T.C

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI OPERATÖRLERİN KATLILIĞININ HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: CİHAN ARSLAN

DANIŞMAN: PROR. DR.HEYBETKULU MUSTAFAYEV

VAN-2013

T.C

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI OPERATÖRLERİN KATLILIĞININ HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: CİHAN ARSLAN

VAN-2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı’nda Prof. Dr. Heybetkulu S. MUSTAFAYEV danışmanlığında, Cihan ARSLAN tarafından sunulan ‘’Bazı Operatörlerin Katlılığını Hesaplanması’’ isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili hükümleri gereğince 18/09/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Heybetkulu S. MUSTAFAYEV İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Cesim TEMEL İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Murat CANCAN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 04/10/2013 tarih ve 2013/27-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

imza

Enstitü Müdürü

ÖZET

BAZI OPERATÖRLERİN KATLILIĞININ HESAPLANMASI

ARSLAN, Cihan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV

Eylül 2013 , 32 sayfa

Bu çalışmada, X ayrılabilir bir kompleks Banach uzayında bazı sınıf lineer ve sınırlı operatörlerin katlılığını incelemiştir. Ayrıca bu tezde $C(\Gamma)$ ve $\mathcal{A}(\mathcal{D})$-disk cebirinde çarpma operatörünün katlılığını da incelemiştir. Eğer T operatörü $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de bir çarpma operatörü ise $m(T^n) = n$ olduğunu gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Banach uzayı, Katlılık, Operatör**.**

ABSTRACT

ESTIMATE MULTIPLICITY OF SOME OPERATORS

ARSLAN, Cihan

Msc. Mathematics Sciense

Supervisor: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV

September 2013, 32 pages

In this study, X a complex separable Banach space multiplicity of some class linear and bouned operators examined. Also in this thesis $C(\Gamma)$ and $\mathcal{A}(\mathcal{D})$-disc algebra multiplication operator multiplicity also examined. If T operator $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ is a multiplication operator $m(T^n) = n$ is shown.

Key words: Banach space, Multiplicity ,Operator**.**

ÖN SÖZ

Bu çalışmada, X ayrılabilir bir kompleks Banach uzayında etki eden sınırlı lineer operatörlerin katlılığı incelenmiştir ve bazı sonuçları ispatlanmıştır. Ayrıca bu tezde $C(\Gamma)$ ve $\mathcal{A}(\mathcal{D})$-disk cebirinde çarpma operatörünün katlılığı da verilmektedir.

Beni matematiğin spektral teorisi ile tanıştıran ve bunun ötesinde operatörler teorisinde oldukça önemli bir yere sahip operatörlerin katlılığı gibi bir konuda çalışmamı sağlayan ve bu çalışma boyunca yol gösteren danışman hocam sayın Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV'e teşekkür ederim.

Cihan ARSLAN

İÇİNDEKİLER

sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3. BAZI OPERATÖRLERİN KATLILIĞININ HESAPLANMASI	12
4. ÜNİTER OPERATÖRLERİN DERECELERİ	20
5. DARALMA OPERATÖRLERİN DERECELERİ	24
6. DİREKT TOPLAMLARIN KATLILIĞI	27
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	30
KAYNAKLAR	31
ÖZ GEÇMİŞ	32

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathcal{L}$(X)	Sınırlı lineer operatörlerin cebiri
m(T)	T operatörünün katlılığı
m(A)	A cebirinin katlılığı
$m(\mathrm{T}_n)$	T operatörünün Direkt toplamlar katlılığı
H	Bir Hilbert uzayı
Γ	Kompleks düzlem üzerinde birim çemberi
C(Γ)	Birim çember üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayı
$A(\mathcal{D})$	Birim çember içinde analitik ve sınırında sürekli olan fonksiyonlar cebiri.
σ	Birim çember üzerinde Lebesgue ölçümü
δ_x	Dirac ölçümü
$dimG$	G kümesinin boyutu
T^*	T operatörünün adjoint operatörü
Ker T	T operatörünün çekirdeği
$(X, \|.\|)$	Normlu uzayı
$\|T\|$	T operatörünün normu
$\oplus$	Bir $\{X_i\}_{i=1}^n$ ailesinin direkt toplamı

1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Matematikte operatörlerin spektral teorisi önemli bir yere sahiptir. Spektral teoride operatörlerin spektral ayrışımı, spektral ayırışımda da operatörlerin katlılığı çok önemlidir.

X ile ayrılabilir bir kompleks Banach uzayını ve $\mathcal{L}(X)$ ile de X üzerinde sınırlı lineer operatörler cebirini gösterilsin. Ayrıca A cebiri $\mathcal{L}(X)$ in birim operatörünü içeren bir alt cebiri, G ise X in bir altkümesi olsun. Eğer $\{ T\mathrm{x}: \mathrm{x} \in G, T \in A\}$ kümesi X de yoğun ise A cebiri $devirlidir$ denir ve G ye de A nın *devirli bir alt kümesi* adı verilir. A cebirinin devirli alt kümelerinin en küçük kardinalitesine A nın katlılığı (multiplicity) denir ve m(A) ile gösterilir (Atzmon,1987).

$\mathcal{A}_{T=}\overline{\{P(T): P \in \mathbb{P}\}}$ olarak tanımlanırsa buradan $\mathbb{P}$ karmaşık katsayılı tüm polinomlar kümesini göstersin. $\mathcal{A}_T$, $\mathcal{L}$(X) in bir alt cebiri olur ve $\mathcal{A}_T$ ye T nin *doğurgan cebiri* denir. Yukarıdaki tanımdan A cebirinin yerine T operatörünün doğurduğu cebiri alındığında bu kez T operatörünün katlılığından bahsedilir (Atzmon,1987).

T operatörünün katlılığı yukarıdaki tanımlara dayanarak

$$m(T)=\inf\{\dim G: X = \overline{span}\{T^n x: x \in G\}\}$$

şeklinde tanımlanır ve $m(T)$ ile gösterilir (Atzmon,1987).

Eğer $\overline{span}\{\mathrm{T}^n x: n \geq 0\}=X$ olacak şekilde $\exists x\epsilon X$ varsa x vektörüne T nin devirli vektörü denir. Eğer T operatörünün bir devirli vektörü varsa T ye devirli operatör denir. Buradan görülür ki T nin devirli olması için gerek ve yeter şart onun katlılığının bir olmasıdır. Yani $m(T)$=1 dir (Atzmon,1987).

Nagy ve Foias(1983), T operatörü bütünüyle üniter olmayan bir operatör olup $T^n x_0 \nrightarrow 0$ olacak şekilde bir $x_0 \epsilon H$ var ise bu taktirde T^n nin yeterince büyük n için devirli vektörü olmadığını, bir başka değişle $m(T^n)$>1 olduğunu ispatladılar. Daha sonra Atzmon(1987), bu sonucu şu şekilde genelleştirdi: T kompleks Hilbert uzayında bir daralma operatörü olsun. Eğer T hem bütünüyle üniter olmayan hem de $T^n x_0 \nrightarrow 0$ olacak şekilde $x_0 \epsilon H$ varsa

$$m\ (T^n) \geq n\alpha \qquad n=1,2,\ldots$$

olacak şekilde bir $0<\alpha\leq 1$ sabiti vardır (Atzmon,1987).

Bu konuyla ilgili ayrıca yapılan çalışmalar için Atzmon(1972), Conway(1981), Dunford(1963), Halmos(1967), Herrero(1978), Nagy ve Foias(1970), Rudin(1954) ve Yosida(1980) gibi kaynaklara başvurulabilir.

Ayrıca bu tezde $C(\Gamma)$ ve $\mathcal{A}(\mathcal{D})$-disk cebirinde çarpma operatörünün katlılığı da içirilmektedir. Eğer T operatörü $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ bir çarpma operatörü ise $m(T^n) = n$ olduğu da gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım2.1. Vektör Uzayı: Bir $\mathbb{F}$ *cismi* üzerinde *bir vektör uzayı (lineer uzay)*, iki cebirsel işlemle birlikte verilen x, y ve z elemanlarının boş kümeden farklı X kümesidir. Söz konusu iki işlemin tanımı ve bu işlemlere dair sağlanması gereken özellikler aşağıdaki gibidir:

1. Her $x, y \in X$ elemanı için, bir $z = x + y \in X$ elemanı vardır ki bu elemana x, y elemanlarının *toplamı* denir.

2. Her $x \in X$ elemanı ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ skaleri için, x elemanının ve α skalerinin *çarpımı* olan $\alpha x \in X$ vardır öyle ki keyfi $x, y, z \in X$ elemanları ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ skalerleri için aşağıdaki özellikler(*vektör uzayının aksiyomları)* sağlanır:

(V_1). $(x + y) + z = x + (y + z)$

(V_2). $x + 0 = x$ koşulunu sağlayan bir sıfır elemanı $0 \in X$ elemanı vardır.

(V_3). Her x vektörü için $x + (-x) = 0$ koşulunu sağlayan bir $-x$ vektörü vardır.

(V_4). $x + y = y + x$

(V_5). $1x = x$, $0x = 0$

(V_6). $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(V_7). $(\alpha+\beta)x = (\alpha x + \beta x)$

(V_8). $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$\mathbb{F}$ cisminin $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ya da $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olup olmadığına bağlı olarak X uzayına reel ya da kompleks vektör uzayı denir. X uzayının elemanlarına *nokta* ya da *vektör* denir (Bayraktar,2006).

Tanım2.2. Lineer Bağımsızlık: Bir X vektör uzayının sonlu $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alt kümesi

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

eşitliği $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ sonucunu veriyor ise, bu küme *lineer bağımsızdır* denir. Aksi durumda *lineer bağımlıdır* (Bayraktar,2006).

Tanım2.3. Boyut ve Taban: X bir vektör uzayı ve E, X kümesinin boş olmayan bir alt kümesi için

1) E lineer bağımsızdır

2) X =span$E$ (E kümesinin lineer birleşimi)

sağlıyorsa E kümesine X bir *tabanı* denir. Sonlu boyutlu bir X vektör uzayının bir tabandaki eleman sayısına X vektör uzayın *boyutu* denir ve dim$X$ ile gösterilir (Bayraktar,2006).

Tanım2.4. Normlu ve Banach uzayı: X bir uzay vektörü olsun. $\|.\|$: $X \to R$ fonksiyonu her x, $y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir.

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Normlu uzayı ($\|.\|$: X) veya kısaca X ile gösterilir. X normlu uzayında bir (x_{n}) dizisi alınırsa eğer $\|x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{m}}\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ ise (x_{n}) dizisine Cauchy dizisi denir.

X normlu uzayında her Cauchy dizisi X'in bir elemanına yakınsıyorsa X e tam normlu uzay, tam normlu uzaya da bir *Banach uzayı* denir (Bayraktar,2006).

Tanım2.5. ($\|.\|$: X) tam normlu uzayın sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa *ayrılabilir* bir *Banach uzayı* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım2.6.Lineer Operatörler: X ve Y bir Banach uzayı olsun. T: $X \to Y$ dönüşümü X den elde edilen her $x \in X$ için Y nin tek bir y = Tx elemanına karşı koyarsa X de (Y de değerler alanı) bir T *operatörü* tanımlanmıştır denir. T:$X \to Y$ operatörü X den elde edilen her x_1, x_2 ve α,β∈C olmak üzere T(αx_1+ βx_2)=αTx_1+ βTx_2 şartını sağlıyorsa T ye *lineer operatör* denir. *RanT* ile T nin değerleri kümesini gösterilir. $N(\mathrm{T}) = \{x \in X : Tx = 0\}$ kümesi T operatörünün *sıfır uzayıdır* veya *çekirdeğidir* ve ker(T) ile gösterilir (Bayraktar,2006).

Tanım2.7. $\varphi : X_1 \mathrm{x} X_2 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} X_n \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dönüşümü her x_i $1 \leq i \leq n$ için lineer ise, yani

$\varphi(x_1, \ldots, \alpha x_i' + \beta x_i'', \ldots x_n) = \alpha\, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_i', \ldots, x_n) + \beta \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_i'', \ldots, x_n)$

oluyorsa φ dönüşümü *n-lineer* dönüşümdür (Şuhubi, 2001).

Tanım2.8. Keyfi bir T: $X \rightarrow Y$ operatörü için

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ , her } x \in X$$

olacak şekilde bir $C > 0$ reel sayısı varsa *sınırlıdır* denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük C sabitine *T operatörünün normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir. Bir başka değişle

$$\|T\| = \inf\{ C > 0 : \|Tx\| \leq C\|x\|, x \in X\}$$

olur (Bayraktar,2006).

Tanım2.9. T: $X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatörü iken $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$ olması $\|Tx_n - Tx\|_Y \rightarrow 0$ olmasını gerektirirse T'ye sürekli operatör denir. X ve Y birer Banach uzayları olmak üzere X'i Y' ye dönüştüren tüm lineer ve sınırlı operatörlerin kümesine $B(X,Y)$ ile gösterilir (Bayraktar,2006).

Tanım2.10. Cebir: A, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer A üzerinde bir $\cdot$ işlemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa A uzayına K üzerinde bir *cebir* denir.

C_1. $\forall\, x, y, z \in A$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

C_2. $\forall\, x, y, z \in A$ için $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

C_3. $\forall\, x, y \in A$ ve $\forall \alpha, \beta \epsilon K$ için $(\alpha x) \cdot (\beta y) = (\alpha\beta)(xy)$

Burada $K = \mathbb{R}$ ise A *uzayı reel cebir*, $K = \mathbb{C}$ ise *kompleks cebir* olarak ifade edilir. Eğer $\forall\, x, y \in A$ için $xy = yx$ oluyorsa A cebirine *değişmeli cebir*, $1 \cdot x = x \cdot 1$ oluyorsa A cebirine *birimli cebir* denir (Bayraktar,2006).

Tanım2.10.1. Operatörler Cebiri: X bir Banach uzayı olmak üzere L(X) sınırlı lineer operatörler kümesini ve onun bir alt kümesini göz önüne alınırsa toplama, çarpma ve kompleks sayılarla çarpma altında kapalı kalan bu alt kümesine L(X)' in bir alt cebiri denir. Operatörlerin cebiri, bir X için L(X)' in bir alt cebiridir (Conway,1989).

Tanım2.11.Topolojik Vektör Uzayı (TVU) : Bir topolojik vektör uzayı (TVU), bir topolojiye sahip X vektör uzayıdır öyle ki bu topolojiye göre aşağıdaki koşulları sağlar.

1.$(x, y) \rightarrow (x + y)$ ile tanımlı Xx$X \rightarrow X$ dönüşümü süreklidir

2.$(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ ile tanımlı $\mathbb{F}$x$X \rightarrow X$ dönüşümü süreklidir (Conway,1989).

Tanım2.12. İç çarpım uzayı ve Hilbert uzayı: Bir $\mathbb{F}$ cismi ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$) olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$$(.,.): XxX \to \mathbb{F}$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(.,.)$ ye X üzerinde bir iç çarpım uzayı, $(X,(.,.))$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir.

(i) Her $x \in X$ için $(x,x) \geq 0$ ve $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) Her $x,y \in X$ için $(x,y) = \overline{(x,y)}$;

(iii) Her $x,y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$;

(iv) Her $x,y,z \in X$ için $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ (Bayraktar,2006).

Tanım2.12.1. $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ normuna göre tam ise bu iç çarpım uzayına *Hilbert Uzayı* denir (Bayraktar,2006).

Teorem2.13. *T* Hilbert -adjoint operatörü: T: H → H sınırlı bir lineer operatör olsun ki burada $T \in L(\mathrm{H})$. O halde T nin Hilbert-adjoint operatörü

$$\mathrm{S}: \mathrm{H} \to \mathrm{H}$$

S operatörüdür öyle ki her $x,y \in H$ için

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,Sy\rangle$$

olacak şekilde bir tek S operatörü vardır ve $\mathrm{S} = T^*$ dır (Conway,1989).

Tanım2.14.İzometri dönüşüm:H_1ve H_2 birer Hilbert uzayları olsun. U: $\mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ lineer dönüşümü eğer her $h,g \in \mathrm{H}_1$ için

$$\langle Uh,Ug\rangle = \langle h,g\rangle$$

eşitliği varsa U ya izometri dönüşüm denir (Conway,1989).

Sonuç.2.15. H_1ve H_2 birer Hilbert uzayları olsun. U: $\mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ izometri dönüşümü ise ker(U)={0} dır (Conway,1989).

Tanım2.16. T operatörü ve E alt uzayı verilsin. Eğer $TE \subset E$ ise E'ye T nin invariyant alt uzayı denir. Bu durumda $T|_E$ kısıtlanışından bahsedilebilir (Şuhubi, 2001).

Tanım2.17. ($\|.\|$, X) bir normlu uzay F=$\mathbb{R}$ veya F=$\mathbb{C}$ cismi ise $f: X \to F$ lineer dönüşümüne *lineer fonksiyonel* ya da *lineer form* denir (Conway,1989).

Tanım2.18. Dual Uzayı: X^*, X üzerinde tüm sınırlı lineer fonksiyoneller kümesi olsun. Eğer $f, g \in X^*$ ve $\alpha \in$ F

$$(\alpha f + \alpha g)(x) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$$

ise X^***,** X *Dual Uzayı denir.* $\mathrm{X}^* = \mathrm{B}(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ dir (Conway,1989).

Tanım2.19. H bir Hilbert uzayı ve $U: H \rightarrow H$ bir lineer operatör olsun. Eğer U operatörü U^*U=UU^*=I eşitliğini sağlarsa U ya *üniter operatör* denir. Eğer UU^*=U^*U ise U ya *normal operatör* denir (Conway,1989).

Tanım2.20. Eğer $T: H \rightarrow H$ lineer operatörü $\|T\| \leq 1$ şartını sağlarsa bir daralma operatörüdür (Şuhubi, 2001).

Tanım2.21. T operatörü H da bir daralma operatörü olsun, eğer hiç bir alt uzayda T nin kısıtlanışı üniter değilse T ye *bütünüyle üniter olmayan daralma* denir (Conway,1989).

Tanım2.22. Direkt Toplamlar: Y_1 ve Y_2 , X vektör uzayının iki alt uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ elemanı $y_1 \in \mathrm{Y}_1$ ve $y_2 \in \mathrm{Y}_2$ olmak üzere $x = y_1 + y_2$ şeklinde tek bir gösterime sahipse X vektör uzayı Y_1 ve Y_2 uzaylarının direkt toplamları denir ve $X = Y_1 \oplus Y_2$ ile gösterilir (Bayraktar,2006).

Tanım2.23. İzdüşüm operatörü: V bir lineer vektör uzayı olsun. Tanım bölgesi V olan ve bu uzay kendi içine dönüştüren bir $P: V \rightarrow V$ lineer operatörü $P = P^2$ bağıntısını sağlıyorsa P operatörüne *izdüşüm operatörü* denir (Bayraktar,2006).

Tanım2.24. Ortogonal İzdüşüm: H bir iç çarpım uzayı ve $P: H \rightarrow H$ bir izdüşüm operatörü olsun. Bu izdüşüm operatörünün sıfır uzayı ile erişim uzayı birbirine dik ise P *ortogonal* ya da *dik izdüşüm* adını alır. Yani $x, y \in H$ vektörleri için

$$(x, y)=0$$

ise bu iki vektöre ortogonaldir (diktir) denir ve $x \perp y$ ile gösterilir (Bayraktar,2006).

Tanım2.25. Lebesgue Ölçümü: (x,y) düzleminde boş olmayan kapalı, açık veya yarı açık yarı kapalı olan dikdörtgeninin alanına karşılık bir $m(P)$ gerçel sayısı getirilebilir. Buna göre $m(P)$ ölçümü;

1.Negatif olmayan gerçel bir sayıdır. Yani , $m(P) \geq 0$ şeklindedir.

2.Ölçüm toplamsaldır. Yani, $i \neq j$ için $P_i \cap P_j = \emptyset$ ve

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$$

ise,

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

olur. Buna göre A=$\bigcup_k p_k$ ise

$$inf \sum_{A \subseteq \bigcup p_k} m(p_k)$$

sayısına A kümesinin *dış ölçümü* denir ve $\mu^*(A)$ ile gösterilir. Burada en büyük alt sınır, A kümesinin sonlu veya sayılabilir sonsuz dikdörtgenlerden elde edebilecek mümkün olan tüm örtüleri üzerinde alınacaktır.

$1 - \mu^*(E \backslash A)$ sayısına, A kümesinin *iç ölçümü* denir ve $\mu_*(A)$ ile gösterilir. Buna göre

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \backslash A)$$

eşitliği vardır.

Eğer $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ ise A kümesine *Lebesgue anlamında ölçülebilir* denir (Dönmez,2001).

Tanım2.26. Dirac ölçümü: X boş olmayan bir küme, $p(X)$ kuvvet kümesi, $L(X, p(X))$ bir ölçülebilir uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ elemanı için Dirac ölçümü δ_x ile gösterilsin.

$\delta_x: p(x) \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}}$ reel sayıların genişlemesidir.

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 0, eğer\ x \notin E \\ 1, eğer\ \ x \in E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Hoffman,1964).

Tanım2.27. Borel Ölçümü: Eğer X yerel kompakt bir Hausdorff uzayı ise X üzerinde bir pozitif Borel ölçümü, X'in her Borel alt kümesi negatif olamayan bir reel sayıya (ya da +∞) götüren ve $A_1, A_2, \ldots$ X içinde ayrık Borel kümelerinin dizisi olduğunda

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

eşitliğini sağlayan μ fonksiyonudur (Hoffman,1964).

Tanım2.27.1. İnfimumu A yi içeren U açık kümeler üzerinden alınmak üzere her bir A Borel kümesi için

$$\mu(A) = inf\mu(U)$$

ve supremumu A nın içinden K kompakt kümeleri alınmak üzere her bir A Borel kümeleri için

$$\mu(A) = sup\mu(K)$$

oluyorsa μ ye regüler Borel ölçümü denir (Hoffman,1964).

Sonuç2.27.2.(Riesz Teoremi): $M(\Gamma)$, Γ üzerinde regüler Borel ölçümleri uzayı olmak üzere

$$C(\Gamma)^* = M(\Gamma)$$

eşitliği vardır. $\mu\epsilon\ M(\Gamma)$ ve $f\epsilon C(\Gamma)$ olmak üzere

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{\Gamma} f d\mu$$

eşitliği vardır (Hoffman,1964).

Tanım2.28. Spektral Ölçüm: $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}$ içinde Borel cebiri kümesi ve $P(H)$, H üzerinde iz dönüşümler ailesi olsun.

$$E: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to P(H)$$

bir (kompleks) spektral ölçüm fonksiyon ise aşağıdaki özellikleri sağlar.

1.$E(\emptyset) = 0$ ve $E(\mathbb{C})$=1

2. Eğer $\{\mathcal{B}_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$ ayrık Borel kümelerin bir ailesi ise $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\mathcal{B}_n)$ (Conway,1989).

Teorem2.29. Weierstrass Yaklaşım Teoremi: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olsun. Bir ε >0 sayısı verildiğinde $sup_{x\epsilon[a,b]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir P polinomu vardır (Şuhubi, 2001).

Tanım2.30. Analitik Fonksiyon: $A\subset\mathbb{C}$ bir açık küme $f:A\to\mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu bu bölge üzerinde sürekli türeve sahipse bu fonksiyon söz konusu bölge üzerinde *analitiktir(regülerdir)* denir (Şuhubi, 2001).

Teorem2.31. (Rudin-Carleson): K kümesi birim çember üzerinde Lebesque ölçümü sıfır olan kapalı bir küme olsun. F fonksiyonu da K üzerinde tanımlı kompleks değerli her hangi sürekli bir fonksiyon olsun. K kümesine kısıtlanışı F ye eşit olacak şekilde bir $F\in A(\mathcal{D})$ fonksiyonu vardır (Hoffman, 1964).

Tanım2.32. $1\le p<\infty$ olmak üzere $L^p(\Gamma)$ uzayı aşağıda ki şekilde tanımlanır.

$$L^p(\Gamma)=\left\{f:f\ \text{ölçülebilir ve}\ \|f\|_p=\left(\int_\Gamma |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$$

(Hoffman,1964).

Tanım2.33. H^p Uzayları

$$\|f\|_p=sup_{0\le r<1}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

Yukarıda ki normuna göre $\mathcal{D}$={$z\epsilon\mathbb{C}$: $|z|<1$} kümesinde analitik f fonksiyonlarının sınıfını H^p ile (Hardy uzayı) gösterilir. H^p uzayı , $\mathcal{D}$ de yukarıda ki norma göre bir Banach uzayıdır. Eğer $p=2$ ise bir Hilbert uzayı olur. Eğer

$$\int_0^{2\pi}e^{int}d\mu(t)=0\ ,(n=1,2,3,\dots)$$

İse μ ye analitik ölçüm denir.

$p=1$ alındığında çember üzerindeki analitik sonlu ölçümlerin kapalı uzayı H^1 ile eşleştirilebilir. Buradan H_0^1 uzayını da

$$H_0^1=\{f\in H^1: f(0)=0\}$$

şeklinde tanımlanır (Hoffman, 1964).

Sonuç2.34. $A(\mathcal{D})^* = \{\mu + H_0^1 : \mu \epsilon C(\Gamma)^*\}$ eşitliği vardır.

$\mu + H_0^1 \in A(\mathcal{D})^*$ ve $f \in A(\mathcal{D})$ ise

$$\langle \mu, f \rangle = \int_\Gamma f d\mu$$

eşitliği vardır (Hoffman, 1964).

3. BAZI OPERATÖRLERİN KATLILIĞININ HESAPLANMASI

Bölümde katlılığın hesaplanması için bazı genel temel metotları gösterilerek Atzmon (1987) çalışmasından faydalanılmıştır.

X ile ayrılabilir bir kompleks Banach uzayını ve $\mathcal{L}(X)$ ile de X üzerinde sınırlı lineer operatörler cebirini gösterilsin. Ayrıca A cebiri $\mathcal{L}(X)$ in birim operatörünü içeren bir alt cebiri, G ise X in bir altkümesi olsun. Eğer $\{Tx: x \in G, T \in A\}$ kümesi X de yoğun ise A cebiri $devirlidir$ denir ve G ye de A nın *devirli bir alt kümesi adı verilir.* A cebirinin devirli alt kümelerinin en küçük kardinalitesine $A\ nın$ katlılığı (multiplicity) denir ve $m(A)$ ile gösterilir. Yani

$$m(A) = \inf\{dimG: G, A\ cebirin\ devirili\ altkümesidir\}$$

şeklindedir. $\mathbb{P}$ ile karmaşık katsayılı tüm polinomlar kümesini gösterin. $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ bir polinom olmak üzere

$$P(T) = a_0 \mathrm{I} + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n$$

olarak tanımlanabilir (Atzmon,1987).

$\mathcal{A}_T = \overline{\{P(T): P \in \mathbb{P}\}}$ olarak tanımlanırsa $\mathcal{A}_T$, $\mathcal{L}(X)$ in bir alt cebiri olur ve $\mathcal{A}_T$ ye T nin *doğurgan cebiri* denir. Yukarıdaki tanımdan A cebirinin yerine T operatörünün doğurduğu cebiri alındığında bu kez T operatörünün katlılığından bahsedilir.

G kümesi X in keyfi bir altkümesi olmak üzere, $spanG$ ile G nin elemanlarının doğrusal birleşimini, $\overline{spanG}$ ile de bu doğrusal birleşimin kapanışını göstersin. T operatörünün katlılığı yukarıdaki tanımlara dayanarak

$$m(T)=\inf\{\dim G: X = \overline{span}\{T^n x: x \in G\}\}$$

şeklinde tanımlanır ve m(T) ile gösterilir.

Eğer $\overline{span}\{T^n x: n \geq 0\}=X$ olacak şekilde $\exists x \epsilon X$ varsa x vektörüne T nin devirli vektörü denir. Eğer T operatörünün bir devirli vektörü varsa T ye devirli operatör denir. Buradan görülür ki T nin devirli olması için gerek ve yeter şart onun katlılığının bir olmasıdır. Yani m(T)=1 dir (Atzmon,1987).

Örnek.3.1: $C[0,1]$ de $(Tf)(x) = xf(x)$ olarak tanımlanan operatör devirlidir.

Çözüm: Her $x \in [0,1]$ için $g(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $g \in C[0,1]$ alınırsa. Bu fonksiyonun T operatörünün devirli bir vektörü olduğunu gösterelim. Buradan $T^{\mathrm{n}} g = x^n g(x)$ ve $P(T)g = P(x)g(x)$ olduğu açıktır.

$\forall f \in C[0,1]$ için Weierstrass yaklaşım teoreminden

$$P_n(\mathrm{x}) \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$$

olacak şekilde $\frac{f(x)}{g(x)}$ e düzgün yakınsayacak bir polinomlar dizisi bulunur.

$$P_n(x)g(x) \Rightarrow f(x)$$

$$P_n(\mathrm{T})g \rightarrow f$$

buradan $\overline{span}\{T^n g\}= C[0,1]$ olduğunu elde edilir, dolayısıyla $(Tf)(x) = xf(x)$ operatörü devirlidir.

Örnek.3.2: $\mathbb{C}^2$ uzayında $T=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan T operatörü alalım. $z=(z_1, z_2)$ vektörüne şu şekilde $Tz= (\lambda_1 \mathrm{z}_1, \lambda_2 \mathrm{z}_2)$ etki eder. $\mathrm{z}_1^0 \neq 0$ ve $\mathrm{z}_2^0 \neq 0$ olacak şekilde $z_0=(\mathrm{z}_1^0, \mathrm{z}_2^0)$ vektörü T operatörünün bir devirli vektörüdür.

Çözüm: $Tz= (\lambda_1 \mathrm{z}_1, \lambda_2 \mathrm{z}_2)$ olduğundan $T^n z_0 = (\lambda_1^n \mathrm{z}_1^0, \lambda_2^n \mathrm{z}_2^0)$
olur ve buradan

$$P(T)z_0 =(P(\lambda_1)\mathrm{z}_1^0, P(\lambda_2)\mathrm{z}_2^0)$$

eşitliği elde edilir. Weierstrass yaklaşım teoreminden

$$P_n(\lambda_1) \Longrightarrow \frac{\mathrm{z}_1}{\mathrm{z}_1^0}$$

$$P_n(\lambda_2) \Longrightarrow \frac{\mathrm{z}_2}{\mathrm{z}_2^0}$$

olacak şekilde $\frac{\mathrm{z}_1}{\mathrm{z}_1^0}$ ve $\frac{\mathrm{z}_2}{\mathrm{z}_2^0}$ ye düzgün yakınsayacak polinomlar dizisi bulunur.

buradan

$$P_n(\lambda_1)\mathrm{z}_1^0 \rightarrow \mathrm{z}_1$$

$$P_n(\lambda_2)\mathrm{z}_2^0 \rightarrow \mathrm{z}_2$$

elde edilir, dolayısıyla $\overline{span}\{T^n z_0 : n \geq 0\}=\mathbb{C}^2$ olur.

Önerme 3.1 A cebiri $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ in birim operatörünü içeren bir alt cebiri olsun. Kabul edilsin ki bazı $n \geq 2$ tam sayıları için X^n den bir Y topolojik vektör uzayının içine n-lineer sıfır olmayan sürekli bir φ dönüşümü olsun. $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ X^n de bir noktadır. Herhangi $x_i=x_j$ $(1 \leq i < j \leq \mathrm{n})$ için $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ operatörleri A^n dedır

$$\varphi(T_1 x_1, T_2 x_2, \ldots, T_n x_n)=0 \tag{3.1}$$

ve $m(A) \geq n$ eşitsizliği vardır (Atzmon,1987).

İspat: G kümesi X in her hangi bir alt kümesi ve eleman sayısı n den daha azdır. Eğer $\varphi \neq 0$ ve $\varphi(G) = 0$ ise o zaman $\bar{G} \neq X$ dır. Çünkü $\bar{G} = X$ ise her $x \in X$ için $x_n \to x$ olacak şekilde bir $(x_n) \subset G$ vardır ve $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ olur. Buradan $\varphi(x)$=0 olur ve çelişki bulunur. Dolayısıyla $\bar{G} \neq X$ dır. M={Tx:x∈ G,T ∈ A} kümesini göz önüne alınsın. Bu hipotezde G kümesinin eleman sayısı (3.1) deki n elemanlardan daha azdır ve yukarıdaki φ dönüşümü M^n kümesinde sıfır olur. Ancak φ dönüşümü sürekli olduğundan $\overline{M}^{\mathrm{n}}$ kümesinde de sıfır olur. Buda $\overline{M^n} \neq X^n$ olduğunu gösterir çünkü $\varphi \neq 0$ dır dolayısıyla $\overline{M} \neq X$ dır. Böylece önerme ispatlanır.

Sonuç 3.2: T operatörü $\mathcal{L}(X)$ den bir operatör olsun. Kabul edilsin ki $n \geq 2$ tam sayıları için Y topolojik vektör uzayın içine X^n nin sıfır olmayan sürekli bir φ dönüşümü vardır. $(x_1, x_2, \dots x_n)$ X^n de bir noktadır. Herhangi x_i=x_j (1≤i<j≤n) ve negatif olmayan $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ tam sayıları için

$$\varphi(T^{k_1}x_1, T^{k_2}x_2, \dots, T^{k_n}x_n)=0 \qquad \text{dır.} \tag{3.2}$$

ve $m(T) \geq n$ dir (Atzmon,1987).

İspat: A={T^n: n =0,1,…} kümenin birleşim cebiri T ve birim operatör ile $\mathcal{L}(X)$ de genelleştirilir. Bu sonucun ispatı Önerme3.1'den çıkar.

Önerme 3.3: X ve Y birer Banach uzayları olsun. Kabul edilsin ki T ve S sırasıyla $\mathcal{L}(X)$ ve $\mathcal{L}(Y)$ den operatörler olsunlar. R:$X \to Y$ sınırlı bir lineer operatörünün Y de $\overline{RX}$= Y ve

$$RT = SR \tag{3.3}$$

şartlarını sağlıyorsa bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$m\,(T^n) \geq m(S^n), \tag{3.4}$$

eşitsizliği vardır (Atzmon,1987).

İspat: Eğer P polinom(bir değişkenli) ise (3.3) koşulundan

$$RT^2 = S^2R$$

$$RT^2 = (RT)T = (SR)T = S(RT) = S(SR) = S^2R$$

Benzer şekilde diğerleri içinde uygulanırsa

$$RT^n = S^nR$$

olur. $P(T) = a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n$ ile tanımlanan polinomu (3.3) koşulunun yerine yazılırsa

$$RP(T)=P(S)R$$

elde edilir. Bazı n pozitif bir tam sayı için G kümesi T^n için devirli bir küme ise O zaman

$$\overline{P(T^n)G}= X\ ,\ \overline{RP(T^n)G}= \overline{RX}= Y$$

Çünkü $\overline{RX}= Y$ dır buradan $\overline{P(S^n)RG}= Y$ olur.

Dolayısıyla *R(G)* kümesi de S^n için devirli bir kümedir. Her zaman

$$dimG \geq dimRG$$

olduğundan dolayısıyla (3.4) koşulu keyfidir $m\ (T^n) \geq m(S^n)$ eşitsizliği elde edilir.

Önerme 3.4: $\mathcal{L}$(X) den elde edilen her T operatörü ve her n pozitif tamsayısı için

$m(T) \leq m\ (T^n) \leq nm(T)$ eşitsizliği vardır (Atzmon,1987). (3.5)

İspat*:* Sol taraftaki eşitsizliği göstermek için her hangi bir n pozitif tam sayısını alınırsa *G* kümesi T^n için bir devirli alt kümeyse tanımdan dolayı $\overline{P(T^n)G}$=X dır. Diğer taraftan

$$P(T^n)G \subset P(T)G$$

olduğundan,

$$\overline{P(T^n)G} \subset \overline{P(T)G} \subset X$$

olur. Buradan $\overline{P(T)G}$=X olduğundan G kümesi *T* için bir devirli küme olması anlamına gelmektedir. Dolayısıyla $m(T) \leq m(T^n)$ yazılabilir.

Hatırlanacağı üzere *G* kümesinin T için devirli bir küme olsun:

$$\overline{\text{span}}\{G, TG, T^2G, \dots, T^nG, \dots\}= X$$

$m\ (T^n) \leq nm(T)$ eşitsizliğini göstermek için $\bigcup_{j=1}^{n} T^{j-1}(G)$ kümesini T^n için devirli bir küme olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için aşağıdaki kümeyi ele alınsın:

$$\text{span}\{G, TG, T^2G, \dots, T^{n-1}G\}$$

Bu kümeyi T^n ile genişletilirse

$$\overline{span}\{T^nG, T^{n+1}G, T^{n+2}G, \dots\}= X \quad (n=0,1,2,\dots)$$

göstermektedir.

Önerme 3.5: $X_1, X_2, \dots, X_k$ ayrılabilir Banach uzayları ve $\|x\|_\infty = sup_{1\leq i\leq k}\|x_i\|$ normu ile donatılmış olsunlar. Her $1 \leq j \leq k$ için T_j operatörü $\mathcal{L}(X_j)$ den bir operatör olsun. $X=X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_k$ Banach uzayında $T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k$ operatörünü

$$(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_k)(x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_k)=(Tx_1 \oplus Tx_2 \oplus \dots \oplus Tx_k)$$

ile tanımlanır ve T ile gösterilir.

$$\max_{1\leq j\leq n} m(T_j) \leq m(T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_k) \leq \sum_{j=1}^{k} m(T_j). \text{ dir (Atzmon,1987).} \qquad (3.6)$$

İspat: Her $1\leq j\leq k$ tam sayısı için G_j kümesi T_j için bir devirli küme olsun ve X in içinde $u_j \in G_j$ ve $l\neq j$ için $u_l=0$ olacak şekilde tüm $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ vektörlerinin kümesi F_j ile gösterelim. $\bigcup_{j=1}^{k} F_j$ kümesi T için devirli bir küme olduğunu kanıtlamak kolaydır ve (3.6) koşulun sağ tarafındaki eşitsizliğini gösterilir. Sol taraftaki eşitsizliği kanıtlamak için her $1\leq j\leq k$ tam sayısı için X in X_j üzerinde standart izdüşümü P_j ile gösterilir.

$$P_j T = T_j P_j \qquad j=1,2,\ldots,k$$

Önerme3.3'ten her $1\leq j\leq k$ için $m(T_j)\leq m(T)$ dir bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.6: T operatörü $\mathcal{L}(X)$ den bir operatör olsun. T^* ile de T operatörünün eşleniğini göstersin.

$$m(T)\geq \sup \dim[\ker(T^*-\lambda)] \text{ dir (Atzmon,1987).} \qquad (3.7)$$

İspat: Her λ kompleks sayısı için $m(T) = m(T-\lambda)$ olduğundan $m(T) \geq \dim \operatorname{Ker} T^*$ eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir. Bunu göstermek için $\operatorname{Ker} T^*$ da lineer bağımsız şu vektörleri $v_1, v_2, \ldots, v_n$ alalım ve X^n üzerinde

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \det(x_i, v_j)_{i,j=1}^{n} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$$

olacak şekilde φ dönüşümü tanımlanırsa bu dönüşüm n-lineer ve sürekli olduğu açıktır. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vektörleri X de $(u_i, v_j)=\delta_{i,j}$,$(i,j=1,2,\ldots,n)$ eşitliğini sağlayacak şekilde alalım.

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1 \text{ olduğu için } \varphi\neq 0 \text{ dir.}$$

Kabul edilsin ki; $k_1, k_2, \ldots, k_n$ negatif olmayan tam sayılar ve $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ X^n de bir noktadır. Herhangi $x_i = x_j$ $(1\leq i<j\leq n)$ için

$$\varphi(T^{k_1}x_1, T^{k_2}x_2, \ldots, T^{k_n}x_n)=0 \qquad (3.8)$$

eşitliğini olduğu gösterilsin. Bazı $1\leq q\leq n$ için $k_q>0$ ve $v_q \in \operatorname{Ker} T^*$ olduğundan

$$(T^{k_q}x_r, v_q)=(x_r, T^{*k_q}v_q)=0, \; r=1,2,\ldots,n$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla (3.8) eşitliğini elde etmiş olunur. Diğer taraftan $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$ ise $x_i = x_j$ olduğundan (3.8) de tanımlanan dönüşüm iki eşit satıra sahip olur dolayısıyla tekrar sıfır olur. Böylece Sonuç3.2 den $m(T)\geq n$ olduğundan teoremi ispatlanmış olur.

Sonuç 3.7: T operatörü Hilbert uzayında üniter olmayan izometri ise

$$m(T^{n}) \geq n\ ,\ n = 1,2,\ldots \ \text{dir (Atzmon,1987).} \tag{3.9}$$

İspat : T üniter değildir, Ker $T^{*} \neq \{0\}$ olduğunda v vektörü Ker T^{*} de bir birim vektör olsun. $v, T\,v, \ldots, T^{n-1}\,v$ vektörleri göz önüne alınırsa $v \epsilon$Ker T^{*} olduğunu kullanılırsa ve T izometridir. Bu vektör Ker $T^{*^{n}}$de bir ortonormal vektör olduğu kolayca gösterilir. Dolayısıyla $dimKer\ T^{*^{n}} \geq n$ dir ve Teorem3.6 dan (3.9) koşulu çıkar.

L_T, $\mathcal{A}_T$ üzerinde sol çarpma operatörü olsun $L_T S = \mathrm{T}S$, $S \epsilon \mathcal{A}_T$ buradan $m(\mathrm{L_T}) = 1$ olur.

Sonuç 3.8: T Banach uzayında sınırlı bir operatör olsun.

$$\mathrm{m}(\mathrm{L}_{T^{\mathrm{n}}}) \leq \mathrm{n}$$

eşitsizliği vardır.

Önerme 3.9: T $operat$ör$ü$, $\mathsf{C}(\Gamma)$ üzerinde bir çarpma operatörü olsun ve

$$(Tf)(\xi) = \xi f(\xi)$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde

$$m(T^{\mathrm{n}}) \geq n$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Teorem3.6 dan

$$m(T^{\mathrm{n}}) \geq \dim[\ker(T^{*^{n}} - \lambda)]$$

eşitsizliği olduğunu bilinir. Şimdi $\lambda = 1$ öz değerine karşı T^{*n} operatörünün öz vektörlerini bulmak için $T^{*n}\mu = \mu$ denklemini göz önüne alınır. Eşitliğin her iki tarafını f ile etki edilirse

$$\langle T^{*n}\mu, f\rangle = \langle \mu, f\rangle \tag{3.10}$$

veya

$$\int_{\Gamma} \xi^{n} f(\xi) d\mu(\xi) = \int_{\Gamma} f(\xi) d\mu(\xi), \qquad f \in C(\Gamma)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ile birimin n.dereceden köklerini ve $\delta_{\varepsilon_i}(i = 1, \ldots, n)$ ile de ε_i noktalarına konsantre olan *Dirac ölçümünü* gösterilsin. Buradan

$$\int_{\Gamma} \xi^{n} f(\xi) d\delta_{\varepsilon_i}(\xi) = \varepsilon_i^{n} f(\varepsilon_i) = f(\varepsilon_i)$$

$$\int_{\Gamma} f(\xi) d\delta_{\varepsilon_i}(\xi) = f(\varepsilon_i)$$

Bu eşitlikler (3.10) eşitliğinin doğru olduğunu gösterilmektedir.

Şimdi de δ_{ε_1}, δ_{ε_2},…, δ_{ε_n} ölçümlerin doğrusal bağımsız olduğunu göstermek için $\lambda_1\delta_{\varepsilon_1}$+$\lambda_2\delta\varepsilon_2+\cdots+\lambda_n\delta\varepsilon_n$=0 olsun $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ olduğunu göstermek gerekir. $f(\varepsilon_1)$=1, $f(\varepsilon_2)=0,\dots,f(\varepsilon_n)=0$ olacak şekilde $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu alınırsa. Elbette ki f fonksiyonu $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\}$ kümesi üzerinde sürekli fonksiyondur. Rudin-Carleson teorem'ine göre (Hoffman,1964) f'in bir $g\in\mathcal{A}(\mathcal{D})$ genişletilmesi vardır öyle ki $g(\varepsilon_1)$=1, $g(\varepsilon_2)=0,\dots,g(\varepsilon_n)=0$ dir. Buradan

$$\langle\lambda_1\delta_{\varepsilon_1}+\lambda_2\delta\varepsilon_2+\cdots+\lambda_n\delta\varepsilon_n,g\rangle=0$$

veya

$$\lambda_1g(\varepsilon_1)+\lambda_2g(\varepsilon_2)+\cdots+\lambda_ng(\varepsilon_n)=0$$

yazılabilir. Buradan da $\lambda_1=0$ olur. Benzer şekilde $\lambda_2,\dots$, λ_n'lerin sıfır olduğunu gösterilebilir. Dolayısıyla $m(T^{\mathrm{n}})\geq n$ olduğu elde edilir.

Hatırlanacağı üzere $\mathcal{A}(\mathcal{D})$-disk cebiri üzerinde çarpma operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(Tf)(z)=zf(z)$$

bu operatörün birim fonksiyon vektörü $\mathbf{1}(z)=1$ devirli vektörüdür. Çünkü $P(z)=\{a_0\mathrm{I}+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n\}$ polinomlar kümesi $\mathcal{A}(\mathcal{D})$-disk cebirinde yoğundur.

Teorem 3.10: T operatörü $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de bir çarpma operatörü olmak üzere

$$m(T^n)=n$$

eşitliği vardır.

İspat : $m(T)$=1 olduğu açıktır. Önerme3.4'ten $m(T^{\mathrm{n}})\leq n$ olduğunu görülür. Diğer ters eşitsizliği içinde

$$m(T^{\mathrm{n}})\geq\dim[\ker(T^{*^n}-\lambda)]$$

eşitsizliğini kullanılır.

$\mathcal{A}(\mathcal{D})^*=\{\mu+H_0^1:\mu\in M(\Gamma)\}$ ve $\langle\mu+H_0^1,f\rangle=\int_\Gamma f(\xi)d\mu(\xi)$,

$f\in\mathcal{A}(\mathcal{D})$ olduğu bilinmektedir. $T^{*n}(\mu+H_0^1)=\mu+H_0^1$ olsun. Eşitliğin her iki tarafı f etki edilirse

$$(*)\qquad \int_\Gamma \xi^nf(\xi)d\mu(\xi)=\int_\Gamma f(\xi)d\mu(\xi),$$

eşitliğini elde edilir. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ birimin n. dereceden kökleri ve ε_i noktalarına konsantre olan *Dirac ölçümü* $\delta_{\varepsilon_i}(i=1,\dots,n)$ olsun. $\delta_{\varepsilon_i}+H_0^1$ (*) denkleminden keyfidir. Rudin-Carleson teoreminden $\exists f_i \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ öyle ki $f_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ dır. Buradan { $\delta_{\varepsilon_i} + H_0^1$: i=1,…,n } lineer bağımsızdır ve sonuç olarak $m(T^{\mathrm{n}}) \geq n$ olduğu elde edilir.

S, Γ nin kapalı bir alt kümesi olsun.

$$(Tf)(\xi) = \xi f(\xi)$$

$\mathsf{C}(\Gamma)$ üzerinde bir çarpma operatörü olsun. Eğer $S \neq \Gamma$ ise bu polinomlar $P(z) = \{a_0 \mathrm{I} + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\}$ (z=e^{it}), C(S) de yoğundur dolayısıyla $m(T)$=1 olur. Eğer $S = \Gamma$ ise Bu polinomlar $\mathsf{C}(\Gamma)$ de yoğundur $m(T)$=2 olur. Sonuç olarak Önerme 3.4 ten,

$$m(T^{\mathrm{n}}) \leq n$$

eşitsizliği elde edilir.

4. ÜNİTER OPERATÖRLERİN DERECELERİ

Bu bölümde bir Hilbert uzayında singüler olmayan üniter operatörlerin kuvvetlerinin katlılığı verilmektedir. Ayrıca Γ ile birim çemberi, σ ile Γ üzerinde lineer Lebesque ölçümü ve H ile de ayrılabilir kompleks Hilbert uzayı ele alınmaktadır (Atzmon,1987).

Hatırlanacağı üzere E spektral ölçümü ile H üzerinde bir U üniter operatörü *tamamen süreklidir* (her biri ayı ayrı olarak, singülerdir) denir. H de her sıfır olmayan x vektörü için $(\mathrm{E}(.)x, x)$ ölçümü , σ ile tamamen süreklidir, yani her biri ayrı ayrı olarak singülerdir. Eğer μ, U operatörü için spektral ölçümü bir skaler ise U operatörü tamamen süreklidir yani her biri ayrı ayrı olarak, singülerdir ve μ ,σ ile tamamen süreklidir yani her biri ayrı ayrı olarak, singülerdir. Bu H da her U üniter operatör için bilinir. Buradan $U_\alpha$üniter operatör tamamen süreklidir ve U_s bir singüler üniter operatördür. Öyle ki $U = U_\alpha \oplus U_s$ dir. Bu operatörler U_α ve U_s, U operatörü tarafında tek bir şekilde belirlenir ve U'nun tamamen sürekli kısmi ve singüler kısmı diye ayrı ayrı adlandırılır (Atzmon,1987).

Teorem.4.1: Eğer U operatörü H uzayında singüler olmayan üniter bir operatör ise

$$m(U^n) \geq n\alpha, \qquad n=1,2,\ldots$$

(4.1)

olacak şekilde $0<\alpha\leq 1$ bir α sabiti vardır.

Eğer μ kompleks düzlem üzerinde kompakt Borel ölçümü pozitif ise $\mathcal{L}^2(\mu)$ de $u(z)=z$ fonksiyonuyla çarpma operatörü $\mathrm{N}\mu$ ile gösterilir.

Eğer T_1 ve T_2 operatörleri $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ de üniter denk operatörler ise $T_1 \sim T_2$ ile gösterilir ve

$$m(T_1)= m(T_2)$$

eşitliği vardır (Atzmon,1987).

$\mathrm{N}\mu$ üniter operatörler için Teorem 4.1 ispatlamak yeterlidir. Burada μ, Γ da bir pozitif Borel ölçümü σ ile tamamen süreklidir. Bunu görmek için kabul edilir ki U, H da singüler olmayan bir üniter operatördür ve U_α için de μ skaler bir spektral ölçüm düşünülürse, çünkü U singüler değildir $\mu \neq 0$ dir. Aslında $U = U_\alpha \oplus U_s$ kullanırız ve spektral teoremden

$$U \sim N_\mu \oplus U_1$$

elde edilir. Burada U_1 bir üniter operatördür. Dolayısıyla her n pozitif tam sayısı için $U^n \sim N_\mu^n \oplus U_1^n$ vardır ve Önerme3.5'ten $m(U^n) \geq m(N^n\mu)$ eşitsizliğini elde edilir. Bu da Teorem4.1 ispatını tamamlar (Atzmon,1987).

Teorem.4.2: $f \not\equiv 0$, f fonksiyonu $\mathcal{L}^1(\sigma)$ dan negatif olmayan bir Borel fonksiyon olsun. $f\sigma$ ölçümünü μ ile , Nμ operatörünü de U ile gösterilsin öyle ki

$$m(U^n) \geq n\alpha, \qquad n=1,2,\ldots$$

(4.2)

eşitsizliği vardır ki burada α ile $\{z \in \Gamma: f(z) > 0\}$'nin Lebesque ölçümü gösterilsin.

Teorem 4.2 ispatı için iki ara sonuca ihtiyaç vardır. Bunlar için bazı notasyonlar gereklidir. Her pozitif n tam sayısı için birimin n.kökünü $\mathcal{J}_n$ ile gösterilir. Yani

$$\mathcal{J}_n = \{\omega_n^{j-1} : j=1,2,\ldots,n\}$$

buradan

$$\omega_n = \exp\frac{2\pi i}{n}$$

olur. Eğer c kompleks bir sayı ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılarının bir kümesi ise o halde $\{cz: z \in \mathbb{C}\}$ kümesini $c\mathbb{C}$ ile gösterilir (Atzmon,1987).

Lemma.4.3*:* G kümesi Γ nin bir Borel altkümesi olsun. $\sigma(G) > o$ ve n pozitif bir tam sayı olsun. Eğer k, $k \geq n\,\sigma(G)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde en küçük tam sayıyı gösterirse $\mathcal{J}_n$ içinde k elemanlarını içeren $z_1, z_2, \ldots, z_k$ kümesi vardır. Öyle ki

$$\sigma\left(\bigcap_{j=1}^{k} z_j\, G\right) > 0$$

eşitsizliği vardır (Atzmon,1987).

İspat: $G_j = \omega^{j-1}_n\, G$ kümeleri j=1,2,…, n ve $g = \sum_{i=0}^{n} \chi G_j$ fonksiyonu olsun. ($\chi K, K$ kümesinin karakteristik fonksiyonu) ve $\{z \in \Gamma: g(z) \geq k\}$ kümesini de W ile gösterilir. Çünkü $z \in \Gamma \setminus W$ için $g(z) \leq k-1$ dir ve $\sigma(G_j) = \sigma(G)$ j=1,2,…,n

$$\int_W g\,d\sigma = \int_\Gamma g\,d\sigma - \int_{\Gamma\setminus W} g\,d\sigma \geq n\,\sigma(G) - (k\text{-}1) > 0$$

K nın tanımını kullanarak elde edilir ve $\sigma(W)$)> 0 dir .{1,2,,…, n }'lerinin bütün alt küme toplamını Λ ile gösterilir ki bu k'nın elemanları da içerir. Çünkü

$$W \subset \bigcup_{j\in\Lambda} \bigcap_{j\in I} G_j \text{ ve } \sigma(W)\,) > 0$$

burada J , Λ da bir kümedir. Öyle ki σ $(\bigcap_{j\epsilon J} G_j) > o$ olur. Dolayısıyla lemma ispatlanır.

Sonuç.4.4*:* G , n ve k lemma4.3 gibi olsun. $F \subset G$ bir Borel kümesini içersin öyle ki $\sigma(F) > 0$ ve k elemanları içeren $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *kümesi* j_n de öyle ki $\alpha_j F$, j=1,2,…, k kümeleri G de mevcuttur ve ayrıktır (Atzmon,1987).

İspat: $z_1, z_2, \ldots, z_k$ Lemma 4.3 nin sonucu gibi olsun ve $\bigcap_{j=1}^{k} z_j G$ kümesi G_0 ile gösterilir. Burada $|1 - \omega n|$ den daha küçük çap ile $z_1 G_0$ nın bir F Borel alt kümesi içerir. Çünkü $\sigma(z, G_0) = \sigma(G_0) > 0$ dir ve $\sigma(F) > 0$ olur. $\alpha_j = z_j z_1^{-1}$, j=1,2,…,k olsun. Açıktır ki $\alpha_j F$ kümeleri j=1,2,… k gerekli özelliklere sahiptirler.

Eğer μ, $\mathbb{C}$ kompleks düzlem de bir pozitif Borel ölçüm ve B, $\mathbb{C}$ nin bir Borel alt kümesi ise $\mu(B) < \infty$ dir. B de bütün kompleks Borel fonksiyonlarının topolojik vektör uzayı $M(B, \mu)$ ile gösterilir ve

$$d(g,h) = \int_B \frac{|g(z) - h(z)|}{1 + |g(z) - h(z)|} d\mu(z); \quad g, h \in M(B, \mu).$$

metrik ile donatılır.

Teorem.4.2'nin ispatı: n pozitif sabit bir tam sayı ve k, $k \geq n\alpha$ eşitsizliği sağlayan en küçük tam sayı olsun. $G = \{z\epsilon\Gamma : f(z) > 0$ düşünülür, çünkü $\sigma(G) = \alpha > 0$ sonuç4.4'ten G nin bir F Borel altkümesi içerir öyle ki $\sigma(F) > 0$ ve k elemanları $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $\alpha_1 = 1$ ile j_n dedir. $\alpha_j F$, j $= 1, 2, \ldots, k$, kümeleri G de mevcuttur ve ayrıktır. $M(B, \mu)$ topolojik cebiri Y ile gösterilir, burada μ teoremin ifadesinde ölçümü tanımlar. φ dönüşümü $(L^2(\mu))^k$ den Y ye k-lineer dönüşümünü

$$\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_k)(z) = \det\,(g_i(\alpha_i z))_{i,j=1}^{k} \quad ; \; z\epsilon F, g_1, g_2, \ldots, g_k \in L^2(\mu)$$

şekildeki gibi tanımlayalım $\varphi \neq 0$ olduğu açıktır. Çünkü F de $f > 0$ dir. μ, F deki ölçüm yakınsaklığı σ, F deki ölçümle yakınsaklığına denktir. Dolaysıyla $L^2(\mu)$ daki yakınsaklık için G de μ ile ilgili ölçüm yakınsaklığı gösterilir. Bu da φ sürekli olduğunu gösterir. U^n operatörü T olsun, çünkü $\alpha_j \epsilon J_n$, J=1,2,…,k takiben negatif olmayan bütün k-sıralı $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ ve bütün k-sıralı $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ için $(L^2(\mu))^k$

$$(T^{j_1} g_1 \;, T^{j_2} g_2 \;, \ldots, T^{j_k} g_k)(z) = z^q \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_k)(z) \;, z\epsilon F$$

$q = n(\ j_1 + j_2 + \cdots j_k$ dir. Bu da gösterir ki φ, T ile beraber (3.2) koşulu keyfidir üstüne üstün Sonuç 3.2'den $m(T) \geq k \geq n\alpha$ olduğunu bilinmektedir. Bu da Teorem3.1'in ispatıdır.

U operatörü içinTeorem4.2 de tanımlandığı gibi olsun. $m(U^n) \leq n$, n=1,2,…eşitsizliği vardır. Önerme3.4 den ve $N\mu$ formunun her operatörün bir katlılığı vardır (Atzmon,1987).

Teorem4.1 ve Sonuç3.7 birleştirerek aşağıdaki teoremi elde edilir (Atzmon,1987).

Teorem.4.5: U operatörü $L(H)$ de bir izometri olsun ve singüler üniter bir operatör olmasın öyle ki $m(U^n) \geq n\alpha$, n =1,2,… olacak şekilde 0<α≤1 bir α sabiti vardır (Atzmon,1987).

Bu bölümün sonucunda Teorem4.1 nin sonucu singüler üniter operatörler için genellikle doğru olmadığı gösterilmektedir. Eğer K kümesi Γ nin kompakt bir alt kümesi K da her z_1, z_2 belirgin noktalar için ve her pozitif n tam sayılar için $z^n_1 \neq z^n_2$ ise her pozitif μ Borel ölçüm için K tarafında desteklenir ve $m(N_\mu^n)$=1, n=1,2,… olur. Bu eşitliği Stone-Weierstrass Teoremini kullanarak gösterilebilir (Atzmon,1987).

Teorem.4.6: E Spektral ölçümü ve T operatörü $L(H)$ de normal bir operatör olsun. Farz edelim ki H uzayında bazı $x \neq 0$ vektörleri için $(E(.)x, x)$ ölçümü $\mathbb{C}$ de tamamen süreklidir öyle ki

$$m(T^n) \geq n\alpha \quad , n = 1,2,\ldots$$

olacak şekilde 0<α≤1 bir sabit α vardır (Atzmon,1987).

5. DARALMA OPERATÖRLERİN DERECELERİ

Bu bölümde öne sürülen metotları Hilbert uzayında singüler olmayan üniter opratörlerin kuvvetlerin katlılığının hesaplamalarını elde etmekte kullanılır ve Atzmon(1987) çalışmasından yararlanılmıştır.

$L(H)$ uzayında bir T daralması C_1sınıfındadır. H uzayından sıfır olmayan tüm x vektörler için $T^n{}_x \nrightarrow 0$ olur Atzmon(1987).

Teorem.5.1: T operatörü H üzerinde C_1 sınıfının tamamen üniter olmayan bir daralma operatörü olsun öyle ki

$$m(T^{n}) \geq n\alpha\ ,\ n=1,2,\ldots$$

olacak şekilde $0<\alpha\leq 1$ bir α sabiti vardır Atzmon(1987).

Teorem5.1'in ispatlamadan önce bazı notasyonları tanımlanır ve diski cebiri A ile gösterilir. Yani kapalı birim yuvarı üzerindeki bütün sürekli kompleks fonksiyonların Banach cebiri içten içe holomorfiktir Γ birim çemberde sup-norm ile gösterilir. Von-Neumann eşitsizliğinin göz önüne alarak $L(H)$ de her T daralma için $L(H)$ Banach cebiri içine A Banach cebirinin azalan bir homomorfizma normdur ve bu $p \to p(T)$ dönüşümü vardır. Burada p bir polinom operatör, bu homomorfizma tarafında A da bir f fonksiyonuyla aynıdır ve $f(T)$ ile gösterilecektir (Atzmon,1987).

Teorem.5.1'nin ispatı*:* H uzayında $\|x\|_1$ normunu aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$\|x\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|T_x^n\|\ ,\ x \in H \tag{5.1}$$

T limitinin varlığı bir daralmadır ve bu da

$$\|x\|_1 \leq \|x\| \qquad \forall\, x \in H \tag{5.2}$$

olduğunu gösterir.

T operatörü bu kabulde C_1 sınıfındadır. Eğer x≠o ise $\|x\|_1 \neq o$ olur. Öyle ki $\|x\|_1$bir normdur dahası bu norm $(,)_1$ skaler çarpımı tarafından elde edilir.

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (T_x^n\ , T_y^n) \qquad\qquad x, y \in H$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki dizinin yakınsaklığı (5.1)'den çıkar. H_1 bir Hilbert uzayını göstersin, $\|.\|_1$ norm ile H uzayı tamlığı tarafında ortaya çıkartılır. Çünkü H uzayındaki her x için $\|Tx\|_1 = \|x\|_1$ dir. T, H_1 üzerinde bir izometri için tek genişlemesidir. Bu izometriyi U

ile gösterilir. J, H de H_1 nin kanonik birleşimi gösterir yani x$\in H$, jx=x (5.2)'den J sürekli ve J yoğun bölgede olduğu açıktır. Dolayısıyla $JT = UJ$ olur. O zaman Önerme 3.3'ten

$$m(T^n) \geq m(U^n) \qquad n=1,2,\ldots$$

eşitsizliğini elde edilir. Teorem3.5 den U singüler olmayan üniter operatör ise istenilen sonucu gösterilecektir. Bunu ispatlamak için farz edilir ki U bir üniter operatör ve E ile spektral ölçüm göstersin. x, H uzayında sıfır olamayan vektör olsun ve μ_x=($E(.)_x$,x), Γ de pozitif Borel ölçümü düşünülürse μ_x , σ ile tamamen süreklidir. μ_x, Γ nin lineer Lebesque ölçümü sıfır olan her kompakt altkümesini yok eder. Dolayısıyla $\sigma(K) = 0$ ve $\mu_x(K)$=0 olacak şekilde Γ nin kompakt bir K alt kümesi vardır. Çünkü $\sigma(K) = 0$ dir.

A disk cebirinde h_1 ve h_2 fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\|h_1\|_\infty = \|h_1\|_\infty=1$$

her $z\epsilon K$ için $h_1(z)= z^{-1}$ ve $h_2(z) = 1$ olur. $z\epsilon$ $\Gamma \setminus K$ için de $|h_2(z)| < 1$ olur.

f ve g fonksiyonları A cebirinde olsun. g =h_1h_2 ve $f(z)$=$zg(z)$, $|z| \leq 1$ şeklinde tanımlansın $S = g(T)$ operatör düşünülürse $ST = TS = f(T)$ olduğu açıktır. Çünkü $\|g\|_\infty = 1$ ve S bir daralmadır. Her $z\epsilon\Gamma$ için $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = X_K(z)$ Baskın yakınsama teoreminden

$$\lim_{n\to\infty}\|f(U)^n x - E(K)x\|_1^2 = \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \left|f^n(e^{i\theta}) - XK(e^{i\theta})\right|^2 d\mu_x(\theta) = 0$$

$$f(U)x = f(T)x$$

olduğu açıktır. $(TS)^n x$=($f(T))^n x$, n=1,2,... dizisinin H da tüm zayıf limit noktaları bu form da elde edilir. $E(K)$x içinde J ile dönüşümdürler. Çünkü J birebirdir. Bundan şu sonuç çıkar bu dizi H da zayif yakınsaktır. Bazı y vektör için öyle ki

$$Jy = E(K)\text{x} \tag{5.3}$$

ve

$$TSy = STy = y \tag{5.4}$$

eşitlikleri vardır.

M, H nin kapalı altuzayı olsun ve $\{T^n y$: n=0,1,...$\}$ kümesi birleşimi göstersin. Daha sonra M, T altında ve S altında da değişmeyendir. (çünkü $S = g(T)$) dir. Dolayısıyla

$$TSv = STv = v, \qquad v\epsilon\text{M}$$

eşitliğini (5.4)'ten çıkar. Buradan $T(M) = M$ olduğu açıktır. Çünkü T ve S birer daralmalardır. M deki her v için $\|Tv\| = \|v\|$ dır. Çünkü T tamamen üniter olmayandır. Buradan M=$\{0\}$ dir dolayısıyla $y = 0$ ve (5.3)'ten $E(K)x = 0$ olur. Dolayısıyla $\mu_x(K)$=0 dır ve U operatörü singüler değildir. (H, H_1 de yoğun olduğu için yukarıdaki önermeden U tamamen süreklidir ve bu da Teoremi ispatlar.

Teorem 5.1'in sonucu genellikle doğru değildir . Tamamen üniter olmayan ve

$$m(T^n)=1,\ 1,2,\ldots$$

olacak şekilde bir T daralmasını bir örneği vardır (Atzmon,1987).

Teorem.5.2*:* T kompleks Hilbert uzayında bir daralma olsun. Eğer T hem bütünüyle üniter olmayan hem de bazı x_0 vektör için $T^n{}_{x_0} \nrightarrow 0$ veya T'nın üniter kısmı singüler değilse

$$m\ (T^n) \geq n\alpha \qquad n=1,2,\ldots$$

olacak şekilde bir α sabiti vardır (Atzmon,1987).

İspat: T operatörü tamamen üniter olmayan değilse dahası öngörüde üniter kısmı singüler değildir ve teoremin sonucu Önerme3.5 ve Teorem4.1 de sonucundan çıkar dolayısıyla kabulün devamında T tamamen üniter olmayandır ve $T^n\, x_0 \nrightarrow 0$ $H\ daki\ x_0$ vektörü için gösterebilir. Bu da Önerme3.3 ve Teorem5.1in sonucundan çıkar.

$N = \{x\epsilon H: T^n x \to 0\}$ alt uzayını düşünelim ve ortagonal tümleyeni H_0=$N^\perp$ dir. Çünkü x_0 , N de değildir. Bundan şu sonuç çıkar $H_0 \neq \{0\}$ olur. H_0 üstünde H uzayının ortogonal izdüşümü p ve H_0 da T nin kısıtlanışı T_1 olsun. Yani

$$T_1 y = PTy \ \ , y\epsilon H_0$$

tarafından tanımlanan $L(H_0)$ da bir operatördür. T tamamen üniter olmayan bir daralmadır ve T_1 operatörü için de doğrudur.

T_1 operatörü C_1 sınıfında olduğunu gösterilebilir. T nin üniter dilatasiyonu kullanarak ispatlanabilir. H_0 da y sıfır olmayan vektör düşünelim çünkü T bir daralmadır ve y , N de değildir. Öyle ki

$$\|T^m y\| > \beta \qquad m = 1,2,.. \tag{5.5}$$

β> 0 bir sabiti vardır. n sabit pozitif bir tam sayı ve $v = T^n y$ dir. N kümesi üstünde H ın ortagonal izdüşümü Q ile göstereceğiz ve (5.5)'ten her pozitif j tam sayısı için

$$\beta \leq \|T^j v\| = \|T^i Pv + T^j Qv\| \leq \|Pv\| + \|T^j Qv\| \tag{5.6}$$

eşitliği elde edilir. Çünkü N, T altında invarantıdır.

$$PT = T_1 P \tag{5.7}$$

eşitliği vardır ve $Pv = T_1^n y$ dir. Dolayısıyla $T^j Q\, v \to 0$ olur. Çünkü $j \to \infty$ (5.6)'dan $\|T_1^n y\| \geq \beta$ olduğu çıkar. Bu da H_0 da her sıfır olamayan y vektörü için $T_1^n y \nrightarrow 0$ olduğunu gösterir ve T_1, C_1 sınıfındadır. Sonuç olarak T_1 Teorem4.1 nin sonucu keyfidir (5.7) ve Önerme3.3 de T için doğrudur. Bu da Teoremin ispatını tamamlar.

6. DİREKT TOPLAMLARIN KATLILIĞI

Bu bölümde T_n operatörlerin katlılığının hesaplanması için bir kaç küçük gözlem yapılarak Atzmon(1987) çalışmasından faydalanılmıştır.

$\mathcal{L}(X)$ üzerinden her n pozitif tam sayı için T operatörünün n kopyalarının direkt toplamları T_n ile gösterilir. T operatörü $\mathcal{L}(X)$ de bir operatör olsun ve Önerme4.5 den

$$m(T_n) \leq nm(T) \qquad n=1,2,\ldots$$

(6.1)

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliği Önerme3.6 nin basit bir uygulamasından

$$m(T_{\mathrm{n}}) \geq n sup_{\lambda \epsilon \mathbb{C}} \dim[\mathrm{Ker}(T^{*}-\lambda)] \quad , \qquad n=1,2\ldots$$

(6.2)

olduğunu gösterilebilir. Ancak T^{*} bir özdeğere sahipse o zaman

$$m(T_{\mathrm{n}}) \geq n \ , \ n=1,2,\ldots$$

(6.3)

olduğu söylenebilir. Dolayısıyla $X, \mathcal{L}(X)$ de her operatör için sonlu boyutludur. Diğer bir ifadeyle (6.3) deki eşitsizlik genelikle doğru değildir. Eğer X sonsuz boyutlu ise mesela T operatörü l^2 de geri fark operatörüdür. Buradan $m(T_{\mathrm{n}})=1$, $n=1,2,...$ olduğunu bilinir (Atzmon,1987).

Eğer T ayrılabilir kompleks Hilbert uzayında bir normal operatör ise o zaman Teorem5.1'den

$$m(T_{\mathrm{n}}) = nm(T) \quad , \qquad n=1,2,\ldots$$

(6.4)

eşitliği olduğu aşikardır (Atzmon,1987).

Önerme.6.1*:* Eğer U ayrılabilir kompleks Hilbert uzayında bir izometri ise o zaman

$$m(U_n) \geq n \ , 1,2,\ldots$$

eşitsizliği vardır (Atzmon,1987).

İspat*:* Eğer U üniter değilse $\mathrm{Ker}U^{*} \neq \{0\}$ ve bu durum (6.3)'ten çıkar. Eğer U üniter ise bu durum da (6.4) koşulundan çıkar.

Teorem.6.2*:* T operatörü ayrılabilir kompleks Hilbert uzayında bir daralma olsun ve kabul edilir ki için $T^{n}_{x_0} \nrightarrow 0$ olacak şekilde bir x_0 vektörler varsa

$$m(T_n) \geq n \quad ,n=1,2,\ldots$$

(6.5)

eşitsizliği vardır (Atzmon,1987).

İspat*:* Teorem5.1 nin ispatından çıkar ve teorem5.2 ayrılabilir kompleks Hilbert uzayında

U bir izometri içerir ve sınırlı bir lineer L dönüşümü yoğundur, böylece $LT = UL$ olur. Dolayısıyla her pozitif n tam sayısı için L_n dönüşümü yoğundur. Burada $L_n T_n = U_n L_n$ eşitliği vardır. Bu durum önerme3.3, önerme6.1 ve (6.5) sonuçlarından ispatlanır.

Teorem.6.3*:* V operatörü $L^2[0,1]$ de Voltera integral operatörü olsun. Yani

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt \quad ,0 \leq x \leq 1,\ f \epsilon L^2[0,1]$$

O zaman

$$m(V_n) = n \quad , n=1,2,\ldots$$

eşitliği vardır (Atzmon,1987).

İspat*:* $L^2[0,1]$ de $f\ ve\ g$ fonksiyonların bileşkesi $f * g$ ile gösterilir.Yani [0,1] üzerindeki fonksiyon

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt,\ 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde tanımlanır.

$f * g$, $L^2[0,1]$ de olduğunu kolayca ispatlanır. Ve

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

(6.6)

olur. n bir pozitif tam sayı olsun $m(V_n) \geq n$ olduğunu gösterilir. H Hilbert uzayını $L^2[0,1]$ nin n kopyalarının direkt toplamlarını gösterilir.

$\varphi: H \rightarrow L^2[0,1]$ n-lineer dönüşümü alınsın. Bu tanımda böylece

$$f_j = (U_{i,j})_{i=1}^{n}\ ,\ j=1,2,\ldots,n$$

H da elemanlardır. O zaman

$$\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \det\,(* u_{i,j})_{i,j=1}^{n}$$

$u_{i,j}$ nin önündeki bu * sembol anlamı yukarı determinant tanımında bileşke çarpımdır. $\varphi \neq 0$ kolayca kanıtlanır. (6.6) gösterimde φ süreklidir. v bir fonksiyon olsun ki bu [0,1] de aynıdır. Buda $Vf = V * f$ olduğunu gösterilir. Her $L^2[0,1]$ deki f için negatif olmayan tam sayıların $(j_1, j_2, \ldots j_n)$ tüm n-sıralı için elde edilir ve n-sıralı $(f_1, f, \ldots f_n)$ H^n dedir.

$$\varphi(V^{j_1}f_1, V^{j_2}f_2, \ldots, V^{j_n}f_n)(z) = V^q\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

$q=j_1+j_2+\ldots+j_n$ dir. Bu gösterim φ , V_n ile ilgili sonuç3.2 keyfidir ve dolayısıyla bu sonuçtan $m(V_n) \geq n$ olduğu çıkar. $m(V) = 1$ kolayca ispatlanır. v , V de devirli vektördür ve dolayısıyla (6.1) ile $m(V_n) \leq n$ eşitsizliği elimizde vardır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada ayrılabilir kompleks Banach uzaylarında bazı operatörlerin katlılığının üzerinde çalışıldı. Ayrıca X bir ayrılabilir kompleks Banach uzayında bazı sınırlı lineer operatörlerin katlılığı çalışıldı.

Özellikle bu tezde $\mathrm{C}(\Gamma)$ ve $\mathcal{A}(\mathcal{D})$-disk cebirin üzerinde çarpma operatörünün katlılığı da çalışıldı. Eğer T operatörü $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de bir çarpma operatörü ise $m(T^n) = n$ olduğu gösterildi.

KAYNAKLAR

Atzmon, A.,1987. ***Multilinear mapping and estimates of multiplicity: Integral Equations and Operator Theory***, Birkhauser Verlag, Basel.

Bayraktar, M., 2006. ***Fonksiyonel Analiz***, A. Ü. Yayınları, Erzurum.

Conway, J. B. , 1981. ***Subnormal operators***, Pitman, London.

Conway, J. B. , 1989. ***A Course in Functional Analysis.***, Springer, New York.

Dönmez, A., 2001. ***Reel Analiz: Lebesgue Ölçümü ve İntegrali***, Seçkin Yayınları, Ankara.

Dunford, N., Schwartz, J. T., 1963. ***Linear operators (Part 2)***, Interscience, New York.

Halmos, P. R., 1967. ***A Hilbert space problem book***, Van Nostrand, New York.

Herrero, D. A., 1978. On multicyclic operators, ***İnt. Eq. Op. Theory***, **1:** 57-102.

Hoffman, K., 1964. ***Banach space of analytic functions***, Dover publication, s45-63.

Musayev, B. , Alp, M., 2000. ***Fonksiyonel Analiz***. Balcı Yayınları, Ankara.

Nagy, B. Sz., Foias, C., 1970. ***Harmonic analysis of operators in Hilbert space***, North Holland, Amsterdam.

Nagy, B. Sz., Foias, C., 1983. Contractions without cyclic vectors, ***Proc. Amer. Math. Sos., 87***: 671-674.

Rudin, W., 1954. Boundary values of continuous analytic functions, ***Proc. Amer. Math. Soc.,*** *7*: 805-811.

Şuhubi, E. S., 2001. ***Fonksiyonel Analiz***. İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.

Yosida, K., 1980. ***Functional analysis***, Springer-Verlag, New York.

ÖZ GEÇMİŞ

Hakkari'nin Yüksekova ilçesinde 1985 yılında doğdu. İlk ve orta öğretimini Sabancı İlköğretim Okul'unda, lise öğretimini de Yüksekova Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinin Matematik Bölümünü kazandı ve 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı.