T.C.

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EULER SABİT NOKTA TEOREMİNİN DUAL UZAYA UYGULANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Meryem DEMİRTAŞ

DANIŞMAN : Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN

VAN-2013

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EULER SABİT NOKTA TEOREMİNİN DUAL UZAYA UYGULANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Meryem DEMİRTAŞ

VAN-2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN danışmanlığında, Meryem DEMİRTAŞ tarafından sunulan Euler Sabit Nokta Teoreminin Dual Uzaya Uygulanışı." isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 14/08/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ İmza:

Üye: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN İmza:

Üye: İmza:

Üye: İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…./…... tarihinde .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

……………..……….

Enstitü Müdürü

ÖZET

EULER SABİT NOKTA TEOREMİNİN DUAL UZAYA UYGULANIŞI

DEMİRTAŞ, Meryem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN

2013, 55 Sayfa

Bu çalışma 5 bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm giriş ve literatür bilgilerine ayrılmıştır. İkinci bölümde katı cisim hareketlerine ait temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ortogonal matrislere ait bazı özellikler açıklanmıştır. Dördüncü bölümde Dual sayılardan behsedilmiş, dual sayılarla ilgili tanım teorem ve özelliklere yer verilmiştir. Beşinci bölümde Euler sabit nokta teoremi dual uzayda çalışılmış ve sabit nokta teoremi yardımıyla uzaysal hareketin vida ekseni bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Euler Sabit Nokta teoremi, Dual sayılar, Ortogonal matris, Dual ortogonal matris.

ABSTRACT

APPLICATION OF EULER FIXED POINT THEOREM

INTO DUAL SPACE

DEMİRTAŞ, Meryem

Msc, Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Şakir İŞLEYEN

2013, 55 pages

This thesis consist of five section. The first section is reserved for introduction and declaration of the literature. In the second section some basic concepts which are belong to rigit body motions are mentioned. In the third section some properties which are belong to ortogonal matrices are explained. In the fourth section it is mentioned about dual numbers and given definitions, theorems and properties about dual numbers. In the fifth section Euler fixed point theorem is studied and screw axis of a spatial motion is found by fixed point theorem.

Key Worlds: Euler Fixed Point theorem, Dual numbers, Ortogonal matrix, Dual ortogonal matrix.

ÖN SÖZ

Bu tezin gerçekleşmesinde emeği geçen birçok kişiye teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışmayı vererek bana araştırma olanağı sağlayan, hazırlanırken zaman ayıran ve çalışmalarım sırasında beni yönlendiren danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN’e teşekkürlerimi sunarım.

Engin bilgileri, konulara büyüleyici hakimiyetiyle en başından en sonuna tezimin hayata geçirilmesinde yardımlarını esirgemeyen değerli hocamız sayın Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ’a ve çalışmamın her aşamasında büyük sabır ve ilgi ile beni yönlendiren, değerli hocam sayın Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ’a saygılarımı ve şükranlarımı sunarım.

Yine bu çalışmanın gün yüzüne çıkmasına yardımcı olan, en önemlisi ilk adımı atmama ön ayak olan ve çalışmamın daimiyatında hiçbir suretle desteğini esirgemeyen sayın Dr. Arzu TURAN’a teşekkürlerimi sunarım.

Varlığımın sebebi olan, maddi manevi beni daima destekleyerek her zaman yanımda olan başta annem Süreyya DEMİRTAŞ ve babam Orhan DEMİRTAŞ olmak üzere tüm aileme candan teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$	$\hat{A} = a + \varepsilon a^*$ Sayısına Karşılık Gelen Dual Matris
ID	Dual Sayılar Halkası
SO(3)	Determinantı 1 olan Ortogonal Matrisler Kümesi
$[A]$	n×n Ortogonal Matris
$[\hat{B}]$	n×n Dual Ortogonal Matris
$[\hat{B}]$	n×n Dual Anti-Simetrik Matris
ε	Karesi “0” olan Dual Sayı
R_x	x-ekseni Etrafında Dönme Matrisi
R_y	y-ekseni Etrafında Dönme Matrisi
R_z	z-ekseni Etrafında Dönme Matrisi
$[\hat{Z}_x]$	x-ekseni Etrafında Dual Dönme Matrisi
$[\hat{Z}_y]$	y-ekseni Etrafında Dual Dönme Matrisi
$[\hat{Z}_z]$	z-ekseni Etrafında Dual Dönme Matrisi

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Leonhard’s Euler 1775 yılında üç boyutta, her dönmenin bir eksene sahip olduğunu, katı bir kürenin kendi merkezi etrafında döndürüldüğü takdirde çapının sabit kaldığını söyleyerek Euler orijinal formülünü geliştirmiştir(Palais ve Palais, 2007). Bundan yola çıkarak uzayda hareket halinde olan bir cismin dönme hareketinde, dönme eksenini bulmak için bazı dönüşümler gerçekleştirilmiştir ve tarafımızdan sabit bir eksen etrafında yapılan dönme hareketi dual sayılarla ifade edilecektir. Kısacası nihai amacımız $\mathbb{R}^3$’te dönme gerçekleşirken sabit kalan ekseni dual sayılarla bulmaktır.

Palais ve Palais (2007) de Euler sabit nokta teoremi için yeni bir ispat yolu vermiştir.

Aynı şekilde Palais ve ark. (2009) de bir dönme ekseninde Euler teoremine farklı bir bakış adı altında Euler sabit nokta teoremini inceleyip ortogonal matrisler için çalışmıştır.

Alperin (1989) da $\mathbb{R}^3$ te dönme matrisini tanımlayıp bazı ifadeleri düzenleyip sağlandıklarını göstermiştir.

Dual sayılar, 19. yüzyılın başlarında William Kingdon Clifford tarafından ortaya konulmuş ve Aleksandr Petrovich Kotelnikov tarafından 1895 te ve Edward Study tarafından 1903 te sistematik olarak kinematiğe uygulanmıştır. J. Michael McCarthy tarafından 1990 da Cayley dönüşümü kullanılarak dual rotasyon matrisleri ve dual anti-simetrik matrisler arasında bir ilişki elde edilmiştir.

Karakılıç 2010 da, dual küresel hareketin rodrigues parametrelerini elde etmiştir. Dual Rodrigues parametrelerinin dönme açısından ve karşılık gelen uzaysal hareketin doğruları arasındaki mesafeden oluştuğunu göstermiştir.

Karakılıç 2011 de, dual rotasyon matrisleri ve dual anti-simetrik matrisler arasında dual üstel dönüşüm denen bir bağıntı elde etmiştir.

Karakılıç ve Gürsoy 2011 de, dual Euler parametrelerini $\mathbb{R}^3$ teki vida hareketini tanımlamak için kullanmıştır. Dual Euler parametrelerini, dual birim kürenin hareketinden elde edilen dual Rodrigues parametrelerinden elde etmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR

2.1. Tanım: (M_1, d_1) ve (M_2, d_2) iki metrik uzay olsun.

f: $(M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ dönüşümünü alalım. $\forall$p,q$\in M_1$ için

$$d_1(p,q) = d_2(f(p), f(q))$$

eşitliği sağlanıyor ise f 'ye M_1 den M_2 'ye izometri denir (Boothby, 2003).

2.2.Tanım: E^n de bir noktayı sabit bırakan izometriye dönme denir.

2.3.Tanım: A=$[a_{ij}]$ bir ortogonal matris olmak üzere, detA=$+1$ olacak şekildeki ortogonal matrislere dönmeler denir. detA=-1 olacak şekildeki ortogonal matrislere yansımalar denir (Hacısalihoğlu, 2010).

2.4.Tanım: $\mathbb{R}^3$ te bir dönme, bir eksene dik olan düzlemlerde gerçekleşir ve dönme eksen ile karakterize edilir. Temel olan üç dönme ekseni, koordinat eksenleridir ve bunlara bağlı dönmeler özel olarak yalpa (yaw), iniş-çıkış (pitch), yuvarlanma (roll) ile adlandırılır (Schilling, 1990).

2.5.Tanım: n-boyutlu bir uzayda bir disp D=(A,d) vektör çiftiyle tanımlanmıştır. Burada A, bir n×n tipinden dönme matrisi ve d bir n boyutlu vektördür. Bu vektör çifti yer değiştirmeyi ifade etmektedir.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir cismin yer değiştirmesinden cisimdeki tüm noktaların bir D dispi ile belirlenen yeni konumu anlaşılacaktır. Bu dispi gözlemenin matematiksel açıdan önemi, cisme yerleştirilen, cisimle bağlantılı bir çatının hangi konuma taşındığını gözlemektir. Bu çatılardan ilk konumundakine sabit çatı, ikinci konumundakine hareketli çatı diyecek ve sırasıyla F ve M ile göstereceğiz. Böylece bir D dispi

D : F → M olmak üzere

$$x \rightarrow X = [A]\,x + d$$

şeklinde tanımlı uzaklığı koruyan dönüşüm olarak ele alınır. Burada x noktanın F deki yer vektörü, X noktanın M deki yer vektörüdür (Bottema ve Roth, 1979).

2.6.Tanım: D:$F \rightarrow M$ için bir yerdeğiştirme

$$x \rightarrow X = [A]\,x + d$$

şeklinde bir dönüşüm ve izometridir. Eğer bir t parametresine bağlı olarak ifade edersek hareket kavramını verebiliriz.

D(t): F → M yer değiştirmesine E^n de bir hareket denir (McCarthy, 1990).

2.7.Tanım: $[A] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ ve $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere d=(A,d) çifti bir

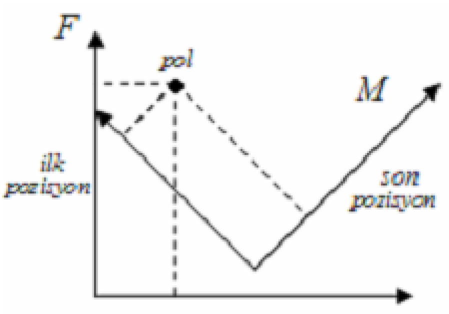
D : F → M olmak üzere

$$x \rightarrow X = [A]x + d$$

dönüşümü tanımlar. Bu dönüşüme bir düzlem dispi adı verilir (McCarthy, 1990).

2.8.Tanım: Bir genel düzlem dispi için hareketsiz bir nokta vardır. Bu noktanın koordinatları

her iki F ve M referans çatılarında da aynıdır. Bu noktaya pol noktası adı verilir (McCarthy, 1990).



Şekil 1: Bir düzlem dispinin polü

D=(A, d) disp olsun. Düzlem dispinin p pol noktasının koordinatlarını belirleyelim.

p pol noktası p=$[A]$p + d denklemini sağlar.

$$p=[A]p + d \Leftrightarrow [I - A]p=d$$

$$\Leftrightarrow -[A - I]p=d$$

$$\Leftrightarrow \text{p}= -[A-I]^{-1}\text{d}$$

Veya

$$\text{p}=[A]\text{p}+\text{d} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \cos(\theta)p_1 - \sin(\theta)p_2 + d_1$$

$$p_2 = \sin(\theta)\, p_1 + \cos(\theta)p_2 + d_2$$

$$(1-\cos\theta)p_1 + \sin(\theta)p_2 = d_1$$

$$-\sin(\theta)\, p_1 + (1-\cos\theta)p_2 = d_2$$

Sistemin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix} 1-cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & 1-cos\theta \end{vmatrix} = 2-2\cos\theta \neq 0$$

dır.(Aksi takdirde $2-2\cos\theta=0$ olsaydı $\cos\theta=1 \Rightarrow \theta=0+2k\pi$, $k\in Z$ olurdu ki bu durumda sırf öteleme olurdu.) Sistem Cramerdir.

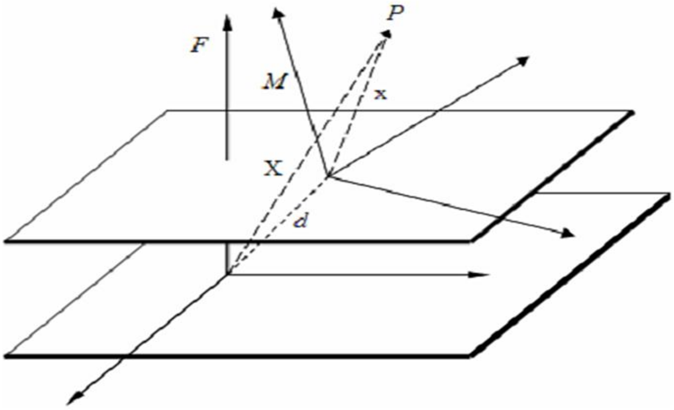
$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & sin\theta \\ d_2 & 1-cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & 1-cos\theta \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right) sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(\frac{d_2}{2}\right) cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1-cos\theta & d_1 \\ -sin\theta & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & 1-cos\theta \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right) cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{d_2}{2}\right) sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

elde edilir.

Özel olarak A=I iken $\text{p}=[I]\text{p}+\text{d}$ olacağından $\text{p}= -[I-I]^{-1}\text{d}$ bir çözüm vermez. Disp D=(A,d)=(I,d) dir. Bu durumda sırf öteleme vardır ve dispin pol noktası yoktur. Yani sırf ötelemede hiçbir nokta sabit kalmaz. Cismin bütün noktaları hareketlidir.

2.9.Tanım: 3-boyutlu uzayda iki katı cismin bibirine bağlı konumu, M hareketli çatıdaki bir noktanın x = (x,y,z) koordinatlarını, F sabit çatısındaki X = (X,Y,Z) koordinatları cinsinden belirleyen bir dönüşümle tanımlanır.



Şekil 2: Biri diğerine bağlı bir cismin uzaysal hareketi

Dönüşüm,

$$X = [A]\, x + d$$

ile verilmiştir. Burada $[A]$ 3×3 tipinden bir dönme matrisi ve d=(d_1, d_2, d_3) öteleme vektörüdür. Bu dönüşüm M deki noktalar arasındaki uzaklığı koruduğundan bir katı dönüşümdür. Bu dönüşüme uzay dispi denir (McCarthy, 1990).

2.10.Tanım: Bir M hareketli çatıdaki 3-boyutlu bir cismin sabit bir F çatısına bağlı

dönmesi

$$X = Ax$$

denklemi ile verilir. Burada x ve X sırasıyla F sabit çatı ve M hareketli çatıdaki bir noktanın koordinatlarıdır.

Dönüşümün bir katı dönüşüm olabilmesi için $[A]$ matrisi

$$\langle X, X\rangle = X^t X = x^t [A^t][A] x = x^t x = \langle x, x\rangle$$

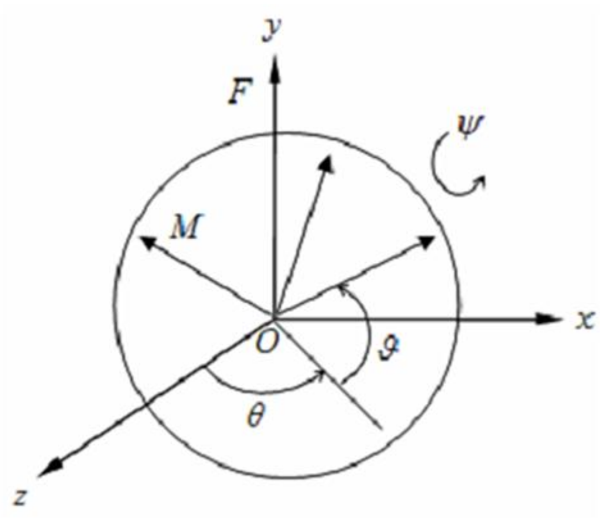
eşitliğini sağlamalı yani,

$$[A^t][A] = I$$

olmalıdır.Bu şart matrisin ortogonal matris olma şartıdır. Dönmeler determinantı 1 olan ortogonal matrislerle verilir. Bu ortogonal matrislerin kümesi SO(3) ile gösterilir.

X=Ax dönüşümü, başlangıçta F ile çakışan M çatısının bir dispi olarak düşünülebilir. Böyle ele alındığında cisimdeki bir P noktasının ilk konumu x ve son konumu X tir.

X=Ax ile belli olan dönüşümlere küresel disp adı verilir (McCarthy, 1990).



Şekil 3: Biri diğerine bağlı kalarak 3 boyutlu bir cismin dönmesi

x, y ve z eksenleri etrafındaki dönmeler sırasıyla R_x, R_y, ve R_z ile gösterilirse,

A: F → M

dönme dönüşümü,

$[A]= R_y R_x R_z$

olarak da bellidir.

3. ORTOGONAL MATRİS ELDE ETME YÖNTEMLERİ

3.1. Bir Ortogonal Matrisin Karakteristik Vektörleri

A nın etkisi altında hareketli cisimde sabit uzaya göre konumu değişmeyen noktaların cümlesi,

$$Ax = x$$

matris denkleminin çözümleridir. Bu denklem

$$Ax = \lambda x$$

denklemine genişletilerek λ'ya karşılık gelen özdeğer ve özvektörler bulunabilir. Ax=x denkleminin sıfırdan farklı çözümünün olması için,

$$\det(Ax - \lambda I) = 0$$

olmalıdır.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dönme matrisi için,

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(M_{11} + M_{22} + M_{33}) + \det[A] = 0$$

karakteristik polinomunu verir. Burada M_{ii}, i=1,2,3 i-yinci satır ve i-yinci sütun silinmesiyle elde edilen minördür.

Bir dönme matrisi için det(A)=1 ve $A^t = A^{-1} = \frac{1}{detA}\tilde{A} = \tilde{A}$ olduğu kullanılırsa $M_{ii} = a_{ii}$ bulunur. Böylece karakteristik polinom

$$\lambda^3 - \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 1 = 0$$

haline gelir. $\lambda_1 = 1$ olduğundan

$$(\lambda-1)[\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1) + 1] = 0$$

dır. İzA=$a_{11} + a_{22} + a_{33}$= a ile gösterilirse,

$$\lambda^2 - \lambda(a-1) + 1=0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{(a-1)\pm\sqrt{(a-1)^2-4}}{2}$$

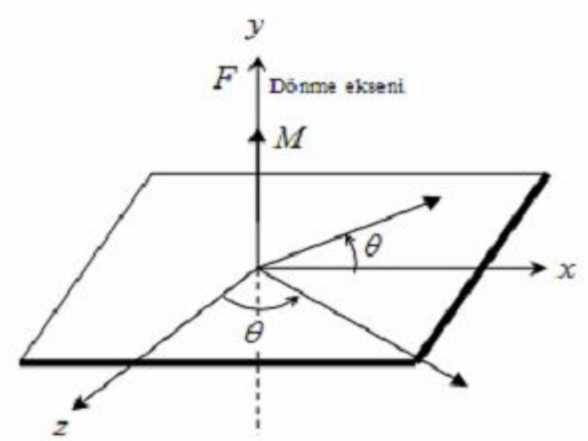
$\frac{İzA-1}{2} = \frac{a-1}{2} = cos\theta$ dönüşümü yapılırsa

$\lambda_{2,3}$= cosθ ± $\sqrt{cos^2\theta - 1}$

$\lambda_{2,3}$=cosθ± isinθ

$\lambda_{2,3}$=$e^{\pm i\theta}$

A nın λ=1 karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör b olsun. A nın etkisi altında hareketli cisimde konumu değişmeyen noktaların cümlesi, Ax=x denkleminin çözümü olduğundan, b yönünde v=tb doğrusu üzerindeki bütün noktalar sabittir. Bu cismin dönme eksenidir.



Şekil 4: Her bir dönme sabit bir eksen etrafında dönmeye indirgenir.

Örneğin;

$[A]=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değer ve vektörleri bulunursa

Ax=λx ⇒ $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} cos\,\theta-\lambda & -sin\,\theta & 0 \\ sin\,\theta & cos\,\theta-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda cos\theta+1)=0$$

λ_1=1, λ_2=$e^{i\theta}$, λ_3=$e^{-i\theta}$

λ= 1'e karşılık gelen karakteristik vektör b=(b_1,b_2,b_3) olsun.

$$\text{Ab=b} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\theta b_1 - sin\,\theta b_2 = b_1 \\ sin\theta b_1 + cos\,\theta b_2 = b_2 \\ b_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-cos\theta)b_1 + sin\,\theta b_2 = 0 \\ -sin\theta b_1 + (1-cos\,\theta)b_2 = 0 \end{cases}$$

denklemlerinin çözümünden b=$(0,0,b_3)$ elde edilir.

λ_2=$e^{i\theta}$ ya karşılık gelen karakteristik vektör x=(x_1,x_2,x_3) olsun.

$$\text{A}x=xe^{i\theta} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=e^{i\theta}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\theta x_1 - sin\,\theta x_2 = e^{i\theta}x_1 \\ sin\theta x_1 + cos\,\theta x_2 = e^{i\theta}x_2 \\ x_3 = e^{i\theta}x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\theta x_1 - sin\,\theta x_2 = (cos\theta + isin\theta)x_1 \\ sin\theta x_1 + cos\,\theta x_2 = (cos\theta + isin\theta)x_2 \\ x_3 = (cos\theta + isin\theta)x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \in IR - \{0\} \ \text{ denirse} \\ x_2 = -it \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

olur. Buradan x=$(t,-it,0)$ elde edilir. Aynı şekilde $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ ya karşılık gelen karakteristik vektör t∈ ℝ olmak üzere x^*=$(x_1^*,x_2^*,x_3^*)=(t,it,0)$ olur.

x ve x^* dan

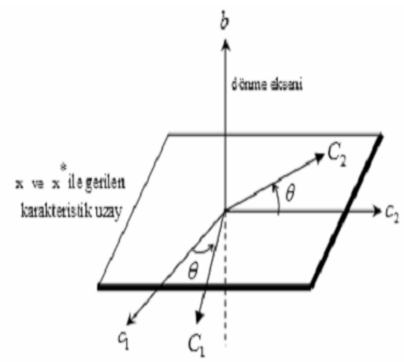
$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{x + x^*}{2} = (t, 0{,}0) \\ c_2 = \dfrac{x - x^*}{2} i = (0, t, 0) \end{cases}$$

reel ortogonal vektörleri oluşturulabilir. Bu noktaların hareketli çatı koordinatları C_1 ve C_2 olmak üzere

$$C_1 = \mathrm{A} c_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (t cos\theta, t sin\theta, 0)$$

$$C_2 = \mathrm{A} c_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = (-t sin\theta, t cos\theta, 0)$$

dır.Bu b ye dik x ve x^* karakteristik vektörleriyle tanımlanan reel düzlemde θ açılık dönmedir.



Şekil 5: Ortogonal Karakteristik Uzay ve b vektörü

3.2. Cayley Formülü

Orjin etrafında bir dönme hareketi $[A]x = X$ ile verilmekte olup, bir harekette cismin noktaları arasındaki uzaklık sabit kalacağından

$$\langle X, X \rangle = \langle x, x \rangle$$

dir.

$$\langle X - x, X + x \rangle = \langle X, X \rangle + \langle X, x \rangle - \langle x, X \rangle + \langle x, x \rangle = 0$$

dir. Bu, dik açı altında kesişen ve kenarları X ve x olan bir eşkenar dörtgenin köşegenlerinin $X - x$ ve $X + x$ olduğunu ifade eder.

Böylece;

$\vec{u}= X - x$ ve $\vec{v}= X + x$ vektörleri ortogonal olup, $[A]x = X$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$\vec{u}=[A]x - x = [A - I]x$

$\vec{v}=[A]x + x = [A + I]x$ ve $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ dır.

$[A]x = -x$ durumu yani $[A]$ ortogonal matrisinin karakteristik değerlerinden birisinin -1 olma durumu hariç tutulursa o zaman $[A - I]$ matrisi regüler olur. Bu durumda

$x = [A + I]^{-1}\vec{v}$

$\vec{u} = [A - I][A + I]^{-1}\vec{v}$ elde edilir.

$[B] = [A - I][A + I]^{-1}$ denirse $\vec{u}=[B]\vec{v}$ bulunur.

3.2.1.Teorem: $[B]$ matrisi anti-simetrik bir matristir. $[B]$ matrisi anti-simetrik bir matris olduğundan $\det B \geq 0$ dır ve bir anti-simetrik matrisin tüm karakteristik değerleri imajinerdir.

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle=\langle B\vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$

$$[B]\vec{v}=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11}\vec{v}_1 + b_{12}\vec{v}_2 + \cdots + b_{1n}\vec{v}_n \\ \vdots \\ b_{n1}\vec{v}_1 + b_{n2}\vec{v}_2 + \cdots + b_{nn}\vec{v}_n \end{bmatrix}$$

$\langle B\vec{v}, \vec{v} \rangle = [B\vec{v}]^t\vec{v}=0$

$$[b_{11}\vec{v}_1 + b_{12}\vec{v}_2 + \cdots + b_{1n}\vec{v}_n, \ldots, b_{n1}\vec{v}_1 + b_{n2}\vec{v}_2 + \cdots + b_{nn}\vec{v}_n]\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix}=0$$

$$b_{11}\vec{v}_1\vec{v}_1 + b_{12}\vec{v}_2\vec{v}_1 + \cdots + b_{1n}\vec{v}_n\vec{v}_1 + \cdots + b_{n1}\vec{v}_1\vec{v}_n + b_{n2}\vec{v}_2\vec{v}_n + \cdots + b_{nn}\vec{v}_n\vec{v}_n=0$$

$$\sum_{i\neq j}^{n}\left(b_{ij}+b_{ji}\right)\vec{v}_i\vec{v}_j+\sum_{i=j}^{n}b_{ii}\vec{v}_i\vec{v}_j=0$$

elde edilir. ∀g için

$b_{ij}+b_{ji}$=0 $\Rightarrow b_{ij}=-b_{ji}$, b_{ii}= 0 olur ki buradan $[B]$ nin anti-simetrik matris olduğu görülür.

Gerçekten $[B]$ matrisine karşılık gelen anti-simetrik bir dönüşüm

Ɓ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

x→Ɓ(x)=λx olsun.

$\langle Ɓ(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$

$\langle x, Ɓ(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle$

dir. Buradan $\bar{\lambda}$, λ nın eşleniğidir. Ɓ anti-simetrik bir dönüşüm olduğundan

$\langle Ɓ(x), x\rangle = -\langle x, Ɓ(x)\rangle$ dir. Buradan

$\lambda\langle x, x\rangle = -\bar{\lambda}\langle x, x\rangle$

$\lambda = -\bar{\lambda}$

$\lambda + \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow 2\mathrm{Re}(\lambda) = 0$

olur. λ sırf imajiner veya λ=0 dır. Özel olarak λ=1 için det(λI − B) ≠ 0 olup $[I-B]$ regülerdir. Böylece

$$[A][I-B]=[I+B]$$

$$[A]=[I+B][I-B]^{-1}$$

Cayley formülü

$$[A]=[I+B][I-B]^{-1}$$

$$[B]=[A-I][A+I]^{-1}$$

olarak elde edilir.

Genel olarak her $[A]$ ortogonal matrisi anti-simetrik bir matris yardımıyla elde edilemez. Bunun için $[A+I]$ matrisi regüler olmalıdır.

3.2.2.Tanım: A ve I mertebeleri aynı olan birer karesel matris olmak üzere, A bir dönme matrisi ve A+I regüler ise A matrisine Cayley matrisi denir.

Örnek:

$[B]=\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ anti-simetrik matrisi verilsin. Bu matristen Cayley formülü yardımıyla bir ortogonal matris elde edelim

$$[A] = \underbrace{[I+B]}_{C}\underbrace{[I-B]}_{D}^{-1}$$

$[C]=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$[D]=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$D^{-1} = \frac{ekD}{\det D}$$

ekD = $\begin{bmatrix} 2 & 40 & -6 \\ 10 & 10 & 16 \\ 24 & -14 & 26 \end{bmatrix}$, det D =36

D^{-1}= $\begin{bmatrix} 2/36 & 40/36 & -6/36 \\ 10/36 & 10/36 & 16/36 \\ 24/36 & -14/36 & 26/36 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1/18 & 10/9 & -3/18 \\ 5/18 & 5/18 & 8/18 \\ 12/18 & -7/18 & 13/18 \end{bmatrix}$

$[A]$ =C. D^{-1}

$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/18 & 10/9 & -3/18 \\ 5/18 & 5/18 & 4/9 \\ 12/18 & -7/18 & 13/18 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -5/9 & 33/9 & -1/9 \\ 6/9 & -51/9 & 2 \\ 5/9 & 24/9 & -2/9 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3.3. 3×3 Tipinden Anti-simetrik Matrisler

Bir B 3×3-tipinden anti-simetrik matrisi

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. B matrisi sadece 3 tane bağımsız elemana sahip olduğundan 3×3-tipinden anti-simetrik matrisler cümlesi ile $\mathbb{R}^3$ arasında 1-1 eşleme vardır.

3×3-tipinden anti-simetrik matrisler cümlesi M_3 ile gösterilirse bu eşleme,

$\Upsilon : M_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \Upsilon([B]) = b = (b_1, b_2, b_3)$$

ile kurulabilir. Bu dönüşüm $\forall$ y$\in \mathbb{R}^3$ için

$$By = b \times y$$

özelliğine sahiptir.

Cayley formülü bize her anti-simetrik matristen bir ortogonal matris ve her ortogonal matristen bir anti-simetrik matris elde edebileceğimizi söyler. A bir ortogonal matris ve B bir anti-simetrik matris olmak üzere

$$B=[A+I]^{-1}[A-I] \qquad \text{ve}$$

$$A=[I-B]^{-1}[I+B]$$

olarak verilir (McCarthy, 1990).

Cayley formülündeki B anti-simetrik matrisinden elde edilen b vektörü, A dönme matrisinin λ=1 değerine karşılık gelen karakteristik vektördür. Bunu görmek için bu karakteristik vektörün

$[\mathrm{A}-\mathrm{I}]\mathrm{x}=0$

denklemini sağladığını göstermek yeterlidir. Cayley formülünde Ax= x yazılırsa,

$\mathrm{Ax} = [\mathrm{I}-B]^{-1}\,[I+B]\mathrm{x} = \mathrm{x}$

$[\mathrm{I}-B]\mathrm{x} = [I+B]\mathrm{x}$

$\mathrm{Bx}= 0$

sonucu elde edilir.

$\mathrm{Bx}= 0$

$\mathrm{b}\times\mathrm{x} = 0$

olduğundan $[\mathrm{A}-\mathrm{I}]\mathrm{x}=0$ denkleminin bir çözümü olarak b elde edilir.

3.4. Rodrigues Denklemi

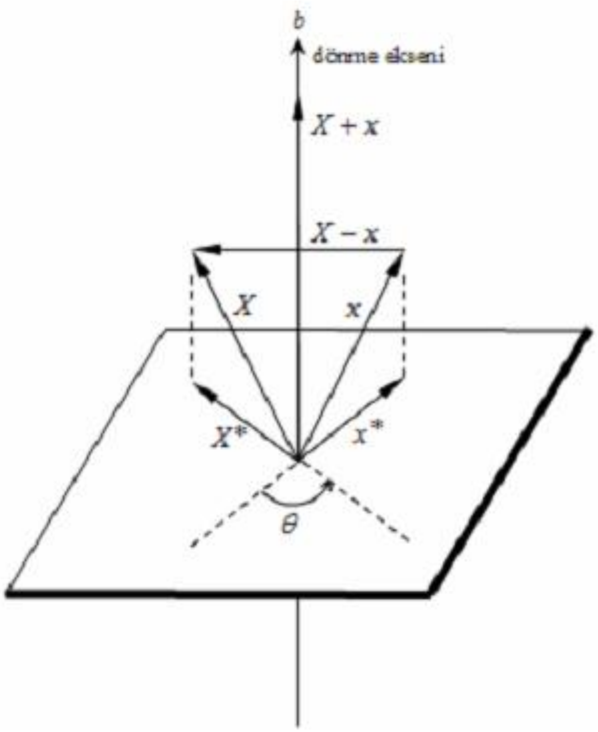
Bir $[A]$ pozitif ortogonal matrisi verildiğinde Cayley formülünden bir $[B]$ anti-simetrik matrisi elde edilebilir,

$$\vec{X}-\vec{x}=[B]\big(\vec{X}+\vec{x}\big)$$

eşitliği dönen cismin noktalarının hareketli ve sabit çatıdaki koordinatları arasındaki ilgiyi verir. $[B]$ ile belli olan vektör $\vec{b}$ olmak üzere

$$\vec{X}-\vec{x}=\vec{b}\times\big(\vec{X}+\vec{x}\big)$$

yazılabilir. Bu eşitlik dönmeler için Rodrigues denklemi olarak adlandırılır ve $\vec{b}$ vektörüne de Rodrigues vektörü denir.



Şekil 6: x ve X ile x* ve X* ın konumları ve Rodrigues vektörü

$\vec{X}\ \ ve\ \vec{x}$ yerine, bu vektörlerin $\vec{b}$ ye dik düzleme izdüşümleri $\vec{X}^*\ \ ve\ \ \vec{x}^*$ için de geçerlidir. Şöyle ki;

$$\begin{cases}\vec{X} = \vec{X}^* + \lambda\vec{b} \\ \vec{x} = \vec{x}^* + \lambda\vec{b}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{X}^* = \vec{X} - \lambda\vec{b} \\ \vec{x}^* = \vec{x} - \lambda\vec{b}\end{cases}$$

$$[A]\vec{x}^* = [A]\left(\vec{x} - \lambda\vec{b}\right)$$

$$=[A]\vec{x} - \lambda[A]\vec{b}$$

$$= [A]\vec{x} - \lambda\vec{b}$$

$$= \vec{X} - \lambda\vec{b}$$

$$= \vec{X}^*$$

Yani $\vec{X}$ ve $\vec{x}$ arasındaki $\vec{X} = [A]\vec{x}$ eşitliği $\vec{X}^*$ ve $\vec{x}^*$ içinde geçerlidir. Dolayısıyla

$$\vec{X}^* - \vec{x}^* = \vec{b} \times \left(\vec{X}^* + \vec{x}^*\right)$$

olur. Norm alınırsa

$$\left\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\right\| = \left\|\vec{b}\right\|. \left\|\vec{X}^* + \vec{x}^*\right\|. \sin\left(\sphericalangle\vec{b}, \vec{X}^* + \vec{x}^*\right)$$

$$\left\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\right\| = \left\|\vec{b}\right\|. \left\|\vec{X}^* + \vec{x}^*\right\|. sin\frac{\pi}{2}$$

$$\left\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\right\| = \left\|\vec{b}\right\|. \left\|\vec{X}^* + \vec{x}^*\right\|$$

$\left\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\right\| = \langle\vec{X}^* - \vec{x}^*, \vec{X}^* - \vec{x}^*\rangle$

$$= \left(\langle\vec{X}^*, \vec{X}^*\rangle - 2\langle\vec{X}^*, \vec{x}^*\rangle + \langle\vec{x}^*, \vec{x}^*\rangle\right)^{1/2}$$

$$= \left(\left\|\vec{X}^*\right\| - 2\left\|\vec{X}^*\right\|\|\vec{x}^*\|cos\theta + \|\vec{x}^*\|\right)^{1/2} \qquad \left\|\vec{X}^*\right\| = \|\vec{x}^*\| = a,$$

$a > 0$

$$= \left(2a^2(1 - cos\theta)\right)^{1/2}$$

benzer işlemlerle,

$$\left\|\vec{X}^* + \vec{x}^*\right\| = \left(2a^2(1 + cos\theta)\right)^{1/2}$$

elde edilir.

$$\left\|\vec{b}\right\| = \frac{\left\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\right\|}{\left\|\vec{X}^* + \vec{x}^*\right\|}$$

$$= \frac{\left(2a^2(1 - cos\theta)\right)^{1/2}}{\left(2a^2(1 + cos\theta)\right)^{1/2}}$$

$$= \left(\frac{1 - cos\theta}{1 + cos\theta}\right)$$

$$= tan\frac{\theta}{2}$$

yani

$$\|\vec{b}\| = tan\frac{\theta}{2}$$

dir. $\vec{b}$ boyunca belli olan birim vektör $\vec{s}$ olmak üzere

$$\vec{s} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

olur ki buradan

$$\vec{b} = \vec{s}.\|\vec{b}\|$$

dir.$\vec{b}$ nin bileşenleri

$$\vec{b} = \left(tan\frac{\theta}{2}s_x, tan\frac{\theta}{2}s_y, tan\frac{\theta}{2}s_z\right)$$

olduğu görülür, bu bileşenler $\vec{b}$ boyunca belli olan Rodrigues parametreleri olarak bilinirler.

3.5. Bir Dispin Vida Ekseni

Bir uzay dispi etkisi altında uzayda sabit kalan, hareketli bir cisimdeki noktaları ele alacağız. Bu c noktaları, disp öncesi ve sonrası aynı koordinatlara sahiptir. Buna göre bu noktalar,

c= Ac $+$ d

denklemini veya

$[I - A]$c=d

denklemini sağlamalıdır. Bu denklemin çözümü

c=$-[A - I]^{-1}$d

dir. Ancak 3×3 tipinden bütün dönme matrisinin karakteristik değerlerinden biri 1 olduğundan $[A - I]$ matrisi singülerdir. Sonuç olarak bir uzaysal dispin sabit noktaları yoktur. Genel olarak n×n tipinden bir A dönme matrisi için n çift ise, bir tek sabit nokta vardır ve bu nokta dispin pol noktası olarak adlandırılır. n tek ise, A matrisinin karakteristik değerlerinden biri 1 olduğundan $[A-I]$ matrisi singülerdir ve dispte sabit nokta yoktur.

Her ne kadar bir uzaysal disp sabit noktalara sahip olmasa da vida ekseni olarak adlandırılan bir sabit doğruya sahiptir. Bu doğrunun disp öncesi ve sonrası uzaydaki konumu değişmez.

Bu doğrunun doğrultmanı $[A]$ matrisinin dönme eksenidir. Bu doğrunun konumu aşağıdaki gibi belirlenir.

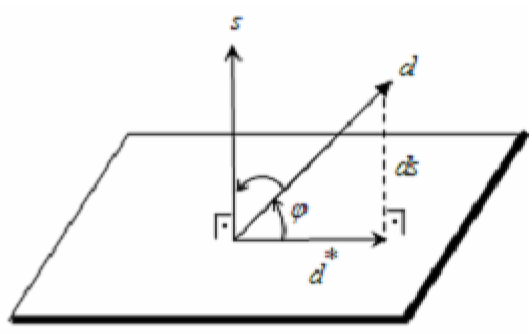
d^*, b vektörüne dik bir düzlem üzerinde d öteleme vektörünün izdüşümü olsun.

$$[I-A]\mathrm{c}=d^*$$

denklemi, b ye dik düzlemde ötelenen ve b etrafında dönen düzlem dispinin c pol noktasını tanımlar. Aranan doğru,

$$\mathrm{L}=\mathrm{c}+t\mathrm{b}$$

dir. Bu L doğrusu ile belli eksene vida ekseni denir. Disp bu doğru etrafında bir sırf dönmeye ve doğru boyunca ds = d$-d^*$ miktarı ötelemeye indirgenir. Burada s=$\frac{b}{\|b\|}$ dir. Buna bir vida dispi denir (McCarthy, 1990).



Şekil 7: Vida dispi

Şekil 7 den,

$$\langle d,s\rangle=\|d\|\|s\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\|d\|\sin\varphi \text{ ve } \sin\varphi=\frac{ds}{\|d\|} \text{ olduğundan } \langle d,s\rangle=ds \text{ dir.}$$

$$\mathrm{c}=[A]\mathrm{c}+d^*$$

c=$[I-B]^{-1}[I+B]c+d^*$

$[I-B]c=[I+B]c+[I-B]d^*$

$[I-B-I-B]c$ = $[I-B]d^*$

$[B]$c = $-\frac{1}{2}[I-B]d^*$

elde edilir. Bu ifade vektör formunda

b×c = $-\frac{1}{2}(d^* \ - b\times d^*)$

olarak yazılabilir. Denklemin her iki tarafı b ile vektörel çarpılırsa

b× $(b\times c)=-\frac{1}{2}\big(b\times d^* \ - b\times(b\times d^*)\big)$

$$\underbrace{\langle b.c\rangle}_{0}b-\langle b.b\rangle c=-\frac{1}{2}\left(b\times d^* \ -\underbrace{\langle b.d^*\rangle}_{0}b+\langle b.b\rangle d^*\right)$$

$\langle b.b\rangle c=\frac{1}{2}(b\times d^*+\langle b.b\rangle d^*)$

$c=\frac{1}{2}\left(\frac{b\times d^*}{\langle b.b\rangle}+d^*\right)$

dır. Vida ekseni boyunca öteleme miktarı d - d^* vektörünün büyüklüğüdür.

Şimdiye kadar verilen bir D = (A,d) dispi için vida eksenini, bu eksen boyunca ötelemeyi ve bu eksen etrafında dönmeyi tanımladık.

Şimdi de verilen bir vida eksenine göre D dispini ve L boyunca, d mesafeli, θ açılı vida dispini tanımlayalım.

F sabit çatısında vida ekseni L=c+ts ile verilsin. $s\ vekt\ddot{o}r$ü birim vektör ve c.s=0 olduğunu kabul edelim verilen θ dönme açısından Rodrigues vektörü

$$\text{b=tan}\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{s}$$

elde edilir. b vektörünün bileşenlerini kullanarak $[B]$ anti-simetrik matrisi ve Cayley formülü yardımıyla $[A]$ dönme matrisi belirlenir. Eğer vida ekseni F nin orjininden geçiyorsa bu durumda c=0 dır. Öteleme miktarı

$$c=[A]c+d^*$$

$$0=[A]0+d^*$$

$$d^* = 0$$

olacağından

$$ds=d-d^* \Rightarrow ds=d$$

olur. Böylece disp

$$D' = (A, ds)$$

dir. Eğer vida ekseni F nin orjininden geçmiyorsa $c \neq 0$ dır. Bu durumda F' sabit çatısı

$$T: F \to F'$$

$$T=(I, c)$$

ötelemesi ile c noktasında vida ekseni üzerinde yerleştirilebilir.

$$D' = (A, ds)$$

dispi referans çatının değişiminden

$$D=TD'T^{-1}=(I, c)(A, ds)(I, -c)=(A, -Ac+ds+c)$$

olur. Böylece d öteleme vektörü

$$d=ds+[I-A]c$$

olur.

Örnek: Öteleme vektörü d=(-1,0,2) ile D: x+y−z=0 düzlemi verilsin. d nin, D düzlemi üzerindeki dik izdüşüm vektörü $d^*=(d_1^*, d_2^*, d_3^*)$ olsun. Vida ekseni boyunca öteleme vektörü $d-d^*$ düzlemin normaline paralel olacağından

$$\frac{-1-d_1^*}{1} = \frac{2-d_2^*}{1} = \frac{-d_3^*}{-1} = \mu$$

dür. Ayrıca d^*, D nin üzerinde olacağından düzlemin noktalarını sağlar.

x+y−z=0

$-\mu - 1 - \mu - (\mu + 2) = 0 \Rightarrow \mu = -1$

$d^* = (0,1,1)$

bulunur. Öteleme vektörü

$$ds = d - d^* = (-1,0,2) - (0,1,1) = (-1,-1,1)$$

dır.

b = (1, 1, -1)

iken b vektörü yönündeki birim vektör

$s = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

dir.

$c = \frac{1}{2}\left(\frac{b \times d^*}{bb} + d^*\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(2,1,1)}{3} + (0,1,1)\right)$

$c = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

elde edilir. Bulunan bu c noktası D düzlemi üzerinde bir noktadır. Vida ekseni ise

$c = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

noktasından geçen ve doğrultmanı b = (1, 1, -1) olan doğrudur.

L=c+tb

$L = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + t(1, 1, -1)$

$= \left(\frac{1}{3} + t, \frac{2}{3} + t, \frac{2}{3} - t\right)$

vida eksenidir.

Şimdi L vida ekseni üzerinde bulunan bir noktanın dispten sonra yine vida ekseni üzerinde bulunacağını gösterelim. Vida üzerinde herhangi bir nokta

x= $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$ alalım. x noktasının dispten sonraki konumu X = (x_1, x_2, x_3) olsun. Rodrigues denkleminden

$X - x$= b×(X+x−$2c$)+ds

$$=(x_1, x_2, x_3) - \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

$$=\left[(1, 1, -1) \times \left((x_1, x_2, x_3) + \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)\right] + (-1, -1, 1)$$

X = $\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$ bulunur.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} + t = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} + t = 0 \\ \dfrac{2}{3} - t = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$t = -\frac{2}{3}$$

olup x vida ekseni üzerinde

$X - x = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right) = (-1, -1, 1) =$ ds dir.

Şimdi L vida ekseni üzerinde olmayan bir x=(0,0,1) noktasının dispten sonraki konumunu bulalım. x noktasının disp sonrası konumu x = (x_1, x_2, x_3) olsun. Rodrigues denkleminden

$X - x$= b×(X+x−$2c$)+ds

$$=(x_1, x_2, x_3) - (0,0,1)$$

$$=\left[(1, 1, -1) \times \left((x_1, x_2, x_3) + (0,0,1) - 2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)\right] + (-1, -1, 1)$$

$X = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 2\right)$

bulunur. X noktası vida ekseni üzerinde değildir. Üstelik

$$(X-x).s=\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 2\right).(0,0,1) = 2 = \|ds\|$$

dir.

4. DUAL UZAY

4.1. Dual Sayılar

4.1.1. Tanım: ℝ reel sayılar cümlesi ve a,a*ϵℝ olmak üzere $\hat{a}$ = (a,a^*)ϵ ℝ×ℝ sıralı ikilisinin

oluşturduğu cümle ID ile gösterilsin.

$$\text{ID}=\{\, a+\varepsilon a^* \mid a,\ a^* \in \text{IR},\ \varepsilon^2=0,\ \varepsilon\neq 0 \,\}$$

cümlesine dual sayılar cümlesi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Dual sayılar üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$+ :$ ID×ID → ID

(A = $a+\varepsilon a^*$, B = $b+\varepsilon b^*$) → A+B = (a+b) + $\varepsilon(a^*+b^*)$

$\cdot :$ ID×ID → ID

(A = $a+\varepsilon a^*$, B = $b+\varepsilon b^*$) → A.B = ab + $\varepsilon(ab^*+a^*b)$

Dual sayılar yukarıdaki işlemlerle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır (Hacısalihoğlu, 1983). (ID, +,·) halkasına dual sayılar halkası denir.

$$M=\left\{\begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, a^* \in IR\right\} \subset \mathbb{R}_2^2$$

cümlesi de matrislerle toplama ve matrislerle çarpma işlemine göre birimli ve değişimli bir halkadır (Hacısalihoğlu, 1983).

4.1.1. Teorem: (ID, +,·) ve (M, +,·) halkaları izomorftur (Hacısalihoğlu, 1983).

υ : ID → M

A= a + εa^* → υ (A) = $\begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$

ile tanımlanan υ dönüşümü bir izomorfizmdir (Hacısalihoğlu, 1983).

4.1.2. Tanım: ID^3 ün elemanı olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Buna göre,

$$ID^3=\{(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3): \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3 \in ID\}$$

cümlesi dual vektörler cümlesidir (Hacısalihoğlu, 1983).

4.1.3. Tanım: Elemanları dual sayılar olan bir $\hat{A}$ matrisine dual matris denir ve

$\hat{A} = [\widehat{A_{ij}}]$ iken

$$\hat{A}_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a_{ij}{}^*$$

şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1983).

4.1.4. Tanım: $\hat{A} \in ID_n^n$ için $\hat{A}\hat{A}^t=\hat{A}^t\hat{A}=I_n$ ise $\hat{A}$ dual matrisine dual ortogonal matris denir (Hacısalihoğlu, 1983).

$$[\hat{A}] = [A] + \varepsilon[D][A]=[A] + \varepsilon\, [A^*]$$

olarak gösterilir.

Gerçekten:

$$[\hat{A}][\hat{A}^t]=([A] + \varepsilon[D][A]\,)([A] + \varepsilon[D][A])^t$$

$$[\hat{A}][\hat{A}^t]=([A] + \varepsilon[D][A]\,)([A]^t + \varepsilon[A]^t[D]^t)$$

$$[\hat{A}][\hat{A}^t]=[A][A]^t + \varepsilon\left(\underbrace{[A][A]^t}_{I}[D]^t + [D]\underbrace{[A][A]^t}_{I}\right)$$

$$[\hat{A}][\hat{A}^t]=[I]$$

olup, $[\hat{A}]$ matrisi bir ortogonal matristir. Bu 3×3 tipinden dual sayı elemanlı $[\hat{A}]$ ortogonal matrsine dual ortogonal matris denir.

Örnek:

y ekseni etrafında θ açılı ve eksen boyunca d mesafeli vida dispine karşılık gelen dual ortogonal matrisi bulalım.

$$[A]=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ve y ekseni boyunca öteleme miktarı

$\vec{d}=(0,d,0)$ dir. $\vec{d}$ ye karşılık gelen anti simetrik matris

$$[D]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

$[\hat{Z}] = [A] + \varepsilon[D][A]$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta+\varepsilon d\sin\theta & 0 & -\sin\theta+\varepsilon d\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta-\varepsilon d\cos\theta & 0 & \cos\theta+\varepsilon d\sin\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\hat{\theta} & 0 & -\sin\hat{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\hat{\theta} & 0 & \cos\hat{\theta} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

İki doğru arasındaki dual açı $\hat{\theta} = \theta + \varepsilon d$ dual sayısı ile tanımlanır. Burada θ iki doğrunun doğrultman vektörleri arasındaki açı ve d iki doğru arasındaki en kısa uzaklıktır.

Ayrıca $f(\hat{\theta})$ fonksiyonunun $\hat{\theta} = \theta$ noktasındaki Taylor açılımı

$$f(\hat{\theta})= f(\theta+\varepsilon d) = f(\theta) + \frac{\hat{\theta}}{1!}f'(\theta) + \frac{\hat{\theta}^2}{2!}f''(\theta) + \cdots + \frac{\hat{\theta}^n}{n!}f^n(\theta) + \cdots$$

$$= f(\theta) + \frac{(\theta+\varepsilon d)}{1!}f'(\theta) + \frac{(\theta+\varepsilon d)^2}{2!}f''(\theta) + \cdots + \frac{(\theta+\varepsilon d)^n}{n!}f^n(\theta) + \cdots$$

$$= \left(f(\theta) + \frac{(\theta)}{1!} f'(\theta) + \frac{(\theta)^2}{2!} f''(\theta) + \cdots + \frac{(\theta)^n}{n!} f^n(\theta) + \cdots \right)$$

$$+ \varepsilon d \left(f'(\theta) + \frac{(\theta)^1}{1!} f''(\theta) + \cdots + \frac{(\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(\theta) + \cdots \right)$$

$$= f(\theta) + \varepsilon d\, f'(\theta)$$

olarak bulunur ve

$$sin\hat{\theta}{=}sin(\theta + \varepsilon d){=}sin\ \theta \pm \varepsilon d cos\theta$$

$$cos\hat{\theta}{=}cos(\theta + \varepsilon d){=}cos\ \theta \pm \varepsilon d sin\theta$$

ifadeleriyle bir dual açının sinüs ve cosinüs fonksiyonları tanımlanabilir. Böylece

x ekseni etrafında $\hat{\theta}$ açılı ve eksen boyunca d mesafeli vida dispine karşılık gelen dual ortogonal matrisi

$$[\hat{Z}_x]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\hat{\theta} & -\sin\hat{\theta} \\ 0 & \sin\hat{\theta} & \cos\hat{\theta} \end{bmatrix},$$

y ekseni etrafında $\hat{\theta}$ açılı ve eksen boyunca d mesafeli vida dispine karşılık gelen dual ortogonal matrisi

$$[\hat{Z}_y]=\begin{bmatrix} \cos\hat{\theta} & 0 & -\sin\hat{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\hat{\theta} & 0 & \cos\hat{\theta} \end{bmatrix}$$

z ekseni etrafında $\hat{\theta}$ açılı ve eksen boyunca d mesafeli vida dispine karşılık gelen dual ortogonal matrisi

$$[\hat{Z}_z]=\begin{bmatrix} \cos\hat{\theta} & -\sin\hat{\theta} & 0 \\ \sin\hat{\theta} & \cos\hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır.

4.2. Dual Matrisin Özdeğerleri

$\widehat{A}$ nın etkisi altında hareketli cisimde sabit uzaya göre konumu değişmeyen noktaların cümlesi,

$$\widehat{A}\vec{\hat{x}} = \vec{\hat{x}}$$

matris denkleminin çözümleridir. Bu denklem

$$\widehat{A}\vec{\hat{x}} = \hat{\lambda}\vec{\hat{x}}$$

denklemine genişletilerek $\hat{\lambda}$'ya karşılık gelen özdeğer ve özvektörler bulunabilir. $A\vec{\hat{x}}=\vec{\hat{x}}$ denkleminin sıfırdan farklı çözümünün olması için,

$$\det(\widehat{A}\vec{\hat{x}} - \hat{\lambda}I)=0$$

olmalıdır.

$\widehat{A}=\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{bmatrix}$ dönme matrisi için,

$$\left|\widehat{A} - \hat{\lambda}I\right| = 0 \qquad \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{a}_{11} - \hat{\lambda} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} - \hat{\lambda} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} - \hat{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\hat{\lambda}^3 + \hat{\lambda}^2(\hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33}) - \hat{\lambda}(\widehat{M}_{11} + \widehat{M}_{22} + \widehat{M}_{33}) + \det\left[\widehat{A}\right] = 0$$

karakteristik polinomunu verir. Burada $\widehat{M}_{ii}$, i=1,2,3 i-yinci satır ve i-yinci sütun silinmesiyle elde edilen minördür.

Bir dönme matrisi için $\det(\widehat{A})=1$ ve $\widehat{A}^t = \widehat{A}^{-1} = \frac{1}{detA}\widetilde{\widehat{A}} = \widetilde{\widehat{A}}$ olduğu kullanılırsa $\widehat{M}_{ii} = \hat{a}_{ii}$ bulunur. Böylece karakteristik polinom

$$\hat{\lambda}^3 - \hat{\lambda}^2(\hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33}) + \hat{\lambda}(\hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33}) + 1 = 0$$

haline gelir. $\hat{\lambda}_1=1$ olduğu görülür.

$$(\hat{\lambda}-1)[\hat{\lambda}^2 - \hat{\lambda}(\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22}+\hat{a}_{33}-1)+1] = 0$$

dır. İz$\hat{A}$ = $\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22}+\hat{a}_{33}$= $\hat{a}$ ile gösterilirse,

$$\hat{\lambda}^2 - \hat{\lambda}\,(\hat{a}-1) + 1 = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_{2,3} = \frac{(\hat{a}-1)\pm\sqrt{(\hat{a}-1)^2-4}}{2}$$

$$\frac{\text{İz}\hat{A}-1}{2} = \frac{\hat{a}-1}{2} = cos\hat{\theta}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\hat{\lambda}_{2,3} = \cos\hat{\theta} \pm \sqrt{cos^2\hat{\theta}-1}$$

$$\hat{\lambda}_{2,3} = \cos\hat{\theta} \pm i\sin\hat{\theta}$$

$$\hat{\lambda}_{2,3} = e^{\pm i\hat{\theta}}$$

$\hat{A}$ nın $\hat{\lambda}$=1 karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör $\vec{\hat{b}}$ olsun. $\hat{A}$ nın etkisi altında hareketli cisimde konumu değişmeyen noktaların cümlesi, $\hat{A}\hat{x} = \hat{x}$ denkleminin çözümü olduğundan, $\vec{\hat{b}}$ yönünde $\hat{v} = \hat{t}\vec{\hat{b}}$ doğrusu üzerindeki bütün noktalar sabittir. Bu cismin dönme eksenidir.

4.3. Dual Cayley Dönüşümü

Hareketli dual birim küre üzerindeki herhangi bir $\hat{x}$ noktası, sabit dual birim küre üzerinde bir $\hat{A}$ rotasyon matrisi ile bir $\hat{X}$ noktası belirtir yani

$$\hat{X} = \hat{A}\,\hat{x}$$

dir. Dönüşüm katı transformasyon olduğu için

$$\|\hat{X}\| = \|\hat{x}\|$$

ve

$$\|\hat{X}\|^2 = \hat{X}^t\hat{X} = \hat{x}^t\,\hat{A}^t\hat{A}\,\hat{x} = \hat{x}^t\hat{x} = \|\hat{x}\|^2$$

$\hat{A}^t\hat{A} = I$ olduğu görülür, dolayısıyla $\hat{A}$ dual ortogonal matristir. Diğer taraftan $\hat{X}^t\hat{X} = \hat{x}^t\hat{x}$ olduğu da görülür, buradan

$$(\hat{X}-\hat{x})^t(\hat{X}+\hat{x}) = 0$$

olur.

$$\widehat{\mathrm{X}} + \hat{x} = \hat{A}\,\hat{x} + \hat{x} = (\hat{A} + I)\hat{x} \Rightarrow \hat{x} = (\hat{A} + I)^{-1}(\widehat{\mathrm{X}} + \hat{x})$$

$$\widehat{\mathrm{X}} - \hat{x} = \hat{A}\,\hat{x} - \hat{x} = (\hat{A} - I)\hat{x}$$

$$\widehat{\mathrm{X}} - \hat{x} = (\hat{A} - I)(\hat{A} + I)^{-1}(\hat{X} + \hat{x})$$

$(\hat{A} - I)(\hat{A} + I)^{-1}$ ifadesi $\widehat{\mathrm{B}}$ olsun. O halde

$$\widehat{\mathrm{X}} - \hat{x} = \hat{B}(\hat{X} + \hat{x})$$

yazılabilir.

$\widehat{\mathrm{X}} - \hat{x}$ ile $\widehat{\mathrm{X}} + \hat{x}$ ortogonal olduğu için, $\hat{B}(\widehat{\mathrm{X}} + \hat{x})$, $\widehat{\mathrm{X}} + \hat{x}$ ile ortogonaldir. Her $\vec{\hat{\mathrm{v}}}$ genel dual vektörü için $\hat{B}\vec{\hat{\mathrm{v}}}$, $\vec{\hat{\mathrm{v}}}$ ye ortogonaldir. Dolayısıyla

$$\vec{\hat{\mathrm{v}}}^{\,t}\hat{B}\vec{\hat{\mathrm{v}}} = \sum (\hat{b}_{ij} + \hat{b}_{ji})\,\hat{v}_i\hat{v}_j = 0$$

Bu bağıntı her $\hat{\mathrm{v}}$ için sağlanır bu nedenle $\hat{\mathrm{b}}_{ii} = 0$ ve $\hat{b}_{ij} = -\hat{b}_{ji}$ dir. $\widehat{\mathrm{B}} = -\hat{B}$ özelliğini sağlayan $\widehat{\mathrm{B}}$ anti-simetrik matristir.

Diğer taraftan $\hat{B}$ nin anti-simetrikliği $(I - \hat{B})$ nin singüler olmamasını gerektirir.

$$\hat{B} = (\hat{A} - I)(\hat{A} + I)^{-1} \Rightarrow \hat{B}(\hat{A} + I) = (\hat{A} - I) \Rightarrow \hat{B} + I = \hat{A} - \hat{B}\hat{A}$$

$$\Rightarrow (I + \hat{B})(I - \hat{B})^{-1} = \hat{A}$$

Buradan dual durum için Cayley Formülü elde edilir:

$$\hat{A} = (I + \hat{B})(I - \hat{B})^{-1}$$

$\hat{A}^t$ bulunursa,

$$\hat{A}^t = \left((I + \hat{B})(I - \hat{B})^{-1}\right)^t$$

$$= (I + \hat{B}^t)(I - \hat{B}^t)^{-1}$$

$$\hat{A}^t = (I - \hat{B})(I + \hat{B})^{-1}$$

elde edilir ve

$$\hat{A}\hat{A}^t = (I + \hat{B})(I - \hat{B})^{-1}(I - \hat{B})(I + \hat{B})^{-1}$$
$$\hat{A}\hat{A}^t = \hat{A}^t\hat{A} = I$$

bulunur.

Dolayısıyla Dual Cayley dönüşümü ile her anti-simetrik dual matris $\widehat{\mathrm{B}}$, bir ortogonal dual matris $\widehat{\mathrm{A}}$ belirtir.

$\hat{B}$ yi özel olarak

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{b}_3 & \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 & 0 & -\hat{b}_1 \\ -\hat{b}_2 & \hat{b}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

alırsak,

$\widehat{M}_3$ *ile* ID^3 1-1 eşlenir. Gerçekten

$$f\colon \begin{bmatrix} 0 & -\hat{b}_3 & \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 & 0 & -\hat{b}_1 \\ -\hat{b}_2 & \hat{b}_1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\right)$$

dönüşümünü alalım,

i) f: $\widehat{M}_3 \rightarrow ID^3$ dönüşümü 1-1 midir?

$[\hat{a}_i], \left[\hat{b}_i\right] \in \widehat{M}_3$ i, j=1,2,3 olsun.

$f([\hat{a}_i]) = f\left(\left[\hat{b}_i\right]\right)$ alalım.

$\Rightarrow \quad (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) = \left(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\right)$

$\Rightarrow \quad \hat{a}_1 = \hat{b}_1$

$\hat{a}_2 = \hat{b}_2$

$\hat{a}_3 = \hat{b}_3$

$\Rightarrow \quad \vec{\hat{a}} = \vec{\hat{b}}$ ve $\vec{\hat{a}}, \vec{\hat{b}} \in ID^3$

f dönüşümü 1-1 dir.

ii) f: $\widehat{M}_3 \rightarrow ID^3$ dönüşümü örten midir?

$\forall \vec{\hat{a}} \in ID^3$ için $f([\hat{a}_i]) = \vec{\hat{a}}$ olacak şekilde $\exists [\hat{a}_i] \in \widehat{M}_3$ vardır.

f dönüşümü örtendir.

O halde

$$\hat{B}\vec{\hat{v}} = \vec{\hat{b}} \times \vec{\hat{v}}$$

şeklinde yazılabilir. Gerçekten,

$$\hat{B}\vec{\hat{v}} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{b}_3 & \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 & 0 & -\hat{b}_1 \\ -\hat{b}_2 & \hat{b}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \left(\hat{b}_2\hat{v}_3 - \hat{b}_3\hat{v}_2, \hat{b}_3\hat{v}_1 - \hat{b}_1\hat{v}_3, \hat{b}_1\hat{v}_2 - \hat{b}_2\hat{v}_1\right)$$

$$\vec{\hat{b}} \times \vec{\hat{v}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 \\ \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \end{vmatrix} = \left(\hat{b}_2\hat{v}_3 - \hat{b}_3\hat{v}_2, \hat{b}_3\hat{v}_1 - \hat{b}_1\hat{v}_3, \hat{b}_1\hat{v}_2 - \hat{b}_2\hat{v}_1\right)$$

$$\hat{B}\vec{\hat{v}} = \vec{\hat{b}} \times \vec{\hat{v}}$$

olduğu görülür.

4.4. Dual Rodrigues Denklemi

$$\hat{X} - \hat{x} = \hat{B}\left(\hat{X} + \hat{x}\right)$$

olarak yazılabildiği görülmüştü. Bu ifade yukarıdaki özellikten

$$\vec{\hat{X}} - \vec{\hat{x}} = \vec{\hat{b}} \times \left(\vec{\hat{X}} + \vec{\hat{x}}\right)$$

formunda yazılabilir. Bu denklem Dual Rodrigues denklemi ve $\vec{\hat{b}}$ vektörü dual Rodrigues vektörüdür (Karakılıç, Gürsoy, 2011).

Bu denklemler $\vec{\hat{X}}$ ve $\vec{\hat{x}}$ yerine, bu vektörlerin $\vec{\hat{b}}$ ye dik düzleme izdüşümleri $\vec{\hat{X}}^*$ ve $\vec{\hat{x}}^*$ için de geçerlidir. Şöyle ki;

$$\begin{cases} \vec{\hat{X}} = \vec{\hat{X}}^* + \hat{\lambda}\vec{\hat{b}} \\ \vec{\hat{x}} = \vec{\hat{x}}^* + \hat{\lambda}\vec{\hat{b}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\hat{X}}^* = \vec{\hat{X}} - \hat{\lambda}\vec{\hat{b}} \\ \vec{\hat{x}}^* = \vec{\hat{x}} - \hat{\lambda}\vec{\hat{b}} \end{cases}$$

$$\hat{A}\vec{\hat{x}}^* = \hat{A}\left(\vec{\hat{x}} - \hat{\lambda}\vec{\hat{b}}\right)$$

$$=\hat{A}\vec{\hat{x}} - \hat{\lambda}\hat{A}\vec{\hat{b}}$$

$$= \hat{A}\vec{\hat{x}} - \hat{\lambda}\vec{\hat{b}}$$

$$= \vec{\hat{X}} - \hat{\lambda}\vec{\hat{b}} = \vec{\hat{X}}^*$$

Yani $\vec{\hat{X}}$ ve $\vec{\hat{x}}$ arasındaki $\vec{\hat{X}} = \hat{A}\vec{\hat{x}}$ eşitliği $\vec{\hat{X}}^*$ ve $\vec{\hat{x}}^*$ içinde geçerlidir. Dolayısıyla

$$\vec{\hat{X}}^* - \vec{\hat{x}}^* = \vec{\hat{b}} \times \left(\vec{\hat{X}}^* + \vec{\hat{x}}^*\right)$$

olur. Norm alınırsa

$$\left\|\vec{\hat{X}}^* - \vec{\hat{x}}^*\right\| = \left\|\vec{\hat{b}}\right\| . \left\|\vec{\hat{X}}^* + \vec{\hat{x}}^*\right\| . \sin\left(\sphericalangle\vec{\hat{b}}, \vec{\hat{X}}^* + \vec{\hat{x}}^*\right)$$

$$\left\|\vec{\hat{X}}^* - \vec{\hat{x}}^*\right\| = \left\|\vec{\hat{b}}\right\| . \left\|\vec{\hat{X}}^* + \vec{\hat{x}}^*\right\| . sin\frac{\pi}{2}$$

$$\left\|\vec{\hat{X}}^* - \vec{\hat{x}}^*\right\| = \left\|\vec{\hat{b}}\right\| . \left\|\vec{\hat{X}}^* + \vec{\hat{x}}^*\right\|$$

$$\left\|\vec{\hat{X}}^* - \vec{\hat{x}}^*\right\| = \left(\langle\vec{\hat{X}}^* - \vec{\hat{x}}^*, \vec{\hat{X}}^* - \vec{\hat{x}}^*\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\langle\vec{\hat{X}}^*, \vec{\hat{X}}^*\rangle - 2\,\langle\vec{\hat{X}}^*, \vec{\hat{x}}^*\rangle + \langle\vec{\hat{x}}^*, \vec{\hat{x}}^*\rangle\right)^{1/2}$$

$$= \left(\left\|\vec{\hat{X}}^*\right\|^2 - 2\left\|\vec{\hat{X}}^*\right\|\left\|\vec{\hat{x}}^*\right\| cos\hat{\theta} + \left\|\vec{\hat{x}}^*\right\|^2\right)^{1/2} , \qquad \left\|\vec{\hat{X}}^*\right\| = \left\|\vec{\hat{x}}^*\right\| = a,$$

$a > 0$

$$= \left(2a^2\left(1 - cos\hat{\theta}\right)\right)^{1/2}$$

benzer işlemlerle,

$$\left\|\vec{\hat{X}}^* - \vec{\hat{x}}^*\right\| = \left(2a^2\left(1 + cos\hat{\theta}\right)\right)^{1/2}$$

elde edilir.

$$\left\|\vec{\hat{b}}\right\| = \frac{\left\|\vec{\hat{X}}^* - \vec{\hat{x}}^*\right\|}{\left\|\vec{\hat{X}}^* + \vec{\hat{x}}^*\right\|}$$

$$= \frac{\left(2a^2\left(1 - cos\hat{\theta}\right)\right)^{1/2}}{\left(2a^2\left(1 + cos\hat{\theta}\right)\right)^{1/2}}$$

$$= \left(\frac{1 - cos\hat{\theta}}{1 + cos\hat{\theta}}\right)$$

$$= tan\frac{\hat{\theta}}{2}$$

yani

$$\left\|\vec{\hat{b}}\right\| = tan\frac{\hat{\theta}}{2}$$

dir (Karakılıç, 2010).

$$\left\|\vec{\hat{b}}\right\| = \|\vec{b}\| + \varepsilon\frac{\vec{b}\vec{b}^*}{\|\vec{b}\|}$$

ve

$$tan\frac{\hat{\theta}}{2} = tan\frac{\theta}{2} + \varepsilon\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

olduğundan

$$\|\vec{b}\| = tan\frac{\theta}{2} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\vec{b}\vec{b}^*}{\|\vec{b}\|} = \frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$\vec{\hat{b}}$ boyunca belli olan birim Rodrigues vektörü $\vec{\hat{s}}$ olmak üzere

$$\vec{\hat{s}} = \frac{\vec{\hat{b}}}{\left\|\vec{\hat{b}}\right\|}$$

olur ki buradan

$$\vec{\hat{b}} = \vec{\hat{s}}.\left\|\vec{\hat{b}}\right\| = \vec{\hat{s}}.tan\frac{\hat{\theta}}{2}$$

ve

$$\widehat{\mathrm{B}} = tan\frac{\hat{\theta}}{2}\hat{S}$$

dir (Karakılıç, Gürsoy 2011).

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{c} & \hat{b} \\ \hat{c} & 0 & -\hat{a} \\ -\hat{b} & \hat{a} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 = 1$$

alınırsa

$$\vec{\hat{s}} = \vec{s} + \varepsilon \vec{s}^* = \frac{\vec{\hat{b}}}{\left\|\vec{\hat{b}}\right\|} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} + \varepsilon\left(\frac{\vec{b}^*}{\left\|\vec{b}\right\|} - \frac{\vec{b}\left(\vec{b}\vec{b}^*\right)}{\left\|\vec{b}\right\|^3}\right)$$

bulunur.

Bir $\widehat{\mathrm{B}}$ dual anti-simetrik matrisinden bir $\widehat{\mathrm{A}}$ dual ortogonal matrisi elde edilebileceğinden ve burada $\widehat{\mathrm{B}}$ matrisi $\vec{\hat{b}}$ ile temsil edilebileceğinden

$$\hat{A} = (I + \hat{B})(I - \hat{B})^{-1}$$

$$= \left(I + \vec{\hat{b}}\right)\left(I - \vec{\hat{b}}\right)^{-1}$$

$$= \underbrace{\left(I + tan\frac{\hat{\theta}}{2}.\vec{\hat{s}}\right)}_{C}\underbrace{\left(I - tan\frac{\hat{\theta}}{2}.\vec{\hat{s}}\right)}_{D}{}^{-1}$$

$$C = \left(cos\frac{\hat{\theta}}{2}I + sin\frac{\hat{\theta}}{2}.\hat{S}\right).\frac{1}{cos\frac{\hat{\theta}}{2}}$$

yazılabilir. Burada C nin sabitleri

$$C = \left(cos\frac{\hat{\theta}}{2} + sin\frac{\hat{\theta}}{2}\hat{s}_1 + sin\frac{\hat{\theta}}{2}\hat{s}_2 + sin\frac{\hat{\theta}}{2}\hat{s}_3\right).{}^{1}\Big/_{cos\frac{\hat{\theta}}{2}}$$

$\hat{c}_0 = cos\frac{\hat{\theta}}{2}$, $\hat{c}_1 = sin\frac{\hat{\theta}}{2}\hat{s}_1$, $\hat{c}_2 = sin\frac{\hat{\theta}}{2}\hat{s}_2$, $\hat{c}_3 = sin\frac{\hat{\theta}}{2}\hat{s}_3$

dual Euler parametrelerdir.

Şimdi D^{-1} hesaplanırsa,

$$D^{-1} = \left(I - tan\frac{\hat{\theta}}{2}.\vec{\hat{s}}\right)^{-1} = \underbrace{\left(cos\frac{\hat{\theta}}{2}I - sin\frac{\hat{\theta}}{2}.\hat{S}\right)^{-1}}_{K^{-1}}.\left({}^{1}\Big/_{cos\frac{\hat{\theta}}{2}}\right)^{-1}$$

olarak yazılır ve

$K^{-1} = \left(cos\frac{\hat{\theta}}{2}I - sin\frac{\hat{\theta}}{2}.\hat{S}\right)^{-1}$ matrisi hesaplanmalıdır, burada

$$\frac{\hat{\theta}}{2} = \hat{\beta}$$

alınsın.

$$K^{-1}=\begin{bmatrix} cos\hat{\beta} & \hat{c}sin\hat{\beta} & -\hat{b}sin\hat{\beta} \\ -\hat{c}sin\hat{\beta} & cos\hat{\beta} & \hat{a}sin\hat{\beta} \\ \hat{b}sin\hat{\beta} & -\hat{a}sin\hat{\beta} & cos\hat{\beta} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$K^{-1}=\frac{1}{detK}\,[K_{ij}]^{t}\,, \qquad [K_{ij}]=(-1)^{i+j}det[k_{ij}]_{(n-1)\times(n-1)}$$

$detK$

$$= cos\hat{\beta}\left(cos^2\hat{\beta}+\hat{a}^2sin^2\hat{\beta}\right)-\hat{c}sin\hat{\beta}\left(-\hat{c}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}-\hat{a}\hat{b}sin^2\hat{\beta}\right)$$
$$-\hat{b}sin\hat{\beta}\left(\hat{a}\hat{c}sin^2\hat{\beta}-\hat{b}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}\right)$$

$$= cos^3\hat{\beta}+\hat{a}^2cos\hat{\beta}sin^2\hat{\beta}+\hat{a}^2cos\hat{\beta}sin^2\hat{\beta}+\hat{a}\hat{b}\hat{c}sin^3\hat{\beta}-\hat{a}\hat{b}\hat{c}sin^3\hat{\beta}+\hat{b}^2cos\hat{\beta}sin^2\hat{\beta}$$

$$= cos^3\hat{\beta}+\ cos\hat{\beta}sin^2\hat{\beta}\left(\hat{a}^2+\hat{b}^2+\hat{c}^2\right)$$

$$= cos^3\hat{\beta}+\ cos\hat{\beta}sin^2\hat{\beta}$$

$$=\ cos\hat{\beta}\left(cos^2\hat{\beta}+sin^2\hat{\beta}\right)$$

$=\ cos\hat{\beta}$ = det K

$$k_{11}=cos^2\hat{\beta}+\hat{a}^2sin^2\hat{\beta}$$

$$k_{12}=-\left(-\hat{c}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}-\hat{a}\hat{b}sin^2\hat{\beta}\right)=\hat{c}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}+\hat{a}\hat{b}sin^2\hat{\beta}$$

$$k_{13}=\hat{a}\hat{c}sin^2\hat{\beta}-\hat{b}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}$$

$$k_{21}=-\left(\hat{c}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}-\hat{a}\hat{b}sin^2\hat{\beta}\right)=-\hat{c}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}+\hat{a}\hat{b}sin^2\hat{\beta}$$

$$k_{22}=cos^2\hat{\beta}+\hat{b}^2sin^2\hat{\beta}$$

$$k_{23}=-\left(-\hat{a}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}-\hat{b}\hat{c}sin^2\hat{\beta}\right)=\hat{a}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}+\hat{b}\hat{c}sin^2\hat{\beta}$$

$$k_{31}=\hat{a}\hat{c}sin^2\hat{\beta}+\hat{b}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}$$

$$k_{32}=-\left(\hat{a}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}-\hat{b}\hat{c}sin^2\hat{\beta}\right)=-\hat{a}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta}+\hat{b}\hat{c}sin^2\hat{\beta}$$

$$k_{33}=cos^2\hat{\beta}+\hat{c}^2sin^2\hat{\beta}$$

$$\left((-1)^{i+j}k_{ij}\right)^{t}$$

$$= \begin{bmatrix} cos^2\hat{\beta} + \hat{a}^2 sin^2\hat{\beta} & -\hat{c}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta} + \hat{a}\hat{b}sin^2\hat{\beta} & \hat{a}\hat{c}sin^2\hat{\beta} + \hat{b}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta} \\ \hat{c}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta} + \hat{a}\hat{b}sin^2\hat{\beta} & cos^2\hat{\beta} + \hat{b}^2 sin^2\hat{\beta} & -\hat{a}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta} + \hat{b}\hat{c}sin^2\hat{\beta} \\ \hat{a}\hat{c}sin^2\hat{\beta} - \hat{b}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta} & \hat{a}sin\hat{\beta}cos\hat{\beta} + \hat{b}\hat{c}sin^2\hat{\beta} & cos^2\hat{\beta} + \hat{c}^2 sin^2\hat{\beta} \end{bmatrix}$$

$$K^{-1} = \frac{1}{detK}\left((-1)^{i+j}k_{ij}\right)^t$$

$$= \begin{bmatrix} cos\hat{\beta} + \hat{a}^2\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & -\hat{c}sin\hat{\beta} + \hat{a}\hat{b}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{a}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} + \hat{b}sin\hat{\beta} \\ \hat{c}sin\hat{\beta} + \hat{a}\hat{b}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & cos\hat{\beta} + \hat{b}^2\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & -\hat{a}sin\hat{\beta} + \hat{b}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} \\ \hat{a}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} - \hat{b}sin\hat{\beta} & \hat{a}sin\hat{\beta} + \hat{b}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & cos\hat{\beta} + \hat{c}^2\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\hat{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & cos\hat{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & cos\hat{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\hat{c}sin\hat{\beta} & \hat{b}sin\hat{\beta} \\ \hat{c}sin\hat{\beta} & 0 & -\hat{a}sin\hat{\beta} \\ -\hat{b}sin\hat{\beta} & \hat{a}sin\hat{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \hat{a}^2\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{a}\hat{b}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{a}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} \\ \hat{a}\hat{b}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{b}^2\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{b}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} \\ \hat{a}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{b}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{c}^2\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} \end{bmatrix}$$

$$= cos\hat{\beta}I + sin\hat{\beta}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\hat{c} & \hat{b} \\ \hat{c} & 0 & -\hat{a} \\ -\hat{b} & \hat{a} & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{S}} + \begin{bmatrix} \hat{a}^2\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{a}\hat{b}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{a}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} \\ \hat{a}\hat{b}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{b}^2\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{b}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} \\ \hat{a}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{b}\hat{c}\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} & \hat{c}^2\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}} \end{bmatrix}$$

$$= cos\hat{\beta}I + sin\hat{\beta}\hat{S} + \frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}}\begin{bmatrix} \hat{a}^2 & \hat{a}\hat{b} & \hat{a}\hat{c} \\ \hat{a}\hat{b} & \hat{b}^2 & \hat{b}\hat{c} \\ \hat{a}\hat{c} & \hat{b}\hat{c} & \hat{c}^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{c} & \hat{b} \\ \hat{c} & 0 & -\hat{a} \\ -\hat{b} & \hat{a} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\hat{c} & \hat{b} \\ \hat{c} & 0 & -\hat{a} \\ -\hat{b} & \hat{a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\hat{c}^2 - \hat{b}^2 & \hat{a}\hat{b} & \hat{a}\hat{c} \\ \hat{a}\hat{b} & -\hat{c}^2 - \hat{a}^2 & \hat{b}\hat{c} \\ \hat{a}\hat{c} & \hat{b}\hat{c} & -\hat{a}^2 - \hat{b}^2 \end{bmatrix}$$

$\hat{a}^2+\hat{c}^2+\hat{b}^2=1 \;\Rightarrow\; \hat{a}^2-1 \;=-\hat{c}^2-\hat{b}^2$

$\hat{a}^2+\hat{c}^2+\hat{b}^2=1 \;\Rightarrow \hat{b}^2-1 \;=-\hat{a}^2-\hat{c}^2$

$\hat{a}^2+\hat{c}^2+\hat{b}^2=1 \;\Rightarrow \hat{c}^2-1 \;=-\hat{a}^2-\hat{b}^2$

olduğundan

$$\hat{S}^2=\begin{bmatrix}\hat{a}^2-1 & \hat{a}\hat{b} & \hat{a}\hat{c}\\ \hat{a}\hat{b} & \hat{b}^2-1 & \hat{b}\hat{c}\\ \hat{a}\hat{c} & \hat{b}\hat{c} & \hat{c}^2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{a}^2 & \hat{a}\hat{b} & \hat{a}\hat{c}\\ \hat{a}\hat{b} & \hat{b}^2 & \hat{b}\hat{c}\\ \hat{a}\hat{c} & \hat{b}\hat{c} & \hat{c}^2\end{bmatrix}-I$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\hat{a}^2 & \hat{a}\hat{b} & \hat{a}\hat{c}\\ \hat{a}\hat{b} & \hat{b}^2 & \hat{b}\hat{c}\\ \hat{a}\hat{c} & \hat{b}\hat{c} & \hat{c}^2\end{bmatrix}=\hat{S}^2+I$$

$$\hat{S}^3=\begin{bmatrix}\hat{a}^2-1 & \hat{a}\hat{b} & \hat{a}\hat{c}\\ \hat{a}\hat{b} & \hat{b}^2-1 & \hat{b}\hat{c}\\ \hat{a}\hat{c} & \hat{b}\hat{c} & \hat{c}^2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\hat{c} & \hat{b}\\ \hat{c} & 0 & -\hat{a}\\ -\hat{b} & \hat{a} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\hat{a}\hat{b}\hat{c}-\hat{a}\hat{b}\hat{c} & -\hat{c}\hat{a}^2+\hat{a}^2\hat{c}+\hat{c} & \hat{b}\hat{a}^2-\hat{a}^2\hat{b}-\hat{b}\\ \hat{c}\hat{b}^2-\hat{b}^2\hat{c}-\hat{c} & \hat{a}\hat{b}\hat{c}-\hat{a}\hat{b}\hat{c} & \hat{a}\hat{b}^2-\hat{b}^2\hat{a}+\hat{a}\\ -\hat{b}\hat{c}^2+\hat{c}^2\hat{b}+\hat{b} & -\hat{a}\hat{c}^2+\hat{c}^2\hat{a}-\hat{a} & \hat{a}\hat{b}\hat{c}-\hat{a}\hat{b}\hat{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \hat{c} & -\hat{b}\\ -\hat{c} & 0 & \hat{a}\\ \hat{b} & -\hat{a} & 0\end{bmatrix}=-\hat{S}$$

$$K^{-1}=cos\hat{\beta}I+\ sin\hat{\beta}\hat{S}+\frac{sin^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}}\left(\hat{S}^2+I\right)$$

$$=\left(cos^2\hat{\beta}I+\ cos\hat{\beta}sin\hat{\beta}\hat{S}+sin^2\hat{\beta}\hat{S}^2+sin^2\hat{\beta}\right)\frac{1}{cos\hat{\beta}}$$

$$D^{-1}\quad =K^{-1}.\left({}^{1}/_{cos\hat{\beta}}\right)^{-1}$$

$$=\left(cos^2\hat{\beta}I+\ cos\hat{\beta}sin\hat{\beta}\hat{S}+sin^2\hat{\beta}\hat{S}^2+sin^2\hat{\beta}I\right)\frac{1}{cos\hat{\beta}}\left(\frac{1}{cos\hat{\beta}}\right)^{-1}$$

$$=\left(I+\ cos\hat{\beta}sin\hat{\beta}\hat{S}+sin^2\hat{\beta}\hat{S}^2\right)$$

$$D^{-1}.C=\left(I+\ cos\hat{\beta}sin\hat{\beta}\hat{S}+sin^2\hat{\beta}\hat{S}^2\right)\left(cos\hat{\beta}I+sin\hat{\beta}.\hat{S}\right).\frac{1}{cos\hat{\beta}}$$

$$=\left(cos\hat{\beta}I+sin\hat{\beta}.\hat{S}+cos^2\hat{\beta}sin\hat{\beta}\hat{S}+cos\hat{\beta}sin^2\hat{\beta}\hat{S}^2+sin^2\hat{\beta}\hat{S}^2cos\hat{\beta}+sin^3\hat{\beta}\hat{S}^3\right)\frac{1}{cos\hat{\beta}}$$

$$=I+\frac{sin\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}}.\hat{S}+cos\hat{\beta}sin\hat{\beta}\hat{S}+2sin^2\hat{\beta}\hat{S}^2+\frac{sin^3\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}}.\underbrace{\hat{S}^3}_{-\hat{S}}$$

$$= I + \frac{sin\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}}.\hat{S} + cos\hat{\beta}sin\hat{\beta}\hat{S} + 2sin^2\hat{\beta}\hat{S}^2 - \hat{S}\frac{sin^3\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}}$$

$$= I + \left(\frac{sin\hat{\beta} + cos^2\hat{\beta}sin\hat{\beta} - sin^3\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}}\right).\hat{S} + 2sin^2\hat{\beta}\hat{S}^2$$

$$= I + \left(\frac{cos^2\hat{\beta}sin\hat{\beta} + sin\hat{\beta}\left(1 - sin^2\hat{\beta}\right)}{cos\hat{\beta}}\right).\hat{S} + \left(1 - cos2\hat{\beta}\right)\hat{S}^2$$

$$= I + \left(\frac{cos^2\hat{\beta}sin\hat{\beta}+sin\hat{\beta}cos^2\hat{\beta}}{cos\hat{\beta}}\right).\hat{S} + \left(1 - cos2\hat{\beta}\right)\hat{S}^2$$

$$= I + 2cos\hat{\beta}sin\hat{\beta}\hat{S} + \left(1 - cos2\hat{\beta}\right)\hat{S}^2$$

$$\frac{\hat{\theta}}{2} = \hat{\beta}$$

dönüşümü yerine yazılırsa,

$$= I + 2cos\frac{\hat{\theta}}{2}sin\frac{\hat{\theta}}{2}\hat{S} + \left(1 - cos2\frac{\hat{\theta}}{2}\right)\hat{S}^2$$

$$\hat{A} = I + sin\hat{\theta}\hat{S} + \left(1 - cos\hat{\theta}\right)\hat{S}^2$$

olacak şekilde bir $\hat{A}$ ortogonal matrisi bulunmuş olur.

$\vec{\hat{b}}$ nin dual Rodrigues vektörü olduğu ve

$$\left\|\vec{\hat{b}}\right\| = tan\frac{\hat{\theta}}{2}$$

olduğu görüldü.

$$\left\|\vec{\hat{b}}\right\| = \|\vec{b}\| + \varepsilon\frac{\vec{b}\vec{b}^*}{\|\vec{b}\|}$$

ve

$$tan\frac{\hat{\theta}}{2} = tan\frac{\theta}{2} + \varepsilon\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

ifadelerinden

$$\|\vec{b}\| = tan\frac{\theta}{2} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\vec{b}\vec{b}^*}{\|\vec{b}\|} = \frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$\vec{\hat{b}}$ boyunca belli olan birim dual Rodrigues vektörü $\vec{\hat{s}}$ olmak üzere

$$\vec{\hat{s}} = \frac{\vec{\hat{b}}}{\left\|\vec{\hat{b}}\right\|}$$

olur ki buradan;

$$\vec{\hat{b}} = \vec{\hat{s}}.\left\|\vec{\hat{b}}\right\| = \vec{\hat{s}}.tan\frac{\hat{\theta}}{2}$$

dir.

$$\vec{\hat{s}} = \vec{s} + \varepsilon\vec{s}^* = \frac{\vec{\hat{b}}}{\left\|\vec{\hat{b}}\right\|} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} + \varepsilon\left(\frac{\vec{b}^*}{\|\vec{b}\|} - \frac{\vec{b}(\vec{b}\vec{b}^*)}{\|\vec{b}\|^3}\right)$$

bulunur, burada; $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ve $\vec{s}^* = (s_1{}^*, s_2{}^*, s_3{}^*)$ dır.

$\vec{\hat{s}}$ birim dual Rodrigues vektörü olduğundan $\left\|\vec{\hat{s}}\right\| = 1$ dir ve

$$s_1{}^2 + s_2{}^2 + s_3{}^2 = 1$$

$$s_1 s_1{}^* + s_2 s_2{}^* + s_3 s_3{}^* = 0$$

dir. Ayrıca

$$\frac{\vec{b}\vec{b}^*}{\|\vec{b}\|} = \frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

ve $\vec{s} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ olduğundan,

$$\vec{s}.\vec{b}^* = \frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$s_1 b_1{}^* + s_2 b_2{}^* + s_3 b_3{}^* = \frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

bulunur.

$$\vec{s}^* = \left(\frac{\vec{b}^*}{\|\vec{b}\|} - \frac{\vec{b}(\vec{b}\vec{b}^*)}{\|\vec{b}\|^3}\right)$$

dir. Dolayısıyla

$$s_1{}^* = \frac{b_1{}^*\|\vec{b}\|^2 - b_1(b_1b_1{}^* + b_2b_2{}^* + b_3b_3{}^*)}{\|\vec{b}\|^3}$$

$$s_2{}^* = \frac{b_2{}^*\|\vec{b}\|^2 - b_2(b_1b_1{}^* + b_2b_2{}^* + b_3b_3{}^*)}{\|\vec{b}\|^3}$$

$$s_3{}^* = \frac{b_3{}^*\|\vec{b}\|^2 - b_3(b_1b_1{}^* + b_2b_2{}^* + b_3b_3{}^*)}{\|\vec{b}\|^3}$$

denklemlerinden kolayca $b_1{}^*, b_2{}^*, b_3{}^*$ ifadeleri elde edilebilir.

$$b_1{}^* = \frac{s_1{}^*\|\vec{b}\|^3 + b_1b_2b_2{}^* + b_1b_3b_3{}^*}{\|\vec{b}\|^2 - b_1{}^2}$$

$$b_2{}^* = \frac{s_2{}^*\|\vec{b}\|^3 + b_2b_1b_1{}^* + b_2b_3b_3{}^*}{\|\vec{b}\|^2 - b_2{}^2}$$

$$b_3{}^* = \frac{s_3{}^*\|\vec{b}\|^3 + b_3b_1b_1{}^* + b_3b_2b_2{}^*}{\|\vec{b}\|^2 - b_3{}^2}$$

Reel Rodrigues parametreleri

$$b_1 = s_1 \tan\frac{\theta}{2}$$

$$b_2 = s_2 \tan\frac{\theta}{2}$$

$$b_3 = s_3 \tan\frac{\theta}{2}$$

ve

$$\|\vec{b}\| = tan\frac{\theta}{2}$$

olduğundan bu formüller yukarıdaki denklemlerde yerine yazılırsa,

$$b_1{}^* = \frac{s_1{}^* tan^3\frac{\theta}{2} + s_1 s_2 tan^2\frac{\theta}{2} b_2{}^* + s_1 s_3 tan^2\frac{\theta}{2} b_3{}^*}{tan^2\frac{\theta}{2} - s_1{}^2 tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$b_2{}^* = \frac{s_2{}^* tan^3\frac{\theta}{2} + s_2 s_1 tan^2\frac{\theta}{2} b_1{}^* + s_2 s_3 tan^2\frac{\theta}{2} b_3{}^*}{tan^2\frac{\theta}{2} - s_2{}^2 tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$b_3{}^* = \frac{s_3{}^* tan^3\frac{\theta}{2} + s_3 s_1 tan^2\frac{\theta}{2} b_1{}^* + s_3 s_2 tan^2\frac{\theta}{2} b_2{}^*}{tan^2\frac{\theta}{2} - s_3{}^2 tan^2\frac{\theta}{2}}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$b_1{}^* = \frac{s_1{}^* tan\frac{\theta}{2} + s_1 s_2 b_2{}^* + s_1 s_3 b_3{}^*}{1 - s_1{}^2} \quad (1)$$

$$b_2{}^* = \frac{s_2{}^* tan\frac{\theta}{2} + s_2 s_1 b_1{}^* + s_2 s_3 b_3{}^*}{1 - s_2{}^2} \quad (2)$$

$$b_3{}^* = \frac{s_3{}^* tan\frac{\theta}{2} + s_3 s_1 b_1{}^* + s_3 s_2 b_2{}^*}{1 - s_3{}^2} \quad (3)$$

şeklinde elde edilir.

$$s_1 b_1{}^* + s_2 b_2{}^* + s_3 b_3{}^* = \frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

denkleminden

$$b_1{}^* = \frac{\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) - s_2 b_2{}^* - s_3 b_3{}^*}{s_1} \quad (4)$$

elde edilir, (1) ve (4) denklemleri eşitlenince

$$\frac{s_1{}^* tan\frac{\theta}{2} + s_1 s_2 b_2{}^* + s_1 s_3 b_3{}^*}{1 - s_1{}^2} = \frac{\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) - s_2 b_2{}^* - s_3 b_3{}^*}{s_1}$$

$$\left(s_1{}^* tan\frac{\theta}{2} + s_1 s_2 b_2{}^* + s_1 s_3 b_3{}^*\right) s_1 = \left(\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) - s_2 b_2{}^* - s_3 b_3{}^*\right)(1 - s_1{}^2)$$

$s_1 s_1{}^* tan\frac{\theta}{2} + s_1{}^2(s_2 b_2{}^* + s_3 b_3{}^*) = (1 - s_1{}^2)\left(\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)\right) - s_2 b_2{}^* - s_3 b_3{}^* +$
$s_1{}^2(s_2 b_2{}^* + s_3 b_3{}^*)$

$$s_2b_2{}^* + s_3b_3{}^* = (1 - s_1{}^2)\left(\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)\right) - s_1s_1{}^*tan\frac{\theta}{2} \quad (5)$$

bulunur. (2) denkleminde, $b_1{}^*$ yerine (4) denklemindeki değeri yazılırsa,

$$b_2{}^* = \frac{s_2{}^*tan\frac{\theta}{2} + s_2s_1\left(\frac{\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) - s_2b_2{}^* - s_3b_3{}^*}{s_1}\right) + s_2s_3b_3{}^*}{1 - s_2{}^2}$$

$$b_2{}^* = \frac{s_2{}^*tan\frac{\theta}{2} + s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) - s_2{}^2b_2{}^* - s_2s_3b_3{}^* + s_2s_3b_3{}^*}{1 - s_2{}^2}$$

$$b_2{}^* - b_2{}^*s_2{}^2 = s_2{}^*tan\frac{\theta}{2} + s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) - s_2{}^2b_2{}^*$$

$$b_2{}^* = s_2{}^*tan\frac{\theta}{2} + s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (6)$$

elde edilir. (6) denklemi (5) te yerine yazılırsa,

$$s_2\left(s_2{}^*tan\frac{\theta}{2} + s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)\right) + s_3b_3{}^*$$
$$= (1 - s_1{}^2)\left(\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)\right) - s_1s_1{}^*tan\frac{\theta}{2}$$

$$s_2s_2{}^*tan\frac{\theta}{2} + s_2{}^2\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) + s_3b_3{}^*$$
$$= (1 - s_1{}^2)\left(\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)\right) - s_1s_1{}^*tan\frac{\theta}{2}$$

$$b_3{}^* = \frac{(1 - s_1{}^2 - s_2{}^2)\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right)(-s_1s_1{}^* - s_2s_2{}^*)tan\frac{\theta}{2}}{s_3}$$

$$b_3{}^* = \frac{s_3{}^2\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) + s_3s_3{}^*tan\frac{\theta}{2}}{s_3}$$

$$b_3{}^* = s_3{}^*tan\frac{\theta}{2} + s_3\frac{\theta^*}{2}\left(1 + tan^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (7)$$

olur, son olarak (7) ile (6) denklemleri, (2) denkleminde yerine konulursa

$$s_2{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{s_2{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_2s_1b_1{}^*+s_2s_3\left(s_3{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_3\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)\right)}{1-s_2{}^2}$$

$$s_2{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)-s_2{}^2s_2{}^*tan\frac{\theta}{2}-s_2{}^3s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=s_2{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_2s_1b_1{}^*+s_2s_3s_3{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_2s_3{}^2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$s_2s_1b_1{}^*=-s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)\underbrace{(s_2{}^2+s_3{}^2)}_{1-s_1{}^2}+s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)+s_2tan\frac{\theta}{2}\underbrace{(-s_2s_2{}^*-s_3s_3{}^*)}_{s_1s_1{}^*}$$

$$=-s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)(1-s_1{}^2)+s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)+s_1s_1{}^*s_2tan\frac{\theta}{2}$$

$$=-s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)+s_1{}^2s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)+s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)+s_1s_1{}^*s_2tan\frac{\theta}{2}$$

$$=s_1{}^2s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)+s_1s_1{}^*s_2tan\frac{\theta}{2}$$

$$b_1{}^*=s_1{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_1\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)\quad(8)$$

bulunur ki, dual Rodrigues parametreleri (6), (7), (8) denklemlerinde bulunan $b_1{}^*$, $b_2{}^*$, $b_3{}^*$ ifadeleridir.

$$b_1{}^*=s_1{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_1\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$b_2{}^*=s_2{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_2\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$b_3{}^*=s_3{}^*tan\frac{\theta}{2}+s_3\frac{\theta^*}{2}\left(1+tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

5. EULER SABİT NOKTA TEOREMİNİN DUAL UZAYA UYGULANIŞI

Bu bölümde Euler sabit nokta teoremi dual ortogonal matrisler için verilecek ve Euler sabit nokta teoremi yardımıyla uzaysal hareketin vida ekseni bulunacaktır.

5.1. Euler Sabit Nokta Teoremi

Eğer A, $A^tA = = AA^t = I$ ve $\det A = +1$ şartlarını sağlayan 3×3 tipinden dual ortogonal bir matris ise o zaman $A\vec{v}=\vec{v}$ şartını sağlayan sıfırdan farklı bir $\vec{v}$ vektörü vardır (Palais ve Palais, 2007).

5.2. Dual Euler Sabit Nokta Teoremi

Eğer $\widehat{A}$, $\widehat{A}^t\widehat{A} = = \hat{A}\hat{A}^t = I$ ve $\det\hat{A} = +1$ şartlarını sağlayan 3×3 tipinden dual ortogonal bir matris ise o zaman $\hat{A}\vec{\hat{v}}=\vec{\hat{v}}$ şartını sağlayan sıfırdan farklı bir $\vec{\hat{v}}$ vektörü vardır.

$\widehat{A}$ dual ortogonal matrisi için $\widehat{B} = \frac{1}{2}\left(\hat{A} - \hat{A}^t\right)$ dual anti-simetrik matris ise, $\widehat{A}$ tarafından sol invaryant bırakılan vektör $\vec{\hat{v}}=(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ dir. $\widehat{A}$ nın tanımından $\widehat{A}\widehat{B}\hat{A}^t=\widehat{B}$ dir.

$\widehat{A}\widehat{B}\hat{A}^t=\widehat{A}\widehat{B}\hat{A}^{-1} = \widehat{B}$ nın $\widehat{A}\vec{\hat{v}}=\vec{\hat{v}}$ ye eşit olduğunu görmek için, ID^3 ile 3×3 dual anti-simetrik matrisler cümlesi arasındaki izomorfizmayı kullanarak

$$\widehat{B}_{\vec{\hat{v}}}=\begin{bmatrix} 0 & -\hat{v}_3 & \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 & 0 & -\hat{v}_1 \\ -\hat{v}_2 & \hat{v}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi yazılabilir. Bu matris,

$$\forall\overrightarrow{\hat{w}} \in ID^3 \; için \qquad \widehat{B}_{\vec{\hat{v}}}\left(\overrightarrow{\hat{w}}\right) = \vec{\hat{v}} \times \overrightarrow{\hat{w}}$$

$\hat{v}$ ile vektörel çarpımından elde edilmiş matristir. Vektörel çarpım işlemi ile herhangi bir $\widehat{A}$ dönme matrisi altında çarpım invaryant kalır. Yani,

$$\widehat{A}(\vec{\hat{v}} \times \overrightarrow{\hat{w}}) = \hat{A}\vec{\hat{v}} \times \hat{A}\overrightarrow{\hat{w}}$$

dir.

$\widehat{\mathrm{B}}$ dönüşümünde

$$\widehat{B}_{\hat{A}\vec{\hat{v}}}\left(\hat{A}\overrightarrow{\widehat{w}}\right) = \hat{A}\,\widehat{B}_{\vec{\hat{v}}}\left(\overrightarrow{\widehat{w}}\right)$$

ya da

$$\widehat{B}_{\hat{A}\vec{\hat{v}}}\hat{A} = \hat{A}\,\widehat{B}_{\vec{\hat{v}}}$$

Buradan

$$\widehat{B}_{\hat{A}\vec{\hat{v}}} = \hat{A}\,\widehat{B}_{\vec{\hat{v}}}\hat{A}^{-1}$$

elde edilir. Buradan açıktır ki

Bir $\vec{\hat{v}}$ vektörü, bir $\hat{A}$ dönme(rotasyon) matrisi altında sabittir, ancak va ancak, anti-adjoint matris $\widehat{B}_{\vec{\hat{v}}}$, $\hat{A}$ konjugasyonu altında sabittir.

$\widehat{B} = 0$ ise, bazı dual ortogonal matrislerin –simetrik matris olanlar- ölçümleri sıfırdır ve 0 ve π dönme açılarına karşılık gelir. Bu durumda,

$\hat{A} = \hat{A}^t$ ve buradan $\hat{A}^2 = I$ dır. Dahası $\hat{A}\left(I + \hat{A}\right) = \hat{A} + \hat{A}^2 = I + \hat{A}$ dır bu yüzden $I + \hat{A}$ nın sütunları sabitlenmiştir. $\hat{A} \neq 0$ olduğu için $(\det\hat{A} = +1)$, $\hat{A} \neq -I$ dır. Bu nedenle $I + \hat{A}$ nın, $\hat{A}$ ile sabitlenmiş bir sıfırdan farklı sütunu vardır.

Örnek

Eğer $\hat{A} = \hat{A}_{\hat{\theta}} = \begin{bmatrix} \cos\hat{\theta} & 0 & -\sin\hat{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\hat{\theta} & 0 & \cos\hat{\theta} \end{bmatrix}$ rotasyon matrisi y ekseni etrafında, $\hat{\theta}$ açısıyla bir dönme ise

$$\widehat{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left(\hat{A} - \hat{A}^t\right)$$

olduğundan

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\hat{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin\hat{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{\hat{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -sin\,\hat{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eğer $\hat{\theta}$, 0 ve π değilse y-ekseni dönmenin sabit bıraktığı eksendir. Eğer $\hat{\theta} = 0$ ise, $\hat{A} = I$ olur ve her vektör sabit kalır, eğer $\hat{\theta} = \pi$ ve $\vec{\hat{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ise $\hat{A} + I$ ifadesi bulunur ve $\vec{\hat{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ olur ki tekrar y-ekseni sabit kalır.

5.3. Dual Uzayda Vida Ekseni

$Ac + d = c$ denklemindeki c noktalarıyla belli olan eksene vida ekseni denir. $(I - A)c = d$ dir. Bu denklemin çözümü için, Ab=b denkleminin (ω dönme ekseni) ω ya dik düzlem üzerinde izdüşüm vektörü d^* olsun. Bu düzlemsel harekette c polüne karşılık gelir. Bunun anlamı b etrafında dönme ve b ye dik düzlemde ötelemedir.

d yerine d^* vektörü de kullanılabilir. O halde

$$(I - A)c = d^*$$

A matrisi yerine Cayley formülündeki karşılığı kullanılır ve her iki taraf $(I - B)$ ile çarpılırsa

$$Bc = -\tfrac{1}{2}(d^* - b \times d^*) \text{ , } \langle b, c \rangle = 0$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{b \times d^*}{\langle b, b \rangle} + d^*\right)$$

elde edilir.

$\|d - d^*\| = \frac{|\langle d, \omega \rangle|}{\|\omega\|}$ vida ekseni boyunca öteleme miktarıdır.

$\vec{x}$, $\vec{b}$ etrafında θ açısı kadar döndürülüp ve $\vec{b}$ doğrultusunda d, $\|d - d^*\|$ kadar ötelenirse X elde edilir.

$$X = Ax + d$$

$\hat{A} = A + \varepsilon DA$ dual ortogonal matris olmak üzere,

$$\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{A}^t)$$

$\vec{\widehat{w}} = \vec{w} + \varepsilon\vec{w}^*$

$\hat{A}\vec{\widehat{w}} = \vec{\widehat{w}}$

$(A + \varepsilon DA)(\vec{w} + \varepsilon\vec{w}^*) = \vec{w} + \varepsilon\vec{w}^*$

$A\vec{w} = \vec{w}$

$A\vec{w}^* + DA\vec{w} = \vec{w}^*$

$(I - A)\vec{w}^* = DA\vec{w}\ , \quad \mathrm{A}\vec{w} = \vec{w}$

$(I - A)\vec{w}^* = D\vec{w}\ , \quad D\vec{w} = \vec{d} \times \vec{w}, \quad \langle D\vec{w}, \vec{w}\rangle = \langle \vec{d} \times \vec{w}, \vec{w}\rangle = 0$

Cayley formülü yardımıyla

$$\vec{w}^* = \frac{1}{2}\left[\frac{\vec{w} \times D\vec{w}}{\langle\vec{w}, \vec{w}\rangle} + D\vec{w}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\vec{w}\times(\vec{d}\times\vec{w})}{\langle\vec{w},\vec{w}\rangle} + \vec{d} \times \vec{w}\right] = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\vec{d} - \frac{\langle\vec{d},\vec{w}\rangle\vec{w}}{\langle\vec{w},\vec{w}\rangle}}_{\vec{d}^*} + \vec{d} \times \vec{w}\right], \vec{d}^* \times \vec{w} = \vec{d} \times \vec{w}$$

$\vec{w}^* = \frac{1}{2}\left[\vec{d}^* + \frac{\vec{d}^*\times\vec{w}}{\langle\vec{w},\vec{w}\rangle}\right]$,

$\vec{\widehat{w}} = \vec{w} + \varepsilon\vec{w}^*$, $\langle\vec{w}, \vec{w}^*\rangle = 0$ dual vektörüne karşılık gelen doğrudur.

NOT: Buradan $\vec{d}^*$ vektörü, d vektörünün normali w olan düzleme dik izdüşüm vektörüdür.

$$\vec{\widehat{w}}_0 = \frac{\vec{\widehat{w}}}{\|\vec{w}\|} = \left(\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} + \varepsilon\ \frac{\vec{w}^*}{\|\vec{w}\|}\right)$$

$$c = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \times \frac{\vec{w}^*}{\|\vec{w}\|}$$

noktasından geçen $\vec{w}$ vektörünü doğrultman vektörü kabul eden screw eksen $c + t\vec{w}$ elde edilir.

Örnek:

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\hat{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} + \varepsilon \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

$\hat{A} = \begin{bmatrix} -3\varepsilon & -1 & 2\varepsilon \\ 1 & -3\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & 2\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$, $\quad d = (1,2,3)$, f(x)=Ax+d hareketi için vida eksenini bulalım

$\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{A}^t)$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} -3\varepsilon & -1 & 2\varepsilon \\ 1 & -3\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & 2\varepsilon & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\varepsilon & -1 & -\varepsilon \\ 1 & 3\varepsilon & -2\varepsilon \\ -2\varepsilon & \varepsilon & -1 \end{bmatrix}\right]$$

$\hat{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & \varepsilon \\ 2 & 0 & -3\varepsilon \\ -\varepsilon & 3\varepsilon & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \vec{\hat{w}} = (\frac{3}{2}\varepsilon,\ \frac{\varepsilon}{2},\ 1)$

$\vec{\hat{w}} = (0,0,1) + \varepsilon\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \vec{\hat{w}}_0$

$\vec{c} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$

$\vec{w} = (0,0,1)$

Eksen $c + t\vec{w}$, $\vec{d}$ nin $\vec{w}$ üzerindeki izdüşüm vektörü $\vec{d}^* = (1,2,0)$ olduğundan

$Ac + \vec{d}^* = c$ sağlanır.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{d} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{X}$$

$\vec{d} - \vec{d}^* = (0,0,3) = \overrightarrow{ds}$, $\vec{d}^* = (1,2,0)$, $\vec{s} = \vec{w} = (0,0,1)$, $\vec{c} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$

ifadelerine karşılık gelen vida eksenini bulalım

$\overrightarrow{cx} = \vec{x} - \vec{c} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$A(\overrightarrow{cx}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$

$A(\overrightarrow{cx}) + \overrightarrow{ds} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) + (0,0,3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 4\right)$

$\overrightarrow{cX} = \vec{X} - \vec{c} = (0,3,4) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 4\right)$

$\overrightarrow{cX} = A(\overrightarrow{cx}) + \overrightarrow{ds}$

Örnek:

$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $d^* = (1,1,0)$ iken

$Ac + d^* = c$

olacak şekildeki vida eksenini bulalım

$\hat{A} - \hat{A}^t = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & -1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & 1 \end{bmatrix} = \hat{A}$$

$$\hat{A} + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

$\hat{A}\vec{\hat{x}} = \vec{\hat{x}}$

$$\vec{\hat{x}} = (\varepsilon, -\varepsilon, 2)$$

$\vec{\hat{x}} = (0,0,2) + \varepsilon(1, -1,0)$

$= \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^{*}, \quad \|\vec{x}\| = 2$

$\frac{\vec{\hat{x}}}{\|\vec{\hat{x}}\|} = \frac{1}{2}[(0,0,2) + \varepsilon(1, -1,0)]$

$= (0,0,1) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

$\vec{c} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 + 1 \\ -1/2 + 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A\vec{c} + d^{*} = \vec{c}$ olduğu görülmüş olur.

KAYNAKLAR

Alperin, R., 1989. The matrix of a rotation. ***College Math***. ***J***. 20: 230.

Boothby, W. M., 2003. ***An Introduction to Differantiable Manifolds and Riemann Geometry***. Academik Press, California, USA.

Bottema, O., Roth, B., 1979. ***Theorical Kinematics***. North-Holland Publishing Company, Amsterdam. 557.

Caccavale, F,. 1999. The Role of Euler Parameters in Robot Control. ***Asian Journal of Control,*** Vol1(1):25-34.

Casselman, B., 2005. ***A Manual of Geometry and PostScript***. Cambridge Univ. Pres.

Hacısalihoğlu, H.H., 1983. ***Hareket Geometrisi ve Quaterniyonlar Teorisi***. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No:2

Hacısalihoğlu, H.H., 2010. ***Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler***. Bilecik Üniversitesi Yayınları. No:1

Kalman, D., 1989. The Axis of a Rotation: Analysis, Algebra, Geometry. ***Math. Mag***. 62

Karakılıç, İ., 2010. The Dual Rodrigues Parameters. ***Internatıonal Journal of Engineering and Applied Sciences***, Vol 2(2): 23-32.

Karakılıç, İ., Gürsoy, A. E., 2011. The Dual Exponential Mapping on Dual Rotations. ***Scientific Research and Essay,*** Vol 6(22): 4297-4792.

Karakılıç, İ., Gürsoy, A. E., 2011. Expression of Dual Euler Parameters Using the Dual Rodrigues Parameters and Their Application to Screw Transformation. ***Mathematical and Computational Applications,*** Vol 16(3): 680-689.

McCarthy, J. M., 1990. ***An Introduction to Theoretical Kinematics***. The MIT Press Cambridge, Massachusetts London. England. 130.

Palais, B., Palais, R., 2007. Euler's Fixed Point Theorem The Axis of a Rotation. ***J. Fixed Point Theory Appl.***, 215-220.

Palais B., Palais R., Rodi S., 2009. A Disorienting Look at Euler's Theorem on the Axis of a Rotation. ***The Mathematical Association of America***, December, 892-909.

Schilling, R. J., 1990. ***Fundamentals of Robotics***. Prentice Hall, New Jersey. 425.

ÖZ GEÇMİŞ

30/04/1987 tarihinde Ahlat'ta doğdu. İlköğrenimini Muş Eko İnşaat İlkokulu'nda, orta öğrenimini Muş Anadolu Lisesi'nde, lise öğrenimini Van Özel Serhat Fen Lisesi'nde, yükseköğrenimini Kocaeli Üniversitesi'nde tamamladı. 2011 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi'nde Yüksek Lisans öğrenimine başladı.