh orders. ***Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal.,*** **14**(1):123-126.

Tunç, C., 2008. Further results on the instability of solutions of certain nonlinear vector differential equations of fifth order. ***Appl. Math. Inf. Sci.,*** **2** (1):51-60.

Tunç, C., Karta, M; 2008. A new instability result to nonlinear vector differential equations of fifth order. ***Discrete Dyn. Nat. Soc.,***6pp.

Tunç, E., 2008. Periodic solutions of a certain vector differential equation of sixth order. ***Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci.,*** **33** (1):107--112.

Tunç, C., 2009a. Instability of solutions for certain nonlinear vector differential equations fourth order**.** ***Nonlinear Oscillations.,*** **12** (1): 120-129.

Tunç, C., 2009b. On the existence of periodic solutions to a certain fourth-order nonlinear differential equation. ***Ann. Differential Equations.,*** **25** (1): 8-12.

Villari, G., 1964. Criteri di esistenza di soluzioni periodiche per particolari classi di equazioni differenziali del terz'ordine non lineari (Italion). ***Matematiche (Catania).,*** **19:** 96 113.

.

ÖZ GEÇMİŞ

1977 yılında Erzurum'da doğdu. İlkokulu Mimar Sinan İlköğretim Okulunda, orta ve lise öğrenimini Mehmet Akif Ersoy Lisesinde bitirdi. 2000 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden bölüm birincisi olarak mezun oldu. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansını tamamladı. 2006 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Uygulamalı Matematik Anabibim Dalında doktara eğitimine başladı.