T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RELATİVİSTİK KİNEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Rıdvan KARA
DANIŞMAN: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ

VAN-2013

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RELATİVİSTİK KİNEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Rıdvan KARA

VAN-2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr Şenay BAYDAŞ danışmanlığında, Rıdvan KARA tarafından sunulan "Relativistik Kinematik" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim –Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 27/11/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ İmza:

ÜYE : Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV İmza:

ÜYE : Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun......../......../201 tarih ve..............................sayılı kararı ile onaylanmıştır.

......./......./201....

Prof.Dr.Dr.Turgut AYGÜN

Enstitü Müdürü

ÖZET

RELATİVİSTİK KİNEMATİK

KARA, Rıdvan
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ
Kasım 2013, 54 sayfa

Bu çalışmada, Relativistik Kinematik başlığı altında; özel relativite teoremi, bu teoremin açıklandığı Lorentz uzayı ve Lorentz transformasyonları ile relativistik kinematiğin kinematik boyutu incelenmiştir.

Bu tez, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup relativistik kinematiğin genel bir yorumu verilmiştir. İkinci bölümde kinematiğin temel tanımları ve Cayley formülü verilmiştir. Üçüncü bölümde iki boyutlu Lorentz uzayı ve bu uzaydaki açı ve dönme kavramıyla ilgili tanım ve teoremler yer almaktadır. Dördüncü bölüm, Einstein'ın özel görecelilik kuramını ve Lorentz transformasyonlarını, ayrıca relativitede sapma ve Doppler kayması konularını kapsamaktadır. Beşinci bölümde ise Lorentz iç çarpımı ile Lorentz uzayının nasıl ve hangi koşullarda oluştuğuna açıklık getirilmiş buna ek olarak relativistik kinematiğin kinematik boyutu incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Kinematik, Lorentz transformasyonları, Relativistik kinematik, Relativite.

ABSTRACT

RELATIVISTIC KINEMATICS

KARA, Rıdvan
Msc Thesis, Department of Mathematic
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ
November 2013, 54 pages

In this study, under subject of relativistic kinematics; Lorentz space in which the theory of special relativity is explained, Lorentz transformations and kinematics aspect of relativistic kinematics have been examined. This thesis is consisted of five sections. In the first section, as an introductory, there is a general explanation about kinematics. In the second section, Cayley formula and basic definitions of kinematics are given. In the third section, two dimensional Lorentz space and definitions and theories related to angle and rotation are described. In the fourth section, it is given Einstein's special theory of relativity, Lorentz transformations, aberration and Doppler effect in relativity. In fifth section, it is given Lorentz inner product with kinematics aspect of relativistic kinematics.

Key words: Kinematics, Lorentz transformations, Relativistic kinematics, Relativity.

ÖN SÖZ

Bu çalışmanın yapılması fikrinden gerçekleşmesine kadar görüş, düşünce, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım saygı değer hocam Prof. Dr. Bülent Karakaş'a ve tez çalışmamın her aşamasında; bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, her konuda büyük desteğini gördüğüm danışman hocam Doç. Dr. Şenay Baydaş'a teşekkürlerimi sunarım.

Rıdvan Kara

2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$D(x)$	: Yer değiştirme
$\langle , \rangle_L$	: Lorentz iç çarpımı
$\| \quad \|_L$	: Lorentz anlamda norm
$K(x, y)$	: Lorentz uzayında x ve y vektörleri arasındaki açı
L^n	: n boyutlu Lorentz uzayı
$v \ll c$	: v, c ye nispeten çok küçük bir değer
Α α	: Alfa
Β β	: Beta
Γ γ	: Gamma
Λ λ	: Lamda

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Hareket teorisi; matematikte, fizikte ve mekanikte önemli bir yere sahip bir disiplindir. 1900'lü yıllara kadar üç boyutlu uzayda bir katı cismin hareketi çalışılmakta, Newton mekaniği ihtiyaca cevap vermekteydi.

Uzay-zaman ile ilgili ilk önemli çıkış 1909'da Hermann Minkowski tarafından yapıldı (Minkowski, 1909). Bundan önce Lorentz (1904), elektronların temel hareketlerinin kendi adıyla anılan Lorentz transformasyonları altında invaryant kaldıklarını gösterdi. Einstein (1905), relativitenin takdimi sayılabilecek yayını ile yeni bir açılım yaptı. Böylece uzay-zaman, hareket ve relativite birlikteliği değişik bir yapıya kavuştu. Sophus Lie ve Georg Scheffers (1893) ın grup teori ile ilgili çalışmaları ve Poincare'in Lorentz transformasyonlarının grup yapısının $\mathbb{R}^3$ x $i\mathbb{R}$ de mevcut olduğunu göstermesiyle, $\mathbb{R}^3$ x $i\mathbb{R}$ uzayı daha sonraları L^4 (4 boyutlu Lorentz uzayı) olarak isimlendirilecek olan uzayda, yeni bir kinematik yapısının yolunu açmıştır.

Bu tezde öncelikle kinematiğin temel kavramları verilecektir. Daha sonra n boyutlu Lorentz uzayının tanımı, Lorentz uzayının temel özellikleri ve bu uzayda dönme kavramı verilecektir. Sonraki bölümlerde ise özel relativite teoreminin esasları ve bu teoremin ifade edilişinde kullanılan Lorentz transformasyonları ele alınacaktır. Son bölümde ise relativistik kinematiğin kinematik arka planı verilecektir.

2. KİNEMATİK

Kinematik, noktaların hareketlerinin geometrik özelliklerini çalışan, hareket geometrisi olarak da adlandırılan geometrinin bir disiplinidir. Öncelikle bazı kavramları vermemiz gerekmektedir.

2.1. Tanım:

(M_1, d_1) ve (M_2, d_2) iki metrik uzay olsun.

$$f: (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$$

dönüşümü verildiğinde $\forall\, p, q \in M_1$ için

$$d_1(p, q) = d_2(f(p), f(q))$$

eşitliği sağlanıyorsa f ye, M_1 den M_2 ye bir **izometri** denir (Bottema, 1979).

2.2. Tanım:

E^n de bir noktayı sabit bırakan izometriye o nokta etrafında bir **dönme** denir (Hacısalihoğlu, 1980).

E^n de her dönme bir ortogonal matrisle verilir.

2.3. Tanım:

E^n in bir T izometrisi ve $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ için

$$T(x) = \vec{x} + \boldsymbol{t} = (x_1 + t_1, \ldots, x_n + t_n),$$

olacak şekilde bir tek $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in E^n$ noktası varsa T ye E^n in t ile belirtilen bir ötelemesi denir (Bottema, 1979).

2.4. Tanım:

$R \in O(n)$, $T \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $D(R, T)$ ikilisine E^n de bir **yer değiştirme** denir. Burada $O(n)$, $n \times n$ ortogonal matrisler cümlesidir.

$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$D(x) = (R, T) = R(x) + T$$

veya

$$D(x) = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.

$$D: E^n \to E^n$$

için, $E^n = F$, $D(E^n) = M$ ile temsil edilir, sabit ve hareketli uzay olarak adlandırılır. Böylece bir yer değiştirme $D: F \to M$ şeklinde bir dönüşümdür ve izometridir. Eğer bir t parametresine bağlı olarak ifade edilirse hareket kavramı verilir (McCarthy, 1990).

2.5. Tanım:

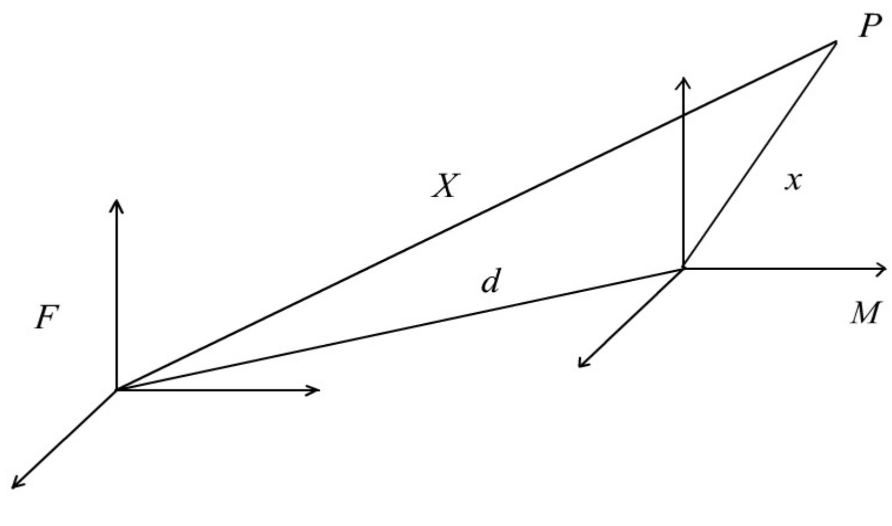
$D(t): F \to M$ yer değiştirmesine E^n de bir **hareket** denir (McCarthy, 1990).

2.6. Koordinat transformasyonları:

Bir cismin bir diğerine bağlı pozisyonunu çalışmak için her bir cisme birer çatı bağlanır. Cisimlerin biri sabit, diğeri hareketli kabul edilir. Sabit cisim yer gibi düşünülür ve bağlanan çatı sabit çatı olarak isimlendirilir. Bu çatı F ile gösterilsin. Hareketli cisme bağlanan çatı, hareketli çatıdır ve M ile gösterilsin. İlgili transformasyon M de ölçülen koordinatları F deki koordinatlara dönüştürür. Bu transformasyon,

$$X = [A]x + d \tag{2.1}$$

ile verilir; burada x noktanın M deki yer vektörü ve X ise F deki yer vektörüdür.



Şekil 2.1. Sabit ve hareketli çatı.

Hareketli cisim n −boyutlu ($n = 2$ veya 3) ise $[A]$ bir $n \times n$ matris ve d n −boyutlu vektördür. Bu transformasyonun, katı cismin katılığını korumak zorunda olması demek her iki koordinat sistemini kullanarak hesaplanan uzaklığın aynı olması demektir. M deki P ve Q arasındaki uzaklık, Öklid uzaklık formülüyle tanımlanır. Bu değer, P ve Q nun koordinat vektörlerinin farkının normudur. F deki ölçülendirme kullanılarak,

$$d(P,Q) = \|\vec{P} - \vec{Q}\|$$

$$= \sqrt{(P-Q)^T(P-Q)}$$

elde edilir. M deki ölçülendirmeyle;

$$\|P - Q\| = \|[A]p + d - ([A]q + d)\|$$

$$= \|[A](p-q)\|$$

$$= \sqrt{(p-q)^T[A^T][A](p-q)}$$

yazılır. Bu son eşitliğin $\|p - q\|$ ya eşit olması için

$$[A^T][A] = [I] \tag{2.2}$$

olmalıdır. (2.2) eşitliği (2.1) in bir katı transformasyon olmasını garantiler. Sonuç olarak (2.2) eşitliğini sağlayan matris bir ortogonal matristir (Bottema, 1979).

2.7. Cayley Formülü:

Bir dönmenin cismin noktaları arasındaki sabit uzaklığı koruması

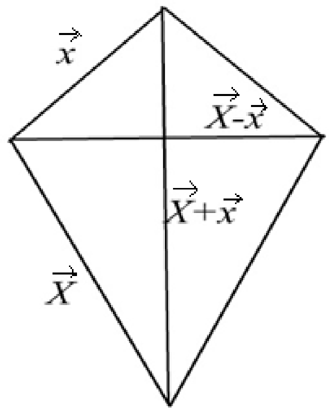
$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{X} \rangle - \langle \vec{X}, \vec{x} \rangle = 0$$

ve sonuç olarak,

$$\left(\vec{X} - \vec{x}\right)^T \left(\vec{X} + \vec{x}\right) = 0$$

formunda yazılabilir.



Şekil 2.2. $\vec{X}$ ve $\vec{x}$ vektörleri arasındaki ilişki.

$$\vec{X} + \vec{x} = [A + I]\vec{x}$$

$$\vec{X} - \vec{x} = [A - I]\vec{x}$$

değerleri yerine yazılırsa,

$$\vec{X} - \vec{x} = [A - I][A + I]^{-1}(\vec{X} + \vec{x})$$

olur.

$$B = [A - I][A + I]^{-1}$$

ile gösterilirse B matrisi $\vec{X} + \vec{x}$ vektörünü kendisine dik olan $\vec{X} - \vec{x}$ vektörüne dönüştürmektedir. $\vec{x}$ ve $\vec{X}$ herhangi vektörler olduğuna göre, temsilci bir $\vec{y}$ vektörü için;

$$\langle \vec{y}, [B]\vec{y} \rangle = 0$$

dir. $B = [b_{ij}]$ açık bileşenleriyle yazılırsa;

$$\sum_{i \neq j} (b_{ij} + b_{ji}) y_i y_j + \sum_{i=1} b_{ii} y_i^2 = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik keyfi bir $\vec{y}$ vektörü için sağlandığından; her i, j için

$$b_{ii} = 0$$

$$b_{ij} = -b_{ji}$$

olmalıdır. Yani $[B] = -[B]^T$ olup bir başka ifadeyle B matrisi anti-simetrik bir matristir. $B = [A - I][A + I]^{-1}$ eşitliğinden A matrisi çözülürse;

$$[B][A + I] = A - I$$

$$[B][A] + B = A - I$$

$$[B][A] - A = -[I] - [B]$$

$$[B - I][A] = -[I + B]$$

$$[A] = -[B - I]^{-1}[I + B]$$

$$[A] = [I - B]^{-1}[I + B]$$

elde edilir. Bu eşitlik ortogonal matrisler için Cayley formülü olarak adlandırılır (McCarthy, 1990).

3. LORENTZ UZAYI

Lorentz uzayı, relativiteyi anlayabilmek için incelenmesi gereken uzaydır. Burada Lorentz uzayının temel yapısını inceleyecek ve Öklid uzayı ile aralarındaki farklar vurgulanacaktır. Daha sonra Lorentz transformasyonları ile relativitenin matematiksel karşılığı incelenecektir.

3.1. Tanım:

V bir reel vektör uzayı olmak üzere V üzerinde tanımlı

$$b: V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\forall\, v, w \in V, \quad b(w, v) = b(v, w)$$

şartını sağlayan simetrik $\mathbb{R}$-bilineer form olsun.

V üzerinde tanımlı bir simetrik bilineer form b olmak üzere

1-) $\forall\, v \in V$ olmak üzere

$v \neq 0$ için $b(v, v) > 0$ ise b ye pozitif tanımlı,

$v \neq 0$ için $b(v, v) < 0$ ise b ye negatif tanımlı,

2-) $\forall\, v \in V$ olmak üzere

$b(v, v) \geq 0$ ise b ye pozitif yarı tanımlı,

$b(v, v) \leq 0$ ise b ye negatif yarı tanımlı,

3-) $\forall\, v, w \in V$ için

$b(v, w) = 0$ olduğunda $v = 0$ ise b ye nondejenere denir.

b, V üzerinde bir simetrik bilineer form ise b nin her $W \subset V$ alt uzayına kısıtlanması da simetrik ve bilineerdir. $b|_{(W \times W)}$ kısıtlanması $b|_W$ ile gösterilir. b yarı tanımlı ise $b|_W$ de yarı tanımlıdır (O'neill, 1983).

3.2. Tanım:

b, V üzerinde bir simetrik bilineer form iken $b|_W$ nin negatif tanımlı olduğu en büyük boyutlu $W \subset V$ alt uzayının boyutuna simetrik bilineer formun indeksi denir. Böylece $0 \leq \vartheta \leq boyV$ dir ve $\vartheta = 0 \leftrightarrow b$ pozitif yarı tanımlıdır.

Bir V vektör uzayı üzerinde tanımlı non-dejenere simetrik bilineer forma skaler çarpım denir. İç çarpım, pozitif tanımlı skaler çarpımdır. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı

$$v.w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

çarpımı bir iç çarpımdır. Bazen nokta (dot) çarpımı olarak da adlandırılır.

Bir uzay üzerinde bir skaler çarpım (iç çarpım) tanımlıysa vektör uzayına skaler çarpımlı uzay (iç çarpımlı vektör uzayı) denir.

Bir V vektör uzayı için $boyV \geq 2$ üzerinde tanımlı bir skaler çarpım mevcut ve skaler çarpımın indeksi 1 ise vektör uzayına Lorentz vektör uzayı denir (O'neill, 1983).

3.3. Tanım:

Bir V vektör uzayı için $boyV \geq 2$ üzerinde tanımlı bir skaler çarpım mevcut ve skaler çarpımın indeksi 1 ise vektör uzayına Lorentz vektör uzayı denir.

V bir Lorentz uzayı; $W \subset V$ bir alt uzay ve g V üzerinde tanımlı bir skaler çarpım olsun.

1-) $g|_W$ pozitif tanımlı ise yani W bir iç çarpım uzayı ise W ya spacelike,

2-) $g|_W$ non-dejenere ve indeksi 1 ise W ya timelike,

3-) $g|_W$ dejenere ise W ya lightlike (null) denir (O'neill, 1983).

3.4. Tanım

$\vec{x} \in L^2$ için $\vec{x}$ in normu

$$\|\vec{x}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|}$$

olarak tanımlanır (Birman ve Nomizu, 1984a).

Yine aksi belirtilmedikçe $\|\ \ \|$sembolü $\|\ \ \|_L$ yerine kullanılacaktır. Yukarıda verilen norm tanımına göre şu teorem verilebilir.

3.1. Teorem:

$\vec{x} \in L^2$ olmak üzere;

$i-)\|\vec{x}\|$ >0 dır.

$ii-)$ $\|\vec{x}\|$=0 $\leftrightarrow \vec{x}$ bir null vektördür.

$iii-)$ $\vec{x}$ bir time-like vektör ise $\|\vec{x}\|^2$=$-\langle\vec{x},\vec{x}\rangle$dir.

$iv-)$ $\vec{x}$ bir space-like vektör ise$\|\vec{x}\|^2$ =$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle$ dir (Birman ve Nomizu, 1984a).

3.5. Tanım:

L^2, iki boyutlu Lorentz uzayı ve $\vec{x}, \vec{y} \in L^2$olsun.

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0$$

ise $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir (Birman ve Nomizu, 1984a).

Aksi belirtilmedikçe iki vektörün dikliğinden "Lorentz anlamındaki dikliği" anlaşılacaktır.

3.2. Teorem:

L^2de her ikisi de time-like (veya space-like) olan iki vektör birbirine dik olamaz (Ergin, 1989).

İspat:

$\vec{x},\vec{y} \in L^2$ iki time-like vektör olsun. $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2)$için;

$$x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} < 0 \rightarrow x_1^{\ 2} < x_2^{\ 2}$$

$$y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2} < 0 \rightarrow y_1^{\ 2} < y_2^{\ 2}$$

olur.

$$\rightarrow x_1^{\ 2} y_1^{\ 2} < x_2^{\ 2} y_2^{\ 2}$$

$$\rightarrow |x_1 y_1| < |x_2 y_2|$$

$$\rightarrow x_1y_1 \neq x_2y_2$$

$$\rightarrow x_1y_1 - x_2y_2 \neq 0$$

$$\rightarrow \langle x, y \rangle \neq 0$$

bulunur. Yani $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri dik olamazlar. Benzer bir ispat space-like iki vektör için de yapılabilir.

3.1. Sonuç:

İki vektörün dik olması için birinin time-like, diğerinin space-like olması gerekir (Ergin, 1989).

3.6. Tanım:

$\vec{x} \epsilon L^2$ time-like bir vektör olsun. $\vec{e} = (0,1)$ olmak üzere;

$i-)$ $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle < 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne bir time-like future-pointing

$ii-)$ $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle > 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne bir time-like past-pointing vektör denir (O'neill, 1983).

Bu tanıma göre $\vec{x}$ vektörü time-like ve future-pointing ise,

$${x_1}^2 - {x_2}^2 < 0 \text{ ve } \quad x_2 > 0$$

olduğundan bu iki özelliği içinde toplayan aşağıdaki sonuç verilebilir.

3.2. Sonuç:

$\vec{x} = (x_1, x_2) \epsilon L^2$ vektörünün time-like ve future-pointing olması için yeter ve gerek şart

$$|x_1| < x_2$$

olmasıdır (Birman ve Nomizu, 1984a).

İspat:

$i-) \rightarrow :$ $\vec{x} \epsilon L^2$ time-like olduğundan

$$\vec{x} = (x_1, x_2)$$

için

$$x_1^2 - x_2^2 < 0$$ Denklemi buraya yazın.

$$\rightarrow {x_1}^2 < {x_2}^2$$

$$\rightarrow |x_1| < |x_2| \tag{3.1}$$

olur. Diğer taraftan

$$\vec{x} = (x_1, x_2)$$

future-pointing olduğundan

$$\rightarrow \langle (x_1, x_2), (0,1) \rangle < 0$$

$$\rightarrow -x_2 < 0$$

$$\rightarrow x_2 > 0$$

olur. Bunu (3.1) ifadesinde yerine yazarsak;

$$|x_1| < x_2$$

elde edilir.

$ii-)$ ←:

$$|x_1| < x_2$$

olsun.

Bu da $x_2 > 0$ olduğunu ifade eder. O halde,

$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle < 0$ demektir. Yani $\vec{x}$ bir future-pointing vektördür. Diğer taraftan;

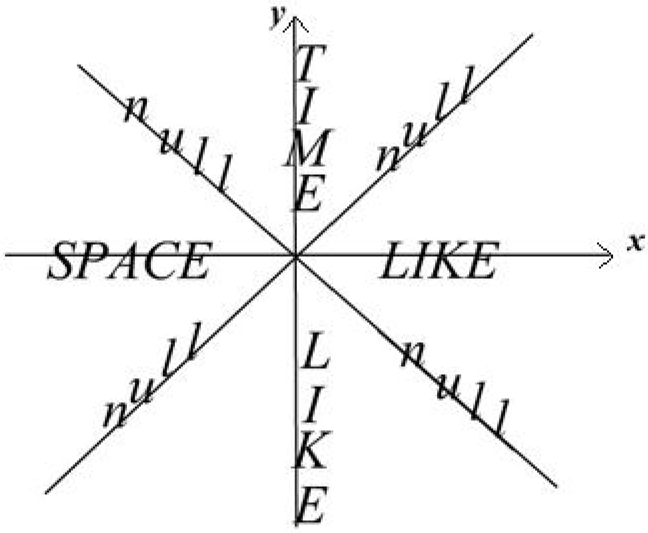
$$|x_1| < x_2$$

$$\rightarrow {x_1}^2 < {x_2}^2$$

$$\rightarrow {x_1}^2 - {x_2}^2 < 0$$

$\rightarrow \vec{x}$ time-like dır.

Yukarıdaki açıklamalara göre Lorentz iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ için vektörlerin cinsi aşağıdaki şekilde verilebilir (Ergin, 1989).



Şekil 3.1. Lorentz uzayında vektör çeşitleri

3.3. Teorem:

L^2 de birim time-like vektör $\vec{\ell}$ olsun.

$$\langle \vec{\ell}, \vec{\ell}^{\perp} \rangle = 0$$

olacak biçimde bir tek $\vec{\ell}^{\perp}$ birim vektörü vardır (Birman ve Nomizu, 1984a).

İspat:

Kabul edelim ki $\vec{\ell}^{\perp}$ tek olmasın. Yani;

$< \vec{\ell}, \vec{\ell}^{\perp} > = 0$ ve $< \vec{\ell}, \vec{\ell}'^{\perp} > = 0$

olacak şekilde $\vec{\ell}'^{\perp} = (\vec{\ell}_1'^{\perp}, \vec{\ell}_2'^{\perp})$ ve $\vec{\ell}^{\perp} = (\vec{\ell}_1^{\perp}, \vec{\ell}_2^{\perp})$ iki vektör olsun. $\vec{\ell} = (\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)$ olmak üzere;

$$0 =< \vec{\ell}, \vec{\ell}^{\perp} > = \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_1^{\perp} - \vec{\ell}_2 \vec{\ell}_2^{\perp}$$

$$0 =< \vec{\ell}, \vec{\ell}'^{\perp} > = \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_1'^{\perp} - \vec{\ell}_2 \vec{\ell}_2'^{\perp}$$

$$\rightarrow \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_1^{\perp} - \vec{\ell}_2 \vec{\ell}_2^{\perp} = 0$$

$$\rightarrow \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_1'^{\perp} - \vec{\ell}_2 \vec{\ell}_2'^{\perp} = 0$$

$$\frac{\vec{\ell}_1}{\vec{\ell}_2} = \frac{\vec{\ell}_2^{\perp}}{\vec{\ell}_1^{\perp}}$$

$$\frac{\vec{\ell}_1}{\vec{\ell}_2} = \frac{\vec{\ell}_2'^{\perp}}{\vec{\ell}_1'^{\perp}}$$

bu eşitliklerden;

$$\vec{\ell}_2^{\perp} = \lambda \vec{\ell}_2'^{\perp}$$

$$\vec{\ell}_1^{\perp} = \lambda \vec{\ell}_1'^{\perp}$$

elde edilir ki bu da $\vec{\ell}^{\perp}$ ve $\vec{\ell}'^{\perp}$nın lineer bağımlı olması demektir. Demek ki $\vec{\ell}^{\perp}$ tektir.

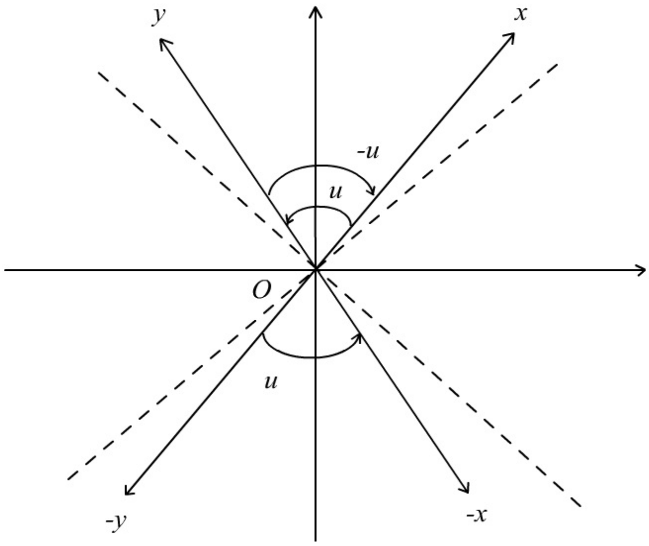
3.7. Tanım (Lorentz uzayında açı):

Lorentz uzayındaki açı kavramı ile Öklid uzayındaki açı kavramı farklılık arz etmektedir. Bu kavram vektör çeşitlerine göre iki farklı şekilde ele alınacaktır. İlk olarak time-like future-pointing veya past pointing vektörler arasındaki açı kavramı incelenecek daha sonra yine time-like bölgede, biri future-pointing biri past pointing vektörler arasındaki açı kavramı ele alınacaktır. Ayrıca burada açıyı ifade edecek olan u hiperbolik radyan cinsinden bir açı birimidir.

$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ time-like birim ve future-pointing (past-pointing) iki vektör olsun. $u \in \mathbb{R}$ için

$$A(u) = \begin{bmatrix} chu & shu \\ shu & chu \end{bmatrix}$$

dir. $A(u)x = y$ ise u ya x den y ye doğru yönlendirilmiş açı denir (Birman ve Nomizu, 1984a,b).



Şekil 3.2. Time-like vektörleri arasındaki açı

Bu tanıma göre,

$$K(\vec{x},\vec{y}) = u$$

ise

$$K(\vec{y},\vec{x}) = -K(\vec{x},\vec{y})$$

ve

$$K(-\vec{x},-\vec{y}) = K(\vec{x},\vec{y})$$

dir (Ergin, 1989).

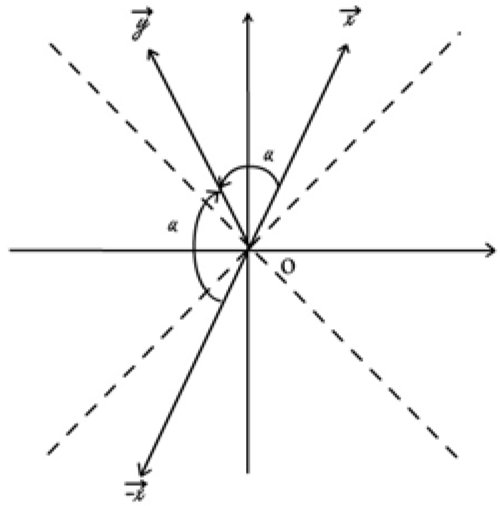
$\vec{x}$ time-like future-pointing birim vektör, $\vec{y}$ time-like past-pointing birim vektör olsun. Bu durumda $-\vec{y}$ future-pointing birim time-like vektördür. Bir önceki tanıma göre;

$$u = K(-\vec{y},\vec{x})$$

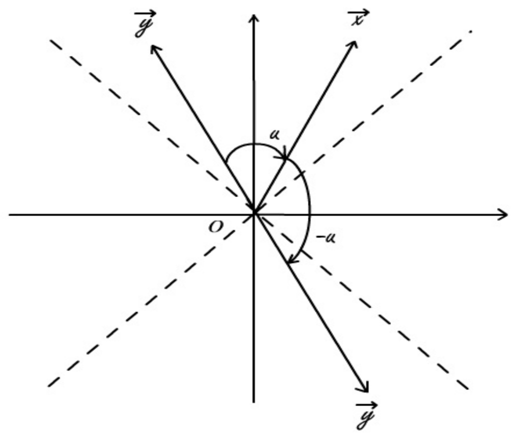
ise $\vec{x}$ den $\vec{y}$ ye olan açı,

$$K(\vec{x},\vec{y}) = -u$$

olarak tanımlanır (Birman ve Nomizu, 1984b).



Şekil 3.3. Future pointing vektörler arasındaki açı



Şekil 3.4. Future pointing ve past pointing vektörler arasındaki açı

3.4. Teorem:

$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ birim time-like future-pointing vektörler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Birman ve Nomizu, 1984b).

1−) $K(\vec{x}, -\vec{x}) = 0$

2−) $K(\vec{x}, \vec{y}) + K(\vec{y}, \vec{z}) = K(\vec{x}, \vec{z})$

3−) $K(\vec{x}, \vec{x}) = 0$

$4-)\ K(\vec{y},\vec{x}) \ = \ -K(\vec{x},\vec{y})$

$5-)\ K(-\vec{x},\vec{y}) = K(\vec{x},\vec{y})$

$6-)\ K(\vec{x},-\vec{y}) = K(\vec{x},\vec{y})$

3.5. Teorem:

$\vec{x}$ den $\vec{y}$ ye açı “u” ve $\vec{x},\vec{y}$ time-like, futurepointing birim iki vektör ise

$$chu = -\langle \vec{x},\vec{y} \rangle$$

dir (Birman ve Nomizu, 1984a).

İspat:

$\vec{x}$ den $\vec{y}$ ye açı u ise;

$$\begin{bmatrix} chu & shu \\ shu & chu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 chu + x_2 shu = y_1$$

$$x_1 shu + x_2 chu = y_2$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{x},\vec{y} \rangle &= \langle (x_1,x_2),(\,y_1,y_2\,) \rangle \\ &= \langle (\,x_1,x_2),(\,x_1 chu \,+ x_2 shu,\, x_1 shu \,+\, x_2 chu) \rangle \\ &= ({x_1}^2 - {x_2}^2)\, chu \\ &= -chu \end{aligned}$$

bulunur.

3.6. Teorem:

$\vec{x},\vec{y} \,\epsilon\, L^2$ future-pointing ve time-like vektörler olsun. Bu durumda;

$1-)\ \langle \vec{x},\vec{y} \rangle < 0$

$2-)\ \vec{x}+\vec{y}$ future-pointing ve time-like’dır.(kapalılık)

$3-)\ -\langle \vec{x},\vec{y} \rangle \geq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ (Lorentz uzayında Schwartz eşitsizliği)

4−) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \geq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Lorentz uzayında üçgen eşitsizliği)

özellikleri sağlanır (Birman ve Nomizu, 1984a).

İspat:

1−) $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ future-pointing time-like vektörler olduğundan,

$$|x_1| < x_2$$

$$|y_1| < y_2$$

$$\rightarrow |x_1||y_1| < x_2 y_2$$

$$\rightarrow |x_1 y_1| < x_2 y_2$$

$$\rightarrow |x_1 y_1| - x_2 y_2 < 0$$

Mutlak değer kaldırılırsa eşitsizlik daha da kuvvetlenir. O halde;

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 < 0$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle < 0$$

Eşitlik hali iki vektörden en az birinin sıfır olmasıyla mümkündür.

2−) $\vec{x}, \vec{y}$ time-like ve future-pointing olduğundan,

$$|x_1| < x_2$$

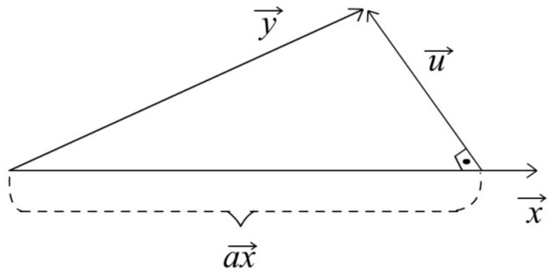
$$|y_1| < y_2$$

$$|x_1| + |y_1| < x_2 + y_2$$

$$\rightarrow |x_1 + y_1| < x_2 + y_2$$

(eşitsizlik daha da kuvvetlendi).

$\rightarrow \vec{x} + \vec{y}$ future-pointing ve time-like'dır.



Şekil 3.5. İki dik vektör arasındaki ilişki

3−) $\vec{y}$ vektörünün $\vec{x}$ üzerine Lorentz anlamında dik izdüşümünü alalım (Şekil 3.5). Bu durumda;

$$\langle \vec{x}, u \rangle = 0$$

ve

$$y = a\vec{x} + u$$

olur. Bu yazılışta $\vec{u}$ vektörü bir space-like vektördür. Zira $a\vec{x}$ vektörü time-like'dır.

$$\begin{aligned} \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle &= \langle a\vec{x} + u, a\vec{x} + u \rangle \\ &= a^2\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2a\langle \vec{x}, u \rangle + \langle u, u \rangle \\ &= a^2\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle u, u \rangle \end{aligned}$$

$$a^2\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle u, u \rangle \tag{3.2}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 &= \langle \vec{x}, a\vec{x} + u \rangle^2 \\ &= a^2\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^2 + \langle \vec{x}, u \rangle^2 + 2\langle \vec{x}, a\vec{x} \rangle \langle \vec{x}, u \rangle \\ &= a^2\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^2 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) kullanılarak;

$$\begin{aligned} &= (\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle u, u \rangle)\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \\ &= \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \langle u, u \rangle \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \end{aligned}$$

Bu ifadeden pozitif terim atılırsa;

$$\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \geq \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

$$\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \geq (-\|\vec{y}\|^2)(-\|\vec{x}\|^2)$$

$$\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \geq \|\vec{y}\|^2 \|\vec{x}\|^2$$
$$\rightarrow |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \geq \|\vec{y}\| \|\vec{x}\|$$

1.den dolayı yani $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle < 0$ olduğundan,

$$-\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \geq \|\vec{y}\| \|\vec{x}\|$$

dir.

4−) $$(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|$$

$ch\theta > 1$ olduğundan;

$$\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\| ch\theta$$

$$\rightarrow (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \leq -(\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle)$$

$$\rightarrow (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \leq \|\vec{x} + \vec{y}\|^2$$

$$\rightarrow \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} + \vec{y}\|$$

bulunur.

3.8. Tanım:

L^2 de dönme matrisi diye $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

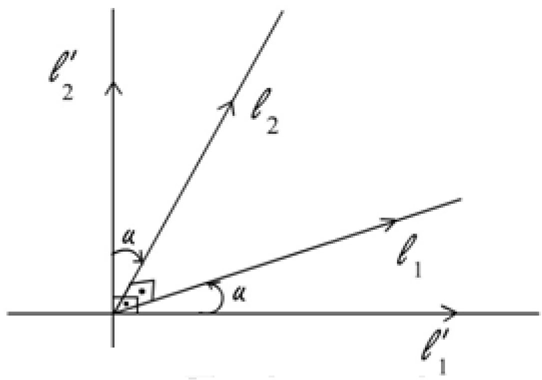
$$A(u) = \begin{bmatrix} chu & shu \\ shu & chu \end{bmatrix}$$

$2x2$ matrisine denir (Birman ve Nomizu, 1984a).

Bu dönme kavramı Öklid uzayındaki dönme kavramından farklıdır. Bunun durum Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 ile açıklanabilir. Buna göre;

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} chu & shu \\ shu & chu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1' \\ \ell_2' \end{bmatrix}$$

olur.



Şekil 3.6. Lorentz uzayında dönme

Bu dönmenin daha iyi anlaşılabilmesi için $u = ln2$ hiperbolik radyan olsun.

$A(ln2)$ matrisi yardımıyla $\ell_1 = (1,0)$, $\ell_2 = (0,1)$ birbirine dik olan iki vektörün $u = ln2$ kadar dönmeden sonra alacağı yeni konum

$$A(ln2) = \begin{bmatrix} ch(ln2) & sh(ln2) \\ sh(ln2) & ch(ln2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$$

olur.

$$A(ln2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} \rightarrow A(ln2)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada Lorentz anlamında u hiperbolik radyanlık dönmeden sonra elde edilen $A(ln2)_{l_1}$ve $A(ln2)_{l_2}$ vektörleri için

$$\langle \mathrm{A(ln2)}_{\ell_1}, \mathrm{A(ln2)}_{\ell_2} \rangle = 0$$

$$\|\mathrm{A(ln2)}_{\ell_1}\| = 1$$

$$\|\mathrm{A(ln2)}_{\ell_2}\| = 1$$

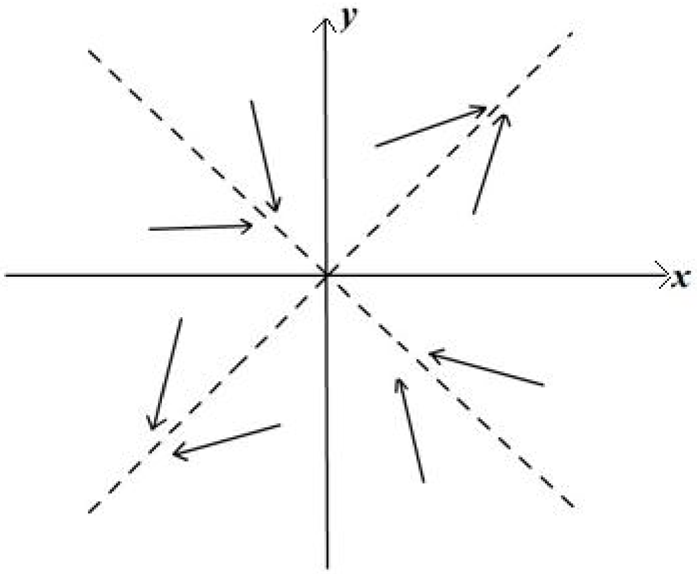
oldukları kolaylıkla görülebilir. Hatta bu dönme altında iki nokta arasındaki uzaklık da korunmaktadır. Bu ileride bir teoremle ifade edilecektir. Şimdi ise $P = (1,1)$ noktasının $A(ln2)$ dönme matrisi altında alacağı yeni konum;

$$A(ln2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

olur. $Q=(1,2)$ noktası için,

$$A(ln2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2,75\\3,75\end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece L^2 de u radyanlık bir dönme Şekil 3.7. deki gibidir. Yani 1. ve 3. Bölgelerde merkezden kaçan ve null vektörlere yaklaşan noktalar, 2. ve 4. bölgelerde merkeze ve null vektörlere yaklaşan noktalar bu dönmenin esasını oluşturmaktadır (Ergin, 1989).



Şekil 3.7. Lorentz uzayında dönmenin bölgeler arası farkı

3.7. Teorem:

$A(u)$ matrisine karşılık gelen $A: L^2 \rightarrow L^2$ lineer dönüşümü, time like vektörleri time like vektörlere spacelike vektörleri spacelike vektörlere ve null vektörleri null vektörlere dönüştürür. Yani A yönlendirmeyi korur (Birman ve Nomizu, 1984a).

İspat:

$\vec{x} \in L^2$ ve x time like olsun. $\vec{x}$=(x_1,x_2) olmak üzere;

$$A(u)x = \begin{bmatrix} x_1 chu & + x_2 shu \\ x_1 shu & + x_2 chu \end{bmatrix}$$

dir ve

$$\begin{aligned} \langle A(u)x, A(u)x \rangle &= (x_1 chu + x_2 shu)^2 - (x_1 shu + x_2 chu)^2 \\ &= x_1^2 (ch^2u - sh^2u) - x_2^2 \ (ch^2u - sh^2u) \\ &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{x}$ time like olduğundan

$$\langle A(u)x, A(u)x \rangle < 0$$

elde edilir. Benzer ispat space-like ve null vektörler için de yapılabilir.

3.8. Teorem:

$A(u)$ matrisine karşılık gelen $A: L^2 \to L^2$ lineer dönüşümü zaman yönlendirmesini korur (Birman ve Nomizu, 1984a).

İspat:

$\vec{x} = (x_1, x_2) \epsilon\, L^2$ ve x future-pointing olsun. $e = (0,1)$ olmak üzere,

$$\langle A(u)x, A(u)e \rangle < 0$$

olur. Benzer şekilde past-pointing için yine

$$\langle A(u)x, A(u)e \rangle > 0$$

olur. $A(u)$ zaman yönlendirmesini korur.

3.9. Teorem:

$A(u)$ matrisine tekabül eden $A: L^2 \to L^2$ lineer dönüşümü iki nokta arasındaki uzaklığı korur (Ergin, 1989).

İspat:

$\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \epsilon\ L^2$ de iki nokta olsun.

$$\overrightarrow{xy} = (y_1 - x_1 , y_2 - x_2)$$

olup

$$d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = |(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2|^{1/2}$$

dir. Diğer taraftan;

$$A(u)x = (x_1 chu + x_2 shu, x_2 shu + x_2 chu)$$

$$A(u)y = (y_1 chu + y_2 shu, y_1 shu + y_2 chu)$$

olduğundan

$$d(A(u)x, A(u)y) = \|d(A(u)x, A(u)y)\|$$

$$= \|((x_1 - y_1)chu + (x_2 - y_2)shu), ((x_1 - y_1)shu + (x_2 - y_2)chu)\|$$

$$= |(x_1 - y_1)^2 ch^2u + (x_2 - y_2)^2 sh^2u + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)chushu$$
$$- (x_1 - y_1)^2 sh^2u - (x_2 - y_2)^2 ch^2 - 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)chushu|^{1/2}$$

$$= |(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2|^{1/2} = d(x, y)$$

elde edilir.

4. LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ

Lorentz'in tanımladığı bu farklı metrik ve vektörler son yüzyılın bazı fizik kuramcılarına kendilerini ifade edebilecekleri yeni bir alan yaratmıştır. Bu kesimde Lorentz çarpanı ve Lorentz transformasyonları olarak bilinen kavramlar ve bu kavramların kullanıldığı fizik alanları incelenmektedir.

Lorentz dönüşümlerini anlayabilmek için öncelikle Einstein'ın özel görecelik ilkesine bakılmalıdır. Çünkü Lorentz dönüşümleri birbirine göre düzgün doğrusal hareket eden farklı eylemsizlik sistemlerindeki gözlemcilerin saptadıkları bir olayın birbirine göre durumlarını inceleyen dönüşümlerdir.

4.1. Özel Görecelik Kuramı:

Özdeş ölçü çubuklarına sahip gözlemcilerin, içinde bulunan herhangi bir uzunluğu kendi çubuklarıyla ölçtüklerinde düzgün doğrusal hareketlerinden bağımsız olarak aynı değeri buldukları uzay salt uzaydır. Salt zaman ise, özdeş ve ayar edilmiş (başlangıç anları çakışık) saatlere sahip birbirine göre düzgün doğrusal hareket eden gözlemcilerin her an kendi referans sistemlerinde yaptıkları ölçüler sonucunda saptadıkları ortak değerle belirlenen zamandır. Tüm gözlemciler için salt zaman aynıdır.

Şimdi salt uzaya göre düzgün doğrusal hareket eden ve her birinde bir gözlemci bulunan iki referans sistemi alınsın. Her iki gözlemcinin kullandığı koordinat sistemlerinin eksenlerinin paralel olduğunu varsayılsın. Bu koordinat sistemleri (S) ve (S') ile gösterilsin. Bu gözlemciler her hangi iki olayı incelesinler. Her ikisi de kendi özdeş saatleriyle olayların oluş zamanlarını saptadıklarında aynı değerleri bulacaklarıdır.

$$t = t'$$

Olayların oluş yerlerinin birbirine olan uzaklığını da eşit bulacaklardır.

$$|\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1| = |\mathrm{r}_2' - \mathrm{r}_1'|$$

Bu durum Newton anlayışında geçerlidir. Yani Newton anlayışı söz konusu olduğunda her iki sistemdeki saatler her olay için aynı zamanı ; özel görecelik kuramı söz konusu olduğunda ise saatler farklı zamanları gösterir.

Özel görecelik kuramına zemin hazırlayan en büyük etken ışığın hızının saniyede 300.000 km olarak ölçülmesi ve bu gerçeğin yorumlanması olmuştur. Einstein (1905) yayınladığı bir makale ile şu iki ilkeyi benimsemiştir.

1-Özel Görecelik İlkesi : Fizik yasaları (mekanik, elektromanyetik-optik) birbirine göre düzgün hareket eden tüm eylemsizlik sistemlerindeki gözlemcilere göre aynıdır.

2-Boşlukta Işık Hızının Sabitliği İlkesi : Işığın boşluktaki sürati ışık kaynağı ile gözlemcinin birbirine göre olan düzgün doğrusal hareketinden ve ışığın yayılma doğrultusu ile yönünden bağımsız evrensel bir sabittir.

Boşlukta ışık hızının sabitliği ilkesinin temel olarak alınması nedeniyle salt zamanın varlığı kabulünün bir yana bırakılması önemli bir soruna yol açmaktadır. Bu soru şudur: farklı eylemsizlik sistemlerinde bulunan gözlemciler bu yeni ilke doğrultusunda kendi sistemlerindeki zamanı ve uzunlukları nasıl belirlemelidirler? Hendrick Antoon Lorentz (1904) bu sorunun çözümünde bize yardımcı olacak Lorentz dönüşümlerini tanımlamıştır.

Birbirine göre sabit hızla hareket eden iki gözlemciyi alınsın. Her iki gözlemcinin aynı bir olay için ölçtükleri zaman değerleri birbirine göre nasıl olacaktır? Bu amaçla bir düşünsel deney tasarlansın.

Gözlemciler tam birbirleriyle buluştukları anda ortak hareket doğrultuları üzerinde ileride bir yerde bir olay olsun. Her iki gözlemcinin elinde olaydan çıkan ve ve kendilerine doğru gelen sinyali saptayacak birer özdeş algılayıcı olsun. Ayrıca bu gözlemcilerin elinde özdeş zaman ölçerleri bulunsun ve her ikisi de zaman ölçerlerinin başlangıç anlarını buluştukları anda çakıştırmış (ayarlamış) olsunlar. Eğer gözlemcilerin ikisi de sinyale doğru hareket ederse sinyale doğru daha süratli ilerleyen gözlemcinin algılayıcısı sinyal ile, öteki gözlemcinin algılayıcısına kıyasla daha önce karşılaşacak ve gözlemcilerin olayı saptamaları için geçen zaman farklı olacaktır. Eğer gözlemciler birbirine göre ters yönde hareket ederlerse sinyalden uzaklaşan gözlemcinin algılayıcısı öteki gözlemcinin algılayıcısına göre sinyal ile çok daha sonra karşılaşacaktır.

Boşlukta Işık Hızının Sabitliği İlkesi' ne inanan gözlemciler zaman ölçerlerinin herhangi bir olay için gösterdiği zamanların aynı olmasının gerekmediğini hatta aynı olmamasının doğal olduğunu bu şekilde fark ederler.

Newton mekaniği kurallarına bağlı gözlemciler için ise böyle bir şey söz konusu değildir. Çünkü Galilei Görecelik İlkesi uyarınca ışığın hızını sonsuz kabul edeceklerinden böyle bir fark oluşmayacaktır. Salt zaman kavramı bu farka engel olacaktır (Rızaoğlu ve Sünel, 2011).

4.2. Lorentz Dönüşümlerinin Elde Edilmesi:

(S) ve (S') herhangi iki eylemsizlik sistemi olsun. Bu sistemler birbirine göre düzgün doğrusal hareket etsin. Bunlara bağlı gözlemciler de aynı şekilde isimlendirilsin. Bu gözlemciler etraflarında olan olaylar için saptayacakları oluş yeri koordinatlarını ve oluş zamanlarını birbirinin elde ettiği değerlere nasıl dönüştüreceklerini bulmak istesinler.

Bu amaçları için öncelikle kendilerine birer koordinat sistemi seçmek zorundadırlar. Böylelikle olayların kendilerine olan uzaklıklarını hangi doğrultulara göre belirleyeceklerini ve birim uzaklık (ölçek birimi) olarak ne kullanacaklarını saptamış olurlar. Birbirine özdeş ölçü çubukları ve zaman ölçerler seçip zaman ölçerlerini de ayarlamalıdırlar.

(S) sistemine bağlı gözlemci her hangi bir olayın oluş zamanını ve yerini ölçtüğünde bulacağı değerleri $t\,;\, x, y, z$ ile göstersin.(S') gözlemcisi için aynı değerler $t'\,;\, x', y', z'$ olacaktır. (S') sisteminin (S) sistemine göre hzı v olsun. Bu durumda (S) sisteminin (S') sistemine göre hızı – v olur (Rızaoğlu ve Sünel, 2011).

4.2.1. Göreceli hızın eksenlerden birine paralel olması durumu:

Koordinat sistemleri birbirlerine göre x ve x′ eksenlerinin ortak doğrultusunda hareket etsin. Eylemsizlik sistemlerinin birbirine göre düzgün doğrusal hareket etmesi $t'\,;\, x', y', z'$ koordinatlarının her birinin $t\,;\, x, y, z$ koordinatlarının bir lineer toplamı olmasının gerektirir. Eksenlerin paralelliklerinin bozulmaması y' koordinatının y koordinatına z' koordinatının da koordinatına eşit olur. Bu durumda bağıntılar;

$$t' = a_{00}\, t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z$$

$$x' = a_{10}t + a_{11}x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemler daha yalın halde yazılabilir:

(S') sisteminin orjininden duran bir cismin (S) sistemine göre olan süratinin bir yandan *v* öte yandan da

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-a_{10}(v)}{a_{11}(v)}$$

olduğunu bilinmektedir. Buradan ;

$$\frac{a_{10}(v)}{a_{11}(v)} = -v \tag{4.1}$$

elde ederiz. Yukarıda verilen dönüşümün ters dönüşümünü yazdığımızda yalın bir ara işlemle

$$\Delta(v) = a_{10}(v)a_{01}(v) - a_{00}(v)a_{11}(v)$$

kısaltması ile

$$t = -\frac{a_{11}(v)}{\Delta(v)}t' + \frac{a_{01}(v)}{\Delta(v)}x' + \frac{a_{11}(v)a_{02}(v)}{\Delta(v)}y' + \frac{a_{11}(v)a_{03}(v)}{\Delta(v)}z'$$

$$x = \frac{a_{10}(v)}{\Delta(v)}t' - \frac{a_{00}(v)}{\Delta(v)}x' - \frac{a_{10}(v)a_{02}(v)}{\Delta(v)}y' + \frac{a_{10}(v)a_{03}(v)}{\Delta(v)}z'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan elde edilen bu ters dönüşümün katsayılarının özel görecelilik ilkesi gereğince verilen dönüşümün katsayılarında *v* yerine –*v* konulmasıyla elde edilecek olan $a_{pq}(-v)$ katsayılarına eşit olacaktır. Bu özellik

$$a_{00}(-v) = -\frac{a_{11}(v)}{\Delta(v)}$$

$$a_{01}(-v) = \frac{a_{01}(v)}{\Delta(v)} \tag{4.2}$$

$$a_{02}(-v) = \frac{a_{11}(v)a_{02}(v)}{\Delta(v)}$$

$$a_{03}(-v) = \frac{a_{11}(v)a_{03}(v)}{\Delta(v)} \qquad (4.3)$$

$$a_{10}(-v) = \frac{a_{10}(v)}{\Delta(v)}$$

$$a_{11}(-v) = -\frac{a_{00}(v)}{\Delta(v)} \qquad (4.4)$$

$$a_{10}(v)a_{02}(v) = 0, a_{10}(v)a_{03}(v) = 0 \qquad (4.5)$$

verir. (4.1) uyarınca $a_{10}(v) \neq 0$ olması gerektiğinden (4.5) eşitlikleri

$a_{02}(v) = 0, a_{03}(v) = 0$ olduğunu söyler. Böylelikle (4.3) bağlantılarından

$$a_{02}(-v) = 0, a_{03}(-v) = 0$$

elde edilir.

Şimdi (S) sisteminin orjininde duran bir cisim göz önüne alınsın. Cismin (S') sisteminde bulunan gözlemciye göre sürati bir yandan -*v* ve öte yandan;

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{a_{10}(v)}{a_{00}(v)}$$

dir. Öyleyse;

$$\frac{a_{10}(v)}{a_{00}(v)} = -v \qquad (4.6)$$

olur. (4.1) ve (4.6) eşitlikler birleştirildiğinde

$$a_{11}(v) = a_{00}(v)$$

bulunur. $a_{00}(v) = a(v)$ yazarsak $a_{11}(v) = a(v)$ ve $a_{10}(v) = -va(v)$ olur. $a_{01}(v)$ hakkında herhangi bir bilgi yoktur. Bu kısaca $b(v)$ ile gösterilsin. Böylece ;

$$t' = a\,t + bx$$

$$x' = -avt + ax$$

halini alır. Eşitliklerin bu son hali bir arada yazılırsa;

$$t' = a\,t + bx$$

$$x' = -avt + ax \qquad (4.7)$$

$$y' = y$$

$$z^{'} = z$$

Her iki gözlemcinin ölçtüğü zamanların ortak başlangıcında yani $t = 0$, $t' = 0$ anında her iki koordinat sisteminin çakışık olan orjinlerinin bulunduğu noktadan bir ışık sinyali çıksın. (S) gözlemcisine göre koordinatları x, y, z ve (S') gözlemcisine göre koordinatları x', y', z' olan noktada bulunan bir algılayıcı bu sinyali kaydetsin. (S) bu anı *t* olarak (S') de t' olarak saptayacaktır. Bu özellikler (S) sisteminde

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ve (S') sisteminde de;

$$(ct')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

verecektir. (4.7) eşitlikleri

$$(ct')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

eşitliğinde yerleştirildiğinde;

$$(ax - avt)^2 + y^2 + z^2 - c^2(at + bx)^2 = 0$$

elde edilir. Parantezler açılır ve elde edilen sonuç

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ile karşılaştırılırsa katsayıların eşitliğinden;

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$b = \frac{-av}{c^2}$$

olduğu görülür. Böylece bu özel durumda yani (S) ve (S') sistemlerinin x ve x' eksenlerinin ortak doğrultusunda hareket etmesi durumunda (S) ve (S') gözlemcilerinin ölçtükleri koordinatları birbirine bağlayan bağıntılar

$$t' = \frac{t - \frac{xv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

olarak elde edilir. Farklı eksenler boyunca olan süratleri şimdiye kadar göreceli sürati gösterilen v parametresine sırasıyla x, y, z alt indisleri yazılarak gösterilir. Eylemsizlik sistemlerinin birbirine göre hareketinin y ve y' eksenlerinin ortak doğrultusu ile z ve z' eksenlerinin ortak doğrultusu olması durumunda dönüşüm bağıntıları;

$$t' = \frac{t - \frac{xv_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{{v_y}^2}{c^2}}}$$

$$x' = x$$

$$y' = \frac{y - v_y t}{\sqrt{1 - \frac{{v_y}^2}{c^2}}}$$

$$z' = z$$

ve

$$t' = \frac{t - \frac{xv_z}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{{v_z}^2}{c^2}}}$$

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = \frac{z - v_z t}{\sqrt{1 - \frac{{v_z}^2}{c^2}}}$$

şeklini alır. (S) gözlemcisinin ölçtüğü büyüklükleri (S') gözlemcisinin ölçtüğü büyüklüklere bağlayan bağıntılar yani yukarıdaki dönüşümlerin ters dönüşümleri de *v* yerine *–v* yazılarak elde edilir. Örneğin x ekseni doğrultusundaki hareket için dönüşümler yazılırsa

$$t = \frac{t' + \frac{x' v_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + v_x t'}{\sqrt{1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

olur. Bu dönüşümler basit Lorentz dönüşümleri olarak bilinir. Genellikle;

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

kısaltmaları kullanılır. Buradaki γ Lorentz çarpanı olarak bilinir. Buradaki bir başka nokta da şudur: Eğer $v > c$ olursa $\beta > 1$ olur. Ve sonuçta γ sanal olur. Bu da reel ct ; x, y, z büyüklüklerinden basit Lorentz dönüşümü ile kompleks olan ct'; x', y', z' büyüklüklerine geçmek yani uzay koordinatlarının ve zamanın kompleks olması demektir. Böyle bir şey söz konusu bile olamaz. Bu nedenle eylemsizlik sistemlerinin göreceli süratleri ışığın süratinden büyük olamaz. Bu eşitliklerin katsayılar matrisini oluşturmak için t eşitliği c sabiti ile çarpılıp vektörel cinsten yazmamız gerekir.

$$ct' = \gamma_x (ct) - \gamma_x \beta_x x$$

$$x' = \gamma_x x - \gamma_x \beta_x (ct)$$

$$y' = y, \qquad z' = z$$

Bu durumda benzer eşitlikleri y ve z eksenleri boyunca hareket söz konusu olduğunda da elde edilebilir. Matris formları ise;

$$\begin{bmatrix} \gamma_x & -\gamma_x\beta_x & 0 & 0 \\ -\gamma_x\beta_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_y & 0 & -\gamma_y\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_y\beta_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_z & 0 & 0 & -\gamma_z\beta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_z\beta_z & 0 & 0 & \gamma_z \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Resnick, 1968).

4.2.2. Göreceli hızın her hangi bir doğrultuda olması durumu:

Eksenleri birbirine paralel olan (S) ve(S') sistemlerinin herhangi bir doğrultuda hareket etmesi durumunda dönüşüm bağlantıları bu kadar yalın olamaz. Şimdi de bu durum ele alınsın. (S') sistemi (S) sistemine göre v hızıyla hereket etsin. (S) sistemi de (S') sistemine göre $-v$ hızı ile hareket edecektir. Herhangi bir olay söz konusu olduğunda, (S) ve (S') gözlemcilerinin belirledikleri oluş zamanlarının ve oluş yerinin konum vektörlerinin arasındaki bağlantıyı bulalım. Basit Lorentz dönüşümlerinden, herhangi bir olayın her iki gözlemciye göre olan oluş zamanlarının ve hareket doğrultusundaki koordinatlarının birbirlerine bağlılığının nasıl olduğu bilinmektedir. Hareket doğrultusuna dik doğrultudaki koordinatlar ise birbirine eşittir. Ele aldığımız bu genel durumda geçerli olacak bağlantıları bulmak için, yukardaki iki cümlede sözü edilen özellikler kullanılacaktır. Bu amaçla olayın oluş yerinin her iki gözlemciye göre olan r ve r' konum vektörleri iki bileşene ayrılabilir: Hareket doğrultusundaki bileşeni $r_{\parallel}$ ve hareket doğrultusuna dik doğrultudaki bileşeni de $r_{\perp}$ ile gösterilsin. Dolayısıyla,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

olmak üzere,

$$t' = \gamma(t - \frac{v.r}{\sqrt{1-\beta^2}})$$

$$r_{\parallel}' = \gamma(r_{\parallel} - vt)$$

$$r_{\perp}' = r_{\perp}$$

olur. v doğrultusundaki birim vektör $\frac{v}{\|v\|}$ olduğundan ,

$$r_{\parallel} = (r\frac{v}{\|v\|})\frac{v}{\|v\|} \quad \text{ve} \quad r_{\perp} = r - r_{\parallel}$$

elde edilir. Buna göre;

$$r' = \gamma((rv)\frac{v}{\|v\|^2} - vt) + r - (rv)\frac{v}{\|v\|^2}$$

$$= r + (\gamma - 1)(rv)\frac{v}{\|v\|^2} - \gamma vt$$

olur. Bu genel durumda elde edilen Lorentz dönüşümü formülleri bir arada yazılırsa,

$$ct' = \gamma(ct - \frac{rv}{c})$$

$$r' = r + (\gamma - 1)(rv)\frac{v}{\|v\|^2} - \gamma\frac{v}{c}ct$$

dir (Moller, 1972).

4.3. Einstein Hız Toplamı:

İki gözlemcinin birbirine göre hız bileşenlerini bulmak için, birbirine göre x ve x' eksenleri boyunca sabit bir v_x göreceli süratiyle hareket eden (S) ve (S') sistemleri göz önüne alınsın. Hareketin başka bir doğrultuda olması durumunda benzer işlemler yapılarak ilgili formüller bulunabilir. (S) sistemindeki gözlemcinin belirlediği cisme ait hız bileşenleri, cismin koordinatları x, y, z ve zaman da t olduğundan,

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \text{ ve } \frac{dz}{dt}$$

olur. Cismin (S') sistemindeki gözlemciye göre koordinatları x', y', z' ve kullandığı zaman da t' olduğundan,

$$\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'} \text{ve } \frac{dz'}{dt'}$$

olur. İki sistemdeki koordinatlar arasındaki bağıntı daha önce elde edilen Lorentz dönüşümlerinin ilgili eksende karşılığıdır. Bu durumda her iki sistemdeki hız bileşenleri arasındaki bağıntılar da

$$u'_x \equiv \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v_x dx}{c^2 dt}}$$

$$= \frac{u_x - v_x}{1 - \frac{u_x v_x}{c^2}}$$

$$u'_y \equiv \frac{dy'}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma_x (1 - \frac{v_x dx}{c^2 dt})}$$

$$= \frac{u_y}{\gamma_x (1 - \frac{u_x v_x}{c^2})}$$

$$u'_z \equiv \frac{dz'}{dt} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma_x (1 - \frac{v_x dx}{c^2 dt})}$$

$$= \frac{u_z}{\gamma_x (1 - \frac{u_x v_x}{c^2})}$$

olur. Ters bağıntılar da;

$$u_x = \frac{u'_x + v_x}{1 + \frac{u'_x v_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma_x (1 + \frac{u'_x v_x}{c^2})}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma_x(1 + \frac{u'_x v_x}{c^2})}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Genel anlamda;

$$u = \frac{u' + v}{1 + {u'v}/{c^2}}$$

ifadesi relativistik hız toplamı teoremi veya Einstein hız toplamı teoremi olarak adlandırılır (Moller, 1972).

4.4. Lorentz Dönüşümlerinin Sonuçları:

Lorentz dönüşümlerinin ilginç sonuçları vardır. Bunların incelenmesi için yine (S) ve (S') sistemleri alınsın ve göreli hareketin yine x ve x' eksenlerinin doğrultusunda olduğunu varsayılsın.

İlk olarak eş zamanlılık kavramı ele alınsın. Bu konuyu incelemek için şöyle bir soru sorulsun: Bir (S) gözlemcisine göre eşzamanlı olan iki olay bir başka (S') gözlemcisine göre de eşzamanlı olur mu? (S') gözlemcisinin iki olay için saptayacağı t'_1 ve t'_2 oluş zamanlarına bakılmalıdır.

$$t'_1 = \gamma_x(t - \frac{x_1 v_x}{c^2})$$

$$t'_2 = \gamma_x(t - \frac{x_2 v_x}{c^2})$$

Buradan, $x_1 = x_2$ olursa yani (S)sisteminde olaylar eşkonumlu olursa (S') sisteminde de eşzamanlı olacağı görünür.

Eşkonumluluk kavramına da bir soru ile yaklaşılabilir. Bir (S) gözlemcisine göre eşkonumlu iki olay ele alınsın. Bunlar bir başka (S') gözlemcisine göre de eşkonumlu olur mu? Bir önceki sonuçla beraber düşünecek olursak, olaylar (S) sisteminde eşzamanlı ise (S')

sisteminde de hem eşkonumlu hem de eşzamanlı olacaktır. Aksi durumda (S') sisteminde eşkonumlu olmaları gerekmeyecektir.

İlk iki sonuca bakılırsa, tek başına eşzamanlılık veya eşkonumluluk göreceli kavramlardır. Ancak, hem eşzamanlılık hem eşkonumluluk mutlak bir kavramdır. Yani, iki olayın yalnızca eşzamanlı veya eşkonumlu olması eylemsizlik sistemine bağlıdır. Fakat iki olay hem eşzamanlı, hem de eşkonumlu ise eylemsizlik sistemine bağlı olmadan aynı özelliklere sahiptir.

Bir saatin ölçek birimi, farklı eylemsizlik sistemlerindeki gözlemcilere göre farklılık arz eder. Saatin ölçek birimini en küçük algılayan gözlemci, saatin içinde durduğu sistemde bulunan gözlemcidir. Bu durumu açıklamak için, (S) sisteminde bulunan bir saatin "tik" sesi ile ondan az sonra (Δt kadar sonra) gelen başka bir "tik" sesi arasındaki zaman aralığının hem (S) sisteminde, hem de başka bir (S') sisteminde bulunan gözlemciler tarafından ne olarak saptanacağına bakılmalıdır. Söz konusu zaman aralığını (S) sistemindeki gözlemci Δt olarak saptayacaktır. Saatin (S) sistemindeki konumunu x ile gösterilirse (S') sistemindeki gözlemci saatin birinci "tik" sesinin çıktığı anı,

$$t_1' = \gamma_x(t - \frac{xv_x}{c^2})$$

ve ikinci "tik" sesinin çıktığı anı da,

$$t_2' = \gamma_x(t + \Delta t - \frac{xv_x}{c^2})$$

olarak saptayacaktır. Öyleyse (S') sistemindeki gözlemciye göre iki "tik" sesi arasında geçen zaman,

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma_x \Delta t$$

$$= \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

olur. Buradan ;

$$\Delta t' > \Delta t$$

olduğu görülür. Δt aralığını (S) sistemindeki saatin birim zaman aralığı olarak alındığında, (S') sistemindeki gözlemcinin saptayacağı $\Delta t'$ zaman aralığı, kendisine göre duran özdeş saatin birim aralığından daha büyük olacaktır. Zaman biriminin daha büyük algılanması (yani zaman aralığının genişlemesi) , saatin geri kalması demektir. (S) sisteminde duran saat, (S') sisteminde bulunan gözlemciye göre düzgün doğrusal hareket etmektedir. İki olguyu birleştirildiğinde, gözlemci ile saat arasında göreceli bir hareket söz konusu ise gözlemci saati geri kalmış görür sonucuna ulaşılır. Sonuçta bir saatin en çabuk çalıştığını algılayan gözlemci saatin bulunduğu eylemsizlik sisteminin içinde duran gözlemcidir.

Bir gözlemci, kendisine göre düzgün doğrusal hareket eden herhangi bir ölçü çubuğunun boyunu, ölçü çubuğunun gözlemcinin hareket doğrultusuna paralel olması durumunda kendi özdeş ölçü çubuğunun boyundan daha kısa görür.

Gözlemcinin eylemsizlik sistemine (S'), çubuğun içinde durduğu eylemsizlik sistemine de (S) denilsin. (S') sistemi (S) sistemine göre düzgün doğrusal hareket etmektedir. (S') gözlemcisi (S) sisteminde duran çubuğun boyunu kendi özdeş ölçü çubuğunun boyu ile kıyaslamak isterse, kendi saatine göre eşzamanlı olarak (S) sitemindeki çubuğun uçlarını saptamalıdır. Saptadığı koordinatlar x_1' ve x_2' olsun. Bu koordinatların saptadığı an da t' ile gösterilsin. Çubuk (S) sisteminde durduğu için, (S) sisteminde bulunan gözlemciye göre uçları hep aynı noktalarda durmaktadır. (S) sistemindeki gözlemci bu noktaları x_1' ve x_2' olarak isimlendirilmişse,

$$x_1 = \gamma_x(x_1' + x_2') \text{ ve } x_2 = \gamma_x(x_2' + v_x t')$$

olacağı görülür. Çubuğun, (S) sistemindeki boyu

$$\begin{aligned} l &= x_2 - x_1 \\ &= \gamma_x(x_2' - x_1'), \end{aligned}$$

ve (S') sistemindeki boyu da

$$l' = \frac{l}{\gamma_x} = l\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}$$

olur. Gözlemci kendisine göre hareket eden çubuğun boyunu, gerçek boyuna kıyasla daha kısa görür, yani çubuk büzülmüş görünür.

Bir gözlemci kendisine göre düzgün doğrusal hareket eden bir ölçü çubuğunun boyunu, ölçü çubuğunun hareket doğrultusuna dik doğrultuda olması durumunda, kendi özdeş ölçü çubuğunun boyu ile aynı görür.

Çubuğun her iki sistemin birbirine paralel olan y-eksenleri boyunca olduğunu kabul edilsin. Lorentz dönüşümü uyarınca $y_i' = y_i$, $i = 1{,}2$ olacağından, hareketli çubuğun boyunda her hangi bir değişiklik saptayamaz. Buradan şu sonuca varılabilir:

Farklı süratlerde hareket eden gözlemcilerin ışığın sürati konusunda daima uyuşabiliyor olmalarının sonucunda, gözlemciler kendi süratlerine bağlı olarak, zaman birimleri ile hareket doğrultuları olan uzunluk birimleri boyunca olan uzunluk birimlerini değişik değerlerle algılarlar. Bu olguyu tersine söylersek, gözlemcilerin zaman birimleri ile hareket doğrultuları boyunca olan uzunluk birimlerini kendi süratlerine bağlı olarak ayarlanmış şekilde algılamaları, ışığın sürati konusunda daima uyuşabilmelerine olanak sağlar.

Eylemsizlik sistemlerinin göreceli süratleri ışığın süratine kıyaslandığında çok küçük kalıyorsa, Lorentz dönüşümleri Galilei dönüşümleri haline gelir. Böyle olacağı en genel durumda yukarıdaki formüller kullanılarak gösterilebilir.

$$\frac{|v|}{c} \ll 1 \quad \Rightarrow \gamma \approx 1$$

olur. Ayrıca, $\frac{v \cdot r}{c^2}$ terimi de göz ardı edilebilecek kadar küçüktür (Moller, 1972).

4.5. Aynı Doğrultudaki Hareketlerde Lorentz Dönüşümleri Bileşkesi:

Aynı doğrultuda olan iki göreceli hareket nedeniyle ortaya çıkan Lorentz dönüşümlerini arka arkaya uygulandığında, aynı doğrultudaki bir göreceli hareket nedeniyle ortaya çıkan bir başka Lorentz dönüşümünü elde edilir ama toplam göreceli sürat iki göreceli süratin toplamı olmaz.

Her iki göreceli hareketin doğrultusu aynı olduğundan, koordinat sistemlerine aynı dönme dönüşümünü uygulanarak Lorentz dönüşümleri basit Lorentz dönüşümlerine çevrilebilir. (S) ve (S') sistemleri birbirlerine göre, paralel olan x ve x' eksenleri boyunca,

v_{x1} süratiyle; (S') ve (S'') sistemleri de yine birbirlerine göre paralel olan x' ve x'' eksenleri boyunca v_{x2} süratiyle hareket etsin. Buna göre

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{x1}^2}{c^2}}}(t - \frac{xv_{x1}}{c^2})$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{x1}^2}{c^2}}}(x - v_{x1}t)$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

ve

$$t'' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{x2}^2}{c^2}}}(t' - \frac{xv_{x2}}{c^2})$$

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{x2}^2}{c^2}}}(x' - v_{x2}t)$$

$$y'' = y', \quad z'' = z'$$

olur. Birinci eşitlik takımı ikinci eşitlik takımında yerleştirildiğinde;

$$v_{xT} = \frac{v_{x1} + v_{x2}}{1 + \frac{v_{x1} + v_{x2}}{c^2}}$$

kısaltması yapılırsa,

$$t'' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{xT}^2}{c^2}}}(t - \frac{xv_{xT}}{c^2})$$

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{xT}^2}{c^2}}}(x - v_{xT}t) \tag{4.8}$$

$$y'' = y, \qquad z'' = z$$

elde edilir. v_{xT} sürati (S'') sisteminin (S) sistemine göre olan süratidir.

Aynı doğrultuda göreceli hareket eden eylemsizlik sistemlerini birbirine bağlayan olası tüm Lorentz dönüşümlerinin oluşturduğu küme ele alınsın. Yukarıda elde edilen sonuç, Lorentz dönüşümlerinin arka arkaya uygulanması ikili işlemine göre bu kümenin kapalı olduğunu gösterir. Ayrıca, bir Lorentz dönüşümü simetrik bir matris ile temsil edildiğinden ve simetrik üç matrisin çarpımı, matris çarpımına göre, asosiyatif olduğundan, üç Lorentz dönüşümünün arka arkaya uygulanması işlemi de asosiyatiftir. Birim matris ile temsil edilen özdeş dönüşüm ile her hangi bir Lorentz dönüşümü arka arkaya uygulanırsa, yine bir Lorentz dönüşümü elde edilir. Bir Lorentz dönüşümünün tersinin de olduğu bilinmektedir. Öyleyse söz konusu küme sözü edilen ikili işleme göre bir grup oluşturur (Rızaoğlu ve Sünel, 2011).

4.6. Farklı Doğrultulardaki Hareketlerde Lorentz Dönüşümleri Bileşkesi:

Farklı doğrultulardaki göreceli hareketler nedeniyle ortaya çıkan Lorentz dönüşümlerinden herhangi iki tanesi arka arkaya uygulandığında, bir Lorentz dönüşümü değil de, bir Lorentz dönüşümü ile fiziksel uzaydaki bir dönme dönüşümünün bileşkesi elde edilir.

Bu bir örnekle gösterilebilir. Ele alınan örnekte, (S') sistemi (S) sistemine göre paralel olan x ve x' eksenleri doğrultusunda $\frac{c}{\sqrt{2}}$ süratiyle ve (S'') sistemi de (S') sistemine göre paralel olan y' ve y'' eksenleri doğrultusunda $\frac{c}{\sqrt{3}}$ süratiyle hareket etsin. Kolayca;

$$\beta_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \gamma_x = \sqrt{2} \quad \beta_{y'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \gamma_{y'} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

olduğu görülür. Öyleyse her iki basit Lorentz dönüşümünün dönüşüm matrisleri sırasıyla,

$$L_x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } L_{y'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu iki dönüşüm arka arkaya uygulandığında elde edilen dönüşümün matrisi de,

$$L_y, L_x = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin simetrik bir matris olmadığı görülmektedir. Öyleyse bu matris, eksenleri birbirine paralel olan birbirine göre düzgün doğrusal hareket eden iki eylemsizlik sistemini birbirine bağlayan bir Lorentz dönüşümüne ait olan bir matris değildir.

(S'') sisteminin (S') sistemine göre olan hızını biliyoruz. Bu bileşenler sırasıyla,

$$u'_x = \frac{dx'}{dt} = 0,\ \ u'_y = \frac{dy'}{dt} = \frac{c}{\sqrt{3}} \ \ ve \ \ u'_z = \frac{dz'}{dt} = 0$$

şeklinde yazılabilir. (S'') sisteminin (S') sistemine göre olan hızı hesaplanabilirse, bu iki sistemi birbirine bağlayan Lorentz dönüşümünün matrisi yazılabilir. Burada u_x, u_y, u_z değerleri hesaplanmalıdır.

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + {u'_x v}/{c^2}}$$

ifadesinde $u'_x = 0$, $v = \frac{c}{\sqrt{2}}$ yazılırsa $u_x = \frac{c}{\sqrt{2}}$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma_x(1 + \frac{u'_x v_x}{c^2})}$$

ifadesinde $u'_y = \frac{c}{\sqrt{3}}$, $u'_x = 0, v = \frac{c}{\sqrt{2}}$ yazarsak $u_y = \frac{c}{\sqrt{6}}$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma_x(1 + \frac{u'_x v_x}{c^2})}$$

ifadesinde $u'_z = 0$ yazılırsa $u_z = 0$ bulunmuş olur.

(S'') sisteminin (S') sistemine göre hız bileşenleri,

$$\left(\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{6}},0\right)$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\beta_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \beta_y = \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \beta_z = 0 \quad \beta^2 = 0 \quad \gamma = \sqrt{3}$$

olarak bulunur. Bu değerler matris formunda yerine bırakıldığında

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1+3\sqrt{3}}{4} & \frac{3-\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3-\sqrt{3}}{4} & \frac{3+\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

simetrik matrisi elde edilir. L_y,L_x matrisi $L_y,L_x = LR$ olacak şekilde yukarıdaki L matrisi ve bir R matrisinin çarpımı şeklinde düşünülsün. Şimdi R matrisi bulunmalıdır. L^{-1} matrisi de bilinmektedir. O halde $R = (L_y,L_x)L^{-1}$ şeklinde düşünülürse ilgili matrisi,

$$R = (L_y,L_x)L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}} & \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

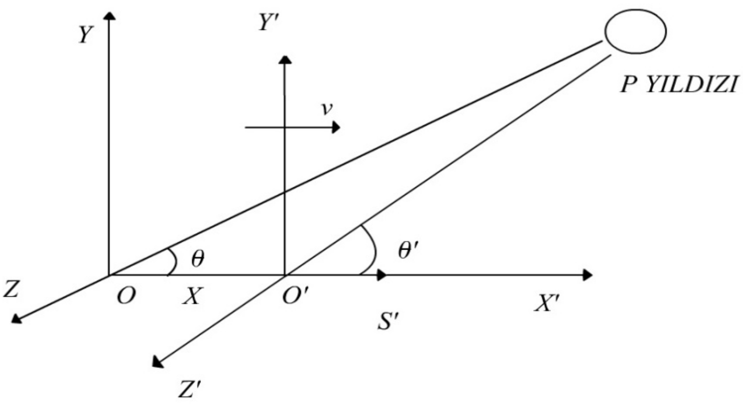
bulunur. Birinci satır ve birinci sütunun ilk elemanlarının 1 ve geriye kalan diğer üç elemanın sıfır olması, R matrisinin belirlediği dönüşümün zaman koordinatına herhangi bir etkisinin bulunmadığını gösterir. Kolaylıkla görülebileceği gibi, R matrisinin uzay koordinatlarına etkiyen kısmı olan,

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}} & \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}} & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2^3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 15 & -\sin 15 & 0 \\ \sin 15 & \cos 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi fiziksel uzayda bir dönme matrisidir. 15^o lik bir açı kadar saat yönünde bir dönmeyi temsil eder. Bu sonuç, eksenleri birbirine paralel olan, ancak birbirine göre farklı doğrultularda (burada x ve y' eksenlerinin doğrultularında) düzgün doğrusal hareket eden sistemleri birbirine bağlayan Lorentz dönüşümlerinin oluşturduğu kümenin, işlemlerin arka arkaya uygulanması ikili işlemine göre kapalı olmadığını göstermektedir (Rızaoğlu ve Sünel, 2011).

4.7. Relativistik Sapma:

Dünya güneşin etrafında, kendi yörüngesinde hareket etmektedir. Güneş (S) sistemi ve dünya da güneşe göre pozitif x ekseni yönünde v hızıyla hareket eden (S') sistemi olarak kabul edilsin. Bir P yıldızı (S) ve (S') sistemlerinde bulunan O ve O' gözlemcileri tarafından Şekil 4.1. deki gibi gözlensin (Baizid ve Alam, 2012).



Şekil 4.1. Işığın sapmasının hareket ile ilişkisi.

$\lambda' v'$(=c) hızıyla hareket eden bir dalga denklemine karşılık gelen periyodik;

$$\cos 2\pi\left(\frac{x' \cos\theta' + y' sin\theta'}{\lambda'} - v't'\right) \tag{4.9}$$

tanımlansın.

$\theta' = 0$ olursa

$$\cos 2\pi\left(\frac{x'}{\lambda'} - v't'\right)$$

$\theta' = {}^{\pi}/_{2}$ olursa

$$\cos 2\pi\left(\frac{y'}{\lambda'} - v't'\right)$$

olur. (S) sisteminde bu dalgalar bir düzlem halindedir ve Lorentz dönüşümleri lineer olduğundan düzlemi düzleme dönüştürür. Bundan dolayı (S) sisteminde yine aynı formda bir denklemden bahsedilebilir.

$$\cos 2\pi(\frac{x\cos\theta + ysin\theta}{\lambda} - vt) \tag{4.10}$$

Burada λ ve v; (S) sisteminde ölçülen dalga boyu ve frekans, θ ise ışığın x ekseni ile yaptığı açıdır. Yukarıdaki (4.9) ve (4.10) denklemleri, hızları c olduğundan, bütün gözlemciler için aynı olacaktır.

Şimdi Lorentz dönüşümleri kullanılarak (4.9) denkleminde $x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ve $t' = \frac{t-x(\frac{v}{c^2})}{\sqrt{1-\beta^2}}$ yazılırsa,

$$\cos 2\pi(\frac{1}{\lambda'}\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\theta' + \frac{y\sin\theta'}{\lambda'} - v'\frac{[t-(v/c^2)x]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

olur. Bu ifade de düzenlenirse;

$$\cos 2\pi\left(\frac{\cos\theta' + \beta}{\lambda'\sqrt{1-\beta^2}}x + \frac{\sin\theta'}{\lambda'}y - \frac{(\beta\cos\theta' + 1)v'}{\sqrt{1-\beta^2}}t\right) \tag{4.11}$$

elde edilir. Bu denklem (S) sisteminde bir dalga düzlemine karşılık gelmektedir. O halde (4.10) denklemiyle eşitlenebilir. Çünkü ikisi de aynı düzleme karşılık gelmektedir. O halde x, y ve t nin katsayıları eşitlenirse;

$$\frac{\cos\theta}{\lambda} = \frac{\cos\theta' + \beta}{\lambda'\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.12}$$

$$\frac{\sin\theta}{\lambda} = \frac{\sin\theta'}{\lambda'} \tag{4.13}$$

$$v = \frac{v'(1+\beta\cos\theta')}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.14}$$

aynı zamanda,

$$\lambda v = \lambda' v' = c \tag{4.15}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Burada yapılan işlemlerde (S') sisteminde ışığın λ', v', θ' değerlerinin (S) sistemindeki λ, v, θ değerleri bulunmaya çalışılmaktadır. Burada bilinen dört eşitlik ((4.12)-(4.14) eşitlikleri) ve üç bilinmeyen var. Ve bu eşitliklerin hepsi bağımsız değiller. Eğer (4.13) eşitliği (4.12) eşitliğine bölünecek olursa,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\theta' + \beta} \tag{4.16}$$

elde edilir. Bu eşitlik ışığın sapmasının relativistik denklemidir. Bu eşitlik bize θ ve θ' arasındaki ilişkiyi verir. Bu eşitliğin tersi de,

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\theta - \beta} \tag{4.17}$$

şeklinde yazılabilir (Resnick, 1968).

4.8. Doppler Etkisi (kayması) :

Yukarıdaki $(4.12), (4.13), (4.14), (4.15)$ eşitlikleri incelenmesi gereken bir kavramı daha verecektir. O da relativistik Doppler etkisidir.

$$v = \frac{v'(1+\beta\cos\theta')}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

denkleminin tersi yazılırsa,

$$v' = \frac{v(1-\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.18}$$

elde edilir. Önce relativistik formülün klasik formüle indirgendiği durumda yani, $v \ll c$ için birinci dereceden β veya $\frac{v}{c}$ değerinden büyük terimler ihmal edilebilir. Böylece formül klasik hale dönüşmüş olur. (4.18) numaralı eşitlikten,

$$v = \frac{v'\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta\cos\theta)} \cong \frac{v'}{1-\beta\cos\theta} \cong v'(1+\beta\cos\theta)$$

klasik formu bulunmuş olur. $\theta = 0^o$ durumunda S gözlemcisi kaynağın kendisine doğru yaklaştığını algılar ya da kendisi kaynağa doğru uzaklaşmaktadır. Bu durumda,

$$v = v'(1 + \beta) = v'(1 + \frac{v}{c})$$

eşitliği bulunmuş olur ki burada algılanan frekans v nin gerçek frekans v' den büyük olduğu görülmektedir. $\theta = 180^o$durumunda ise gözlemci kaynağın kendisinden uzaklaştığını algılar ya da kendisi kaynaktan uzaklaşmaktadır. Bu durumda ise,

$$v = v'(1 - \beta) = v'(1 - \frac{v}{c})$$

eşitliği elde edilir. Açıkça görülmektedir ki v, v' den küçüktür. Son olarak $\theta = 90^o$ durumu, yani, ışığın göreceli harekete dik geldiği durum söz konusudur ki burada Doppler etkisi ortaya çıkmaz. Bu durumda $v = v'$ olur. Bulunan bu sonuçlar klasik Doppler etkisi sonuçlarıdır.

Şimdi ise v nin c ye nispeten küçük olmadığı durumda ortaya çıkan relativistik Doppler etkisi incelenecektir. Bu etki ayrı olarak hem enine hem de boyuna olmak üzere iki başlık altında irdelenecektir. Böylece boyuna relativistik Doppler etkisi için (4.18) eşitliğinde $\theta = 180^o$ ve $\theta = 0^o$ alınacaktır. İlk durumda $\theta = 0^o$ alınsın. Burada kaynak ve gözlemci birbirine göre hareket etmektedir.

$$v = v'\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = v'\sqrt{\frac{v + c}{c - v}}$$

Eğer $\theta = 180^o$ alınırsa,

$$v = v'\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

elde edilir. Bununla birlikte, daha ilginç olan, relativistik formülün bir de enine Doppler etkisini ortaya çıkarmasıdır. Klasik fizikte böyle bir Doppler etkisi yoktur. Bu formül,

$$v' = \frac{v(1 - \beta\cos\theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

formülünde $\theta = 90^o$ yazılarak elde edilir. Bu durumda,

$$v = v'(\sqrt{1 - \beta^2}$$

bulunmuş olur. Eğer görüş çizgisi göreceli harekete göre 90 derece ise gerçek v' frekansı daha düşük olacak bir değerde v olarak algılanır (Resnick, 1968).

5. $\mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$ UZAYINDA RELATİVİSTİK KİNEMATİK

Lorentz transformasyonları, eylemsizlik sistemlerinin birbirine göre hareketinin x ve x' eksenlerinin ortak doğrultusunda olması durumunda

$$t' = \frac{t - \frac{xv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}}} \tag{5.1}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

olarak tanımlandı.

$L(x) = x'$, $x = (x, y, z, t) \epsilon\, \mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$ için

$$\|L(x)\|_L = \|x\|_L$$

dir. Şöyle ki; $c = 1$ alınmak üzere

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = \left(\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}\right)^2 + y^2 + z^2 - \left(\frac{t' + x'v}{\sqrt{1 - v^2}}\right)^2$$

$$= \frac{(x')^2 + v^2(t')^2 + 2x'vt' - (t')^2 - (x')^2v^2 - 2x'vt'}{1 - v^2} + y^2 + z^2$$

Gerekli sadeleştirilmeler yapılıp pay v^2 parantezine alınırsa;

$$= \frac{(x')^2 + v^2((t')^2 - (x')^2) - (t')^2}{1 - v^2} + y^2 + z^2$$

elde edilir. Yine pay $(x')^2 - (t')^2$ parantezine alınıp ve $y = y'$ ve $z = z'$ yazılırsa

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2$$

eşitliği elde edilir. Yani $\mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$ uzayında norm korunur.

Ayrıca

$$x = y = z = t = 0$$

alındığında yani $x = 0$ için

$$x' = y' = z' = t' = 0$$

olduğundan

$$L(0) = 0$$

dır. Dolayısıyla L Lorentz transformasyonları 0 noktasını sabit bırakan bir dönme tanımlarlar. Bu gerçeğe L nin matris formu ile de ulaşmak mümkündür. (5.1) eşitlikleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{\frac{v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. L nin determinantı

$$\det(L) = 1$$

dir.

$$\mathcal{L} = \left\{ L \in R_4^4 : L = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{\frac{v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \right\} \tag{5.2}$$

olarak gösterilsin.

5.1. Teorem:

$\mathcal{L}$ cümlesi matrislerin çarpım işlemine göre bir gruptur.

İspat:

1-Kapalılık Özelliği:

Bu dönme matrisini $L = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ şeklinde sadeleştirilsin.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & ab+ba \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ab+ba & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde işlem kapalıdır.

2-Birleşme Özelliği:

İşlem kapalı olduğu için birleşme özelliği de sağlanır.

3-Birim Eleman:

$v = 0$ için birim eleman $I_{4\times4}$ olur.

4-Ters eleman:

$$L = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

matrisinin tersine bakılmalıdır. Bu matrisin determinantı;

$$det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix} = a^2 - b^2 = 1$$

bulunur. L^{cof} matrisi de

$$L^{cof} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a^2-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. O halde L^{-1} matrisi;

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{bmatrix}$$

dir.

$\mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$ uzayında bir $\vec{X}$ vektörü,

$$\vec{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} + ix_4\overrightarrow{e_4}$$

şeklinde yazılır. $\mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$ deki toplama, skaler ile çarpma bilinen standart toplama ve çarpmayla aynıdır. İç çarpım ise Öklid iç çarpımıdır. Ancak, Lorentz anlamındaki iç çarpım kullanılır ve $\mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}$ yerine L^4 gösterimi tercih edilirse,

$$(R^3 \times iR, +, ., \langle\ \rangle_E)$$

yapısı ile

$$(L^4, +, ., \langle\ \rangle_L)$$

yapısı eşdeğerdir. $\vec{X} \in L^4$ için

$$\vec{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} + ix_4\overrightarrow{e_4}$$

yazılır ancak iç çarpım olarak

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{i=3} x_i y_i - x_4 y_4$$

Lorentz iç çarpımı kullanılır.

L^4 Lorentz uzayı üzerinde tanımlı ortogonal matrisler cümlesinin bir özel alt cümlesi olarak (5.2) eşitliği ile tanımlı ortogonal matrisler cümlesini alalım. L^4 de

$$T_{\vec{t}} : L^4 \to L^4$$

$$X \to T_{\vec{t}}(X) = X + \vec{t}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme $\vec{t}$ vektörü ile tanımlı öteleme denir. Bu cümle $\mathcal{T}$ ile gösterilsin.

5.1. Tanım:

$D = (L, T), T \epsilon \mathcal{T}$, L ϵ $\mathcal{L}$ olmak üzere

$$D : L^4 \to L^4$$

$$X \to D(X) = L(X) + T$$

şeklinde tanımlı dönüşüme L^4 de yer değiştirme denir.

$$\mathcal{D} = \{\mathrm{D} : \mathrm{D(X)} = \mathrm{L(X)} + \mathrm{T}\}$$

ile gösterelim. $\mathcal{D}$, L^4 de tanımlı yer değiştirmeler cümlesinin bir alt cümlesidir. Ana cümleden ayrılan noktası, dönmelerin Lorentz transformasyonlarından elde edilen dönmeler olmasıdır.

Kinematiğin tanımı ve araçları ele alındığında, $\mathcal{D}$ cümlesi ile L^4 uzayında kinematik yapacak araçlar tamamlanmıştır.

5.2. Tanım:

L^4 de $D \epsilon \mathcal{D}$ yer değiştirmeler ile yapılan kinematiğe relativistik kinematik denir.

KAYNAKLAR

Baizid, A. R., Alam, M. S., 2012. Applications of different types of Lorentz transformations. ***American Journal of Mathematics and Statistics 2***(5): 153-163.

Birman, G.S., Nomizu, K. 1984a. Trigonometry in Lorentzian geometry. ***Am.Math. 91***(9): 543-549.

Birman, G.S., Nomizu, K. 1984b. The Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional space-times. ***Michigan Math.J.***31: 77-81.

Bootby, W.M., 2003. ***An Introduction to Differentiable Manifold and* Riemann *Geometry*,** Academi Press, California. 421.

Bottema, O., Roth, B., 1979***. Theoretical Kinematics.*** North-Holland Press, New York. 557.

Einstein, A., 1905. Zur elektrodynamik bewegter körper. ***Annalen den Physik 17***: 891-921.

Ergin, A. A., 1989***. Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri.*** (doktora tezi, basılmamış). AÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Hacısalihoğlu, H., 1980. ***Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrileri.,*** İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Yayınları, Mat.No.1, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul. 224.

Lorentz, H.A., 1904. Elektromagnetic phonomena in a system moving with any velocity less than that of lights***. Proceeding of The Section of Sciences, Koninklijke Akademic Van Wetensehappen*** 6: 809-831.

McCarthy, J.M, 1990. ***An Introduction to Theoritical Kinematics.*** The MIT Press, Massachusett. 130.

Minkowski, H., 1909. Raum und zeit Jahresbeicht der deutschen. ***Mathematiker Vareinigung*** 18: 75-88.

Moller, C. 1972. ***The theory of relativity.*** Oxford University Press, London. 386.

O'neill, B., 1983. ***Semi Riemannian Geometry With Applications to Relativity.*** Academic Press, New York, London. 468.

Resnick, R.,1968. ***Introduction to Special Relativity.*** John Wiley Sons, Inc New York London Sydney. 237.

Rızaoğlu, E., Sünel,N., 2011**.** ***Klasik Mekanik Özel Görecelik Kuramı ve Nonlineer Dinamiğe Giriş.*** Tüba, Ankara. 703.

Sophus, L., Scheffers, G., 1893. Vorlesungen über cantinuierliche gruppen mit geometrischen und anderen. ***Anwendungen Leipzig: B.6***: 63-86.

ÖZ GEÇMİŞ

Van ilinde 10.12.1984 tarihinde doğdu. İlk öğremini Emin Paşa İlköğretim Okulu'nda, orta okulu Van İmam Hatip Lisesi'nde, lise öğrenimini Van Atatürk Lisesi yabancı dil ağırlıklı bölümünde tamamladı. Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden lisans diploması alarak 2009 yılında mezun oldu. 2011 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı.