T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALTMANİFOLDLARIN ASLİ EĞRİLİKLERİ VE JOACHIMSTHAL TEOREMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Tahir DEMİR
DANIŞMAN : Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

VAN-2013

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALTMANİFOLDLARIN ASLİ EĞRİLİKLERİ
VE
JOACHIMSTHAL TEOREMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Tahir DEMİR

VAN-2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ danışmanlığında, Tahir DEMİR tarafından sunulan " Altmanifoldların Asli Eğrilikleri ve Joachimsthal Teoremi " isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 14/08/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ İmza:

Üye: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Süleyman EDİZ İmza: Ediz

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…./…... tarih ve .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

…………….…………

Enstitü Müdürü

ÖZET

ALTMANİFOLDLARIN ASLİ EĞRİLİKLERİ VE JOACHIMSTHAL TEOREMİ

DEMİR, Tahir
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ
2013, 67 Sayfa

Bu çalışmada, altmanifold olan bir yüzeyin eğriliği kavramı ele alınarak tüm gerekli incelemeler yapılmıştır ve eğrilik kavramlarıyla bağlantılı olan teoremlerden Joachimsthal teoremi ve örnekleri verilmiştir. Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamız için gerekli olan tanım ve kavramlar ele alınmıştır. Bununla birlikte diferensiyellenebilir manifold örnekleri verilmiştir. Üçüncü bölümde Şekil operatörünün(Weingarten dönüşümü) tanımı verilmiş ve Şekil operatörü ile ilgili teoremler ispatıyla birlikte verilmiştir. Dördüncü bölümde Gauss dönüşümünün tanımı ve Şekil operatörü ile arasındaki ilişki aktarılmıştır. Beşinci bölümde Şekil operatörünün(Weingarten dönüşümü) matrisinin hesabı verilmiş ve örnekler çözülmüştür. Altıncı bölüme Temel formlar için genel tanım verilip I. ve II. Temel formların çıkarılışı verilmiştir. Yedinci bölümde Şekil operatörünün(Weingarten dönüşümü) cebirsel değişmezlerinin tanımları verilmiştir. Bu cebirsel değişmezlerin taban seçiminden bağımsız oldukları verilmiştir. Cebirsel değişmezlerle ilgili teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir. Sekizinci bölümde Joachimsthal teoremi ve ispatı verilmiştir. Joachimsthal teoremi ile ilgili örnekler çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Şekil operatörü, Asli eğrilikler, Asli eğrilik çizgileri, Joachimsthal teoremi.

ABSTRACT

PRINCIPAL CURVATURES OF SUBMANIFOLDS
AND
JOACHIMSTHAL THEOREM

DEMİR, Tahir
Msc Thesis, Department of Mathematic
Supervisor: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

2013, 67 Pages

In this study, it is investigated curvature of a surface which is submanifold. One of the theorems about curvature, Joachimsthal theorem and its examples is given. This thesis is consisted eight sections. The first section is informated about the studies, as introductions. In second section, it is given the required definitions and concepts. However it is given differantiable manifold examples. In third section, it is given Weirgarten transformation definition and proofs of the theorems about shift operator. In fourth section, it is transfered relations between Gauss transformation definition and shift operators. In fifth section, it is solved shift operator (Weingarten transformation) matrix calculation its examples. In sixth section, it is given fundamental definition and the rising of I-II Fundamental forms. In seventh section it is given the definitions of algebratic constants of shift operator. It is shown that this algebratic constant are independence from chosen bases. It is given theorems about algebratic constants with their proofs. In the eighth section Joachimstal theorem and its proof is given and examples solved about it.

Key words: Shift operator(Weingarten transformation), Principal curvatures, Principal curvature lines, Joachimsthal theorem.

.

ÖN SÖZ

Bu çalışmanın yapılması fikrinden gerçekleşmesine kadar görüş, düşünce, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Bülent Karakaş'a ve tez çalışmamın her aşamasında; bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, her konuda büyük desteğini gördüğüm hocam Doç. Dr. Şenay Baydaş'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bugünlere gelmemde maddi ve manevi hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Tahir DEMİR

2013

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

M^n	: Topolojik manifold
$T_M(p)$	: M nin p noktasındaki tanjant uzayı
$C^\infty(M, IR)$	: Diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
$\chi(M)$	: M üzerindeki vektör alanlarının cümlesi
$X(f) = X[f]$	: f nin X yönündeki türevi
D	: Kovaryant türev operatörü
k_i	: i- yinci eğrilik
$B_0(1)$	: Sıfır merkezli 1 yarıçaplı açık yuvar
$S(X)$	: Şekil operatörü
S^{n-1}	: $n-1$ boyutlu birim hiperküre
η_*	: Gauss dönüşümünün jakobiyeni
$I^q(X,Y)$	: q. Temel form
κ_n	: Normal eğrilik
Κ	: Gauss eğrilik dönüşümü
H	: Ortalama eğrilik dönüşümü
Α α	: Alfa
Β β	: Beta
Γ γ	: Gamma
Η η	: Eta
Λ λ	: Lamda
Τ τ	: To
Φ φ	: Fi
X χ	: Ki
Ψ ψ	: Psi

1. GİRİŞ

Bu çalışma çerçevesinde, öncelikle çalışma ile ilgili tanım ve kavramlar ifade edilecek daha sonra Şekil operatörü, Gauss dönüşümü ve E^3 te herhangi bir yüzey için Weingarten dönüşümünün matrisinin hesabı verilecektir. Temel formlar, Gauss ve Ortalama eğrilik fonksiyonları verilecektir.

Asli eğrilikler ve asli eğrilik çizgileri ele alınarak, Joachimsthal teoremi ve bu teoremle ilgili örnekler aktarılacaktır.

Eğriler için eğrilik ölçümü eğrinin normali ile tanımlanır. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) 1827 de yazdığı, çığır açan "Disguistions Generals Cırca Supericies Curvas" (Worke, Vol. 4, pp. 27-58) isimli yayını ile eğrilik ölçümünü yüzeylere genellemiştir.

Ferdinand Joachimsthal (1818-1861) temel katkılarda bulunduğu yüzeyler teorisi üzerine, özellikle de ikinci derece yüzeyler ve konik kesitlerin normalleri problemi üzerine yazmıştır.

Joachimsthal teoremi 1870 yılında, Béghin tarafından "Note Sur le Cercle de Joachimsthal" ismiyle Fransızca olarak yayınlanmıştır. Raffy, L., (1903) "Determination Des Surfaces de Joachimsthal á Courbures Principales Liées Par Une Relation" Fransızca yazılmış yayınında Joachimsthal teoremlerini çalışmıştır. Bu iki yayın daha sonra İngilizceye çevrilerek Joachimsthal teoremlerini çalışanlar için kaynak olmuştur.

Baros ve ark. (2012), Öklidyen küre içine dönmeli lineer Weingarten yüzeyleri çalışmışlardır. Bu çalışmada Öklidyen küre S^3 te tüm dönmeli lineer Weingarten yüzeylerinin tamamlayıcı bir tanımını vermiş ve bu yüzeyleri $aH + bK = c$ (H,K Gauss eğrilikleri, a,b,c sabit) ile karakterize etmişlerdir.

Kaya ve ark. (2010), silindirik helis şeritleri çalışmışlardır. Bu çalışmada yeni tanım ve karakterizasyon verilmiştir. Genel helis ve Terquem teoremlerinin (herhangi iki yüzey arasındaki uzaklığın sabit olmasıyla ilgili Joachimsthal teoremlerinden biri) karakterizasyonlarından yararlanılmıştır.

Keleş (1982), Manifoldlar için Joachimsthal teoremlerini, eğrilik şeridlerini kullanarak çalışmıştır.

Kızıltuğ ve ark. (2013), E^3 te Weingarten tiplerinin Tip-2 Bishop çatısıyla tüp yüzeylerini çalışmışlardır. Bu çalışmada E^3 teki Frenet çatısı yerine Tip-2 Bishop çatısıyla tüp yüzeyleri çalışılmıştır.

Masal'tsev (2000) S^3 te Joachimsthal yüzeyleri çalışmıştır.

Tunçer (2008), L^3de altmanifoldların diferensiyel geometrisi ve kinematiği üzerine ve Tunçer ve ark. (2008) Öklid altmanifoldlar üzerine çalışmışlardır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanım(Topoloji): $X \neq \emptyset$ bir cümle ve X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir *topoloji* adını alır.

T_1) $X, \emptyset \in \tau$

T_2) $A_i, A_j \in \tau \rightarrow A_i \cap A_j \in \tau$

T_3) $A_i \in \tau$, $\bigcup_i A_i \in \tau$

(X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir (Hacısalihoğlu, 1994).

2.2. Tanım(Hausdorff uzayı): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için X de sırasıyla P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak şekilde bulunabilirse X topolojik uzayına bir *Hausdorff uzayı* denir (Hacısalihoğlu, 1994).

2.3. Tanım(Homeomorfizm): $(X, \tau), (Y, \tau')$ iki topolojik uzay olsun. Bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve f^{-1} var ve sürekli ise f ye X den Y ye bir *homeomorfizm* denir (Hacısalihoğlu, 1994).

2.4. Tanım(Açık örtü): M^n bir $n-$boyutlu topolojik manifold ve M^n nin açık alt cümlelerinin numaralanmış bir cümlesi $V = \{V_a\}$ olsun. Eğer M^n nin her noktası için bu noktayı ihtiva eden en azından bir V_a var ve $\cup V_a = M^n$ ise V ye M^n nin bir *açık örtüsü* denir (Brickell ve Clark,1970).

2.5. Tanım(Topolojik manifold): Bir topolojik uzay,

1) Hausdorff uzayıdır,

2) Her noktası E^n in bir açık alt cümlesine homeomorfik olan bir komşluğa sahiptir,

3) Topolojik uzay sayılabilir çoklukta açık örtüyle örtülebilir,

özelliklerine sahip ise n-boyutlu *topolojik manifold* olarak adlandırılır. M^n şeklinde gösterilir (Brickell ve Clark,1970).

2.6. Tanım(Diferensiyellenebilir manifold): Bir topolojik manifold üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı var ise bu topolojik manifolda, bu yapıyla birlikte bir *diferensiyellenebilir manifold* denir (Brickell ve Clark,1970).

$V = \{V_a\}$ açık örtüsü verildiğinde, herbir V_a için V_a yı E^n nin bir U_a sına irtibatlandıran bir de Φ_a homeomorfizmi vardır. Böylece

$$A = \{(V_a, \Phi_a):\ \Phi_a: V_a \to U_a\}$$

koleksiyonu elde edilir. A koleksiyonundaki herbir (V_a, Φ_a) ikilisine M^n için *koordinat dönüşümü* veya *harita* denir. A koleksiyonundaki herhangi iki $(V_a, \Phi_a), (V_\beta, \Phi_\beta)$ haritaları için, $V_a \cap V_\beta \neq \emptyset$ iken,

$$\Phi_a o \Phi_\beta{}^{-1}: \Phi_\beta(V_a \cap V_\beta) \to \Phi_a(V_a \cap V_\beta)$$

bileşke dönüşümleri r −mertebeden diferensiyellenebilir ise $A = \{(V_a, \Phi_a)\}$ koleksiyonuna M^n için *diferensiyellenebilir atlas* denir (Brickell ve Clark,1970).

2.7. Tanım(Relatif topoloji): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $Y \subseteq X$ olmak üzere $\forall A_i \epsilon\ \tau$ için $Y \cap A_i$ ler açık ise Y ye X ten indirgenmiş *relatif topoloji* denir (Hacısalihoğlu, 1994).

2.8. Tanım(Yüzey): $x: G \to \zeta$, $G = \{(u, v)\} \subset IR^2$ kapalı dikdörtgen bölge parametrik temsili verildiğinde

1) x, G üzerinde birebirdir,

2) x, G üzerinde $s > 1$ sınıfındandır,

3) $rank \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2, \forall p \epsilon G$ dir,

şartları sağlanıyorsa x e s-sınıfından kabul edilebilir bir temsil denir. Bu durumda (x, G, IR^3) veya $x\ (G) \subset IR^3$ bir *regüler yüzey* denir (Carmo, 1976).

$$x = x(u, v)$$

olmak üzere,

u ve v parametreleri bağımsız olmalıdır. Bu durum da,

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı 2 dir. Rankı 1 veya 0 olan noktalara singüler nokta denir. Rank tüm noktalarda 1 ise $x = x(u, v)$ bir eğri tanımlar.

Mesela,

$$x = u + v$$

$$y = (u + v)^2$$

$$z = (u + v)^3$$

için ilgili matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2(u+v) & 3(u+v)^2 \\ 1 & 2(u+v) & 3(u+v)^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve rank 1 dir.

Bir yüzey

$$(u + v,\ \ u + v,\ \ uv)$$

olarak verilmiş olsun.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & v \\ 1 & 1 & u \end{bmatrix}$$

$$x_u z_v - z_u x_v = u - v \neq 0$$

den rank 2 dir. Bu bir düzlemdir.

Bir diğer örnek olarak,

$$x = r\cos\theta\cos\varphi$$

$$y = r\cos\theta\sin\varphi$$

$$z = r\sin\theta$$

küre yüzeyini ele alalım.

$$\begin{bmatrix} -r\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta \\ -r\cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ için tek bir singüler nokta (kutup) vardır.

u veya v yi sabit aldığımız her keresinde elde edilen eğriye *parametre eğrisi* denir. (Carmo, 1976).

2.9. Tanım(Hiperyüzey): Bir $(n-1)$-boyutlu diferensiyellenebilir manifold $\bar{M}$ olmak üzere,

$$f: \bar{M} \to E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ve her $p \in \bar{M}$ için

$$(f_*)_p: T_{\bar{M}}(p) \to T_{E^n}\big(f(p)\big)$$

türev dönüşümü birebir ise $f(\bar{M}) = M$ manifolduna E^n nin bir $(n-1)$-altmanifoldu veya *hiperyüzeyi* denir (Hicks, 1974).

2.10. Tanım(Tanjant vektör ve tanjant uzay): Bir diferensiyellenebilir manifold *M*, *M* den *IR* ye bütün diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M, IR)$ ve $p\epsilon M$ olmak üzere

$$X_P : C^\infty(M, IR) \to IR$$

fonksiyonu, her $f, g\epsilon C^\infty(M, IR)$ ve her $a, b\ \epsilon IR$ için,

1) $X_p(af + bg) = a(X_p f) + b(X_p g)$,

2) $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$,

özelliklerini sağlıyor ise bu fonksiyona *M* nin *p* noktasındaki bir *tanjant vektörü* denir. Bu biçimde tanımlı fonksiyonların cümlesi $T_M(p)$ ile gösterilirse, her $X_p, Y_p \epsilon T_M(p)$ her $f\epsilon C^\infty(M, IR)$ ve her $a\epsilon IR$ için

$$(X_p \oplus Y_p)(f) = X_p f + Y_p f$$

$$(a \odot X_p)(f) = aX_p f$$

işlemleriyle birlikte $T_M(p)$, *IR* üzerinde bir vektör uzayı olup, *M* nin *p* noktasındaki *tanjant uzayı* adını alır (Matsushima, 1972).

2.11. Tanım(Vektör alanı): M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$X : M \xrightarrow{1-1,\ \ddot{o}rten} \cup_{p\epsilon M} T_M(p)$$

$$p \to X_p \epsilon T_M(p)$$

biçiminde tanımlı *X* dönüşümüne *M* manifoldu üzerinde bir *vektör alanı* denir. Bir *M* manifoldu üzerindeki vektör alanlarının cümlesi χ(*M*) ile gösterilir.

$\forall X, Y \ \epsilon\ \chi(M)\ ,\ \ a\ \epsilon\ IR\ ve\ p\ \epsilon\ M$ için

$$(X \oplus Y)(p) = X_p + Y_p$$

$$(a \odot X)(p) = aX_p$$

işlemleriyle birlikte χ(*M*) cümlesi *IR* üzerinde bir vektör uzayıdır (Matsushima, 1972).

2.12. Tanım(Yöne göre türev): $X\epsilon\ \chi(E^n)$ ve $f\ \epsilon\ C^\infty(\ E^n, IR)$ olsun.
$X = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olmak üzere

$$X(f) = X[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i$$

fonksiyonuna, f nin *X yönündeki türevi* denir (Hacısalihoğlu, 1994).
E^n de bir C^∞ vektör alanı Y ve diğer bir vektör alanı X olsun. $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $y_i\epsilon\ C^\infty(\ E^n, IR)$ olmak üzere, Y vektörünün X vektörü yönündeki türevi (kovaryant türev)

$$D_X Y = (X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n])$$

şeklinde tanımlanır (O’neill, 1961).

2.13. Tanım(Riemann manifoldu): Bir diferensiyellenebilir manifold M olsun**.**

$$\langle\ ,\ \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, IR)$$

biçiminde, aşağıdaki özelliklere sahip bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir *Riemann manifoldu* ve $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümüne de M üzerinde Riemann metriği denir.

$\forall X, Y \in \chi(M),\ \ a \in IR$ için

1) $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$,

2) $\langle X + Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle$, $\quad Z \in \chi(M)$,

3) $\langle aX, Y \rangle = a\langle X, Y \rangle$,

4) $\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0$,

5) X, Y vektör alanları diferensiyellenebilir ise

$$\langle X, Y \rangle : M \to IR$$

fonksiyonu da diferensiyellenebilirdi.

Bu tanımda eğer (4) özelliği yerine,

4) $\forall X \in \chi(M)$ *için* $\langle X, Y \rangle = 0 \Rightarrow Y = 0$

özelliği alınırsa M manifolduna bir *yarı-Riemann manifoldu* denir (Hicks, 1974).

2.14. Tanım(Riemann konneksiyonu): Bir yarı-Riemann manifoldu M olmak üzere

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y) \to D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu,

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f \in C^{\infty}(M, IR)$ için

1) $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_Y Z$,

2) $D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z$,

3) $D_{fX} Y = f D_X Y$,

4) $D_X(fY) = f D_X Y + (Xf)Y$,

5) $D_X Y$ - $D_Y X$ = $[X\ ,Y\ ]$,

6) $X\langle\ Y\ ,Z\ \rangle$ =$\langle D_X Y\ ,Z\ \ \rangle$ + $\langle\ Y\ ,D_X Z\ \ \rangle$

özelliklerini sağlarsa *D* fonksiyonuna *M* üzerinde bir *Riemann konneksiyonu* ve D_X e de *X* e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir ve *Y* vektör alanı diferenseyellenebilir olmak üzere

$$D_X \mathrm{Y} = (X[y_1\ ], X[y_2\ ], \dots, X[y_n\ ])$$

biçiminde tanımlanır (Hicks, 1974).

2.15. Tanım(Self-Adjoint):*V*, iç çarpım uzayı olmak üzere,

$$A: V \to V$$

lineer dönüşümü, $\forall x, y \epsilon V$ için,

$$\langle A(x), y\rangle = \langle\ x, A(y)\rangle$$

önermesini doğrularsa A dönüşümüne (self-adjoint) dönüşüm denir.

2.16. Tanım(Simetri): *V*, *n*-boyutlu bir reel vektör uzayı ve

$$L: V \times V \to IR$$

lineer dönüşümü, $\forall u, v \epsilon V$ için

$$L(u, v) = L(v, u)$$

ise L ye *V* vektör uzayı üzerinde simetrik form denir (O'Neil, 1961).

2.17. Tanım(Diferensiyellenbilir eğri):M bir C^∞ manifold ve $I \subset IR$ açık aralık olsun.

$$\alpha: I \to M \subset E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise α ya M üzerinde *diferensiyellenebilir eğri* denir (Matsushima, 1972).

2.18. Tanım(Eğrilikler): $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s\epsilon I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet $r-$ ayaklısı

$$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$$

olsun. Buna göre

$$k_i : I \to IR$$

$$s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle, \quad 1 \le i \le r$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna, M eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $s\epsilon I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasındaki M nin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1994).

2.19. Tanım(Bir eğrinin geodezik eğriliği): E^3 de $s-$yay parametresi ile verilen bir α eğrisinin birim teğet vektörü, $T = (T_1, T_2, T_3\ )$ olmak üzere,

$$k_g = \|D_T T\| = \frac{\|d^2\alpha\|}{ds^2}$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına gelen, E^3 deki *geodezik eğriliği* denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Manifold Örnekleri:

2.1. Örnek: $S^2 = \{(x, y, z) \epsilon IR^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ orijin merkezli birim kürenin diferensiyellenebilir manifold olduğunu gösterelim.

1) S^2 üzerindeki bir topoloji, S^2nin açıkları; IR^3 ün açıkları $U_i \subset IR^3$ ler olmak üzere; $U_i \cap S^2$alt cümleleri olarak tanımlanır. $\tau_{S^2} = \{\emptyset, S^2, U_i \cap S^2\}$

$a)$ $\emptyset \subset S^2$, $S^2 \subset S^2$ olup $\emptyset, S^2 \epsilon\, \tau_{S^2}$

$b)$ $U_1 \cap S^2, U_2 \cap S^2 \epsilon\, \tau_{S^2}$ olmak üzere,

$$(U_1 \cap S^2) \cap (U_2 \cap S^2) = (U_1 \cap U_2) \cap S^2$$

İki açık cümlenin kesişimi de açık olduğundan $U_1 \cap U_2$ açıktır.
O halde $(U_1 \cap U_2) \cap S^2 \epsilon\, \tau_{S^2}$

$c)$ $U_1 \cap S^2, U_2 \cap S^2 \epsilon\, \tau_{S^2}$ olmak üzere,

$$(U_1 \cap S^2) \cup (U_2 \cap S^2) = (U_1 \cup U_2) \cap S^2$$

İki açık cümlenin birleşimi de açık olduğundan $(U_1 \cup U_2)$ açıktır.
O halde $(U_1 \cup U_2) \cap S^2 \epsilon\, \tau_{S^2}$
τ_{S^2} koleksiyonu topoloji olma şartlarını sağladığından (τ_{S^2}, S^2) bir topolojik uzaydır.

2) $p \neq q$ $p \epsilon U_1, q \epsilon U_2$ olmak üzere IR^3 bir Hausdorff uzayı olduğundan $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olacak şekilde U_1, $U_2 \subset IR^3$ vardır.

$p \epsilon U_1 \cap S^2$, $q \epsilon U_2 \cap S^2$ olmak üzere,

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

$$(U_1 \cap U_2) \cap S^2 = \emptyset \cap S^2$$

$$(U_1 \cap S^2) \cap (U_2 \cap S^2) = \emptyset$$

olduğundan S^2 bir Hausdorff uzayıdır.

3) S^2 açık alt cümleleri olarak; $(x, y, z)\epsilon S^2$ olmak üzere,

$$V_1 = \{(x, y, z)\epsilon S^2 : x > 0\} \subset S^2 \text{ açık}$$

$$V_2 = \{(x, y, z)\epsilon S^2 : y > 0\} \subset S^2 \text{ açık}$$

$$V_3 = \{(x, y, z)\epsilon S^2 : z > 0\} \subset S^2 \text{ açık}$$

$$V_4 = \{(x, y, z)\epsilon S^2 : x < 0\} \subset S^2 \text{ açık}$$

$$V_5 = \{(x, y, z)\epsilon S^2 : y < 0\} \subset S^2 \text{ açık}$$

$$V_6 = \{(x, y, z)\epsilon S^2 : z < 0\} \subset S^2 \text{ açık}$$

şeklinde seçilsin.

$\bigcup_{i=1}^{6} V_i = S^2$ olup $\{V_i\}$, S^2 nin bir açık örtüsüdür.

4) $V_i = U_i \cap S^2$ ve $B_0(1)$ sıfır merkezli 1 yarıçaplı açık yuvar olmak üzere,

$$\Phi_1 : V_1 \to B_0(1),\ \ \Phi_1(x, y, z) = (y, z)$$

$$\Phi_2 : V_2 \to B_0(1),\ \ \Phi_2(x, y, z) = (x, z)$$

$$\Phi_3 : V_3 \to B_0(1),\ \ \Phi_3(x, y, z) = (x, y)$$

$$\Phi_4 : V_4 \to B_0(1),\ \ \Phi_4(x, y, z) = (y, z)$$

$$\Phi_5 : V_5 \to B_0(1),\ \ \Phi_5(x, y, z) = (x, z)$$

$$\Phi_6 : V_6 \to B_0(1),\ \ \Phi_6(x, y, z) = (x, y)$$

dır. $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ ve Φ_6 nın birer homeomorfizm olduğunu gösterelim. $\Phi_1(x, y, z) = (y, z)$ koordinat fonksiyonları sürekli olduğundan Φ_1 süreklidir.

$\Phi_1$birebirdir:

$$\Phi_1(x_1, y_1, z_1) = \Phi_1(x_2, y_2, z_2)$$

$$(y_1, z_1) = (y_2, z_2)$$

$$x_1 = \sqrt{1 - {y_1}^2 - {z_1}^2} = \sqrt{1 - {y_2}^2 - {z_2}^2} = x_2$$

olduğundan

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

Φ_1 örtendir:

$\forall(y,z)\epsilon B_0(1)$ için $(x,y,z)=\left(\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right)\epsilon V_1$ olacak şekilde vardır.

Φ_1 birebir ve örten olduğundan $\Phi_1{}^{-1}$ vardır.

$\Phi_1{}^{-1}(y,z)=\left(\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right)$ koordinat fonksiyonları sürekli olduğundan $\Phi_1{}^{-1}$ süreklidir.
O halde Φ_1 bir homeomorfizmdir. Benzer şekilde $\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4,\Phi_5$ ve Φ_6 nın birer homeomorfizm olduğu gösterilir.
Böylece S^2, $2-$boyutlu bir topolojik manifolddur.

5) $A=\{(V_i,\Phi_i)\}_{i=1,\dots,6}$ koleksiyonunun(atlas) diferensiyellenebilir atlas olduğunu gösterelim.

$V_1\cap V_2\neq\emptyset$ olmak üzere, $(V_1,\Phi_1),(V_2,\Phi_2)$ ikilisini alalım.

$$\Phi_2 o\Phi_1{}^{-1}:\Phi_1(V_1\cap V_2)\rightarrow\Phi_2(V_1\cap V_2),\qquad V_1\cap V_2=\{(x,y,z)\epsilon S^2: x>0, y>0\}$$

$$\Phi_2 o\Phi_1{}^{-1}(y,z)=\Phi_2(\Phi_1{}^{-1}(y,z))=\Phi_2\left(\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right)=\left(\sqrt{1-y^2-z^2},z\right)$$

olup $\Phi_2 o\Phi_1{}^{-1}$ diferensiyellenebilirdir.

$$\Phi_1 o\Phi_2{}^{-1}:\Phi_2(V_1\cap V_2)\rightarrow\Phi_1(V_1\cap V_2),\qquad V_1\cap V_2=\{(x,y,z)\epsilon S^2: x>0, y>0\}$$

$$\Phi_1 o\Phi_2{}^{-1}(x,z)=\Phi_1(\Phi_2{}^{-1}(x,z))=\Phi_1\left(x,\sqrt{1-x^2-z^2},z\right)=\left(\sqrt{1-x^2-z^2},z\right)$$

olup $\Phi_1 o\Phi_2{}^{-1}$ diferensiyellenebilirdir.

Diğer haritalar içinde aynı işlemler yapılır. $A=\{(V_i,\Phi_i)\}_{i=1,\dots,6}$ atlas S^2 üzerinde bir $C^\infty-$sınıfından diferensiyellenebilir yapı oluşturur. Bu yapıyla birlikte S^2 birim küresi $2-$boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

2.2. Örnek: $M=\{x,y\epsilon IR^2: x^2+4y^2=4\}$ cümlesi $1-$boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

2.3. Örnek: E^n $n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

3. ŞEKİL OPERATÖRÜ (WEINGARTEN DÖNÜŞÜMÜ)

E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı, N verilsin. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \epsilon \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde *şekil operatörü* veya M nin *Weingarten dönüşümü* denir (Hacısalihoğlu, 1994).

3.1. Teorem: E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun. Bu durumda,

1) $S: \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$

2) S lineerdir.

İspat:

1) M nin birim normal vektör alanı N ise

$$\langle N, N \rangle = 1$$

dir. Buna göre, $X \epsilon \chi(M)$ için,

$$X[\langle N, N \rangle] = X[1],$$

$$X[\langle N, N \rangle] = 0,$$

$$\langle D_X N, N \rangle + \langle N, D_X N \rangle = 0,$$

$$\langle S(X), N \rangle + \langle N, S(X) \rangle = 0,$$

$$2\langle S(X), N \rangle = 0,$$

$$\langle S(X), N \rangle = 0,$$

$$S(X) \epsilon \chi(M)$$

dir. Böylece,

$$S: \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dir.

2) $\forall X, Y \epsilon \chi(M)$, $\forall a, b \epsilon\ IR$ için,

$$S(aX + bY) = D_{aX+bY}N,$$

$$S(aX + bY) = aD_X N + bD_Y N,$$

$$S(aX + bY) = aS(X) + bS(Y)$$

dir. Bu da S nin lineer olduğunu gösterir (Hacısalihoğlu, 1994).

3.2. Teorem: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerinde S şekil operatörü simetriktir.

İspat:

M üzerinde S şekil operatörü $\chi(M)$ iç çarpım uzayı üzerinde

$$S: \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

lineer olduğundan S nin simetrik olduğunu göstermek yerine self-adjoint olduğunu göstermek yeter. Bunun içinde,

$\forall X, Y \epsilon \chi(M)$ için

$$\langle S(X), Y \rangle = \langle X, S(Y) \rangle$$

olduğunu göstermeliyiz.

$X, Y \epsilon \chi(M)$ olduğundan

$$\langle X, N \rangle + \langle Y, N \rangle = 0$$

yazabiliriz. E^n de D operatörü bir Riemann konneksiyonu olduğundan

$$Y[\langle X, N \rangle] = 0$$

veya

$$\langle D_Y X, N \rangle + \langle X, D_Y N \rangle = 0 \qquad (3.1)$$

ve

$$X[\langle Y, N \rangle] = 0$$

veya

$$\langle D_X Y, N \rangle + \langle Y, D_X N \rangle = 0 \qquad (3.2)$$

yazılabilir. (3.2) den (3.1) i çıkararak

$$\langle Y, D_X N\rangle - \langle X, D_Y N\rangle + \langle D_X Y, N\rangle - \langle D_Y X, N\rangle = 0$$

elde edilir.

$$D_X N = S(X) \text{ ve } D_Y N = S(Y)$$

olduğundan

$$\langle Y, S(X)\rangle - \langle X, S(Y)\rangle + \langle D_X Y - D_Y X, N\rangle = 0.$$

D bir Riemann konneksiyonu olduğu için

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y] \epsilon \chi(M)$$

ve dolayısıyla

$$\langle [X, Y], N\rangle = 0$$

dan

$$\langle Y, S(X)\rangle - \langle X, S(Y)\rangle = 0$$

veya iç çarpımın simetri özelliğinden

$$\langle S(X), Y\rangle = \langle X, S(Y)\rangle$$

olur. Bu da S nin self-adjoint olması demektir (Hicks, 1974).

Sonuç: E^n de bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde şekil operatörü S ise $\chi(M)$ deki herhangi bir baza göre S nin matrisi simetriktir (Hacısalihoğlu, 1994).

4. GAUSS DÖNÜŞÜMÜ

E^n de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı N olsun.

$$\eta: M \longrightarrow S^{n-1} \subset E^n$$

$$P \longrightarrow \eta(P) = \vec{N}(P) = \left(P, \vec{N}_P\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(P) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$$

dönüşümü $\left\|\vec{N}_P\right\| = 1$ olduğundan M yi E^n deki S^{n-1} birim hiperküresine resmeder. Böylece tanımlanmış olan diferensiyellenebilir η dönüşümüne *Gauss dönüşümü* denir (Hacısalihoğlu,1994).

Bu dönüşüm $\forall P \epsilon M$ noktasına E^n de öyle bir nokta karşılık getirir ki bu nokta $\vec{N}(P)$ birim normal vektörünün başlangıç noktasına (S^{n-1} in merkezi) ötelenmesiyle elde edilir.

Gauss dönüşümü ile Weingarten dönüşümü arasındaki ilgi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

4.1. Teorem: E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde Weingarten dönüşümü (Şekil operatörü) S olsun. Bu durumda S, M nin Gauss dönüşümünün, jacobian dönüşümüdür.

İspat:

$$\alpha: I \longrightarrow M$$

eğrisi verilsin.

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)} \epsilon T_M\big(\alpha(t)\big)$$

olmak üzere, $X \epsilon \chi(M)$ vektör alanını göz önüne alalım. $\alpha(t) = P \epsilon M$ olsun. Şimdi,

$$\eta_*|_P : T_M(P) \longrightarrow T_{S^{n-1}}\big(\eta(P)\big)$$

dönüşümünün S ile aynı olduğunu gösterelim.

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olmak üzere $\eta = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dir. İlgili teoremden,

$$\eta_*|_P(X_P) = \sum_{i=1}^{n} X_P[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\eta(P)}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\eta_*|_P(X_P) = D_{X_P}N$$

$$\eta_*|_P(X_P) = S(X_P)$$

elde edilir. Bu eşitlik, $\forall X_P \epsilon T_M(P)$ için yazılabileceğinden,

$$\eta_* = S$$

bulunur (Hacısalihoğlu, 1994).

5. E^3 DE HERHANGİ BİR YÜZEY İÇİN WEINGARTEN DÖNÜŞÜMÜNÜN MATRİSİNİN HESABI

E^3 de bir yüzey M olsun. M nin parametrik ifadesi

$$\Phi:(u,v)\longrightarrow\Phi(u,v)=\big(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v)\big)$$

olsun. $\chi(M)$ nin bir bazı $\{V_1,V_2\}$ ise

$$S:\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$$

$$V_1\longrightarrow S(V_1)=aV_1+bV_2$$

$$V_2\longrightarrow S(V_2)=cV_1+dV_2$$

olduğundan, genel olarak a,b,c,d yi ve M nin asli normal eğrilik fonksiyonları olan k_1 ve k_2, Φ cinsinden hesaplanır. Bu hesabın yapılması için $\Phi(u,v)$ fonksiyonunun u ya ve v ye göre türevleri alınır. u ya ve v ye göre türevleri $\Phi_{\boldsymbol{u}}$ ve $\Phi_{\boldsymbol{v}}$ şeklinde gösterilsin.

I. durum:$\langle\Phi_u,\Phi_v\rangle=0$ ve eğrilik çizgilerinin yüzeyin parametre eğrileri olması hali.
II. durum:$\langle\Phi_u,\Phi_v\rangle\neq0$ veya $\langle\Phi_u,\Phi_v\rangle=0$ ama eğrilik çizgilerinin yüzeyin parametre eğrileri olmaması hali olsun. Bu takdirde II. durum çeşitli yöntemlerle I. duruma getirilebilir. O halde, I. durumu göz önüne alalım.
I. durum: $\langle\Phi_u,\Phi_v\rangle=0$ olduğundan $\{\Phi_u,\Phi_v\}$ sistemi $\chi(M)$ için bir ortogonal bazdır.

Normlarsak

$$V_1=\frac{1}{\|\Phi_u\|}\Phi_u$$

$$V_2=\frac{1}{\|\Phi_v\|}\Phi_v$$

$\{V_1,V_2\}$ sistemi $\chi(M)$ için bir ortonormal baz olur. M yüzeyinin birim normal vektör alanı,

$$N=V_1\wedge V_2=\frac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|}\Phi_u\wedge\Phi_v$$

olur. O halde,

$$S(V_1) = D_{V_1}N = D_{\frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|}\Phi_u}N = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|}D_{\Phi_{\boldsymbol{u}}}N$$

$$S(V_1) = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|}\frac{dN}{du} \tag{5.1}$$

olur. Şimdi $\frac{dN}{du}$ yu hesaplayalım.

$$\frac{dN}{du} = \frac{\Phi_{\boldsymbol{uu}}\wedge\Phi_{\boldsymbol{v}} + \Phi_{\boldsymbol{u}}\wedge\Phi_{\boldsymbol{uv}}}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|} - \Phi_{\boldsymbol{u}}\wedge\Phi_v\frac{\langle\Phi_{\boldsymbol{uu}},\Phi_{\boldsymbol{u}}\rangle}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^3\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|} - \Phi_{\boldsymbol{u}}\wedge\Phi_v\frac{\langle\Phi_{\boldsymbol{uv}},\Phi_{\boldsymbol{v}}\rangle}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|^3} \tag{5.2}$$

$\Phi_{\boldsymbol{uu}}$,$\Phi_{\boldsymbol{uv}}$,$\Phi_{\boldsymbol{vv}}$ yi hesaplayalım.

$$\Phi_{\boldsymbol{uu}} = \lambda_1\Phi_{\boldsymbol{u}} + \lambda_2\Phi_{\boldsymbol{v}} + \lambda_3 N \tag{5.3}$$

Burada λ_1, $\lambda_2$ve λ_3 değerleri,

$$\langle\Phi_{\boldsymbol{uu}},\Phi_{\boldsymbol{u}}\rangle = \lambda_1\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^2$$

$$\lambda_1 = \frac{\langle\Phi_{uu},\Phi_u\rangle}{\|\Phi_u\|^2} \tag{5.4}$$

$$\langle\Phi_{\boldsymbol{uu}},\Phi_{\boldsymbol{v}}\rangle = \lambda_2\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|^2$$

$$\lambda_2 = \frac{\langle\Phi_{uu},\Phi_v\rangle}{\|\Phi_v\|^2} \tag{5.5}$$

$$\lambda_3 = \langle\Phi_{uu},N\rangle \tag{5.6}$$

şeklinde elde edilir. (5.6) da *N* değeri yerine konulursa,

$$\lambda_3 = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|}\langle\Phi_{\boldsymbol{uu}},\Phi_{\boldsymbol{u}}\wedge\Phi_{\boldsymbol{v}}\rangle$$

veya

$$\lambda_3 = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|}\det(\Phi_{\boldsymbol{uu}},\Phi_{\boldsymbol{u}},\Phi_{\boldsymbol{v}}) \tag{5.7}$$

olur. Şimdi (5.3) te (5.4), (5.5) ve (5.7) değerleri yerine konulursa,

$$\Phi_{uu} = \frac{\langle\Phi_{uu},\Phi_u\rangle}{\|\Phi_u\|^2}\Phi_u + \frac{\langle\Phi_{uu},\Phi_v\rangle}{\|\Phi_v\|^2}\Phi_v + \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|}\det(\Phi_{\boldsymbol{uu}},\Phi_{\boldsymbol{u}},\Phi_{\boldsymbol{v}})\,N \tag{5.8}$$

olur.

$$\Phi_{uv} = \Phi_{vu}$$

olduğundan birini hesaplarsak yeterli olur.

$$\Phi_{\boldsymbol{uv}} = \mu_1\Phi_{\boldsymbol{u}} + \mu_2\Phi_{\boldsymbol{v}} + \mu_3 N \tag{5.9}$$

Burada μ_1,$\mu_2$ve μ_3 değerleri,

$$\langle\Phi_{\boldsymbol{uv}},\Phi_{\boldsymbol{u}}\rangle = \mu_1\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^2$$

$$\mu_1 = \frac{\langle\Phi_{uv},\Phi_u\rangle}{\|\Phi_u\|^2} \tag{5.10}$$

$$\langle\Phi_{\boldsymbol{uv}},\Phi_{\boldsymbol{v}}\rangle = \mu_2\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|^2$$

$$\mu_2 = \frac{\langle\Phi_{uv},\Phi_v\rangle}{\|\Phi_v\|^2} \tag{5.11}$$

$$\mu_3 = \langle\Phi_{uv}, N\rangle \tag{5.12}$$

şeklinde bulunur. (5.12) da *N* değeri yerine konulursa,

$$\mu_3 = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|}\langle\Phi_{\boldsymbol{uv}},\Phi_{\boldsymbol{u}}\wedge\Phi_{\boldsymbol{v}}\rangle$$

veya

$$\mu_3 = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|}\det(\Phi_{\boldsymbol{uv}},\Phi_{\boldsymbol{u}},\Phi_{\boldsymbol{v}}) \tag{5.13}$$

olur. Şimdi (5.9) da (5.10), (5.11) ve (5.13) değerleri yerine konulursa,

$$\Phi_{uv} = \frac{\langle\Phi_{uv},\Phi_u\rangle}{\|\Phi_u\|^2}\Phi_u + \frac{\langle\Phi_{uv},\Phi_v\rangle}{\|\Phi_v\|^2}\Phi_v + \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|}\det(\Phi_{\boldsymbol{uv}},\Phi_{\boldsymbol{u}},\Phi_{\boldsymbol{v}})\, N \tag{5.14}$$

bulunur.

$$\Phi_{\boldsymbol{vv}} = \vartheta_1\Phi_{\boldsymbol{u}} + \vartheta_2\Phi_{\boldsymbol{v}} + \vartheta_3 N \tag{5.15}$$

Burada ϑ_1,$\vartheta_2$ve ϑ_3 değerleri,

$$\langle\Phi_{\boldsymbol{vv}},\Phi_{\boldsymbol{u}}\rangle = \vartheta_1\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^2$$

$$\vartheta_1 = \frac{\langle\Phi_{vv},\Phi_u\rangle}{\|\Phi_u\|^2} \tag{5.16}$$

$$\langle\Phi_{\boldsymbol{vv}},\Phi_{\boldsymbol{v}}\rangle = \vartheta_2\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|^2$$

$$\vartheta_2 = \frac{\langle \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle}{\|\Phi_v\|^2} \tag{5.17}$$

$$\vartheta_3 = \langle \Phi_{vv}, N \rangle \tag{5.18}$$

şeklinde bulunur. (5.18) da *N* değeri yerine konulursa,

$$\vartheta_3 = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_v\|} \langle \Phi_{vv}, \Phi_{\boldsymbol{u}} \wedge \Phi_v \rangle$$

veya

$$\vartheta_3 = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_v\|} \det(\Phi_{vv}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_v) \tag{5.19}$$

olur. Şimdi (5.15) de (5.16), (5.17) ve (5.19) değerleri yerine konulursa,

$$\Phi_{vv} = \frac{\langle \Phi_{vv}, \Phi_u \rangle}{\|\Phi_u\|^2} \Phi_u + \frac{\langle \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle}{\|\Phi_v\|^2} \Phi_v + \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_v\|} \det(\Phi_{vv}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_v)\, N \tag{5.20}$$

olur. Şimdi (5.2) de (5.8), (5.14) ve (5.20) değerleri yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{du} = {} & \frac{\langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|} \Phi_u \wedge \Phi_v + \frac{\langle \Phi_{uu}, \Phi_v \rangle}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3} \Phi_v \wedge \Phi_v \\ & + \frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2} \det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v)\, N \wedge \Phi_v + \Phi_u \wedge \Phi_u \frac{\langle \Phi_{uv}, \Phi_u \rangle}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|} \\ & + \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3} + \frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2} \det(\Phi_{uv}, \Phi_u, \Phi_v)\, \Phi_u \wedge N \\ & - \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|} - \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Gerekli kısaltmalar yapılınca,

$$\frac{dN}{du} = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|} \det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v)\, \Phi_u - \frac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3} \det(\Phi_{uv}, \Phi_u, \Phi_v) \Phi_v \tag{5.21}$$

olur. Şimdi (5.1) de (5.21) değeri yerine konulursa,

$$S(V_1) = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^4\|\Phi_v\|} \det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v)\, \Phi_u - \frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^3} \det(\Phi_{uv}, \Phi_u, \Phi_v) \Phi_v$$

veya

$$S(V_1) = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|} \det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v)\, V_1 - \frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2} \det(\Phi_{uv}, \Phi_u, \Phi_v) V_2$$

bulunur. Şimdi

$$S(V_2) = D_{V_2}N = D_{\frac{1}{\|\Phi_v\|}\Phi_v}N = \frac{1}{\|\Phi_v\|}D_{\Phi_v}N$$

$$S(V_2) = \frac{1}{\|\Phi_v\|}\frac{dN}{dv} \tag{5.22}$$

yi bulalım. Bunun için önce $\frac{dN}{dv}$ yi hesaplayalım.

$$\frac{dN}{dv} = \frac{\Phi_{uv}\wedge\Phi_v + \Phi_u\wedge\Phi_{vv}}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|} - \Phi_u\wedge\Phi_v\frac{\langle\Phi_{uv},\Phi_u\rangle}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|} - \Phi_u\wedge\Phi_v\frac{\langle\Phi_{vv},\Phi_v\rangle}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3} \tag{5.23}$$

(5.23) te (5.8), (5.14) ve (5.20) değerleri yerine konulursa,

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dv} &= \frac{\langle\Phi_{uv},\Phi_u\rangle}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|}\Phi_u\wedge\Phi_v + \frac{\langle\Phi_{uv},\Phi_v\rangle}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3}\Phi_v\wedge\Phi_v \\ &+ \det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)\frac{N\wedge\Phi_v}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2} + \Phi_u\wedge\Phi_u\frac{\langle\Phi_{vv},\Phi_u\rangle}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|} \\ &+ \Phi_u\wedge\Phi_v\frac{\langle\Phi_{vv},\Phi_v\rangle}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3} + \det(\Phi_{vv},\Phi_u,\Phi_v)\frac{\Phi_u\wedge N}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2} \\ &- \Phi_u\wedge\Phi_v\frac{\langle\Phi_{uv},\Phi_u\rangle}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|} - \Phi_u\wedge\Phi_v\frac{\langle\Phi_{vv},\Phi_v\rangle}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3}\end{aligned}$$

ve gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$\frac{dN}{dv} = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|}\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)\,\Phi_u - \frac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3}\det(\Phi_{vv},\Phi_u,\Phi_v)\Phi_v \tag{5.24}$$

olur. Şimdi (5.22) de (5.24) değeri yerine konulursa,

$$S(V_2) = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)\,\Phi_u - \frac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^4}\det(\Phi_{vv},\Phi_u,\Phi_v)\Phi_v$$

veya

$$S(V_2) = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v)\,V_1 - \frac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3}\det(\Phi_{vv},\Phi_u,\Phi_v)V_2$$

şeklinde bulunur.

$$S(V_1) = aV_1 + bV_2$$

$$S(V_2) = cV_1 + dV_2$$

olduğundan

$$aV_1 + bV_2 = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|}\det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v)V_1 - \frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{uv}, \Phi_u, \Phi_v)\, V_2,$$

$$cV_1 + dV_2 = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_v)\, V_1 - \frac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3}\det(\Phi_{vv}, \Phi_u, \Phi_v)V_2$$

olur. Bu takdirde,

$$a = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|}\det(\Phi_{\boldsymbol{uu}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_v)$$

$$b = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = 0$$

$$c = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = 0$$

$$d = -\frac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3}\det(\Phi_{vv}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}})$$

elde edilir.

Diğer taraftan yüzeyin parametre eğrileri eğrilik çizgileri ise $\det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = 0$ olacağından $b = c = 0$ olur.

Eğrilik çizgisi tanımından $S(\Phi_u) = \lambda\Phi_u$ veya $S(V_1) = \lambda' V_1$ ve $S(\Phi_v) = \mu\Phi_v$ veya $S(V_2) = \mu' V_2$ olacaktır. Buna göre $S(V_1)$ in ifadesindeki V_2 nin katsayısı ve $S(V_2)$ de V_1in katsayısı 0 olacaktır. Bu da $\det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = 0$ olmasını gerektirir. Parametre eğrileri eğrilik çizgisi olsunlar.

O halde I. durumdaki yüzeyler için Weingarten dönüşümünün matrisi şu şekildedir:

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^3\|\Phi_v\|}\det(\Phi_{\boldsymbol{uu}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|\|\Phi_v\|^3}\det(\Phi_{vv}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

(Hacısalihoğlu, 1994).

Şimdi M yüzeyinin asli normal eğrilik fonksiyonları olan k_1 ve k_2 yi Φ cinsinden bulalım. Genel olarak,

$$k_i = \langle S(V_i), V_i \rangle$$

dir. O halde

$$k_1 = \langle S(V_1), V_1 \rangle$$

$$k_1 = \langle aV_1 + bV_2, V_1 \rangle$$

$$k_1 = a\langle V_1, V_1 \rangle + b\langle V_2, V_1 \rangle$$

$$k_1 = a$$

$$k_1 = -\frac{1}{\|\Phi_u\|^3 \|\Phi_v\|} \det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v)$$

olur. Şimdi k_2 hesaplanırsa,

$$k_2 = \langle S(V_2), V_2 \rangle$$

$$k_2 = \langle cV_1 + dV_2, V_2 \rangle$$

$$k_2 = c\langle V_1, V_2 \rangle + d\langle V_2, V_2 \rangle$$

$$k_2 = d$$

$$k_2 = -\frac{1}{\|\Phi_u\| \|\Phi_v\|^3} \det(\Phi_{vv}, \Phi_u, \Phi_v)$$

elde edilir. Bu da $S = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ demektir.

II. durum: Eğer yüzeyin eğrilik çizgileri parametre eğrileri değil ise ister $\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0$ olsun, ister $\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle \neq 0$ olsun, bu durumda (5.25) de bulunan değerlerle yüzeye ait Weingarten dönüşümünün matrisi,

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\|\Phi_u\|^3 \|\Phi_v\|} \det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v) & -\frac{1}{\|\Phi_u\|^2 \|\Phi_v\|^2} \det(\Phi_{uv}, \Phi_u, \Phi_v) \\ -\frac{1}{\|\Phi_u\|^2 \|\Phi_v\|^2} \det(\Phi_{uv}, \Phi_u, \Phi_v) & -\frac{1}{\|\Phi_u\| \|\Phi_v\|^3} \det(\Phi_{vv}, \Phi_u, \Phi_v) \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1994).

5.1. Örnek: $\Phi: E^2 \to E^3$

$$(u, v) \to \Phi(u, v) = (rsinucosv, rsinusinv, rcosu)$$

biçiminde verilen M yüzeyinin Weingarten dönüşümünün matrisini hesaplayalım.

$\Phi(u, v) = (rsinucosv, rsinusinv, rcosu)$ nun *u* ya ve *v* ye göre türevleri alınırsa,

$$\Phi_u = (rcosucosv, rcosusinv, -rsinu)$$

$$\Phi_v = (-rsinusinv, rsinucosv, 0)$$

olur.

$$\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = \langle (rcosucosv, rcosusinv, -rsinu), (-rsinusinv, rsinucosv, 0) \rangle$$

$$= -r^2 cosucosvsinusinv + r^2 cosusinvsinucosv + 0 = 0$$

$\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0$ olduğundan $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ sistemi $\chi(M)$ için bir ortogonal bir bazdır.

Φ_u, Φ_v nin normları hesaplanırsa,

$$\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle (rcosucosv, rcosusinv, -rsinu), (rcosucosv, rcosusinv, -rsinu) \rangle}$$

$$= \sqrt{r^2 cos^2 ucos^2 v + r^2 cos^2 usin^2 v + r^2 sin^2 u}$$

$$= \sqrt{r^2 (cos^2 u(cos^2 v + sin^2 v) + sin^2 u)}$$

$$= \sqrt{r^2 (cos^2 u + sin^2 u)}$$

$$= r$$

$$\|\Phi_v\| = \sqrt{\langle \Phi_v, \Phi_v \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle (-rsinusinv, rsinucosv, 0), (-rsinusinv, rsinucosv, 0) \rangle}$$

$$= \sqrt{r^2 sin^2 usin^2 v + r^2 sin^2 ucos^2 v}$$

$$= \sqrt{r^2 sin^2 u(cos^2 v + sin^2 v)}$$

$$= rsinu$$

olur.

Φ_u ve Φ_v normlarına bölünürse,

$$X = \frac{\Phi_u}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|} = \frac{1}{r}(rcosucosv, rcosusinv, -rsinu)$$

$$= (cosucosv, cosusinv, -sinu)$$

$$Y = \frac{\Phi_v}{\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|} = \frac{1}{rsinu}(-rsinusinv, rsinucosv, 0)$$

$$= (-sinv, cosv, 0)$$

elde edilir. $\{X, Y\}$ sistemi $\chi(M)$ için bir ortonormal baz olur. M yüzeyinin birim normal vektörü,

$$N = X \wedge Y = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ cosucosv & cosusinv & -sinu \\ -sinv & cosv & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (sinucosv, sinusinv, cosu)$$

dir. S nin $\{X, Y\}$ bazına göre matrisini bulalım.

$$S(X) = D_X N \text{ ve } S(Y) = D_Y N$$

dir.

$$S(X) = D_X N = D_{\frac{\Phi_u}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|}} N = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|} D_{\Phi_u} N = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|} \frac{dN}{du}$$

$$S(Y) = D_Y N = D_{\frac{\Phi_v}{\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|}} N = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|} D_{\Phi_v} N = \frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|} \frac{dN}{dv}$$

ve

$$\frac{dN}{du} = (cosucosv, cosusinv, -sinu), \qquad \frac{dN}{dv} = (-sinusinv, sinucosv, 0)$$

olduğundan,

$$S(X) = \frac{1}{r}(cosucosv, cosusinv, -sinu)$$

$$S(Y) = \frac{1}{rsinu}(-sinusinv, sinucosv, 0) = \frac{1}{r}(-sinu, cosv, 0)$$

bulunur. Buradan,

$$S(X) = \frac{1}{r}X + 0 \cdot Y$$

$$S(Y) = 0 \cdot X + \frac{1}{r}Y$$

elde edilir. O halde S nin matrisi,

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. (5.25) de verilen matris yardımıyla da aynı S matrisi elde edilir.

5.2. Örnek: $\Phi: E^2 \to E^3$

$$(u, v) \to \Phi(u, v) = (cosucosv, cosusinv, au)$$

biçiminde verilen M yüzeyinin Weingarten dönüşümünün matrisini hesaplayalım.

$\Phi(u, v) = (cosucosv, cosusinv, au)$ nun u ya v ye göre türevleri alınırsa,

$$\Phi_u = (-sinucosv, -sinusinv, a)$$

$$\Phi_v = (-cosusinv, -cosucosv, 0)$$

olur.

$$\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0$$

olduğundan Φ_{uu} ve Φ_{vv} yi hesaplayalım.

$$\Phi_{uu} = (-cosucosv, -cosusinv, 0)$$

$$\Phi_{vv} = (-cosucosv, -cosusinv, 0)$$

ise $\Phi_{uu} = \Phi_{vv}$ dir. Bu durumda

$$\det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v) = \det(\Phi_{vv}, \Phi_u, \Phi_v)$$

olduğundan birini hesaplamak yeter. O halde

$$\det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v) = \begin{vmatrix} -cosucosv & -cosusinv & 0 \\ -sinucosv & -sinusinv & a \\ -cosusinv & -cosucosv & 0 \end{vmatrix} = acos^2u$$

olur. Şimdi $\Phi_u$ve Φ_v normlarını hesaplarsak ve küplerini alırsak,

$$\|\Phi_u\| = \sqrt{a^2 + sin^2u}$$

$$\|\Phi_u\|^3 = (a^2 + sin^2u)^{\frac{3}{2}}$$

ve

$$\|\Phi_v\| = cosu$$

$$\|\Phi_v\|^3 = cos^3u$$

olur. Bulunan bu değerleri Weingarten dönüşümünün matrisinde yerine yazılırsa,

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{acosu}{(a^2 + sin^2u)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{cosu\sqrt{a^2 + sin^2u}} \end{bmatrix}$$

olur. (5.1) ve (5.22) deki denklemler kullanılarakta aynı S matrisi elde edilir.

6. TEMEL FORMLAR

E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerinde şekil operatörü S olmak üzere, M hiperyüzeyi üzerinde q-uncu temel form diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q = \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, IR)$$

$$(X,Y) = I^q(X,Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir (Hicks, 1974).

6.1. I. Temel Form:

u, v parametreleri arasındaki $\varphi(u,v) = 0$ bağıntısı yüzey üstünde bir eğri tanımlar. Bu eğri,

$$\begin{aligned} u &= u(t) \\ v &= v(t) \end{aligned} \tag{6.1}$$

parametrik formda da verilebilir.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{x} = x_u \dot{u} + x_v \dot{v} \tag{6.2}$$

vektörü, hem eğriye hem yüzeye tanjanttır. (6.2) denklemi,

$$dx = x_u du + x_v dv \tag{6.3}$$

olarak da yazılabilir. $\varphi(u,v) = 0$ verildiğinde du ve dv arasında

$$\varphi_u du + \varphi_v dv = 0 \tag{6.4}$$

ile bellidir. Bir eğri üstündeki iki P ve Q noktası arasındaki uzaklık

$$ds^2 = \langle dx, dx \rangle = \sum_{i=1}^{3} dx_i \, dx_i \tag{6.5}$$

ile bellidir. dx için (6.2) deki karşılığı yazılırsa,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \langle (x_u du + x_v dv), (x_u du + x_v dv) \rangle \\ &= \langle \underbrace{x_u, x_u}_{E} \rangle \, du^2 + 2 \langle \underbrace{x_u, x_v}_{F} \rangle \, dudv + \langle \underbrace{x_v, x_v}_{G} \rangle \, dv^2 \end{aligned}$$

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (6.6)$$

elde edilir. $E = \langle x_u, x_u \rangle$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \langle x_v, x_v \rangle$ fonksiyonları u ve v ye bağlıdır.

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

ifadesine yüzeyin *I. Temel formu* denir (Carmo, 1976).

I. temel form bir kuadratik diferensiyel formdur. ds, yüzey üstündeki dx vektör diferensiyelin $|dx|$ uzunluğu olarak alınır ve "yay elementi" olarak adlandırılır. ds uzunluk olduğundan

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

daima pozitiftir. ($du = dv = 0$ hariç)

3.2. *II*. Temel Form:

II. temel form, yüzey üstündeki bir *P* noktasından geçen bir *C* eğrisinin *P* deki eğrilik vektörü ele alınarak hesaplanır. *C* nin birim teğet vektörü olsun. $\vec{t} = \frac{dc}{ds}$ dir. *C* nin eğrilik vektörü

$$\vec{k} = \frac{dt}{ds}$$

dir. $\|k\|$ eğriye ait birinci eğriliği (k_1) verir.

$\vec{k}$ eğrilik vektörü, $\vec{t}$ ye dik olduğundan dolayı, *P* de *C* ye dik olan düzlem içindedir. Dik olan bu düzlemin teğet düzlem ile arakesiti vardır ve yüzey normali olan $\vec{N}$ vektörü bu düzlem içindedir.

$\vec{k}$ nın *N* ve g ye göre bileşenleri cinsinden yazılışı

$$\vec{k} = \overrightarrow{k_n} + \overrightarrow{k_g}$$

şeklinde olsun.

$\overrightarrow{k_n}$: *C* nin *P* noktasındaki normal eğrilik vektörü

$\overrightarrow{k_g}$: *C* nin *P* noktasındaki geodezik eğrilik vektörü

olarak adlandırılır.

$$\overrightarrow{k_n} = \kappa_n \vec{N}, \quad \kappa_n = \left\|\overrightarrow{k_n}\right\| \text{: Normal eğrilik}$$

$$\overrightarrow{k_g} = \kappa_g \vec{g}, \quad \kappa_g = \left\|\overrightarrow{k_g}\right\| \text{: Geodezik eğrilik}$$

$\overrightarrow{k_n}$ vektörü yalnızca *C* ye bağlı olarak tanımlanır. κ_n normal eğrilik skaler değeri, N nin işaretine bağlıdır. Yönlendirmeyle ilgili $\overrightarrow{k_n}$ nin özelliklerini irdeleyelim. $\langle N, \vec{t}\rangle = 0$ den, *C* boyunca s ye göre türev alalım.

$$\langle \frac{dN}{ds}, t\rangle + \langle N, \frac{dt}{ds}\rangle = 0$$

$$\langle \frac{dt}{ds}, N\rangle = -\langle t, \frac{dN}{ds}\rangle$$

$$= -\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dN}{ds}\rangle$$

$$\kappa_n = -\frac{\langle dx, dN\rangle}{\langle dx, dx\rangle}$$

x ve N, u ve v nin yüzeysel fonksiyonlarıdır.

$$dN = N_u du + N_v dv$$

$$dx = x_u du + x_v dv$$

$$\langle dx, dN\rangle = \langle x_u, N_u\rangle du^2 + (\langle x_u, N_v\rangle + \langle x_v, N_u\rangle) dudv + \langle x_v, N_v\rangle dv^2 = II$$

$$\langle dx, dx\rangle = \langle x_u, x_u\rangle du^2 + 2\langle x_u, x_v\rangle dudv + \langle x_v, x_v\rangle dv^2 = I$$

$$-e = \langle x_u, N_u\rangle, -2f = \langle x_u, N_v\rangle + \langle x_v, N_u\rangle, -g = \langle x_v, N_v\rangle$$

olmak üzere,

$$\kappa_n = \frac{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{II}{I}$$

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

ifadesine yüzeyin *II. Temel formu* denir (Carmo, 1976).

7. ŞEKİL OPERATÖRÜNÜN CEBİRSEL DEĞİŞMEZLERİ

Bir M hiperyüzeyinin, bir P noktasındaki $T_M(P)$ tanjant uzayında baz(taban) değişiminden bağımsız olan parametreleri tanıtılacaktır. Bunlardan bazıları asli eğrilikler, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik ve eğrilik çizgileridir.

7.1. Asli Eğrilikler, Asli Doğrultular:

E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik (eigen) değerleri M nin bu noktadaki *asli eğrilikleri* olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu P noktasındaki *asli eğrilik doğrultuları* denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Bir lineer dönüşümünün karakteristik değerleri S nin *karakteristik polinomu* denen ve $P_S(\lambda)$ ile gösterilen polinomun sıfırları (kökleri) dır. Şimdi bu değerlerin $\forall P \epsilon M$ için $T_M(P)$ deki baz değişimlerinden bağımsız olduklarını göstermek için $T_M(P)$ den farklı iki baz Φ ve Ψ alalım. Bu iki baza göre $S(P)$ nin matrisleri, sırası ile S_Φ ve S_Ψ ile gösterilirse, ki bu iki baz arasında Q regüler bir matris olmak üzere,

$$S_\Psi = Q S_\Phi Q^{-1}$$

bağıntısı vardır. Buradan

$$P_{S_\Psi}(\lambda) = \det(\lambda\, I_{n-1} - S_\Psi)$$

olarak tanımlandığına göre

$$\begin{aligned} P_{S_\Psi}(\lambda) &= \det(\lambda\, I_{n-1} - Q S_\Phi Q^{-1}) \\ &= \det(\lambda\, Q Q^{-1} - Q S_\Phi Q^{-1}) \\ &= \det\{Q(\lambda I_{n-1} - S_\Phi) Q^{-1}\} \\ &= \det Q \,.\det(\lambda\, I_{n-1} - S_\Phi) \det Q^{-1} \\ &= \det(\lambda\, I_{n-1} - S_\Phi).\det Q \,.\det Q^{-1} \end{aligned}$$

ve $\det Q \,.\det Q^{-1} = 1$ olduğundan

$$P_{S_\Psi}(\lambda) = \det(\lambda I_{n-1} - S_\Phi)$$

$$P_{S_\Psi}(\lambda) = P_{S_\Phi}(\lambda)$$

bulunur. Bu ise Ψ ve Φ bazlarına göre karakteristik polinomların aynı kaldığını gösterir. Şu halde bunların sıfırları olan karakteristik değerler de aynıdır (Hacısalihoğlu, 1994).

7.1. Teorem: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. X_P ve Y_P, M nin bir P noktasında, farklı asli eğriliklerine karşılık gelen asli doğrultuları belirtir iseler X_P ile Y_P ortogonaldir (Hicks, 1974).

İspat:

Asli doğrultular karakteristik vektörlere karşılık geldiklerinden,

$$S(X_P) = k_1 X_P \text{ ve } S(Y_P) = k_2 Y_P$$

yazılabilir. Burada k_1 ve k_2 ile $P \epsilon M$ noktasındaki asli eğrilikleridir. S self-adjoint olduğundan

$$\langle S(X_P), Y_P \rangle = \langle X_P, S(Y_P) \rangle$$

yazılabilir. Buradan

$$\langle k_1 X_P, Y_P \rangle = \langle X_P, k_2 Y_P \rangle$$

$$k_1 \langle X_P, Y_P \rangle - k_2 \langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

$$(k_1 - k_2) \langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

bulunur. $k_1 \neq k_2$ olduğundan

$$\langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

olmak zorundadır (Hicks, 1974).

7.2. Gauss Eğriliği:

E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$K: M \longrightarrow IR$$
$$P \longrightarrow K(P) = \det S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin *Gauss eğrilik fonksiyonu* ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki *Gauss eğriliği* (total eğrilik) denir (Hacısalihoğlu, 1994). Şimdi $K(P)$ Gauss eğriliğinin $T_M(P)$ nin bazlarının seçilişinden bağımsız olduğunu göstermek için, $T_M(P)$ den alınan birbirinden farklı iki bazdan birisi Φ diğeri de Ψ olsun.

$$S: T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

lineer dönüşümünün bu iki baza göre matrisleri, sırası ile, S_Φ ve S_Ψ ile gösterilirse, Q bir regüler matris olmak üzere,

$$S_\Psi = QS_\Phi Q^{-1}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \det S_\Psi &= \det(QS_\Phi Q^{-1}) \\ &= \det Q \,.\det\, S_\Phi \,.\det Q^{-1} \\ &= \det\, S_\Phi \,.(\det Q \,.\det Q^{-1}) \end{aligned}$$

ve $\det Q \,.\det Q^{-1} = 1$ olduğundan,

$$\det S_\Psi = \det S_\Phi$$

bulunur. Şu halde S şekil operatörünün determinantı ile tanımlanan K fonksiyonu dolayısıyla $K(P)$ eğriliği $T_M(P)$ deki bazların seçilişinden bağımsızdır. Bunun için $K(P)$ nin hesabında en uygun bazı seçilebilir.

7.2. Teorem: E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P), k_2(P), \ldots, k_{n-1}(P)$ ise

$$K(P) = \prod_{i=1}^{n-1} k_i(P) = k_1(P).k_2(P).\dots.k_{n-1}(P)$$

dir.

İspat:

k_1, k_2, … ,k_{n-1} e karşılık gelen karakteristik vektörleri, sırası ile X_1, X_2, … ,X_{n-1} ile gösterelim. boy$M = n-1$ olduğundan P noktası özel bir nokta olarak seçilmedikçe rank$S(P) = n-1$ olacağından k_i ler birbirinden farklı ve dolayısıyla X_i ler de ortogonal bir sistem olacaklardır. Bu sistemi $T_M(P)$ için esas olan baz olarak alalım, $\Phi = \{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$ olsun.

$$S(X_i) = k_i X_i, \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

olduğundan Φ bazına göre S nin S_Φ matrisi için

$$S_\Phi = \begin{bmatrix} k_1(P) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2(P) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1}(P) \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$K(P) = \det S_\Phi$$

$$K(P) = \prod_{i=1}^{n-1} k_i(P)$$

bulunur (Hicks, 1974).

7.3. Ortalama Eğrilik:

E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$H: M \longrightarrow IR$$

$$P \longrightarrow H(P) = \text{İz}\big(S(P)\big)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin *ortalama eğrilik fonksiyonu* ve $H(P)$ değerinede M nin P noktasındaki *ortalama eğriliği* denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Şimdi $H(P)$ ortalama eğriliğinin $T_M(P)$ deki baz seçilişinden bağımsız olduğunu göstermek için $T_M(P)$ de birbirinden farklı iki baz seçelim. Bu bazlardan biri *Φ*, diğeri de *Ψ* olsun.

$$S: T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

lineer dönüşümünün bu iki baza göre matrisleri, sırası ile, S_Φ ve S_Ψ ile gösterilirse, Q regüler bir matris olmak üzere

$$S_\Psi = QS_\Phi Q^{-1}$$

Buradan,

$$\text{İz}S_\Psi = \text{İz}[Q(S_\Phi Q^{-1})]$$

yazılabilir.

$$\text{İz}(AB) = \text{İz}(BA)$$

olduğundan

$$\text{İz}S_\Psi = \text{İz}[(S_\Phi Q^{-1})Q]$$

$$= \text{İz}S_\Phi(Q^{-1}Q)$$

$$\text{İz}S_\Psi = \text{İz}S_\Phi$$

elde edilir. Şu halde H nın $P\epsilon M$ deki değeri $T_M(P)$ deki baz seçilişinden bağımsızdır. Bu nedenle $H(P)$ değerini karakteristik vektörlerden oluşan $\Phi = \{X_1, \ X_2, \dots, X_{n-1}\}$ bazına göre hesaplanabilir.

Böylece

$$S_\Phi = \begin{bmatrix} k_1(P) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2(P) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1}(P) \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$H(P) = \text{İz}S_\Phi = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(P)$$

bulunur.

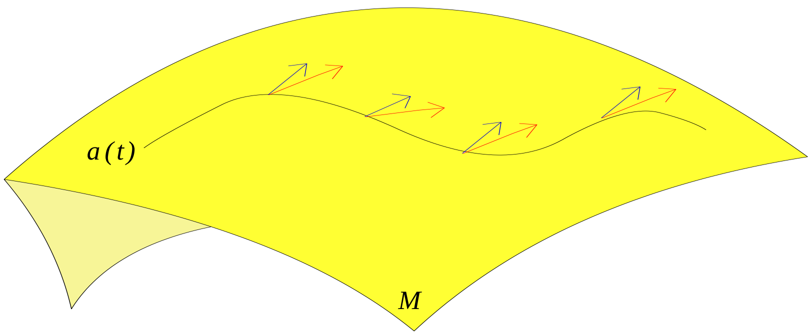
7.4. Eğrilik Çizgileri:

E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir *eğrilik çizgisidir* denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Bu tanıma göre M üzerindeki eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi $\lambda \neq 0$ bir skaler olmak üzere,

$$S(T) = \lambda T$$

dir (Hacısalihoğlu, 1994).



Şekil 7.1

7.3. Teorem: E^n de bir hiperyüzey Molsun. M üzerinde herhangi bir noktadan geçen eğrilik çizgileri ortogonal bir eğri demeti oluştururlar.

İspat:

Bir $P\epsilon M$ noktasından geçen farklı iki eğrilik çizgisini ele alalım. Bu iki çizginin teğetleri T_1 ve T_2 ise $T_1 \neq T_2$ dir. Dolayısıyla bu teğet doğrultularına S de karşılık gelen karakteristik değerler de farklı olacaktır. Teorem 7.1. gereğince bu farklı karakteristik değerlere karşılık gelen T_1, T_2 vektörleri dik olacaklardır (Hicks, 1974).
M nin bir P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları $T_M(P)$ deki baz seçilişinden bağımsız olduklarından eğrilik çizgileri de $T_M(P)$ deki baz seçilişinden bağımsızdır.

7.1. Örnek: Hiperküre için Şekil operatörü, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik, temel form ve eğrilik çizgilerini araştıralım.

E^n, n-boyutlu Öklid uzayında

$$S_r^{n-1} = \left\{ x = \{x_1, \dots, x_n\} \, | f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2, \left|\overrightarrow{\nabla f}\right| \neq 0, r \epsilon IR, \;\; r = \text{sabit} \right\}$$

nokta cümlesine bir $(n-1)$-boyutlu hiperküre veya kısaca $(n-1)$-küre denir. Burada r hiperkürenin yarıçapını göstermektedir.

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \epsilon S_r^{n-1}$ ve N de S_r^{n-1} in dış birim normal vektör alanı olsun.
O zaman,

$$N_P = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial x_i} \, |_P$$

dir.

Hiperküre için Şekil operatörü:

S_r^{n-1} in küresel dönüşümünü göz önüne alacağız.

$$\eta : S_r^{n-1} \longrightarrow S_1^{n-1}$$

$$P \longrightarrow \eta(P) = \left(\frac{1}{r} P_1, \dots, \frac{1}{r} P_n \right)$$

idi. Şimdi, η_* dönüşümünü hesaplayalım. S_r^{n-1} üzerinden bir lokal koordinat komşuluğu $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ olsun.

$$\eta_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \, |_P \right), \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

tanjant vektörünü bulacağız.

$$\left(\eta_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \, |_P \right) \right) (x_j) = \frac{\partial (x_j o \, \eta)}{\partial x_i} \, |_{\eta(P)}, \;\; 1 \leq i, j \leq n-1$$

$$= \frac{\partial (\frac{1}{r} x_j)}{\partial x_i} \, |_{\eta(P)},$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\ \Big|_{\eta(P)}(x_j).$$

İki fonksiyonun eşitliği tanımından

$$\eta_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\ \Big|_P\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\ \Big|_{\eta(P)}, \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

$$\forall X \epsilon \chi(S_r^{n-1}), \qquad \eta_*(X) = \frac{1}{r}X$$

Diğer taraftan,

$$S(X) = \eta_*(X)$$

dir. O halde

$$\forall X \epsilon \chi(S_r^{n-1}), \qquad S(X) = \frac{1}{r}X$$

yazılabilir. Böylece

$$S = \frac{1}{r}I_{n-1}$$

elde edilir.

Hiperküre için *K* ve *H* eğrilik fonksiyonları:

$S = \frac{1}{r}I$ olduğundan, S nin karakteristik değerleri olan $k_i, 1 \leq i \leq n-1$ fonksiyonları için

$$k_i = \frac{1}{r},\ \ 1 \leq i \leq n-1$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$K = \prod_{i=1}^{n-1} k_i = \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$$

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} k_i = \frac{n-1}{r}$$

dir.

Hiperküre için Temel form:

$$S = \frac{1}{r} I \Rightarrow S^k = \frac{1}{r^k} I \Rightarrow I^{(k+1)} = \frac{1}{r^k} I,$$

dır. Eğer, $(n-1)$-kürenin yarıçapı $r = 1$ alınırsa, bütün temel formlar birinci temel forma eşit olur. Herhangi $r \epsilon IR$ için k-yıncı temel form olarak

$$(kI)(X,Y) = \frac{1}{r^{k-1}} \langle X, Y \rangle$$

yazılabilir.

Hiperkürenin eğrilik çizgileri:

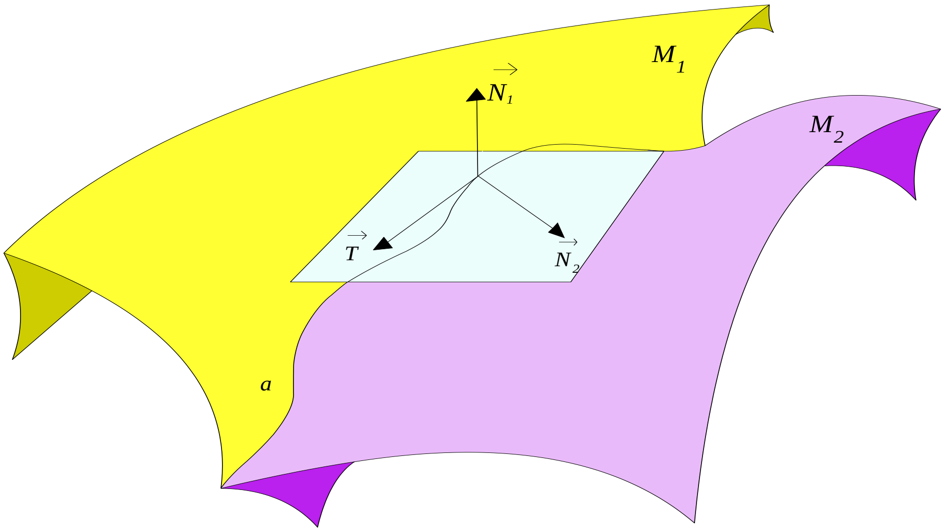
S^{n-1} üzerinde, teğet vektör alanı T olan öyle eğriler arıyoruz ki; bu eğrilerin T teğet vektör alanı, eğrinin her noktasında, bir asli eğrilik doğrultusu olsun. Şu halde, S^{n-1} için; $S(T) = \lambda T$ olacak şekilde, $T \epsilon \chi(S^{n-1})$ arıyoruz demektir. Halbuki $\forall T \epsilon \chi(S_r^{n-1})$ için $S(T) = \frac{1}{r} T$ dir. Demek oluyor ki, S^{n-1} üzerinde yatan her bir eğri bir eğrilik çizgisidir.

Sonuç:

n-boyutlu Öklid uzayının bir $(n-1)$-boyutlu küresi üzerindeki her bir eğri, bir eğrilik çizgisidir.

8. JOACHIMSTHAL TEOREMİ:

İki yüzey (M_1 ve M_2) bir eğri boyunca sabit açıyla kesişiyorsa ve arakesit eğrisi M_1 de asli eğrilik çizgisi ise M_2 içinde asli eğrilik çizgisidir (Béghin, 1890).



Şekil 8.1

İspat:

$\langle N_1(\gamma(s)), N_2(\gamma(s))\rangle = 0$ olduğunu kabul edelim.

$T = \gamma'(s)$ olsun γ, M_1 yüzeyi üzerinde asli eğrilik çizgisi, $k_{g,1}$ geodezik eğriliği, $\tau_{g,1} = 0$ geodezik burulması ve $k_{m,1}$ asli eğriliğidir. Bundan dolayı,

$$T' = k_{g,1}N_1 \wedge T + k_{m,1}N_1$$

$$(N_1 \wedge T)' = -k_{g,1}T + \tau_{g,1}N \qquad (8.1)$$

$$N_1{}' = -k_{m,1}T - \tau_{g,1}N \wedge T$$

M_2 yüzeyinin bir eğrisi olarak γ için Darboux çatısı aşağıdaki gibi verilebilir.

$$T' = k_{g,2}N_2 \wedge T + k_{n,2}N_2$$

$$(N_2 \wedge T)' = -k_{g,2}T + \tau_{g,2}N \qquad (8.2)$$

$$N_2{}' = -k_{n,2}T - \tau_{g,2}(N_2 \wedge T)'$$

Burada M_2 yüzeyinin eğrisi olarak γ nın, normal eğriliği $k_{n,2}$, geodezik burulması $\tau_{g,2}$ ve geodezik eğriliği $k_{g,2}$ dir.

$\langle N_1, N_2 \rangle = 0$ olduğu için $N_2 = \pm N_1 \wedge T$ dir.

Farz edelim ki, $N_2 = N_1 \wedge T$ olsun. (8.1) ve (8.2) denklemlerinden $N_1 = T \wedge N_2$ kullanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\tau_{g,2} = \tau_{g,1} = 0$$

$$k_{g,1} = k_{m,2}$$

$$k_{g,2} = k_{m,1}$$

Burada $k_{m,2}$ M_2 nin asli eğriliğidir. Bundan dolayı γ, M_2 asli eğrilik çizgisidir.

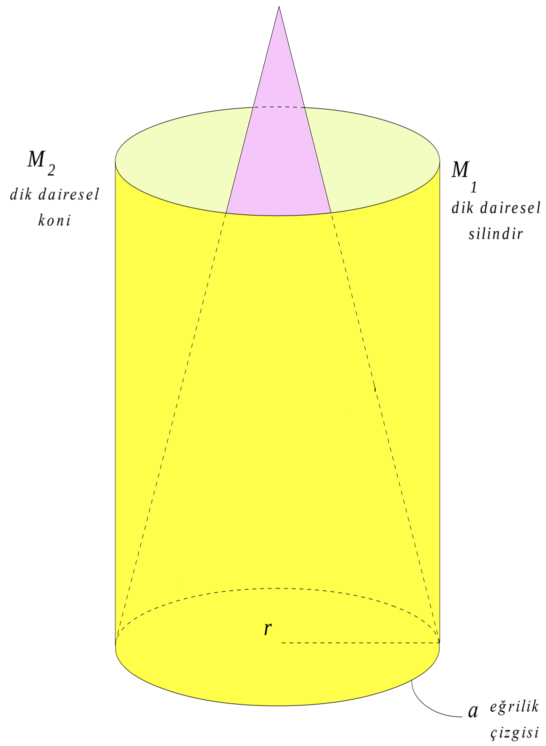
$\langle N_1, N_2 \rangle = sbt \neq 0$ bu durum içinde benzedir.

8.1. $\boldsymbol{E^n}$ için Joachimsthal Teoremi:

E^n n-boyutlu Öklid uzayında M_1 ve M_2 hiperyüzeyleri verilsin. Bu iki hiperyüzey bir eğri boyunca sabit açıyla kesişiyorsa ve arakesit eğrisi M_1 de asli eğrilik çizgisi ise M_2 içinde asli eğrilik çizgisidir (Struik, 1950).

Joachimsthal Teoremi İle İlgili Örnekler:

8.1. Örnek: M_1 (silindir) ve M_2 (koni) yüzeyi α(çember) eğrisi boyunca sabit açıyla kesişsin. Bu eğrinin iki yüzey için eğrilik çizgisi olduğunu gösterelim.



Şekil 8.2

$\Phi: E^2 \rightarrow E^3$

$(u, v) \rightarrow \Phi(u, v) = (rcosu, rsinu, v)$

biçiminde verilen r yarıçaplı M_1 silindir yüzeyinin eğrilik çizgilerini bulalım. Bunun için önce silindir yüzeyinin asli eğriliklerini hesaplayalım. $\Phi(u, v)$ nin u ve v ye göre türevleri alınırsa,

$$\Phi_u = (-rsinu, rcosu, 0)$$

$$\Phi_v = (0,0,1)$$

olur.

$\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0$ olduğundan $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ sistemi $X(M_1)$ için bir ortogonal sistemdir.

Şimdi Φ_{uu}, Φ_{vv} ve Φ_{uv} yi hesaplayalım.

$$\Phi_{uu} = (-rcosu, -rsinu, 0)$$

$$\Phi_{vv} = (0,0,0)$$

$$\Phi_{uv} = (0,0,0)$$

$\Phi_{uv} = \Phi_{vv} = (0,0,0)$ olduğundan

$$\det(\Phi_{\boldsymbol{vv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = \det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = 0$$

ve

$$\det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v) = \begin{vmatrix} -rcosu & -rsinu & 0 \\ -rsinu & rcosu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -rcosu(rcosu - 0) + rsinu(-rsinu - 0) + 0$$

$$= -r^2cos^2u - r^2sin^2u$$

$$= -r^2(cos^2u + sin^2u)$$

$$= -r^2$$

olur. Φ_u ve Φ_v nin normlarını hesaplarsak,

$$\|\Phi_u\| = \sqrt{\langle \|\Phi_u\|, \|\Phi_u\| \rangle} = \sqrt{\langle (-rsinu, rcosu, 0), (-rsinu, rcosu, 0) \rangle}$$

$$= \sqrt{r^2sin^2u + r^2cos^2u}$$

$$= \sqrt{r^2(sin^2u + cos^2u)}$$

$$= r$$

$$\|\Phi_v\| = \sqrt{\langle \|\Phi_v\|, \|\Phi_v\| \rangle} = \sqrt{\langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle}$$

$$= 1$$

olur. $\|\Phi_u\| = r$ için $\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^3 = r^3$ ve $\|\Phi_v\| = 1$ olduğundan,

$$-\frac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^3 \|\Phi_v\|} \det(\Phi_{\boldsymbol{uu}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = -\frac{-r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

olur.

O halde şekil operatörünün matrisi için,

$$S = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|}\det(\Phi_{uu},\Phi_u,\Phi_v) & -\dfrac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v) \\ -\dfrac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v) & -\dfrac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3}\det(\Phi_{vv},\Phi_u,\Phi_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Silindirin asli eğrilikleri, $k_1 = \frac{1}{r}, k_2 = 0.$

Parametre eğrileri, eğrilik çizgileridir. Çünkü, $\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v) = 0$ olduğundan $S(\Phi_u) = \frac{1}{r}\Phi_u$, $S(\Phi_v) = 0\Phi_v$ dir.

Başka bir ifadeyle, $\Phi(u,v) = (rcosu, rsinu, v)$ parametre eğrisinin(v sabit) teğet vektörü $t_u = (-rsinu, rcosu, 0)$, S nin karakteristik vektörü olan Φ_u ye karşılık geldiğinden parametre eğrisi M_1 üzerinde bir eğrilik çizgisidir. O halde silindir yüzeyi üzerindeki her çember bir eğrilik çizgisidir.

α eğrisinin M_2 yüzeyi içinde eğrilik çizgisi olduğunu açık şekilde gösterelim.

$$\Phi: E^2 \to E^3$$

$$(u,r) \to \Phi(u,r) = (rcosu, rsinu, r)$$

biçiminde verilen r yarıçaplı M_2 koni yüzeyinin eğrilik çizgilerini bulalım. Bunun için önce koni yüzeyinin asli eğriliklerini hesaplayalım.

$\Phi(u,r)$ nin u ve r ye göre türevleri alınırsa,

$$\Phi_u = (-rsinu, rcosu, 0)$$

$$\Phi_r = (cosu, sinu, 1)$$

olur. $\langle\Phi_u,\Phi_r\rangle = 0$ olduğundan $\{\Phi_u,\Phi_r\}$ sistemi $X(M_2)$ için bir ortogonal sistemdir.

Şimdi Φ_{uu}, Φ_{rr} ve Φ_{ur} yi hesaplayalım.

$$\Phi_{uu} = (-rcosu, -rsinu, 0)$$

$$\Phi_{rr} = (0,0,0)$$

$$\Phi_{ur} = (-cosu, sinu, 0)$$

şeklinde bulunur.

$$\det(\Phi_{uu},\Phi_u,\Phi_r)=\begin{vmatrix}-rcosu & -rsinu & 0\\ -rsinu & rcosu & 0\\ cosu & sinu & 1\end{vmatrix}$$

$$=-rcosu(rcosu-0)+rsinu(-rsinu-0)+0$$

$$=-r^2cos^2u-r^2sin^2u$$

$$=-r^2(cos^2u+sin^2u)$$

$$=-r^2$$

$\Phi_{rr}=(0,0,0)$ olduğundan $\det(\Phi_{rr},\Phi_{\boldsymbol{u}},\Phi_r)=0$

$$\det(\Phi_{ur},\Phi_u,\Phi_r)=\begin{vmatrix}-sinu & cosu & 0\\ -rsinu & rcosu & 0\\ cosu & sinu & 1\end{vmatrix}$$

$$=-sinu(rcosu-0)-cosu(-rsinu-0)+0$$

$$=0$$

olur. Φ_u ve Φ_r nin normlarını hesaplarsak,

$$\|\Phi_u\|=\sqrt{\langle\|\Phi_u\|,\|\Phi_u\|\rangle}=\sqrt{\langle(-rsinu,rcosu,0),(-rsinu,rcosu,0)\rangle}$$

$$=\sqrt{r^2sin^2u+r^2cos^2u}$$

$$=\sqrt{r^2(sin^2u+cos^2u)}$$

$$=r$$

$$\|\Phi_r\|=\sqrt{\langle\|\Phi_r\|,\|\Phi_r\|\rangle}=\sqrt{\langle(cosu,sinu,1),(cosu,sinu,1)\rangle}$$

$$=\sqrt{sin^2u+cos^2u+1}$$

$$=\sqrt{2}$$

$\|\Phi_u\|=r$ için $\|\Phi_u\|^3=r^3$ ve $\|\Phi_r\|=\sqrt{2}$ olduğundan,

$$-\frac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_r\|}\det(\Phi_{\boldsymbol{uu}},\Phi_{\boldsymbol{u}},\Phi_r)=-\frac{-r^2}{r^3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}r}$$

olur. O halde şekil operatörünün matrisi için,

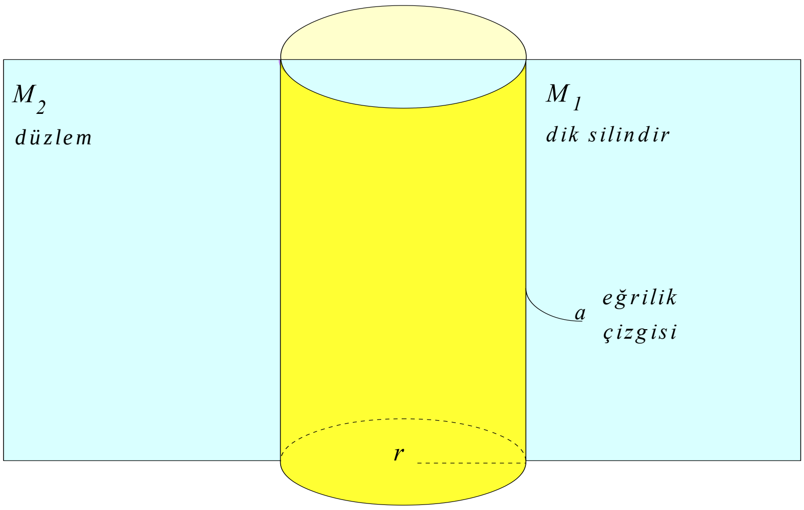
$$S=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_r\|}\det(\Phi_{uu},\Phi_u,\Phi_r) & -\dfrac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_r\|^2}\det(\Phi_{ur},\Phi_u,\Phi_r) \\ -\dfrac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_r\|^2}\det(\Phi_{ur},\Phi_u,\Phi_r) & -\dfrac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_r\|^3}\det(\Phi_{rr},\Phi_u,\Phi_r) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Koninin asli eğrilikleri, $k_1=\frac{1}{\sqrt{2}r}, k_2=0$.

Başka bir ifadeyle, $\Phi(u,r)=(rcosu, rsinu, r)$ parametre eğrisinin(r sabit) teğet vektörü $t_u=(-rsinu, rcosu, 0)$, S nin karakteristik vektörü olan Φ_u ye karşılık geldiğinden parametre eğrisi M_2 üzerinde bir eğrilik çizgisidir. O halde koni yüzeyi üzerindeki her çember bir eğrilik çizgisidir.

8.2. Örnek: M_1(silindir) ve M_2(düzlem) α(doğru) eğrisi boyunca sabit açıyla kesişsin. Bu eğrinin iki yüzey için eğrilik çizgisi olduğunu gösterelim.



Şekil 8.3

$\Phi: E^2 \to E^3$

$(u,v) \to \Phi(u,v)=(rcosu, rsinu, v)$

biçiminde verilen r yarıçaplı M_1 silindir yüzeyinin eğrilik çizgilerini bulalım. Bunun için önce silindir yüzeyinin asli eğriliklerini hesaplayalım.

$\Phi(u,v)$ nin u ve v ye göre türevleri alınırsa,

$$\Phi_u = (-rsinu, rcosu, 0)$$

$$\Phi_v = (0,0,1)$$

olur.

$\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0$ olduğundan $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ sistemi $X(M_1)$ için bir ortogonal sistemdir.

Şimdi Φ_{uu}, Φ_{vv} ve Φ_{uv} yi hesaplayalım.

$$\Phi_{uu} = (-rcosu, -rsinu, 0)$$

$$\Phi_{vv} = (0,0,0)$$

$$\Phi_{uv} = (0,0,0)$$

$\Phi_{uv} = \Phi_{vv} = (0,0,0)$ olduğundan

$$\det(\Phi_{vv}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_v) = \det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = 0$$

ve

$$\det(\Phi_{uu}, \Phi_u, \Phi_v) = \begin{vmatrix} -rcosu & -rsinu & 0 \\ -rsinu & rcosu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -rcosu(rcosu - 0) + rsinu(-rsinu - 0) + 0$$

$$= -r^2cos^2u - r^2sin^2u$$

$$= -r^2(cos^2u + sin^2u)$$

$$= -r^2$$

olur. Φ_u ve Φ_v nin normlarını hesaplarsak,

$$\|\Phi_u\| = \sqrt{\langle \|\Phi_u\|, \|\Phi_u\| \rangle} = \sqrt{\langle (-rsinu, rcosu, 0), (-rsinu, rcosu, 0) \rangle}$$

$$= \sqrt{r^2sin^2u + r^2cos^2u}$$

$$= \sqrt{r^2(sin^2u + cos^2u)}$$

$$= r$$

$$\|\Phi_v\| = \sqrt{\langle \|\Phi_v\|, \|\Phi_v\| \rangle} = \sqrt{\langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle}$$

$$= 1$$

olur. $\|\Phi_u\| = r$ için $\|\Phi_u\|^3 = r^3$ ve $\|\Phi_v\| = 1$ olduğundan,

$$-\frac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|}\det(\Phi_{uu},\Phi_u,\Phi_v) = -\frac{-r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

olur.

O halde şekil operatörünün matrisi için,

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\|\Phi_u\|^3\|\Phi_v\|}\det(\Phi_{uu},\Phi_u,\Phi_v) & -\frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v) \\ -\frac{1}{\|\Phi_u\|^2\|\Phi_v\|^2}\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v) & -\frac{1}{\|\Phi_u\|\|\Phi_v\|^3}\det(\Phi_{vv},\Phi_u,\Phi_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Silindirin asli eğrilikleri, $k_1 = \frac{1}{r}, k_2 = 0$.

Parametre eğrileri, eğrilik çizgileridir. Çünkü, $\det(\Phi_{uv},\Phi_u,\Phi_v) = 0$ olduğundan $S(\Phi_u) = \frac{1}{r}\Phi_u$, $S(\Phi_v) = 0\Phi_v$ dir.

Başka bir ifadeyle, $\Phi(u,v) = (rcosu, rsinu, v)$ parametre eğrisinin(u sabit) teğet vektörü $t_v = (0,0,1)$, S nin karakteristik vektörü olan Φ_v ye karşılık geldiğinden parametre eğrisi M_1 üzerinde bir eğrilik çizgisidir. O halde silindir yüzeyi üzerindeki her doğru bir eğrilik çizgisidir.

α eğrisi M_1 yüzeyi için eğrilik çizgisi olduğundan M_2 yüzeyi içinde eğrilik çizgisidir. α eğrisinin M_2 yüzeyi içinde eğrilik çizgisi olduğunu açık şekilde gösterelim.

$$\Phi: E^2 \to E^3$$

$$(u,v) \to \Phi(u,v) = (u, v, -\frac{au+bv+d}{c})$$

biçiminde verilen M_2 düzleminin eğrilik çizgilerini bulalım. Bunun için önce düzlemin asli eğriliklerini hesaplayalım.

$\Phi(u,v)$ nin u ve v ye göre türevleri alınırsa,

$$\Phi_u = \left(1,0,-\frac{a}{c}\right)$$

$$\Phi_v = (0,1,-\frac{b}{c})$$

olur.

Şimdi Φ_{uu}, Φ_{vv} ve Φ_{uv} yi hesaplayalım.

$$\Phi_{uu} = (0,0,0)$$

$$\Phi_{vv} = (0,0,0)$$

$$\Phi_{uv} = (0,0,0)$$

olduğundan

$$\det(\Phi_{\boldsymbol{uu}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = \det(\Phi_{\boldsymbol{vv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = \det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = 0$$

O halde şekil operatörünün matrisi için,

$$S = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^3 \|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|} \det(\Phi_{\boldsymbol{uu}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) & -\dfrac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^2 \|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|^2} \det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) \\ -\dfrac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\|^2 \|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|^2} \det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) & -\dfrac{1}{\|\Phi_{\boldsymbol{u}}\| \|\Phi_{\boldsymbol{v}}\|^3} \det(\Phi_{\boldsymbol{vv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

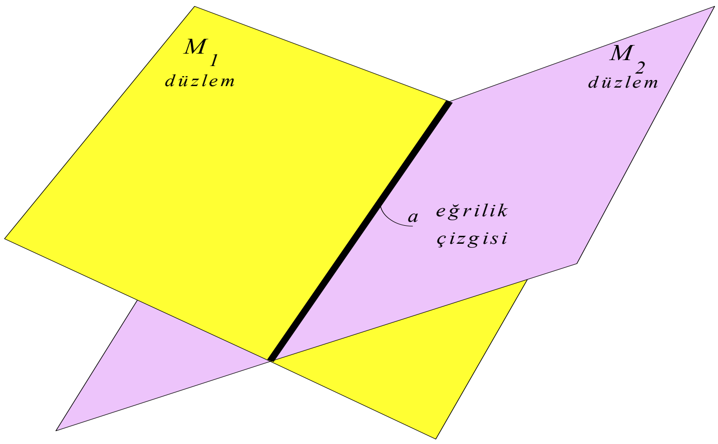
elde edilir.

Düzlemin asli eğrilikleri, $k_1 = k_2 = 0$.

Parametre eğrileri, eğrilik çizgileridir. Çünkü, $\det(\Phi_{\boldsymbol{uv}}, \Phi_{\boldsymbol{u}}, \Phi_{\boldsymbol{v}}) = 0$ olduğundan $S(\Phi_{\boldsymbol{u}}) = 0\Phi_{\boldsymbol{u}}$, $S(\Phi_{\boldsymbol{v}}) = 0\Phi_{\boldsymbol{v}}$ dir.

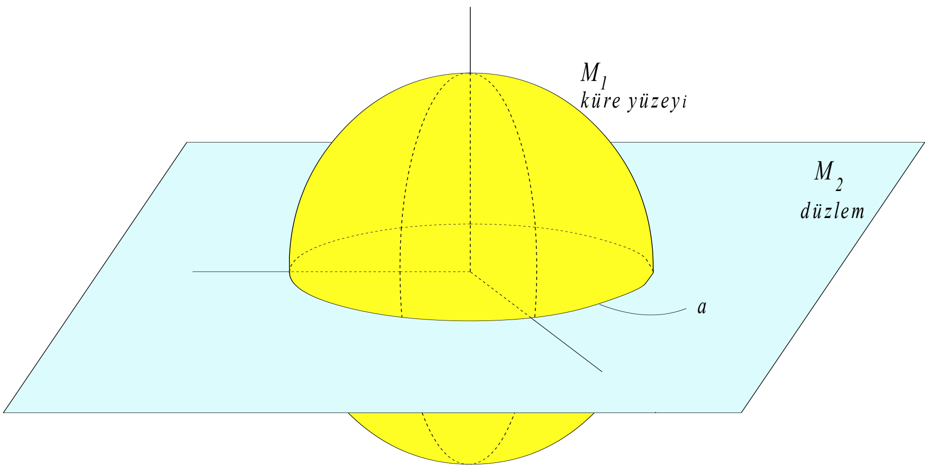
Başka bir ifadeyle, $\Phi(u, v) = (u, v, -\frac{au+bv+d}{c})$ parametre eğrisinin(u sabit) teğet vektörü $t_v = \left(0,1, -\frac{b}{c}\right)$, S nin karakteristik vektörü olan $\Phi_{\boldsymbol{v}}$ ye karşılık geldiğinden parametre eğrisi M_2 üzerinde bir eğrilik çizgisidir. O halde düzlem üzerindeki her doğru bir eğrilik çizgisidir.

8.3. Örnek: M_1**(**düzlem) ve M_2(düzlem) α eğrisi boyunca sabit açıyla kesiştiğinden bu eğri, iki yüzey içinde eğrilik çizgisidir.



Şekil 8.4

8.4. Örnek:M_1**(**küre) ve M_2(düzlem) α eğrisi boyunca kesişiyor. Bu iki yüzeyin arakesiti olan α eğrisi bir çemberdir. Kürenin yüzeyi üzerindeki tüm çemberler birer eğrilik çizgisi olduğundan α eğrisi küre için bir eğrilik çizgisidir. Fakat α eğrisi düzlem için bir eğrilik çizgisi değildir çünkü düzlemin eğrilik çizgileri düzlem üzerindeki doğrulardır. O halde α eğrisi iki yüzey için eğrilik çizgisi değildir.



Şekil 8.5

$\varphi(u,v)$ bir regüler yüzey, $\varphi(u,v)=0$ yüzey üstünde bir eğri

$$u=u(t)$$
$$v=v(t)$$

.

$$x=x_u\dot{u}+x_v\dot{v} \tag{8.3}$$

$$dx=x_u du+x_v dv \tag{8.4}$$

P ve Q noktası arasındaki uzaklık,

$$ds^2=\sum_{i=1}^{3} dx_i\,dx_i=\langle dx,dx\rangle$$

ile verilir. (8.4) teki değerler yerine yazılırsa;

$$ds^2=\langle (x_u du+x_v dv),(x_u du+x_v dv)\rangle$$

$$ds^2=\underbrace{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}_{I.Temel\ Form}$$

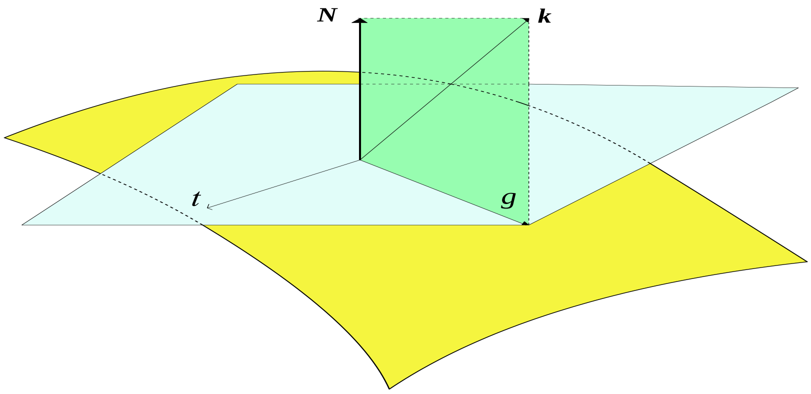
elde edilir.

Yüzey üstünde bir nokta P, P den geçen bir eğri C, $x(s)$ parametrik ifadesi ve C nin eğrilik vektörü $\vec{k}={dt}/{ds}$ olsun.

$\vec{k}=\overrightarrow{k_n}+\overrightarrow{k_g}$, $\overrightarrow{k_n}$: N deki izdüşüm $\overrightarrow{k_g}$: Teğet düzlemdeki izdüşüm

$\overrightarrow{k_n}=\kappa_n\vec{N}$, $\overrightarrow{k_n}$: nornal eğrilik vektörü, κ_n : normal eğrilik

$\overrightarrow{k_g}=\kappa_g\vec{g}$, $\overrightarrow{k_g}$: geodezik eğrilik vektörü, κ_g : geodezik eğrilik



Şekil 8.6

$$\langle \vec{t}, N\rangle = 0 \rightarrow \langle \frac{dt}{ds}, N\rangle + \langle t, \frac{dN}{ds}\rangle = 0$$

$$\rightarrow \langle \frac{dt}{ds}, N\rangle = -\langle t, \frac{dN}{ds}\rangle$$

$$\langle \vec{k}, N\rangle = -\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dN}{ds}\rangle$$

$$\kappa_n = -\frac{\langle dx, dN\rangle}{ds^2}, \qquad ds^2 = \langle dx, dx\rangle$$

$$K_n = -\frac{\langle dx, dN\rangle}{\langle dx, dx\rangle}$$

$$dx = x_u du + x_v dv\,, \qquad dN = N_u du + N_v dv$$

$$\kappa_n = -\frac{\langle x_u, N_u\rangle du^2 + (\langle x_u, N_v\rangle + \langle x_v, N_u\rangle) dudv + \langle x_v, N_v\rangle dv^2}{\langle x_u, x_u\rangle du^2 + 2\langle x_u, x_v\rangle dudv + \langle x_v, x_v\rangle dv^2}$$

$$\kappa_n = \frac{edu^2 + 2fdudv + gv^2 \ : II}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 : \ I}$$

$$\kappa_n = \frac{e\frac{du^2}{du^2} + 2f\frac{dudv}{du^2} + g\frac{dv^2}{du^2}}{E\frac{du^2}{du^2} + 2F\frac{dudv}{du^2} + G\frac{dv^2}{du^2}}\ , \quad \frac{dv}{du} = \lambda$$

$$\kappa_n = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} = \kappa_n(\lambda)$$

$\frac{d\kappa_n}{d\lambda} = 0$, κ_n eğriliğinin ekstremum değerlerini verir.

$$(e + 2f\lambda + g\lambda^2)'(E + 2F\lambda + G\lambda^2) - (E + 2F\lambda + G\lambda^2)'(e + 2f\lambda + g\lambda^2) = 0$$

dan türev alma ve cebirsel işlemler yapılırsa ,

$$(gF - fG)\lambda^2 + (Eg - eG)\lambda + (Ef - eF) = 0 \tag{8.5}$$

veya $\lambda = \frac{dv}{du}$ yerine yazılır ve du^2 ile çarpılırsa,

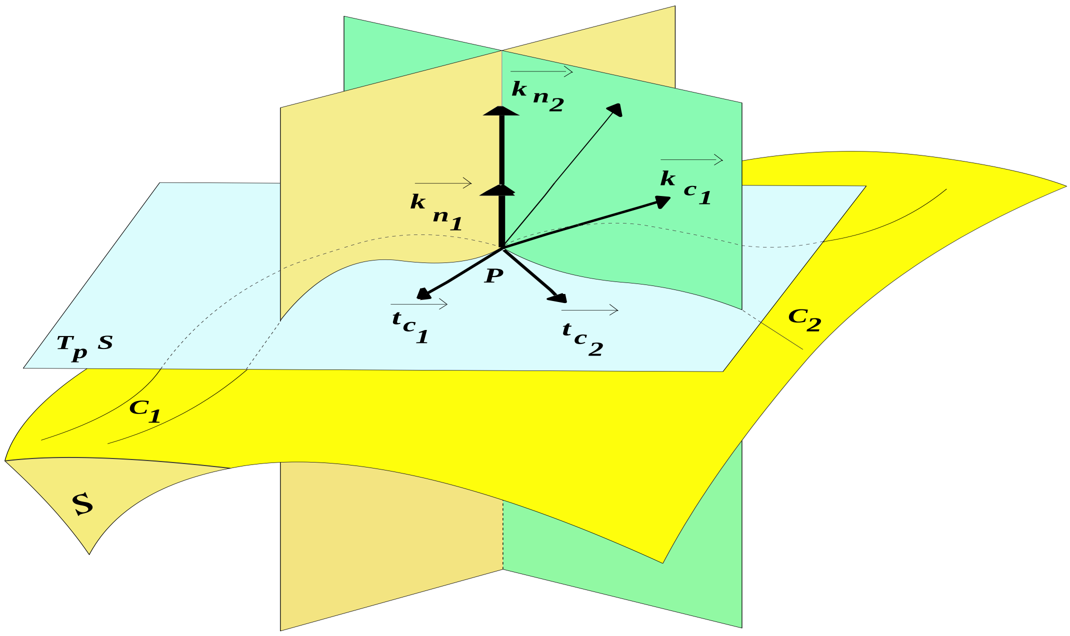
$$(gF - fG)dv^2 + (Eg - eG)dudv + (Ef - eF)du^2 = 0 \tag{8.6}$$

veya matris notasyonuyla

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \tag{8.7}$$

elde edilir. du ve dv arasındaki ilgi $\varphi_u du + \varphi_v dv = 0$ ile verilir.

(8.5), (8.6) veya (8.7) $^{dv}/_{du}$ nun iki doğrultusunu verir. Bunlar en küçük ve en büyük karekteristik değerlere karşı gelen doğrultulardır. Bu doğrultulara , asli doğrultular , asli eğrilik doğrultuları veya eğrilik doğrultuları denir (Struik, 1950).



Şekil 8.7

Verilen bir diferensiyellenebilir yüzeyin asli eğrilik çizgileri (8.6) veya (8.7) nolu diferensiyel denklemin çözümünden bulunur.

8.5. Örnek: $\Phi: E^2 \to E^3$

$(u, v) \to \Phi(u, v) = (u, v, uv)$ biçiminde verilen M yüzeyinin eğrilik çizgilerini bulunuz.

$\Phi(u, v) = (u, v, uv)$ nun *u* ya ve *v* ye göre türevleri alınırsa,

$$\Phi_u = (1,0, v)$$

$$\Phi_v = (0,1, u)$$

olur.

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = (-v, -u, 1)$$

ve

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}$$

olmak üzere yüzeyin birim normal vektörü,

$$N = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}(-v, -u, 1)$$

dir. N nin u ya ve v ye göre türevleri alınırsa,

$$N_u = \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}(uv, -v^2 - 1, -u)$$

$$N_v = \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}(-u^2 - 1, uv, -v)$$

elde edilir.

$$E = \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle = \langle (1,0,v), (1,0,v) \rangle = 1 + v^2$$

$$F = \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = \langle (1,0,v), (0,1,u) \rangle = uv$$

$$G = \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle = \langle (0,1,u), (0,1,u) \rangle = 1 + u^2$$

$$e = -\langle \Phi_u, N_u \rangle$$

$$= -\left\langle (1,0,v), \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}(uv, -v^2 - 1, -u) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}(uv + 0 - uv) = 0$$

$$f = -\frac{\langle \Phi_u, N_v \rangle + \langle \Phi_v, N_u \rangle}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\langle (1,0,v), \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}(-u^2 - 1, uv, -v) \right\rangle$$

$$-\frac{1}{2}\left\langle (0,1,u), \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}(uv, -v^2 - 1, -u) \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{2(u^2+v^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left(-u^2-1-v^2-v^2-u^2-1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}$$

$$g = -\langle \Phi_v, N_v \rangle$$

$$= -\left\langle (0,1,u), \frac{1}{(u^2+v^2+1)^{\frac{3}{2}}}(-u^2-1, uv, -v) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2+1)^{\frac{3}{2}}}(0+uv-uv) = 0$$

E, F, G, e, f, g değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1+v^2 & uv & 1+u^2 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(0 - \frac{1+u^2}{\sqrt{u^2+v^2+1}}\right)dv^2 + (0-0)dudv + \left(\frac{1+v^2}{\sqrt{u^2+v^2+1}} - 0\right)du^2 = 0$$

$$-\frac{1+u^2}{\sqrt{u^2+v^2+1}}dv^2 + \frac{1+v^2}{\sqrt{u^2+v^2+1}}du^2 = 0$$

$$\frac{1+u^2}{\sqrt{u^2+v^2+1}}dv^2 = \frac{1+v^2}{\sqrt{u^2+v^2+1}}du^2$$

$$\frac{dv^2}{du^2} = \frac{1+v^2}{1+u^2}$$

$$\frac{dv}{du} = \pm\frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \pm\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \rightarrow \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln(v+\sqrt{1+v^2}) + \ln c_1$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{u+\sqrt{1+u^2}}{v+\sqrt{1+v^2}}\right) = \ln c_1$$

$$\rightarrow \frac{u+\sqrt{1+u^2}}{v+\sqrt{1+v^2}} = c_1 \qquad (8.8)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \rightarrow \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = -\ln(v+\sqrt{1+v^2}) + \ln c_2$$

$$\rightarrow \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\left(v+\sqrt{1+v^2}\right) = \ln c_2$$

$$\rightarrow \left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\left(v+\sqrt{1+v^2}\right) = c_2 \qquad (8.9)$$

(8.8) ve (8.9) eğrilerini verir. Bu eğriler yüzeyin eğrilik çizgileridir.

KAYNAKLAR

Barros, A., Silva, J., Sausa, P., 2012. Rotational linear weingarten surfaces into the euclidean sphere, ***Israel Journal of Mathematics 192,*** 819-830.

Béghin, 1890. Note sur le cercle de joachimsthal. ***Bulletin de la S.M.F, Tome 18,*** 138-140.

Brickell, F., Clark, R.S,, 1970. ***Differentiable Manifolds.*** Van Nostrand Reinhold Company, London.

Carmo, M., 1976. ***Differential Geometry of Curves and Surfaces.*** Prencite-Hall New Jersey.

Hacısalihoğlu, H.H., 1994. ***Diferensiyel Geometri.*** Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

Hicks, N.J., 1974. ***Notes on Differential Geometry.*** Von. Nort. Rein. Com., London.

Kaya, F.E., Yaylı, Y., Hacısalihoğlu, H.H., 2010. A characterization of cylindrical helix strip. ***Commun. Fac. Sci. Univ. Ank.Series A1, Vol. 59, No. 2,*** 37-51.

Keleş, S., 1982. ***Manifoldlar İçin Joachimsthal Teoremleri.*** Doktora tezi, Fırat Üniversitesi Fen Fakütesi Matematik Bölümü.

Kızıltuğ, S., Kaya, S., Tarakçı Ö., 2013. Tube surfaces with typhe-2 bishop frame of weingarten typhes in E^3. ***Int. Journal Of Math. Analysis, Vol. 7, No. 1,*** 9-18.

Masal′tsev, L.A., 2000. Joachimsthal surfaces in S^3. ***Mathematical Notes, Vol. 67, No. 2,*** 176-182.

Matsushima, Y., 1972. ***“Differentiable Manifolds”.*** Marcel Dekker, INC., New York.

O’Neil,B., 1961. ***Elementary Differential Geometry.***

Raffy, L., 1903. Determination des surfaces de joachimsthalá courbures principales liées par une relation. ***Annales Scientifiques de L'.É.N.S.* 3*e* *Série, Tome 20,*** 379-410.

Struik, D., 1950. ***Differential Geometry***. Addison-Weshey Press, Inc. Cambridge.

Tunçer, Y., Yaylı, Y., Sağel, M.K., 2008. On kinematics and diferential geometry of euclidean submanifolds. ***Balkan Journal of Gometry and Its Applications, Vol. 13, No. 2,*** pp. 102-111.

ÖZ GEÇMİŞ

Şırnak ilinin Beytüşşebap ilçesinde 15.05.1986 tarihinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Van İrfanbaştuğ İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini Van Atatürk Süper Lisesi'nde tamamladı. Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden lisans diploması alarak 2010 yılında mezun oldu. 2011 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı.