T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2-NORMLU UZAYLAR ve LİNEER OPERATÖRLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Sıddık BEYİŞ
DANIŞMAN: Prof. Dr. Tunay BİLGİN

VAN - 2010

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2-NORMLU UZAYLAR ve LİNEER OPERATÖRLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Sıddık BEYİŞ

VAN - 2010

KABUL ve ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Tunay BİLGİN danışmanlığında, Sıddık BEYİŞ tarafından hazırlanan *"2-Normlu Uzaylar ve Lineer Operatörler"* isimli bu çalışma 04 / 01 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan **:** Prof. Dr. Tunay BİLGİN İmza:

Üye **:** Prof. Dr. Heybetkulu S. MUSTAFAYEV İmza:

Üye **:** Yrd. Doç. Dr. Kamil AKBAYIR İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15 /.01./ 2010. gün ve 2010 / 2-IX sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

2-NORMLU UZAYLAR ve LİNEER OPERATÖRLER

BEYİŞ, Sıddık
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Tunay BİLGİN
Ocak 2010, 43 sayfa

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde konuya hazırlayıcı nitelikteki bilgilere ve konu ile ilgili olarak daha önce yapılmış çalışmalara kısaca değinilmiş, ikinci bölümünde ise daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümünde, 2-normlu uzaylar ele alınıp sınırlı lineer operatörler ve bu operatörler için Banach-Steinhaus teoremleri verilmiştir.

Son bölümde ise genelleştirilmiş 2-normlu uzaylar ele alınıp sınırlı 2-lineer operatörler ve bu operatörler için Banach-Steinhaus teoremleri verilmiştir.

Anahtar kelimeler: 2-Metrik uzay, 2-Normlu uzay, Genelleştirilmiş 2- normlu uzay, Sınırlı lineer operatör, Sınırlı 2-lineer operatör, Banach-Steinhaus teoremleri.

ABSTRACT

2-NORMED SPACE and LINEAR OPERATORS

BEYİŞ, Sıddık
Msc, Mathematics Science
Adviser: Prof. Dr. Tunay BİLGİN
January 2010, 43 pages

This study contain 4 section, in the first section, literature information were given which contain a short review on the subjects. In the second section, some basic definition and theorems were given.

In the third section, 2-normed spaces were studied and bounded linear operators and Banach-Steinhaus theorems for these operators were given.

In the last section generalized 2-normed spaces were studied and bounded 2-linear operators and Banach-Steinhaus theorems for these operators were given.

Key words: 2-metric space, 2-normed space, Generalized 2-normed space, Bounded linear operator, Bounded 2-linear operator, Banach-Steinhaus theorems.

ÖNSÖZ

Biz bu çalışmada; 2-normlu uzaylarda sınırlı lineer operatörler ve bu operatörler için Banach-Steinhaus teoremleri ile genelleştirilmiş 2-normlu uzaylarda sınırlı 2-lineer operatörler ve bu operatörler için Banach-Steinhaus teoremlerini ele alıp inceleyeceğiz.

Bu çalışmayı bana tez olarak veren tez çalışmaları boyunca her konuda yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Tunay BİLGİN'e teşekkürlerimi arz ederim.

Sıddık BEYİŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\lVert . \rVert$	Norm
$\lVert .,. \rVert$	2-norm
B(XxX,Y)	XxX'den Y'ye tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi.
BL(X,X)	$(X, \lVert . \rVert)$ normlu uzayından $(X, \lVert .,. \rVert)$ lineer 2-normlu uzayına tüm 2-sınırlı lineer operatörlerin uzayı.
infA	A'nın en büyük alt sınırı, infimumu.
L(X,Y)	X denY ye tüm lineer operatörlerin lineer uzayı.
$L_2(D,Y)$	D kümesinden Y uzayına tüm sınırlı 2-lineer operatörlerin kümesi D=XxX ise $L_2(X,Y)$ ile gösterilir.
SupA	A'nın en küçük üst sınırı, supremumu.

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Matematikte bazı uygulamalar hem cebirsel hem de topolojik yapıya sahiptir. Böyle uzaylarda bu iki yapıyı birbirine bağlamak faydalı ve kullanılabilir bir teorinin ortaya çıkmasını sağlar. Lineer uzay olarak bilinen cebirsel yapı ile özel olarak tarif edilen bir metrik uzay arasında bir irtibat kurulmakta. Böylece zengin bir teorinin başlangıcı kabul edilebilecek normlu uzaylarla bu uzaylarda tanımlı dönüşümler önem arz etmektedir. Lineer uzaylarında ki bu cebirsel yapı iki cebirsel işlem ile normdan ibarettir. Fonksiyonel analizde lineer operatörler ve normlu uzaylar önemli bir yer tutmaktadır. Lineer operatör teorisinde bir çok önemli sonuç, uzayın tamlığına bağlıdır. Mesela, analizde R'nin Q'dan daha çok kullanışının asıl sebebi R'nin tamlığıdır. Operatörler aynı zamanda dönüşümdür. Bu sebeple onlara sürekliliğin ve sınırlılığın tarifini uygulayabiliriz. Dolayısıyla Banach uzayı burada önem kazanmaktadır. Banach uzayların lineer operatörler teorisi, bir çok genel sonuca sahiptir.

Genel metrik'i Menger (1928) tanımladı. Fakat bir çok matematikçi tarafından dikkat alınmadı. 1963'te Menger (1928)'in araştırmalarını esas alan Gahler tarafından tanıtılan 2-metrik uzay çalışması ile yeni bir gelişme başlamıştır. Bir metrik notasyonu iki nokta arasındaki mesafenin genelleştirilmesi olarak adlandırılır. 2-metrik notasyonu ise alana genelleştirilmesiyle elde edilir. Öklid düzleminde alan, düzlemde verilen 3 nokta tarafından tek bir şekilde belirlenir. Bundan dolayı her bir 2-simplex bir alana sahiptir. Bu fikir çok daha yüksek boyuttaki figürlere kolaylıkla genelleştirilebilir. Örneğin bir 3-simplex Öklid uzayında dört nokta ile belirtilir. Bu durumda her bir simplex hacim denilen, negatif olmayan bir gerçek sayıya sahiptir.

Gahler (1964) lineer 2-normlu uzay kavramını ortaya koydu ve 2-normlu uzaylarda değerleri olan sınırlı lineer operatörler için birçok özelliği ve örneği inceledi. Lin (1992) 2-konveks ve 2-normlu uzayları inceledi. Kim ve ark. (1992) 2-normlu uzaylarda lineer operatörlerin bazı özelliklerini incelediler ve bir lineer operatörün 2-sürekli olması için 2-sınırlı olması gerektiğini gösterdiler. Lewandowska (1999-2003b) genelleştirilmiş 2-normlu uzay kavramını tanımlayarak normlu uzaylardan genelleştirilmiş 2-normlu uzay içine lineer sınırlı operatörlerin özelliklerini inceledi ve bütün lineer 2-sınırlı operatörlerin uzayının Banach uzayı olduğunu gösterdi. Yine

Lewandowska (2003a) 2-normlu kümeleri tanımladı ve genelleştirilmiş 2-normlu kümeleri inceledi. Chu ve ark. (2004) lineer 2-normlu uzaylarda alan koruyan dönüşüm kavramını inceledi. Chu (2007) lineer 2-normlu uzaylarda alan koruyan dönüşüm kavramının sunulması için 2-izometri kavramını inceledi. Bu konuda White (1984), Iseki (1976), Açıkgöz (1997), Gunawan ve Mashadi (2001), White ve Cho (1984), çalışmaları da mevcuttur. Yakın zamanda ise Lewandowska ve ark. (2006) genelleştirilmiş 2-normlu uzaylarda Hahn-Banach teoremini inceledi.

Biz bu çalışmada; iki normlu uzaylar ile genelleştirilmiş 2-normlu uzayları ele alarak bu uzaylar üzerinde verilmiş olan bazı önemli kavramları (sınırlı lineer operatörler, 2-süreklilik, 2-sınırlılık, sınırlı 2-lineer operatörler, Banach-Steinhaus Teoremleri, v.b.) ele alıp inceleyeceğiz.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. Lineer uzay (Vektör Uzayı)

X boş olmayan bir küme ve F cismi R veya C olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

L1) +: XxX→X, (x,y)→x+y (Burada x,y,z∈ X ve a,b∈ F dir.) denen ikili işleme göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G0) Her x,y∈ X için, x+y∈ X dir.

G1) Her x,y,z∈ X için, x+(y+z)=(x+y)+z dir.

G2) Her x∈ X için, x+e=e+x=x olacak şekilde bir e∈ X vardır.

G3) Her x∈ X için, x+y=y+x=e olacak şekilde y∈ X vardır.

G4) Her x,y∈ X için, x+y=y+x dır.

L2) .: FxX→X, (a,x)→a.x dönüşümü aşağıdaki şartları sağlar.

1) 1.x=x dir. (Burada 1,F' nin birim elemanıdır.)

2) (ab)x=a(bx) dır.

3) a(x+y)=ax+ay dır.

4) (a+b)x=ax+bx dır.

F cisminin R reel sayılar cismi ya da C kompleks sayılar cismi olup olmadığına bağlı olarak L uzayına reel ya da kompleks vektör uzayı denir. X uzayının elemanlarına nokta ya da vektör denir. + ve . işlemlerine kısaca lineer uzay işlemleri ve F nin elemanlarına da skaler denir.

Tanım 2.2. (Lineer Operatör)

X ve Y aynı F cismi üzerinde vektör uzayları ve D, X uzayının lineer alt kümesi olsun. Keyfi x,y∈ D ve α,β∈ F için,

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$$

ise, T:D→Y dönüşümüne lineer dönüşüm (Lineer operatör) denir. X uzayındaki tüm lineer operatörlerin lineer uzayı $L(X,Y)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. (Sınırlı Operatör)

T:X→Y lineer operatörü X den elde edilen her sınırlı kümeyi Y de başka bir sınırlı kümeye dönüştürürse, T lineer operatörüne sınırlı lineer operatör denir. Bir başka deyişle her x∈ X için,

$$\|Tx\| \leq C\|x\|$$

olacak şekilde bir C>0 sabiti varsa T ye sınırlı operatör denir.

Tanım 2.4. (Operatörün Normu)

T:X→Y sınırlı bir lineer operatör olsun.

$$\|Tx\| \ \leq C\|x\|$$

Eşitsizliğini sağlayan C>0 sayılarının infimumuna, T operatörünün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. (İç Çarpım Uzayı)

X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.
φ:XxX→K

φ(x,y)=$\langle x, y\rangle$

fonksiyoneli, $\forall\, x, y, z \in X\ , \forall \alpha \in K$ *için*

i) $\langle x, y\rangle \geq 0$ ve $\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (kompleks eşlenik)

iii) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

iv) $\langle \alpha x, y \rangle = |\alpha| \cdot \langle x, y \rangle$

özelliklerini sağlıyorsa bu φ fonksiyoneline iç çarpım, $\langle x, y \rangle$ sayısına da x ve y öğelerinin iç çarpımı ve (X, $\langle , \rangle$) ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

Tanım 2.6. (2-Metrik Uzay)

XxXxX üzerinde tanımlı reel değerli negatif olmayan d:XxXxX$\to$R$^+$U{0} fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu fonksiyona 2-metrik, (X,d) ikilisine de 2-metrik uzay denir.

(2M1). X in farklı x,y elemanları için, d(x,y,z)$\neq 0$ olacak şekilde X de bir z elemanı vardır.

(2M2). d(x,y,z)=0 iken, x,y,z elemanlarının en az ikisi eşit olmalıdır.

(2M3). d(x,y,z)=d(x,z,y)=d(y,z,x)

(2M4). d(x,y,z)≤d(x,y,w)+d(x,w,z)+d(w,y,z) (Gahler, 1964)

Örnek 2.7.

$$d(x,y,z) = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\left\{\begin{vmatrix} x_i & x_j & 1 \\ y_i & y_j & 1 \\ z_i & z_j & 1 \end{vmatrix}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$ 2-metriktir. Burada, x_i, y_i, z_i x, y, z nin koordinatlarıdır. (Iseki, 1976)

Tanım 2.8.

1964 yılında S. Gahler lineer 2-normlu uzaylar kavramını ortaya koydu. X 1'den daha büyük boyutlu bir reel lineer uzay ve $\|.,.\|$ aşağıdaki koşulları sağlayan $X \times X$ kümesinde reel değerli bir fonksiyon olsun.

(N_1) $\|x, y\| = 0$ ancak ve ancak x ve y lineer bağımlıdır.

(N_2) $\|x, y\| = \|y, x\|$

(N_3) Her α reel sayısı için $\| x , \alpha y \| = |\alpha| . \| x , y \|$

(N_4) $\|x, y+z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

$\|.,.\|$ fonksiyonuna X lineer uzayında bir 2-norm denir ve $(X, \|.,.\|)$ uzayına lineer 2-normlu uzay denir. 2-normlu uzay ile 2-metrik uzay arasında d(x,y,z)=$\|$x-z,y-z $\|$ bağıntısı vardır. (2M2) özelliğinden $\|.,.\|$ reel fonksiyonunun negatif olmadığı görülür. 2-normlu lineer uzaylar, 2-metrik uzayların özel bir durumudur.

Uyarı 2.9.

Her $x, y, z \in X$ için, $\|x-z, x-y\| = \|x-z, y-z\|$ dır. Burda, $\|x-z, y-z\|$ normuna x, y ve z (ile gerilen konveks zarf'ın) nin alanı denir. (Chu, 2007)

Lemma 2.10.

$b, c \in X$ için, b ile c aynı yönlü olup lineer bağımlı iseler yani, bir $\alpha > 0$ için, $c = \alpha b$ ise, tüm $a \in X$ için, $\|a, b+c\| = \|a, b\| + \|a, c\|$.dir. (Chu ve ark, 2004)

İspat: Her $a \in X$ için,

$\|a, b+c\| = \|a, b+\alpha b\| = \|a, (1+\alpha) b\| = (1+\alpha) \|a, b\| = \|a, b\| + \alpha \|a, b\| = \|a, b\| + \|a, c\|$ elde edilir.

Lemma 2.11.

Her x,y$\in$ X ve $\forall$ α$\in$ R için $\|$x, y $\|$ = $\|$x, y + αx $\|$ dir. (Gahler, 1964)

Normlu lineer uzayların lineer 2-normlu uzaylara ve bazı koşullar altında tersinin yaptırılabileceği bilinmektedir. Gerçekten a ve b X'te lineer bağımsız vektörler olmak üzere, X bir lineer 2-normlu uzay ise, $\|x\| = \|x, a\| + \|x, b\|$ eşitliği X uzayında bir norm tanımlar. (Kim ve ark., 1992) Daha genel olarak her n-normlu uzay n≥2 için, r=1,2,3,…,n-1 olmak üzere (n-r)-normlu uzaya dönüştürülebilir. (Gunawan ve Mashadi, 2001)

Örnek 2.12.

$x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ iken, $X=R^3$ ve X üzerinde

$$N(x,y)=|x\times y|=\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|$$

2-normunu düşünelim. O zaman; $(X,N(.,.))$ bir iki normlu uzaydır.

Örnek 2.13.

X=Q^3, X üzerindeki N(x,y)=$|x\times y|=\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|$ 2-normu ile (X,N(.,.)) bir iki normlu uzay olur. (Açıkgöz, 2007)

Tanım 2.14.

X ve Y reel lineer uzaylar ve D, $X\times Y$ kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $x\in X, y\in Y$ için $D_x=\{y\in Y;\ (x,y)\in D\}$ ve $D^y=\{x\in X;(x,y)\in D\}$ kümeleri sırasıyla Y ve X uzayının lineer alt uzaylarıdır.

Bir $\|.,.\|:D\to[0,\infty)$ fonksiyonu, aşağıdaki koşulları sağlarsa, D kümesi üzerinde genelleştirilmiş bir 2-norm adını alır.

(N1) Her α reel sayısı ve tüm $(x,y)\in D$ için, $\|x,\alpha y\|=|\alpha|.\|x,y\|=\|\alpha x,y\|$

(N2) $(x,y),(x,z)\in D$ olacak şekilde $x\in X, y,z\in Y$ için, $\|x,y+z\|\le\|x,y\|+\|x,z\|$

(N3) $(x,z),(y,z)\in D$ olacak şekilde $x,y\in X, z\in Y$ için, $\|x+y,z\|\le\|x,z\|+\|y,z\|$

D kümesi 2-normlu bir kümedir.

Özellikle $D = X \times Y$ ise, $\| \cdot, \cdot \|$ fonksiyonu $X \times Y$ kümesinde genelleştirilmiş bir 2-norm ve $(X \times Y, \| \cdot, \cdot \|)$ ikilisi genelleştirilmiş bir 2-normlu uzay adını alır.

Öte yandan, $X = Y$ ise, genelleştirilmiş 2-normlu uzay $(X, \| \cdot, \cdot \|)$ ile gösterilir. (Lewandowska, 1999)

Örnek 2.15.

X uzayı, iki normulu bir reel lineer uzay olsun. Her $a, b \in X$ için, $\|a, b\| = \|a \times b\|$ şeklinde tanımlansın. $(X, \|.,.\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzaydır.

Örnek 2.16.

X uzayı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ yarı-normlarına sahip bir reel lineer uzay olsun. Bu durumda, $(X, \|.,.\|)$ uzayı, her $x, y \in X$ için, $\|x, y\| = \|x\|_1 \|y\|_2$ şeklinde tanımlı 2-normla verilen genelleştirilmiş 2-normlu uzaydır. (Lewandowska, 2004)

Tanım 2.17.

X bir reel lineer uzay olsun. χ ile $\chi = \chi^{-1}$ özelliğini sağlayan $X \times X$ kümesinin boş olmayan bir alt kümesi gösterilsin. Bu durumda, tüm $y \in X$ için, $\chi^y = \{x \in X; (x, y) \in \chi\}$ kümesi χ' in lineer alt uzayıdır.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $\| \cdot, \cdot \| : \chi \to [0, \infty)$ fonksiyonuna,

(S1) Tüm $(x, y) \in \chi$ için, $\|x, y\| = \|y, x\|$

(S2) Bir α reel sayısı ve tüm $(x, y) \in \chi$ için, $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \cdot \|x, y\|$

(S3) $(x, y), (x, z) \in \chi$ koşulunu sağlayan tüm $x, y, z \in X$ için, $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

χ kümesi üzerinde genelleştirilmiş simetrik 2-norm denir. χ kümesine de simetrik 2-normlu küme denir. Özellikle, $\chi = X \times X$ ise, $\|\, . \, , \, . \,\|$ fonksiyonuna X uzayında genelleştirilmiş simetrik 2-norm ve $(X, \|.,.\|)$ ikilisine de genelleştirilmiş simetrik 2-normlu uzay denir. (Lewandowska, 1999)

Örnek 2.18.

X bir reel iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda, X uzayı, tüm $x, y \in X$ için, $\|x, y\| = |\langle x, y \rangle|$ 2-normu altında bir genelleştirilmiş simetrik 2-normlu uzaydır. (Lewandowska, 2006)

Örnek 2.19.

Örnek 2.16 daki $\|.\|_1 = \|.\|_2$ alabiliriz. O halde, $(X, \|.,.\|)$ uzayı, her $x, y \in X$ için, $\|x, y\| = \|x\|.\|y\|$ alınırsa simetrik 2-normu altında genelleştirilmiş simetrik 2-normlu bir uzaydır.

Örnek 2.20.

s 'nin tüm reel sayı dizilerinin lineer uzayı olduğunu varsayalım. $\|x, y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n|$ olsun. Burada $x = \{x_n\}, \ y = \{y_n\} \in s$ 'dir. Bu durumda $D = \{(x, y) \in s \times s : \|x, y\| < \infty\}$ bir simetrik 2-normlu kümedir ve $\|.,.\| : D \to [0, \infty)$ fonksiyonu D üzerinde genelleştirilmiş simetrik 2-normdur. (Lewandowska, 2006)

Bir simetrik 2-normlu uzayın Gahler anlamında bir 2-normlu uzay olması gerekmediğini biliyoruz. Örneğin örnek 2.19 da $x \neq 0, \ y = kx, k \neq 0$ verildiğinde

$$\|x, y\| = \|x, kx\| = |k|.\|x, x\| = |k|.\|x\|^2 > 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ancak x ve y lineer bağımlıdır. 2-normlu uzay tanımı anlamında 2-normlu bir uzay değildir. (Lewandowska, 2004)

Tanım 2.21.

X, 2-normlu lineer uzayında $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her y$\in$ X için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\ , y\| = 0$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisine yakınsaktır denir.

Tanım 2.22. (Cauchy Dizisi)

X, 2-normlu bir lineer uzay ve $\{x_n\}$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer y ve z lineer bağımsız olmak üzere $\lim_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m, y\| = 0$ ve $\lim_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m, z\| = 0$ olacak şekilde y,z$\in$ X varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.23.

$(X \times Y, \|\,.\,,.\,\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay olsun. $\|\,.\,,.\,\| : X \times Y \to [0,\infty)$ genelleştirilmiş 2-normu sürekli ve $\{(x_n, y_n); n \in N\} \subset X \times Y$ dizisi yakınsak ise, $\{\|x_n, y_n\|; n \in N\}$ 2-normlularının dizisi sınırlıdır.

Tanım 2.24. (2-Banach Uzayı)

Lineer 2-normlu $(X, \|.,.\|)$ uzayından her Cauchy dizisi yakınsak ise buna 2-Banach uzayı denir. Örnek 2.12. 2-Banach uzayıdır.

Örnek 2.25.

P_n ,[0,1] aralığı üzerinde derecesi n den küçük olan tüm reel polinomların kümesini göstersin. Bu taktirde bilinen skalerle çarpma ve toplama işlemleri altında P_n, bir lineer vektör uzayıdır. $\|f,g\| = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_i |f(x_i) \times g(x_i)|, & \text{f ve g lineer bağımsız} \\ 0, & \text{f ve g lineer bağımlı} \end{array} \right\}$ 2-normu

tanımlansın ve [0,1] de $\{x_n\}$ (n=1,2,…..,2n+1) verilsin. Bu taktirde $(P_n, \|.,.\|)$ bir 2-Banach uzayı olur. (Iseki, 1976)

Teorem 2.26.

2-normlu lineer uzayda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat: İspat için, X 2-normlu bir lineer uzay ve $\{x_n\}$, bu uzayda bir dizi olsun. Ayrıca $w \in X$ alalım. 2-metrik ve 2-norm arasında d(x,y,z)=$\|x-z, y-z\|$ bağıntısı vardır. Buna göre, $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\} \in X$ alalım. Bu dizilerin tek bir limite sahip olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Üçgen eşitsizliği kullanılırsa,
$d(x_n,y_n,z_n) \leq d(x_n,y_n,w)+d(x_n,w,z_n)+d(w,y_n,z_n)$ yazılır. Buradan,
$d(x_n,y_n,w)=\|x_n - w, y_n - w\| = \|(x_n, y_n) - (w,w)\|$ elde edilir. Bu anlamda
$d(x_n,w,z_n)=d(x_n,z_n,w)$ yazılabileceğinden $d(x_n,w,z_n) = \|x_n - w, z_n - w\| = \|(x_n, z_n) - (w,w)\|$
ve $d(w,y_n,z_n)=d(y_n,z_n,w)$ olduğundan, $d(w,y_n,z_n)= \|y_n - w, z_n - w\| = \|(y_n, z_n) - (w,w)\|$
bulunur. Dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n) - (w,w)\| = 0$ ve $(x_n, y_n) \to (w,w)$ elde edilir. Buradan da $x_n \to w$, $y_n \to w$ olur. Benzer şekilde, $\lim_{n\to\infty} \|(x_n, z_n) - (w,w)\| = 0$ ve $(x_n, z_n) \to (w,w)$ bulunur. Buradan da $x_n \to w$, $z_n \to w$ olur. Yine benzer şekilde, $(y_n, z_n) \to (w,w)$ bulunur. Buradan, $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\} \in X$ dizilerinin yine X içinde tek bir noktaya yakınsadığı görülür.

Tanım 2.27. (Bilineer Operatör)

$f: R^n x R^m \to R^p$ dönüşümü $x, x_1, x_2 \in R^n$ ve $y, y_1, y_2 \in R^m$ ve $\alpha \in R$ için,

a) $f(\alpha x, y) = f(x, \alpha y) = \alpha f(x,y)$

b) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$

c) $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$ şartlarını sağlıyorsa, f ye bilineer operatör denir.

Tanım 2.28.

Reel veya kompleks sayılar üzerinde bir V vektör uzayı bir yerel konveks uzay ya konveks kümeler vasıtasıyla yada denk olarak yarı normlar vasıtasıyla tanımlanır.
V de bir C kümesi için, eğer her x,y$\in$C ve t$\in [0,1]$ için tx+(1–t)y$\in$C oluyorsa C ye konvekstir denir.

Teorem 2.29.

$(X \times Y, \|.,.\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay olsun. O halde,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X ; \|x, y_i\| < \varepsilon\}$$

ile tanımlı tüm kümelerin B ailesi, X uzayının yerel konveks topolojisi için sıfırın komşulukları sistemini oluşturur. Burada, $y_1,\ y_2, \ldots, y_n \in Y$ ve $\varepsilon > 0$ dır.

Bunu $T(X,Y)$ sembolüyle göstereceğiz. Benzer şekilde, Y uzayında bir $T(Y,X)$ topolojisi için de bunu oluşturabiliriz. $X = Y$ olması durumunda, yukarıdaki topolojileri $T_1(X) = T(X,Y)$ ve $T_2(X) = T(Y,X)$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.30.

$(X \times Y, \|.,.\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay olsun. X uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise, $(X, T(X,Y))$ uzayına dizisel tamdır denir. Benzer şekilde, Y uzayında Cauchy dizisi tanımlarını ve $(Y, T(Y,X))$ uzayının dizisel tamlığını elde edebiliriz.

Tanım 2.31.

M ve N, X in lineer alt uzayları olmak üzere MxN üzerinde tanımlanan,
F:MxN$\rightarrow$R fonksiyonuna 2-fonksiyonel denir. Eğer F 2-fonksiyoneli,
a) F(x+y,z+t)=F(x,z)+F(x,t)+F(y,z)+F(y,t)
b) F($\alpha x, \beta y$)=$\alpha\beta F(x, y)$ koşullarını sağlıyor ise, F ye 2-lineer fonksiyonel denir. Burada, α, β üzerinde çalışılan cisimdeki skalerdirler.

Tanım 2.32.

M ve N, X in alt uzayları olsunlar. (x,y)$\in$ MxN için $|F(x, y)| \leq K\|x, y\|$ olacak şekilde bir K>0 sayısı varsa 2-lineer F fonksiyoneline MxN üzerinde sınırlıdır denir. F'nin normu, $\|F\|$ ile gösterilir ve $\|F\| = \inf\{K : |F(x, y)| \leq K\|x, y\|, \forall(x, y) \in MXN\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.33.

$(X, \|.,.\|)$ ve $(Y, \|.,.\|)$ 2-normlu uzaylar, T:$X \rightarrow Y$ dönüşümü her $y \in X$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x, y\| = 0$ iken, $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - Tx, Ty\| = 0$ oluyorsa, T dönüşümüne $x \in X$ noktasında 2-norma göre süreklidir denir.

Teorem 2.34.

$(X, \|.,.\|)$ ve $(Y, \|.,.\|)$ 2-normlu uzaylar, $T : X \rightarrow Y$ lineer ve sıfırda sürekli ise, T X uzayının her noktasında süreklidir.

İspat: İspat için T nin $T(x+y)=Tx+Ty$ ve $T(ax)=aTx$ olarak bilinen lineerlik şartlarını ve $\lim_{n\to\infty}\|x_n, y\| = 0$ ise, $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n, Ty\| = 0$ olarak bilinen sıfırda süreklilik tanımını ele alalım. Burada, $\forall z \in X$ için, $\lim_{n\to\infty}\|z_n - z, y\| = 0$ olsun. Özel olarak $x_n = z_n - z$ aldığımızda,

$\lim_{n\to\infty}\|x_n, y\| = 0$ olur. $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n, y\| = \|T(z_n - z), y\| = \|Tz_n - Tz, Ty\| = 0$ dır. Bu da *T* nin *X* in her noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Sonuç 2.35.

$(X, \|.,.\|)$ ve $(Y, \|.,.\|)$ 2-normlu uzaylar, $T{:}X \to Y$ lineer dönüşüm olsun. *T* nin sıfırda sürekli olması için gerek ve yeter şart *T* nin sınırlı olmasıdır.

Teorem 2.36.

$(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzay, $(Y, \|.,.\|)$ 2-Banach uzayı, $T : X \to Y$ dönüşümü sürekli ise, $(X, \|.,.\|)$ de 2-Banach uzayıdır.

İspat: $(Y, \|.,.\|)$ Banach uzayı olduğundan 2-normuna göre tamdır. Tamlığından dolayı, *Y* uzayında $\{y_n\}$ Cauchy dizisinin limiti bu uzaydadır. $y_n \to y, z_1 \in Y$ için, $\lim_{n\to\infty}\|y_n - y, z_1\| = 0$ olup $y \in Y$ dir. *T* lineer olduğundan, $Tx_n = y_n \to Tx = y$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır. $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n - Tx, -Tz_1\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\|T(x_n - x,) - Tz_1\| = 0$ yazılabilir. Bu da $x_n \to x$ demektir. *T*x=y≠0 olduğundan x, *X* uzayında (x_n) dizisinin limiti olup bu uzayda bir noktadır.

3. 2-NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde, 2-normlu uzaylarda 2-sınırlı lineer operatörler ele alınarak bir normlu lineer uzaydan bir 2-Banach uzayına olan tüm 2-sınırlı lineer operatörlerin uzayının bir Banach uzayı olduğunu göstereceğiz. (Kim ve ark., 1992) Ayrıca bir normlu uzaydan iki normlu uzaya tanımlı operatörlerin kümesi için Banach-steinhaus teoremlerini vereceğiz. (Lewandowska, 2003b)

3.1. 2-Sınırlı Lineer Operatörler

Bu kısımda $(X,\|.\|)$ normlu lineer uzayından bir $(X,\|.,.\|)$ 2-Banach uzayına olan tüm 2-sınırlı lineer operatörlerin uzayının bir Banach uzayı olduğunu göstereceğiz. (Kim ve ark, 1992)

Tanım 3.1.1.

$(X,\|.,.\|)$ ve $(Y,\|.\|)$ sırasıyla bir lineer 2-normlu uzayı ve bir normlu lineer uzayı göstersin. $X \times X$ kümesindeki tüm (a_1,b_1) ve (a_2,b_2) elemanları için,

$$\|T(a_1,b_1)-T(a_2,b_2)\| \leq k(\|a_1-a_2,b_1\|+\|a_2,b_1-b_2\|)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \geq 0$ sayısı varsa $T : X \times Y \to Y$ operatörüne sınırlıdır denir. T böyle bir operatör ise, T nin normunu,

$$\|T\| = \inf\{k : \|T(a_1,b_1)-T(a_2,b_2)\| \leq k(\|a_1-a_2,b_1\|+\|a_2,b_1-b_2\|) \text{ tüm } (a_1,b_1) \text{ ve } (a_2,b_2) \in X \times X \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlarız. Sınırlılığın tanımından, aşağıdaki lemmayı elde ederiz.

Lemma 3.1.2.

T bir bilineer operatör ise, T sınırlıdır ancak ve ancak bazı $k \geq 0$ sayısı için, $\|T(x,y)\| \leq k\|x,y\|$ dır.

İspat: Eğer T sınırlı ise, $(a_2, b_2) = (0,0)$ olur. Bu durumda, bazı $k \geq 0$ için, $\|T(x,y)\| \leq k\|x,y\|$ elde ederiz. Tersine, bazı $k \geq 0$ için $\|T(x,y)\| \leq k\|x,y\|$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\|T(a,b) - T(c,d)\| &= \|T(a-c,b) + T(c,b-d)\| \\ &\leq \|T(a-c,b)\| + \|T(c,b-d)\| \\ &\leq k(\|a-c,b\| + \|c,b-d\|)\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Aynı zamanda T bir sınırlı bilineer operatör ve x ve y lineer bağımlı ise, $T(x,y) = 0$ olduğunu görüyoruz.

Teorem 3.1.3.

Eğer T bir sınırlı bilineer operatör ise,

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|T(a,b)\|}{\|a,b\|} : \ \|a,b\| \neq 0 \text{ olup } (a,b) \in X \times X \right\} \text{ olur.}$$

İspat: $A = \sup\left\{ \|T(a,b)\| / \|a,b\| : \ \|a,b\| \neq 0 \text{ olup } (a,b) \in X \times X \right\}$ olsun. $\|T\|$ normunun tanımından, $\|a,b\| \neq 0$ ise $\|T(a,b)\| / \|a,b\| \leq \|T\|$ eşitsizliğini elde ederiz. Buradan, $A \leq \|T\|$ bulunur. Tersine A 'nın tanımından, $\|T(a,b)\| \leq A\|a,b\|$ elde ederiz. Bu nedenle, $\|T\| \leq A$ bulunur. Sonuç olarak, $\|T\| = A$ elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.4.

Tüm $\varepsilon > 0$ sayıları için, $\|x-a,b\| < \delta$ ve $\|a,y-b\| < \delta$ ya da $\|x-a,y\| < \delta$ ve $\|a,y-b\| < \delta$ iken, $\|T(x,y) - T(a,b)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $T : X \times X \to Y$ operatörüne (a,b) noktasında süreklidir denir. T tanım bölgesinin her noktasında sürekli ise, T süreklidir. (Veya her $y \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$ iken,

$\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n - Tx, Ty\| = 0$ oluyorsa, T dönüşümüne $x \in X$ noktasında 2-norma göre süreklidir denir.)

Teorem 3.1.5.

Bir T bilineer operatörü $(0,0)$ noktasında sürekli ise, bu operatör süreklidir.

İspat: Dikkat edilirse T bilineer ise, $T(0,0) = 0$ dır. Buradan, T $(0,0)$ noktasında sürekli olduğundan, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\|u,v\| < \delta$ iken, $\|T(u,v)\| < \varepsilon/2$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $(a,b) \in X \times X$ olsun. Bu durumda, $\|x-a, y\| < \delta$ ve $\|a, y-b\| < \delta$ iken,

$$\|T(x,y) - T(a,b)\| \leq \|T(x-a,y)\| + \|T(a,y-b)\| < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu nedenle T operatörü $(a,b) \in X \times X$ noktasında süreklidir. $(a,b) \in X \times X$ keyfi olduğundan, T operatörü süreklidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.6.

T sınırlı bir operatör ise, T süreklidir.

İspat: T sınırlı bir operatör olduğundan,

$$\|T(a_1,b_1) - T(a_2,b_2)\| \leq \|T\|\left(\|a_1 - a_2, b_1\| + \|a_2, b_1 - b_2\|\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $\delta = \varepsilon/2\|T\|$ alındığında, $\|a_1 - a_2, b_1\| < \delta$ ve $\|a_2, b_1 - b_2\| < \delta$ iken, $\|T(a_1,b_1) - T(a_2,b_2)\| < \varepsilon$ eşitsizliğini elde ederiz ki bu T operatörünün sürekli olduğu anlamına gelir. $\|T\| = 0$ ise, T sabittir. Bu ispatı tamamlar.

Bir sözde-normun, $\|x\| = 0$ eşitliğinin $x = 0$ sonucunu vermesi koşulu hariç bir normun tüm koşullarına sahip reel değerli bir fonksiyon olarak tanımlandığını biliyoruz.

$B(X \times X, Y)$ simgesi $X \times X$ 'den Y 'ye tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesini göstersin. $B(X \times X, Y)$ kümesi R üzerinde bir lineer uzaydır.

Teorem 3.1.7.

$\left(B(X \times X, Y), \|\!|.|\!\|\right)$ bir sözde-normlu lineer uzaydır. Burada, sözde-norm Teorem 3.1.3. ile verilen normdur.

İspat: $T \in B(X \times X, Y)$ operatörü,

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|T(a_1,b_1) - T(a_2,b_2)\|}{\|a_1 - a_2, b_1\| + \|a_2, b_1 - b_2\|} : \|a_1 - a_2, b_1\| + \|a_2, b_1 - b_2\| \neq 0 \text{ , } (a_1,b_1),(a_2,b_2) \in X \times X \right\} = 0$$

formülünü sağlayacak şekilde verilsin. $\|T\| = 0$ ise,

$$\frac{\|T(a_1,b_1) - T(a_2,b_2)\|}{\|a_1 - a_2, b_1\| + \|a_2, b_1 - b_2\|} = 0$$

sonucunu elde ederiz ki bu $T(a_1,b_1) = T(a_2,b_2)$ demektir. Yani, T operatörü sıfır operatörü olmayabilen bir sabittir. Teorem 3.1.3. ve $\|T\|$ normunun tanımından, $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$ ve $\|T_1 + T\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$ kolayca elde edilir. Bu nedenle $\left(B(X \times X, Y), \|\!|.|\!\|\right)$ bir sözde-normlu uzaydır.

Tanım 3.1.8.

X , $\|.\|$ normuyla ve $\|.,.\|$ 2-normuyla verilen bir lineer uzay olsun. Tüm $x, y \in X$ için,

$$\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| \leq k \|x\| \|y\|$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sayısı varsa, $T : (X, \|.\|) \to (X, \|.,.\|)$ operatörüne 2-sınırlıdır denir. T böyle bir operatör ise $\|T\|_2$ normunu,

$$\|T\|_2 = \inf\left\{ k : \text{ tüm } x, y \in X \text{ için, } \|T(x), y\| + \|x, T(y)\| \leq k \|x\| \|y\| \right\}$$

şeklinde tanımlarız. T 2-sınırlı değilse, $\|T\|_2 = +\infty$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.9.

$(X, \|.\|)$ bir reel iç çarpım uzayı olsun. $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ verilsin ve $\|x, y\| = \left\{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2\right\}^{1/2}$ 2-normunu tanımlayalım. T operatörü X uzayından X uzayına sınırlı operatör olsun. Buradan,

$$\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| \leq 2\|T\|\|x\|\|y\|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu nedenle T operatörü, $\|T\|_2 \leq 2\|T\|$ eşitsizliğiyle verilen X uzayından X uzayına bir 2-sınırlı operatördür.

Örnek 3.1.10.

R^2 kümesi $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ normu ve $\|(x_1, x_2), (y_1, y_2)\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ 2-normuyla verilen düzlemi göstersin. T operatörünü $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, $\|T\| = 1$ ve $\|T\|_2 = 1$ dir. $T'(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ operatörünü tanımlarsak, $\|T'\| = 1$ ve $\|T'\|_2 = 2$ dir.

Teorem 3.1.11.

T 2-sınırlı bir lineer operatör ise,

$$\|T\|_2 = \sup\{\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| : \|x\|\|y\| = 1 \text{ olup } x, y \in X\}$$

$$= \sup\left\{\frac{\|T(x), y\| + \|x, T(y)\|}{\|x\|\|y\|} : \|x\|\|y\| \neq 0 \text{ olup } x, y \in X\right\} \text{ olur.}$$

İspat: $A = \sup\{\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| : \|x\|\|y\| = 1 \text{ olup } x, y \in X\}$ normunu tanımlayalım. 2-sınırlılığın tanımından, $A \leq \|T\|_2$ bulunur. $\|x\|\|y\| = 0$ ise, $\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| = 0 \leq A$ dır. $\|x\|\|y\| \neq 0$ ise, $x_1 = x/\|x\|$ ve $y_1 = y/\|y\|$ alalım. T lineer olduğundan, $\|T\|_2 \leq A$ elde edilir. Buradan, $\|T\|_2 = A$ bulunur. $C = \sup\{(\|T(x), y\| + \|x, T(y)\|)/\|x\|\|y\| : \|x\|\|y\| \neq 0\}$ olsun. $\|T\|_2 = C$ olduğu kolayca görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.12.

$\varepsilon > 0$ sayısı için, $\|a - x\|\|b - y\| < \delta$ iken,

$$\|T(a) - T(x), b - y\| + \|a - x, T(b) - T(y)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, $T : (X, \|.\|) \to (X, \|.,.\|)$ operatörü (a, b) ikilisinde 2-süreklidir.

Teorem 3.1.13.

Bir T lineer operatörü $(0,0)$ ikilisinde 2-sürekli ise, o zaman her yerde 2-süreklidir.

İspat: T lineer ve $(0,0)$ ikilisinde 2-sürekli olduğundan, $\|x\|\|y\| < \delta$ iken, $\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda $\|a - x\|\|b - y\| < \delta$ iken,

$$\|T(a) - T(x), b - y\| + \|a - x, T(b) - T(y)\| = \|T(a - x), b - y\| + \|a - x, T(b - y)\| < \varepsilon$$

sonucunu elde ederiz. Dolayısıyla, T lineer operatörü (a, b) ikilisinde süreklidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.14.

Bir lineer operatör 2-süreklidir ancak ve ancak 2-sınırlıdır.

İspat: T 2-sürekli ise, bir $\delta > 0$ sayısı için, $\|x\|\|y\| < \delta$ iken; $\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| < 1$ eşitsizliği bulunur. $\|x\|\|y\| \neq 0$ ise, x yerine $ax/\|x\|$ ve y yerine $ay/\|y\|$ alırsak

$$\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| < (2/\delta)\|x\|\|y\|$$

elde ederiz. Burada $a = (\delta/2)^{1/2}$ dir. $\|x\|\|y\| = 0$ ve T 2-sınırlı bir operatör ise, $T(0) = 0$ olacağından, $\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| = 0$ bulunur. Dolayısıyla T 2-sınırlıdır. Tersine T 2-sınırlı ise,

$$\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| \leq \|T\|_2 \|x\|\|y\|$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $\delta = \varepsilon / (\|T\|_2 + 1)$ alalım. Dolayısıyla $\|x\|\|y\| < \delta$ ise, $\|T(x), y\| + \|x, T(y)\| < \varepsilon$ sonucu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

$BL(X, X)$ simgesi $(X, \|.\|)$ normlu lineer uzayından $(X, \|.,.\|)$ lineer 2-normlu uzayına tüm 2-sınırlı lineer operatörlerin uzayını göstersin.

Teorem 3.1.15.

$(X, \|.,.\|)$ bir 2-Banach uzayı ise, $(BL(X, X), \|.\|_2)$ bir Banach uzayıdır.

İspat: $\{T_n\}$ dizisinin $BL(X, X)$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde tüm $n, m > N$ için, $\|T_n - T_m\|_2 < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı vardır. $(X, \|.,.\|)$ bir 2-Banach uzayı olduğundan,
$T(x) = \lim T_n(x)$ tanımlansın. $\|.\|_2$ normunun tanımından, tüm $x, y \in X$ için,
$\|(T_n - T_m)(x), y\| + \|x, (T_n - T_m)(y)\| \leq \|T_n - T_m\|_2 \|x\|\|y\|$ eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla tüm $n, m > N$ için,

$$\|(T_n - T_m)(x), y\| + \|x, (T_n - T_m)(y)\| \leq \|x\|\|y\|\varepsilon \qquad \text{(A)}$$

eşitsizliğini buluruz. $T(x) = \lim T_n(x)$ olduğundan,

$$\|T(x) - T_M(x), y\| + \|x, T(y) - T_M(y)\| < \|x\|\|y\|\varepsilon \qquad \text{(B)}$$

olacak şekilde bir pozitif $M = M(x, y) > N$ tamsayısı vardır. (A) ve (B) eşitsizliklerinden, $\|T_n(x) - T(x), y\| + \|x, T_n(y) - T(y)\| \leq 2\|x\|\|y\|\varepsilon$ eşitsizliğini elde ederiz ki bu tüm $n > N$ için,

$$\sup\left\{\frac{\|T_n(x)-T(x),y\|+\|x,T_n(y)-T(y)\|}{\|x\|\|y\|}:\|x\|\|y\|\neq 0\right\}<2\varepsilon$$

sonucunu verir. Buradan, $\|T_n-T\|_2<2\varepsilon$ elde ederiz. Yani, $BL(X,X)$ bir Banach uzayıdır.

3.2. Sınırlı Lineer Operatörler İçin Banach-Steinhaus Teoremleri

Bu kesimde bir $f,g\in L(X,Y)$ için, $\mathcal{M}^g,\mathcal{M}_f$ ya da $\mathcal{N}^g,\mathcal{N}_f$ kümelerinde bulunan operatör dizilerinin özelliklerini ele alacağız. Öte yandan $\mathcal{M}$ ya da $\mathcal{N}$ kümesinden elde edilen $\{(f_n,g_n);n\in N\}$ dizilerini inceleyeceğiz. Her durumda Banach-Steinhaus teoremlerini formüle edeceğiz. $\mathcal{M}^g$ ya da $\mathcal{N}^g$ kümesinden elde edilen operatör dizilerine dair bir teorem $\mathcal{M}_f$ ya da $\mathcal{N}_f$ kümesinden elde edilen operatör dizileri için de doğru olduğundan, teoremlerin yalnız bir versiyonunu vereceğiz. (Lewandowska, 2003)

$L(X,Y)$, Y uzayında değerleri olan X uzayındaki tüm lineer operatörlerin lineer uzayını göstersin.

Tanım 3.2.1.

X bir reel normlu uzay ve $\mathcal{Y}\subset Y\times Y$ bir 2-normlu küme olsun. Burada, Y bir reel lineer uzaydır. Bir $\mathcal{M}$ kümesi şöyle tanımlanıyor:

$M=\left\{(f,g)\in L(X,Y)^2;\forall x\in X\left(f(x),g(x)\right)\in\mathcal{Y}\wedge\exists M>0\forall x\in X\left\|f(x),g(x)\right\|\leq M.\|x\|^2\right\}$

Bu $\mathcal{M}$ kümesinin aşağıdaki özelliği vardır.

Her $f,g\in L(X,Y)$ için,

$\mathcal{M}^g=\left\{f^{'}\in L(X,Y);\left(f^{'},g\right)\in M\right\}$ ve $\mathcal{M}_f=\left\{g^{'}\in L(X,Y);\left(f,g^{'}\right)\in\mathcal{M}\right\}$

kümeleri $L(X,Y)$ uzayının lineer alt uzaylarıdır. $(f,g)\in\mathcal{M}$ için,

$$\|f,g\|=\inf\left\{M>0;\forall x\in X\left\|f(x),g(x)\right\|<M.\|x\|^2\right\}\qquad(1.1)$$

dır. O halde, tüm $x\in X$ için, $\|f(x),g(x)\|\leq\|f,g\|.\|x\|^2$ ve

$$\begin{aligned}\|f,g\| &= \sup\left\{\|f(x),g(x)\|;x\in X\wedge\|x\|=1\right\}\\ &= \sup\left\{\|f(x),g(x)\|;x\in X\wedge\|x\|\leq 1\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|f(x),g(x)\|}{\|x\|^2};x\in X\wedge\|x\|\neq 0\right\}\end{aligned}$$

olur. Öte yandan, $\mathcal{M}$ kümesi (1.1) formülüyle tanımlı 2-normuyla birlikte 2-normlu bir kümedir.

Tanım 3.2.2.

X bir reel normlu uzay ve $\mathcal{Y}\subset Y\times Y$ bir 2-normlu küme olsun. Burada Y bir reel lineer uzaydır. Bir $\mathcal{N}$ kümesi şöyle tanımlanıyor:

$$\mathcal{N}=\left\{(f,g)\in L(X,Y)^2;\forall x,y\in X\left(f(x),g(y)\right)\in\mathcal{Y}\wedge\exists M>0\forall x,y\in X\left\|f(x),g(y)\right\|\leq M.\|x\|.\|y\|\right\}$$

Bu $\mathcal{N}$ kümesinin aşağıdaki özelliği vardır. Her $f,g\in L(X,Y)$ için,

$$\mathcal{N}^g=\left\{f'\in L(X,Y);(f',g)\in\mathcal{N}\right\} \text{ ve } \mathcal{N}_f=\left\{g'\in L(X,Y);(f,g')\in\mathcal{N}\right\}$$

kümeleri $L(X,Y)$ uzayının lineer alt uzaylarıdır. $(f,g)\in\mathcal{N}$ için,

$$\|f,g\|=\inf\left\{M>0;\forall x,y\in X\left\|f(x),g(y)\right\|\leq M.\|x\|.\|y\|\right\} \qquad (1.2)$$

dır. O halde, tüm $x,y\in X$ için, $\|f(x),g(y)\|\leq\|f,g\|.\|x\|.\|y\|$

$$\begin{aligned}\|f,g\| &= \sup\left\{\|f(x),g(y)\|;x,y\in X\wedge\|x\|=\|y\|=1\right\}\\ &= \sup\left\{\|f(x),g(y)\|;x,y\in X\wedge\|x\|\leq 1,\|y\|\leq 1\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|f(x),g(y)\|}{\|x\|.\|y\|};x,y\in X\wedge\|x\|\neq 0,\|y\|\neq 0\right\}\end{aligned}$$

dır. Öte yandan, $\mathcal{N}$ kümesi (1.2) formülüyle tanımlı 2-normuyla birlikte bir 2-normlu kümedir.

Teorem 3.2.3.

$(X,\|.\|)$ bir normlu uzay ve $(Y,\|.,.\|)$ bir genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve $g\in L(X,Y)$ olsun. O halde,

(a) $\{f_n, n\in N\}\subset \mathcal{M}^g$ dizisi ve $\{\|f_n, g\|; n\in N\}$ 2-normları dizisi sınırlı ise, her $x\in X$ için, $\{\|f_n(x), g(x)\|, n\in N\}$ dizisi sınırlıdır.

(b) $\{f_n, n\in N\}\subset \mathcal{N}^g$ dizisi ve $\{\|f_n, g\|; n\in N\}$ 2-normları dizisi sınırlı ise, her $x\in X$ için, $\{\|f_n(x), g(y)\|, n\in N\}$ dizisi sınırlıdır.

İspat: (a) Her $n\in N$ için, $\|f_n, g\|\le M$ olsun. O halde, $x\in X$ için,

$$\|f_n(x), g(x)\|\le \|f_n, g\|\cdot\|x\|^2 \le M.\|x\|^2$$

elde ederiz. Buradan, her $x\in X$ için, $\{\|f_n(x), g(x)\|, n\in N\}$ dizisi $M\cdot\|x\|^2$ sayısı ile sınırlıdır.

(b) Her $n\in N$ için, $\|f_n, g\|\le M$ ise, $x, y\in X$ için,

$$\|f_n(x), g(y)\|\le \|f_n, g\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|\le M.\|x\|\cdot\|y\|$$

elde ederiz. Böylece her $x, y\in X$ için, $\{\|f_n(x), g(y)\|, n\in N\}$ dizisi $M\cdot\|x\|\cdot\|y\|$ sayısı ile sınırlıdır.

Teorem 3.2.4.

$(X,\|\,.\,\|)$ bir Banach uzayı ve $(Y,\|\,.,.\,\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay olsun. Bir $g\in L(X,Y)$ için, $\{f_n; n\in N\}$ $\mathcal{N}^g$ uzayının elemanları dizisi olsun. O halde, aşağıdaki koşullar denktir.

(a) $\{\|f_n, g\|; n\in N\}$ 2-normları dizisi sınırlıdır.

(b) $\exists M>0 \forall x, y\in X, \|x\|\le 1 \|y\|\le 1 \forall n\in N \|f_n(x), g_n(y)\|\le M$

(c) Aşağıdaki koşullar doğrudur.

(i) $\forall x\in X \exists M_x>0 \forall y\in X, \|y\|\le 1 \forall n\in N \|f_n(x), g(y)\|\le M_x$

(ii) $\forall y\in X \exists M_y>0 \forall x\in X, \|x\|\le 1 \forall n\in N \|f_n(x), g(y)\|\le M_y$

İspat: Önce $\{\|f_n, g\|; n\in N\}$ 2-normları dizisinin sınırlı olduğunu varsayalım. Buradan, her $n\in N$ için, $\|f_n, g\|\leq M$ olacak şekilde pozitif bir M sayısının olduğu görülür. Böylece, $x, y\in X, \|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1$ ve $n\in N$ için, $\|f_n(x), g(y)\|\leq \|f_n, g\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|\leq M$ alırız.

Şimdi, (b) koşulu sağlansın. $x\in X\setminus\{0\}$ elemanını sabitleyelim. O halde, her $y\in X, \|y\|\leq 1$ ve $n\in N$ için,

$$\|f_n(x), g(y)\| = \left\|f_n\left(\frac{x}{\|x\|}\cdot\|x\|\right), g(y)\right\| = \|x\|\cdot\left\|f_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right), g(y)\right\| \leq M\cdot\|x\|$$

eşitsizliklerini elde ederiz. $M_x = M\cdot\|x\|$ alınırsa, (i) koşulunu elde ederiz. Öte yandan, $x=0$ için (i) koşulu her M_x pozitif sayısı için sağlanır. Benzer şekilde, her $y\in X\setminus\{0\}$ için, $M_y = M\cdot\|y\|$ ve $y=0$ için bir pozitif sayı alındığında (ii) elde ederiz. Tersine, (i) ve (ii) sağlansın. $X\times X$ kümesinde her $(x,y)\in X\times X$ için $\|(x, y)\|_* = \|x\|+\|y\|$ formülüyle bir norm tanımlayalım. $(X\times X, \|\cdot\|_*)$ uzayının bir Banach uzayı olduğunu doğrulamak kolaydır. $m,n\in N$ için,

$$A_{nm} = \{(x, y)\in X\times X; \|f_n(x), g(y)\|\leq m\}$$

ve

$$B_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{nm}$$

diyelim. Her $m\in N$ için, B_m kümelerinin $(X\times X, \|\cdot\|_*)$ uzayında kapalı olduklarını göstereceğiz. Önce A_{nm} kümelerinin bu uzayda kapalı olduklarını göstereceğiz. $m,n\in N$ ve $\{(x_k, y_k); k\in N\}\subset A_{nm}$ dizisi $(x', y')\in X\times X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. O halde, $\|f_n(x_k), g(y_k)\|\leq m$ ve $k\to\infty$ için, $\|(x_k, y_k)-(x', y')\|_*\to 0$ dır. Bu da, $\|x_k - x'\|\to 0$ ve $\|y_k - y'\|\to 0$ koşuluna denktir. Bu $\{x_k; k\in N\}, \{y_k; k\in N\}$ dizilerinin yakınsaklığını gösterir. Sonuç olarak bu diziler sınırlıdır. Her $k\in N$ için, $\|x_k\|\leq K, \|y_k\|\leq K$ eşitsizlikleri doğru olacak şekilde $K>0$ vardır. Bu sonuçları kullandığımızda,

$$\|f_n(x'), g(y')\|\leq m + K\cdot\|f_n, g\|\cdot\|x_k - x'\| + K\cdot\|f_n, g\|\cdot\|y_k - y'\| + \|f_n, g\|\cdot\|x_k - x'\|\cdot\|y_k - y'\|$$

elde ederiz. $k \to \infty$ alındığında $\left\| f_n\left(x^{'}\right), g\left(y^{'}\right)\right\| \le m$ elde ederiz ki bu $\left(x^{'}, y^{'}\right) \in A_{nm}$ demektir. Bu durumda, A_{nm} kümeleri her $n, m \in N$ için kapalıdırlar ve bu nedenle B_m kümeleri de $\left(X \times X, \|\cdot\|_*\right)$ uzayında kapalıdırlar. Şimdi,

$$X \times X = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstereceğiz. $x \in X, x \neq 0$ olsun. O halde, $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$. (ii) den her $n \in N$ için,

$$\left\| f_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right), g(y) \right\| \le M_y$$

olacak şekilde $M_y > 0$ vardır. Böylece, her $n \in N$ için, $\|f_n(x), g(y)\| \le M_y \cdot \|x\|$

$x = 0$ ise, $\|x\| \le 1$ ve $\|f_n(x), g(y)\| = \|0, g(y)\| = 0 = M_y \cdot \|0\|$ dır. Sonuç olarak, her $x, y \in X$ için, $\{\|f_n(x), g(y)\|; n \in N\}$ dizisi sınırlıdır. Buradan, bir $(x,y) \in X \times X$ noktası için, her $m \in N$ için, $\|f_n(x), g(y)\| \le m$ yani,

$$(x, y) \in \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$$

olacak şekilde $n \in N$ var olduğu görülür. Böylece,

$$X \times X = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$$

dır. İyi bilinen Baire teoreminden, içi boş kümeden farklı bir B_{m_0} kümesi vardır. Bu nedenle B_{m_0}, (x_0, y_0) merkezli ve r yarıçaplı bir kapalı top içerir. Bu topu $\kappa((x_0, y_0), r)$ ile gösterelim. Böylece, her $n \in N$ ve $(x, y) \in \kappa((x_0, y_0), r)$ için, $\|f_n(x), g(y)\| \le m_0$ elde ederiz. $\|x\| \le \frac{r}{2}$ ve $\|y\| \le \frac{r}{2}$ olacak şekilde $x, y \in X$ alalım. O halde, $\|(x, y)\|_* = \|x\| + \|y\| \le r$ ve $\|(x, y)\|_* = \|(x + x_0, y + y_0) - (x_0, y_0)\|_* \le r$ olur. Bu durumda, $\|f_n(x + x_0), g(y + y_0)\| \le m_0$ olur. Özellikle $\|f_n(x_0), g(y_0)\| \le m_0$ dır. Böylece,

$$\|f_n(x), g(y)\| \le \|f_n(x+x_0), g(y+y_0)\| + \|f_n(x+x_0), g(y_0)\| + \|f_n(x_0), g(y+y_0)\| + \|f_n(x_0), g(y_0)\|$$

$$\leq 2m_0 + \|f_n(x)+f_n(x_0), g(y_0)\| + \|f_n(x_0), g(y)+g(y_0)\|$$
$$\leq 4m_0 + \|f_n(x), g(y_0)\| + \|f_n(x_0), g(y)\|.$$

elde edilir. Böylece, $\|x\| \leq \frac{r}{2}$ ve $\|y\| \leq \frac{r}{2}$ eşitsizliklerinin

$\|f_n(x), g(y)\| \leq 4m_0 + \|f_n(x), g(y_0)\| + \|f_n(x_0), g(y)\|$

koşulunu verdiğini gösterdik. Şimdi $x, y \in X, \|x\| \leq 1$ ve $\|y\| \leq 1$ $\left\|\frac{r}{2}x\right\| \leq \frac{r}{2}$ ve

$\left\|\frac{r}{2}y\right\| \leq \frac{r}{2}$ olduğundan,

$$\left\|f_n(\frac{r}{2}x), g(\frac{r}{2}y)\right\| \leq 4m_0 + \left\|f_n(\frac{r}{2}x), g(y_0)\right\| + \left\|f_n(x_0), g(\frac{r}{2}y)\right\|$$

olur. Sonuç olarak, her $n \in N$ için,

$$\|f_n(x), g(y)\| \leq \frac{16m_0}{r^2} + \frac{2}{r}\left(\|f_n(x), g(y_0)\| + \|f_n(x_0), g(y)\|\right)$$

elde ederiz. (i) koşulunu uyguladığımızda her $y \in X, \|y\| \leq 1$ ve $n \in N$ için, $\|f_n(x_0), g(y)\| \leq M_{x_0}$ eşitsizliği doğru olacak şekilde $M_{x_0} > 0$ var olduğunu görüyoruz. Bununla birlikte (ii) varsayımı her $x \in X, \|x\| \leq 1$ ve $n \in N$ için, $\|f_n(x), g(y_0)\| \leq M_{y_0}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $M_{y_0} > 0$ var olduğu anlamına gelir. Böylece, her $n \in N$ ve $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ olacak şekilde $x, y \in X$ için,

$\|f_n(x), g(y)\| \leq \frac{16m_0}{r^2} + \frac{2}{r} \cdot \left(M_{y_0} + M_{x_0}\right)$ olur. Bu durumda her $n \in N$ için,

$$\|f_n, g\| = \sup\left\{\|f_n(x), g(y)\|; x, y \in \mathrm{X} \wedge \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\right\}$$
$$\leq \frac{16m_0 + 2r\left(M_{x_0} + M_{y_0}\right)}{r^2}$$

olacaktır. Böylece, $\left\{\|f_n, g\|; n \in N\right\}$ dizisi sınırlıdır ve ispat tamamlanmış olur.

$g \in L(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ olsun.

$$\forall x \in X, \forall z \in Y \text{ için, } \lim_{n\to\infty}\|f_n(x) - f(x), z\| = 0$$

ise, bir $\{f_n; n \in N\} \subset \mathcal{N}^g$ dizisi $f \in L(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ operatörüne noktasal yakınsaktır. Bununla birlikte g, X lineer uzayından Y lineer uzayına operatör ve

$$\forall x \in X, \forall y \in Y \text{ için } \lim_{n\to\infty} \left\| f_n(x) - f(x), g(y) \right\| = 0$$

ise, $\{f_n; n \in N\} \subset \mathcal{N}^g$ dizisi, $f \in L(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ operatörüne noktasal yakınsaktır. Yukarıdaki notu aşağıdaki teoremde kullanacağız.

Teorem 3.2.5.

$(X, \|\,.\,\|)$ bir normlu uzay ve $(Y, \|\,.,.\,\|)$ bir genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve g, X lineer uzayından Y lineer uzayına lineer operatör olsun. $\{f_n; n \in N\} \subset \mathcal{N}^g$ dizisi $f \in L(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ operatörüne noktasal yakınsak ve Teorem 3.2.4. deki (a), (b) ve (c) koşullarından birini sağlarsa, $f \in \mathcal{N}^g$ dir.

İspat: Teorem 3.2.4. ten $\{\|f_n, g\|; n \in N\}$ 2-normları dizisi sınırlıdır. Böylece, her $n \in N$ için, $\|f_n, g\| \le M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. $x, y \in X$ noktaları için,

$$\|f_n(x), g(y)\| \le \|f_n, g\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \le M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

elde ederiz. Böylece, $\|f(x), g(y)\| \le \|f(x) - f_n(x), g(y)\| + M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ olup yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ iken,

$$\|f(x), g(y)\| \le M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

elde ederiz ki bu $f \in \mathcal{N}^g$ demektir.

Teorem 3.2.6.

$(X, \|\,.\,\|)$ bir normlu uzay ve $(Y, \|\,.\,,\,.\,\|)$ genelleştirilmiş bir 2-normlu uzay olsun.

(a) $\{(f_n, g_n); n \in N\} \subset \mathcal{M}$ ve $\{\|f_n, g_n\|; n \in N\}$ 2-normlar dizisi sınırlı ise, her $x \in X$ için, $\{\|f_n(x), g_n(x)\|; n \in N\}$ dizisi sınırlıdır.

(b) $\{(f_n, g_n); n \in N\} \subset \mathcal{N}$ ve $\{\|f_n, g_n\|; n \in N\}$ 2-normlar dizisi sınırlı ise, her $x, y \in X$ için, $\{\|f_n(x), g_n(y)\|; n \in N\}$ dizisi sınırlıdır.

Teorem 3.2.7.

$(X,\|\,.\,\|)$ Bir Banach uzayı, $(Y,\|\,.\,,\,.\,\|)$ genelleştirilmiş bir 2-normlu uzay olsun. $\{(f_n, g_n); n\in N\}$ dizisi $\mathcal{N}$ uzayından alınan elemanların dizisidir. O halde, aşağıdaki özellikler denktir:

(a) $\{\|f_n, g_n\|; n\in N\}$ 2-normlar dizisi sınırlıdır.

(b) $\exists M>0 \forall x, y\in X, \|x\|\leq 1 \|y\|\leq 1 \forall n\in N \left\|f_n(x), g_n(y)\right\|\leq M$

(c) Aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\forall x\in X \exists M_x>0 \forall y\in X, \|y\|\leq 1 \forall n\in N \left\|f_n(x), g_n(y)\right\|\leq M_x$

(ii) $\forall y\in X \exists M_y>0 \forall x\in X, \|x\|\leq 1 \forall n\in N \left\|f_n(x), g_n(y)\right\|\leq M_y$

Teorem 3.2.8.

$(X,\|\,.\,\|)$ Bir Banach uzayı, $(Y,\|\,.\,,\,.\,\|)$ sürekli 2-norma sahip genelleştirilmiş bir 2-normlu uzay olsun. $\{(f_n, g_n); n\in N\}\subset \mathcal{N}$ dizisi $(f, g)\in L(X,Y)^2$ ikilisine noktasal yakınsak ve teorem 3.2.7 nin (a), (b), (c) koşulundan biri doğru ise, $(f, g)\in \mathcal{N}$ dir.

İspat: Teorem 3.2.7 de (i) yi kullandığımızda $\{\|f_n, g_n\|; n\in N\}$ 2-normlar dizisinin sınırlı olduğunu elde ederiz. Yani, her $n\in N$ için, $\|f_n, g_n\|\leq M$ olacak şekilde $M>0$ vardır. $x, y\in X$ keyfi olsun. O halde,

$$\|f_n(x), g_n(y)\|\leq \|f_n, g_n\|.\|x\|.\|y\|\leq M\|x\|.\|y\|$$

olur. 2-norm sürekli olduğundan,

$$\|f\;(x), g\;\;(y)\| = \lim_{x\to\infty}\|f_n(x), g_n(y)\|\leq M\;\|x\|.\|y\|$$

dir. Yani, $(f, g)\in \mathcal{N}$ dir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ 2-NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde, 2-normlu bir kümeden bir normlu uzaya sınırlı 2-lineer operatörlerin özellikleri ele alınarak 2-normlu bir kümeden bir Banach uzayına sınırlı 2-lineer operatörlerin ailesi için Banach-Steinhaus teoremlerini vereceğiz. (Lewandowska, 2004)

4.1. Sınırlı 2-Lineer Operatörler

Bu kesimde, bir 2-normlu kümeden bir normlu uzaya tanımlı sınırlı 2-lineer operatörleri ele alacağız. Bu operatörlerin uzayının bir Banach uzayı olduğunu göstererek bazı ek koşular altında bir simetrik 2-normlu uzay olduğunu ispatlayacağız.

Tanım 4.1.1.

Bir X reel lineer uzayını ele alalım. $D \subset X \times X$ bir 2-normlu küme, Y bir normlu uzay olsun. Bir $F : D \to Y$ operatörü aşağıdaki koşulları sağladığında bu operatöre 2-lineer operatör denir.

1. $a, c \in D^b \bigcap D^d$ olmak üzere $a, b, c, d \in X$ için,

$F(a+c, b+d) = F(a,b) + F(a,d) + F(c,b) + F(c,d)$

2. $\alpha, \beta \in R, (a,b) \in D$ için, $F(\alpha a, \beta b) = \alpha.\beta.F(a,b)$

Tanım 4.1.2.

Tüm $(a,b) \in D$ için, $\|F(a,b)\| \leq K.\|a,b\|$

eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sayısı varsa F 2-normlu operatörüne sınırlıdır denir. Bir F 2-lineer operatörünün normu,

$\|F\| = \inf\{K > 0;\ (a,b) \in D \text{ için, } \|F(a,b)\| \leq K.\|a,b\|\}$ ile verilir.

Örnek 4.1.3.

$(X, \langle , \rangle)$ bir reel iç çarpım uzayı olsun. O halde, X aşağıdaki gibi tanımlanan 2-norma göre genelleştirilmiş simetrik 2-normlu uzaydır.

Tüm $x, y \in X$ için, $\|x, y\| = |\langle x, y\rangle|$ ve $a, b \in X$ için, $F(a,b) = \langle a, b\rangle$ ile tanımlı bir $F : X \times X \to R$ operatörü 2-lineer ve sınırlıdır. Öte yandan, $\|F\| = 1$ dir.

Aşağıdaki teoremde yukarıda bahsettiğimiz kavramların özelliklerini vereceğiz.

Teorem 4.1.4.

F bir sınırlı 2-lineer operatör olsun. O halde,

(a) $K \in P^{(F)} = \{K' > 0; (a,b) \in D \text{ için } \|F(a,b)\| \leq K'.\|a,b\|\}$ için $\|F\| \leq K$

(b) Her $(a,b) \in D$ için $\|F(a,b)\| \leq \|F\|.\|a,b\|$

(c) $\|F\| = \sup\{\|F(a,b)\|; (a,b) \in D, \|a,b\| = 1\}$

$$= \sup\{\|F(a,b)\|; (a,b) \in D, \|a,b\| \leq 1\} \qquad (2.1)$$

$$= \sup\left\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|a,b\|}; (a,b) \in D, \|a,b\| \neq 0\right\}$$

$$\leq \|F\|$$

Öte yandan,

$$A \leq \sup\{\|F(a,b)\|; (a,b) \in D, \|a,b\| \leq 1\} \qquad (2.2)$$

$\|a,b\| \neq 0$ koşulunu sağlayacak şekilde $(a,b) \in D$ alalım. Çünkü $\left\|\frac{a}{\|a,b\|}, b\right\| = 1$

olduğundan, $\left\|F\left(\frac{a}{\|a,b\|}, b\right)\right\| \leq A$ dır. Buradan,

$$\left\|F\left(\frac{a}{\|a,b\|}, b\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\|a,b\|}.F(a,b)\right\| = \frac{1}{\|a,b\|}.\|F(a,b)\|$$

eşitsizlikleri vasıtasıyla $\|F(a,b)\| \leq A.\|a,b\|$ eşitsizliğini elde ederiz. Öte yandan, $(a,b) \in D$ ve $\|a,b\| \neq 0$ ise, $\|F(a,b)\| \leq \|F\|.\|a,b\| = 0$ yani, $\|F(a,b)\| = 0 = A.\|a,b\|$ dir.

Sonuç olarak tüm $(a,b)\in D$ için, $\|F(a,b)\|\le A.\|a,b\|$ elde edilir ki bu sonuç $A\in P^{(F)}$ olduğunu gösteriyor. (a) şıkkından $\|F\|\le A$ (2.3) eşitsizliğini elde ederiz. (2.1) ve (2.3) koşulları

$$\begin{aligned}\|F\| &= \sup\{\|F(a,b)\|;(a,b)\in D,\|a,b\|=1\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|F(a,b)\|}{\|a,b\|};(a,b)\in D,\|a,b\|\neq 0\right\}\end{aligned}$$

normunu verir. (b) şıkkından $\{\|F(a,b)\|;(a,b)\in D,\|a,b\|\le 1\}\le\|F\|$ eşitsizliğini elde ederiz ki bu (2.2) eşitsizliğiyle birlikte $\|F\|=\sup\{\|F(a,b)\|;(a,b)\in D,\|a,b\|\le 1\}$ eşitliğini verir ve ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.1.5.

$D\subset X\times X$ bir 2-normlu küme ve Y bir normlu uzay olsun. $L_2(D,Y)$ ile D kümesinden Y uzayına tüm sınırlı 2-lineer operatörlerin kümesini gösterelim. Özellikle X bir genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve $D=X\times X$ ise, $L_2(X,Y)$ yazacağız.

$F,G\in L_2(D,Y)$ olsun ve aşağıdaki eşitlikleri tanımlayalım:

1. Tüm $(a,b)\in D$ için, $(F+G)(a,b)=F(a,b)+G(a,b)$
2. $\alpha\in R,(a,b)\in D$ için, $(\alpha.F)(a,b)=\alpha.F(a,b)$

Teorem 4.1.6.

D bir 2-normlu küme ve Y bir normlu uzay ise, $L_2(D,Y)$ kümesi Tanım 4.1.2.de tanımlı, $\|\,.\,\|$ normu olan bir normlu uzaydır.

İspat: $a,c\in D^b\cap D^d$ koşulunu sağlayan $F,G\in L_2(D,Y),\alpha,\beta\in R$ ve $a,b,c,d\in X$ elemanlarını alalım. $F+G$ için,

$(F+G)(a+c,b+d)=(F+G)(a,b)+(F+G)(a,d)+(F+G)(c,b)+(F+G)(c,d)$ ve

$(F+G)(\alpha a,\beta b)=\alpha\beta.(F+G)(a,b)$

eşitliklerini elde ederiz. Öte yandan Teorem 4.1.4.'ün (b) koşulundan,

$$\begin{aligned}\|(F+G)(a,b)\| &= \|F(a,b)+G(a,b)\| \\ &\leq \|F(a,b)\|+\|G(a,b)\| \leq \|F\|.\|a,b\|+\|G\|.\|a,b\| \qquad (2.4) \\ &= (\|F\|+\|G\|).\|a,b\|\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece,

$$F+G\in L_2(D,Y)$$

bulunur. Benzer şekilde $\alpha\cdot F\in L_2(D,Y)$ ve

$$\|(\alpha.F)(a,b)\| = \|\alpha.F(a,b)\| \leq |\alpha|.\|F\|.\|a,b\| \qquad (2.5)$$

ifadelerini göstereceğiz. Öte yandan, $L_2(D,Y)$ kümesinin bir reel lineer uzay olduğunu ispatlamak kolaydır.

Şimdi de Tanım 4.1.2 de verilen $\|\ .\ \| : L_2(D,Y)\to[0,\infty)$ fonksiyonunun normun tüm koşullarını sağladığını göstereceğiz.

$\|F\|=0$ ise, tüm $(a,b)\in D$ için, $\|F(a,b)\|=0$ dır. Böylece, her $(a,b)\in D$ için, $F(a,b)=0$ elde edilir. Tersine F bir sıfır operatörü ise,

$$\|F\|=\sup\{\|F(a,b)\|;(a,b)\in D,\|a,b\|=1\}=0$$

değeri bulunur. Sonuç olarak, $\|F\|=0$ ancak ve ancak $F=0$ dır.

(2.5)'ten $|\alpha|.\|F\|\in P^{(\alpha F)}$ elde ederiz ki bu Teorem 4.1.4 (a) şıkkından $\|\alpha.F\|\leq|\alpha|.\|F\|$ eşitsizliğini verir. $\alpha\neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\|F\|=\left\|\frac{1}{\alpha}.\alpha.F\right\|\leq\frac{1}{|\alpha|}.\|\alpha F\|$$

dır. Yani, $|\alpha|.\|F\|\leq\|\alpha.F\|$ olur. Böylece, $|\alpha|.\|F\|=\|\alpha.F\|$ eşitliği bulunur. $\alpha=0$ için, $\|\alpha.F\|=|\alpha|.\|F\|$ eşitliği açıktır. Bu nedenle, $\alpha\in R$ için, $\|\alpha.F\|=|\alpha|.\|F\|$ bulunur. (2.4) koşulu $\|F\|+\|G\|\in P^{(F+G)}$ sonucunu verir. Buradan ve teorem 4.1.4 (a) dan $\|F+G\|\leq\|F\|+\|G\|$ elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.7.

D bir 2-normlu küme ve Y bir Banach uzayı ise, $L_2(D,Y)$ bir Banach uzayıdır.

İspat: Teorem 4.1.6 gereğince, $L_2(D,Y)$ bir normlu uzaydır. $\{F_n; n\in N\}$ dizisi $L_2(D,Y)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O zaman,
$\lim\limits_{n,m\to\infty}\|F_n - F_m\| = 0$ ve her $(a,b)\in D$ için,

$$\|F_n(a,b) - F_m(a,b)\| = \|(F_n - F_m)(a,b)\| \le \|F_n - F_m\| \,.\|a,b\|$$

eşitsizliği doğrudur. Böylece, $\{F_n(a,b); n\in N\}$ dizisi her $(a,b)\in D$ için Y uzayında bir Cauchy dizisidir. Y uzayı tam olduğundan, $\{F_n(a,b); n\in N\}$ dizisi her $(a,b)\in D$ için yakınsaktır. Bu dizinin limitini,

$$F(a,b) = \lim_{n\to\infty} F_n(a,b)$$

şeklinde gösterelim. $F\in L_2(D,Y)$ olduğunu göstereceğiz. $a,c\in D^b \bigcap D^d$ olmak üzere $a,b,c,d\in X$ için,

$$\begin{aligned} F(a+c,b+d) &= \lim_{n\to\infty} F_n(a+c,b+d) \\ &= \lim_{n\to\infty} F_n(a,b) + \lim_{n\to\infty} F_n(a,d) + \lim_{n\to\infty} F_n(c,b) + \lim_{n\to\infty} F_n(c,d) \\ &= F(a,b) + F(a,d) + F(c,b) + F(c,d) \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Öte yandan, $\alpha,\beta\in R$ ve $(a,b)\in D$ için, aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} F(\alpha a,\beta b) &= \lim_{n\to\infty} F_n(\alpha a,\beta b) \\ &= \alpha\beta.\lim_{n\to\infty} F_n(a,b) \\ &= \alpha\beta.F(a,b) \end{aligned}$$

Böylece, F bir 2-lineer operatördür.

$$\big|\|F_n\| - \|F_m\|\big| \le \|F_n - F_m\|$$

eşitsizliği $\{\|F_n\| : n\in N\}$ dizisinin R'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Sonuç olarak, bu dizi sınırlıdır. Yani, tüm $n\in N$ için, $\|F_n\| \le K$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı vardır. Bu sonucu kullandığımızda,

$$\|F_n(a,b)\| \le \|F_n(a,b)\| + \|F(a,b) - F_n(a,b)\|$$
$$\le \|F_n\|.\|a,b\| + \|F(a,b) - F_n(a,b)\|$$
$$\le K.\|a,b\| + \|F_n(a,b) - F(a,b)\|$$

eşitsizliğini elde ederiz. $n \to \infty$ aldığımızda, her $(a,b) \in D$ için, $\|F(a,b)\| \le K.\|a,b\|$ elde ederiz ki bu F 'nin sınırlı olduğunu gösterir. Böylece, $F \in L_2(D,Y)$ olduğunu gösterdik.

Şimdi de $(a,b) \in D$ ve $\|a,b\| \ne 0$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. $\{F_n; n \in N\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan, tüm $m,n \ge n_0$ için, $\|F_n - F_m\| < \frac{\varepsilon}{4}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $n_0 \in N$ doğal sayısı vardır. Böylece, tüm $m,n \ge n_0$ için, $\|F_n(a,b) - F_m(a,b)\| \le \|F_n - F_m\|.\|a,b\| < \frac{\varepsilon}{4}.\|a,b\|$ eşitsizliği bulunur.

$F(a,b) = \lim_{n\to\infty} F_n(a,b)$ limiti, $\|F_{n_1}(a,b) - F(a,b)\| < \frac{\varepsilon}{4}\|a,b\|$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $n_1 = n_1(a,b) \ge n_0$ sayısının mevcut olduğunu gösterir. Sonuç olarak: $n \ge n_0$, $(a,b) \in D$ ve $\|a,b\| \ne 0$ için,

$$\|F_{n_1}(a,b) - F(a,b)\| < \|F_n(a,b) - F_{n_1}(a,b)\| + \|F_{n_1}(a,b) - F(a,b)\| < \frac{\varepsilon}{2}\|a,b\|$$

elde ederiz. $\|a,b\| = 0$ ise, $F_n(a,b) = 0 = F(a,b)$ dolayısıyla,

$\|F_n(a,b) - F(a,b)\| = \frac{\varepsilon}{2}\|a,b\|$ eşitliğini buluruz. Böylece, tüm $n \ge n_0$ için, $(a,b) \in D$ dir. Yani, $n \ge n_0$ ve $\frac{\varepsilon}{2} \in P^{F_n - F}$ için, $\|F_n(a,b) - F(a,b)\| \le \frac{\varepsilon}{2}\|a,b\|$ elde edilir. Bu edenle $n \ge n_0$ için, $\|F_n - F\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dır. Bu da, $\{F_n; n \in N\}$ dizisinin $L_2(D,Y)$ uzayında F 'ye yakınsadığını gösterir. Buradan, $L_2(D,Y)$ uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterdik ki bu ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.8.

χ bir simetrik 2-normlu küme ve Y bir Banach uzayı ise, $L_2(\chi, Y)$ uzayı aşağıdaki gibi tanımlı 2-normlu simetrik dizisel tam 2-normlu uzaydır.

$$F, G \in L_2(\chi, Y) \text{ için } \|F, G\| = \|F\|.\|G\|$$

4.2. Sınırlı 2-Lineer Operatörler İçin Banach-Steinhaus Teoremleri

Bu kesimde $L_2(D, Y)$ uzayında operatör dizilerinin bazı özelliklerini ele alarak, bu operatörlerin bir ailesi için Banach-Steinhaus teoremlerini vereceğiz. (Lewandowska, 2004)

Önerme 4.2.1.

D bir 2-normlu küme, Y bir normlu uzay ve $\{F_n; n \in N\} \subset L_2(D, Y)$ olsun. $\{\|F_n\|; n \in N\}$ normlar dizisi sınırlı ise, her $(x, y) \in D$ için, $\{\|F_n(x, y)\|; n \in N\}$ normlar dizisi sınırlıdır.

İspat: Varsayımdan, her $n \in N$ için, $\|F_n\| \leq M$ olacak şekilde bir M pozitif sayısının var olduğu görülür. Böylece, $(x, y) \in D$ ve her $n \in N$ için,
$\|F_n(x, y)\| \leq \|F_n\| \cdot \|x, y\| \leq M \cdot \|x, y\|$ eşitsizliklerini elde ederiz.

Teorem 4.2.2.

X bir genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve Y bir normlu uzay olsun. $\{F_n; n \in N\} \subset L_2(X, Y)$ dizisi F operatörüne noktasal yakınsak ve $\{\|F_n\|; n \in N\}$ normlar dizisi sınırlı ise, $F \in L_2(X, Y)$ dir.

İspat: Tüm $x, y \in X$ için,

$$F(x,y)=\lim_{n\to\infty}F_n(x,y)$$

limitini elde ederiz. Böylece, F operatörü bir 2-lineer operatördür.

$\{\|F_n\|;n\in N\}$ normlar dizisi sınırlı olduğundan, tüm $n\in N$ için, $\|F_n\|\le M$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Böylece, $\|F_n(x,y)\|\le\|F_n\|\cdot\|x,y\|\le M\cdot\|x,y\|$ dir. $x,y\in X$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\|F(x,y)\|&\le\|F_n(x,y)-F(x,y)\|+\|F_n(x,y)\|\\&\le\|F_n(x,y)-F(x,y)\|+M.\|x,y\|\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $n\to\infty$ aldığımızda, her $x,y\in X$ için, $\|F(x,y)\|\le M.\|x,y\|$ elde ederiz. Bu F operatörünün sınırlı olduğunu gösterir. Sonuç olarak $F\in L_2(X,Y)$ olduğunu göstermiş olduk.

Teorem 4.2.3.

Y bir Banach uzayı, $(X,\|.,.\|)$ bir genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve A kümesi $(X,T_1(X))$ ve $(X,T_2(X))$ uzaylarında lineer yoğun bir küme olsun.
$\{F_n;n\in N\}\subset L_2(X,Y)$ dizisi A kümesinde noktasal yakınsak ve $\{\|F_n\|;n\in N\}$ normlar dizisi sınırlı ise, $\{F_n(x,y);n\in N\}$ dizisi, her $x,y\in X$ için, Y uzayında yakınsaktır.

İspat: X_0, A ile gerilen X uzayının lineer alt uzayı olsun. X_0 uzayını, X uzayı vasıtasıyla oluşturulan aynı 2-norma sahip 2-normlu uzay olarak düşüneceğiz. $x,y\in X_0$ olsun. Bu durumda $x=a_1x_1+...+a_kx_k$, $y=b_1y_1+...+b_ty_t$ dir. Burada, $a_i,b_j\in R$, $x_i,y_j\in A$, $i=1,2,...,k$, $j=1,2,...,t$; $k,t\in N$ ve

$$F_n(x,y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t}a_ib_i\cdot F_n(x_i,y_j).$$

dır. Çünkü, $\{F_n(x_i,y_j);n\in N\}$ dizisi tüm $x_i,y_j\in A$ için yakınsak olduğundan, $\{F_n(x,y);n\in N\}$ dizisi X_0 uzayında yakınsaktır. Her $n\in N$ için, $\|F_n\|\le M$ dir. Bir

$\varepsilon > 0$ sayısını ve $x, y \in X$ alalım. X_0 uzayı $(X, T_1(X))$ uzayında yoğun bir küme olduğundan,

$$\|x - x_0, y\| < \frac{\varepsilon}{6M}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ seçebiliriz. Öte yandan, X_0 uzayı $(X, T_2(X))$ uzayında da yoğun olduğundan,

$$\|x_0, y - y_0\| < \frac{\varepsilon}{6M}$$

olacak şekilde $y_0 \in X_0$ elemanı vardır.

$\{F_n(x_0, y_0); n \in N\}$ dizisi yakınsak olduğundan Y uzayında bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle, her $m, n \geq n_0$ için, $\|F_n(x_0, y_0) - F_m(x_0, y_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ sayısı vardır. Sonuç olarak $m, n \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned}
\|F_n(x, y) - F_m(x, y)\| &= \|F_n(x - x_0 + x_0, y) - F_m(x - x_0 + x_0, y)\| \\
&\leq \|F_n(x - x_0, y)\| + \|F_m(x - x_0, y)\| + \|F_n(x_0, y)\| + \|F_m(x_0, y)\| \\
&\leq \|F_n(x - x_0, y)\| + \|F_m(x - x_0, y)\| + \|F_n(x_0, y - y_0)\| + \|F_m(x_0, y - y_0)\| + \\
&\quad \|F_n(x_0, y_0) - F_m(x_0, y_0)\| \\
&\leq \|F_n\|\|x - x_0, y\| + \|F_m\|\|x - x_0, y\| + \|F_n\|\|x_0, y - y_0\| + \|F_m\|\|x_0, y - y_0\| + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq 2M.\|x - x_0, y\| + 2M.\|x_0, y - y_0\| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. O halde, $\{F_n(x, y); n \in N\}$ dizisinin Y uzayında her $x, y \in X$ için bir Cauchy dizisidir. Y uzayı tam olduğundan $\{F_n(x, y); n \in N\}$ dizisi Y uzayında yakınsaktır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.4.

$(X, \|.,.\|)$ bir genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve Y bir Banach uzayı olsun. Bir $\{F_n; n \in N\} \subset L_2(X, Y)$ dizisi $(X, T_1(X))$ ve $(X, T_2(X))$ uzaylarında bir A lineer yoğun kümesinde $F \in L_2(X, Y)$ operatörüne noktasal yakınsak ve $\{\|F_n\|; n \in N\}$ normlar dizisi sınırlı ise, $\{\|F_n\|; n\in N\}$ dizisi F operatörüne noktasal yakınsaktır ve $\|F\|\leq \sup\limits_n \|F_n\|$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teorem 4.2.3'ten $\{F_n(x,y); n\in N\}$ dizisinin her $x,y\in X$ için, Y uzayında yakınsak olduğu görülür. Bu dizinin limitini her $x,y\in X$ için, $H(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x,y)$ şeklinde gösterelim. Her $x,y\in X$ için, $H(x,y)=F(x,y)$ olduğunu göstermeliyiz. Teorem 4.2.2'yi kullandığımızda $H\in L_2(X,Y)$ olduğunu görürüz. Kabülümüzden tüm $x,y\in X$ için, $H(x,y)=F(x,y)$dır. Yani, $x,y\in X$ için, $(H-F)(x,y)=0$ elde ederiz. $L_2(X,Y)$ bir lineer uzay olduğundan, $H-F\in L_2(X,Y)$ dir. Sonuç olarak: $H-F$ bir 2-lineer operatördür ve $x,y\in X_0$ için, $(H-F)(x,y)=0$ dır. Burada, X_0 simgesi A kümesinden alınan elemanların tüm lineer bileşimlerinin kümesini gösterir. Öte yandan, $H-F$ sınırlıdır. Dolayısıyla, $\|(H-F)(x,y)\|\leq K.\|x,y\|$ olacak şekilde bir $K>0$ sayısı vardır.

Bir $\varepsilon>0$ ve $x,y\in X$ alalım. X_0 kümesi $(X,T_1(X))$ uzayında yoğun olduğundan,

$$\|x-x_0,y\|<\frac{\varepsilon}{2K}$$

olacak şekilde $x_0\in X_0$ seçebiliriz.

$$\|x_0,y-y_0\|<\frac{\varepsilon}{2K}$$

özelliğini sağlayan bir $y_0\in X_0$ elemanı vardır. Zira X_0 kümesi $(X,T_2(X))$ uzayında da yoğundur. Böylece,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|(H-F)(x,y)\| = \|(H-F)(x-x_0+x_0,y)\| \\
&= \|(H-F)(x-x_0,y)+(H-F)(x_0,y)\| \\
&= \|(H-F)(x-x_0,y)+(H-F)(x_0,y-y_0+y_0)\| \\
&= \|(H-F)(x-x_0,y)+(H-F)(x_0,y-y_0)\|+\|(H-F)(x_0,y_0)\| \\
&\leq \|(H-F)(x-x_0,y)\|+\|(H-F)(x_0,y-y_0)\| \\
&\leq K.\|x-x_0,y\|+K.\|x_0,y-y_0\|<\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu, her $x, y \in X$ için, $\|(H-F)(x, y)\| = 0$ eşitliğini yani, her $x, y \in X$ için, $H(x, y) = F(x, y)$ eşitliğini verir. Bu durumda,

$M = \sup_n \|F_n\|$ diyelim. Bu durumda, $\|x, y\| \leq 1$ koşulunu sağlayan her $n \in N$ ve $x, y \in X$ için,

$$\|F_n(x, y)\| \leq \|F_n\|.\|x, y\| \leq M$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}\|F(x, y)\| &= \|F(x, y) - F_n(x, y) + F_n(x, y)\| \\ &\leq \|F(x, y) - F_n(x, y)\| + \|F_n(x, y)\| \\ &\leq \|F(x, y) - F_n(x, y)\| + M\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. $n \to \infty$ aldığımızda $\|x, y\| \leq 1$ koşulunu sağlayan $x, y \in X$ için, $\|F(x, y)\| \leq M$ elde ederiz. Bu sonuç,

$$\|F\| = \sup\{\|F(x, y)\|; x, y \in X, \|x,y\| \leq 1\} \leq M$$

normunu verir ki bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

Açıkgöz, M., 2007. 2-normlu ve 2-Banach uzaylarında kesin konvekslik ve kesin 2-konvekslik. ***Fırat Üniv. Fen ve Müh. Bil. Dergisi*** 19 (3), 293-299.

Açıkgöz, M., 2007. A review of on 2-normed structures ***Int. Journal of Math. Analysis,***vol.1, no.4,187-191.

Cho, H. Y., Park, C. G., Park, W.G., 2004. The Aleksandrov problem in linear 2-normed spaces, ***J. Math. Anal. Appl***. 289 : 666–672.

Cho, H. Y., 2007. On the Mazur–Ulam problem in linear 2-normed spaces, ***J. Math. Anal. Appl.*** 327 : 1041–1045.

Gahler, S., 1963. 2-Metrische raume und ihre topologische struktur ***Math. Nachr***. (26), 115-148.

Gahler, S., 1964. Lineare 2-normierte raume. ***Math. Nachr***. (28), 1-43.

Gunawan, H., Mashadi, M., 2001. On n-normed spaces ***Hindawi Publishing Corp***. 27:10 631-639.

Iseki, K., 1976. Mathematics on two normed spaces ***Bull. Korean. Math. Soc***. Vol. 13, No.2, 127-135.

Kim, S. S., Cho, Y.J., White, A., 1992. Linear operators on linear 2-normed spaces. ***Glas. Mat. Ser. III*** 27 (47) *no. 1*, 63-70.

Lewandowska, Z., 1999. Lenar operators on generalized 2-normed spaces. ***Bull. Math. Soc. Sici. Math. Roumanie,*** (N.S.) 42 (90) no. 4, 353-368.

Lewandowska, Z., 2001. Generalızed 2-normed spaces, ***Stuspskie Prace Matematyczno-Fizyczne*** 1,33-40.

Lewandowska, Z., 2003a. On 2-normed sets. ***Glas. Mat. Ser. III*** 38 (58) 99-110.

Lewandowska, Z., 2003b. Banach-Steinhau theorems for bounded linear operators with values in a generalized 2-normed space ***Glas. Mat. Ser. III*** 38 (58) 331-342.

Lewandowska, Z., 2004. Bounded 2-linear operators on 2-normed sets, ***Glasnik Mat.Ser. III*** 39 (59) 301-312.

Lewandowska, Z., Moslehian, M., Moghaddam, A., 2006. Hahn-Banach theorem in generalızed 2-normed spaces ***Communications in Mathematical Analysis*** Vol.1, no.2, 109-113.

Lin, C. S., 1992. On strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces II ***İnternat. J. Math. & Math. Sci.***Vol.15, no.3, 417-424.

White, A., 1969. 2-Banach spaces, ***Math. Nachr***. 42, 43-60.

White, A., Cho, Y., 1984. Linear mappings on linear 2-normed spaces ***Bull. Korean Math. Soc*** 21, No. 1, 1-6.

ÖZ GEÇMİŞ

1972 yılında Van merkeze bağlı Gedikbulak köyünde doğdu. İlköğrenimini Gedikbulak köyü İlkokulunda, orta ve lise öğrenimini İzmir'in Tire ilçesinde tamamladı. 1987 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiya Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 1991 yılında mezun oldu. 2006 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen Van Fen Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmakta olup evli üç çocuk babasıdır.