T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT METRİK VE SOFT NORMLU UZAYLAR

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Murat İbrahim YAZAR
I.DANIŞMAN: Prof. Dr. Tunay BİLGİN
II.DANIŞMAN: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV

VAN-2014

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT METRİK VE SOFT NORMLU UZAYLAR

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Murat İbrahim YAZAR

VAN-2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Tunay BİLGİN ve Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV danışmanlığında, Murat İbrahim YAZAR tarafından sunulan "Soft Metrik ve Soft Normlu Uzaylar" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 25/06/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Tunay BİLGİN	İmza:
Üye: Prof. Dr. Yılmaz ALTUN	İmza:
Üye: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV	İmza:
Üye: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV	İmza:
Üye: Doç. Dr. Cesim TEMEL	İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27/06/2014 tarih ve 2014/25-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

30/06/2014

Prof. Dr. Dr. Turgut AYGÜN

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Murat İbrahim YAZAR

ÖZET

SOFT METRİK VE SOFT NORMLU UZAYLAR

YAZAR, Murat İbrahim
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Tunay BİLGİN
2. Danışman: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV
Haziran 2014, 61 sayfa

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde literatür bildirişleri, materyal ve yöntemden bahsedilerek çalışma konusu hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde gerekli olan temel kavram ve teoremler verilerek sonraki bölümler için hazırlık yapıldı.

Üçüncü bölümde soft metrik uzaylarda soft sürekli dönüşümler ve özellikleri incelendi ve ayrıca soft daralma dönüşümleri ele alınarak farklı koşullar altında sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edildi.

Dördüncü bölümde soft metrik uzaylarda soft kompakt kümeler incelendi. Soft dizi, soft yığılma noktası, soft dizisel kompakt metrik uzay, $\tilde{\varepsilon}-$şebekesi, tam sınırlı soft uzay, soft Lebesque sayısı, soft düzgün sürekli dönüşüm tanımları verilerek soft kompakt kümelerin çeşitli özellikleri araştırıldı.

Beşinci bölümde soft normlu lineer uzaylar ele alınarak soft normlu uzaylarla ilgili bazı sonuçlar elde edildi. Son bölümde ise soft iç çarpım uzayı ve soft Hilbert uzayı incelendi.

Anahtar kelimeler: Soft metrik uzay, soft daralma dönüşümü, soft normlu uzay, soft lineer dönüşüm, soft iç çarpım uzayı, soft Hilbert uzayı.

ABSTRACT

SOFT METRIC AND SOFT NORMED SPACES

YAZAR, Murat İbrahim
Ph. D. Department of Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Tunay BİLGİN
Second Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Sadi BAYRAMOV
June 2014, 61 pages

This study consist of six chapters. In the first chapter information about the subject of thesis is given by presenting pertinent known results from literature, the discussion about the material and the method. In the second chapter basic definitions and theorems that will be used in later chapters are given.

In the third chapter soft continuous mappings and their properties in soft metric spaces are investigated. Furthermore, soft contraction mappings are given and also fixed point theorems are stated and proved under different conditions.

In the fourth chapter soft compact sets are investigated in soft metric spaces. The definitions of soft sequence, soft accumulation point, soft sequential compact metric space, $\tilde{\varepsilon}-$net, complete bounded soft space, soft Lebesque number, soft uniform continuous mapping are given and some properties of soft compact sets are investigated.

In the fifth chapter soft normed spaces are presented some results are obtained. In the last section soft inner product spaces and soft Hilbert spaces are investigated.

Key Words: Soft metric space, soft contraction mapping, soft normed space, soft linear mapping, soft inner product space, soft Hilbert space.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, karşılaştığım güçlüklerde her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım ve danışmanlarım Prof. Dr. Tunay BİLGİN ve Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV' a teşekkür ederim. Ayrıca bu tez çalışması boyunca göstermiş olduğu anlayış ve desteklerinden dolayı Prof. Dr. Gabil YAGUB' a ve tezim hakkında tavsiye ve yönlendirmelerinden dolayı çok değerli hocalarım Prof. Dr. Yılmaz ALTUN, Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV, Doç. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ(ARAS)' a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman bana güvenen ve bugünlere gelmemi sağlayan fedakar Anne ve Babama, gösterdiği sabır ve anlayış için sevgili eşim Tuba YAZAR' a ve manevi desteklerinden dolayı kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

2014

Murat İbrahim YAZAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
E	Parametreler kümesi
(F,E)	Soft küme
B($\mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$ 'nin boş olmayan sınırlı alt kümlerinin bir sınıfı
$\tilde{x}_e$	soft nokta
(X,τ,E)	soft topolojik uzay
$(\tilde{X},\tilde{d},E)$	soft metrik uzay
$\mathbb{R}(E)^*$	negatif olmayan soft reel sayıların kümesi
$(\tilde{X},\lVert.\rVert,E)$	soft normlu uzay
$SP(\tilde{X})$	Soft noktalar kümesi
(f,φ)	Soft dönüşüm
$\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$	Soft dizi
$SV(\tilde{X})$	Soft vektör uzayı
$(SPV(\tilde{X}),<.>,E)$	Soft iç çarpım uzayı
$\tilde{\ell}_2$	Soft ℓ_2 uzayı

1. GİRİŞ

Mühendislik, tıp, ekonomi ve sosyal bilimler gibi bir çok bilim dalında belirsizlik içeren problemlerin çözümünde klasik yöntemlerin yetersiz kaldığı bilinmektedir. Belirsizlikler içeren bu tarz problemleri ele almak için geliştirilmiş farklı teoriler mevcuttur. Bu teorilerden bazıları olasılık teorisi, aralık(interval) teorisi, bulanık kümeler teorisi, sezgisel bulanık kümeler teorisidir.

Bu teoriler arasında belirsizlikle ilgili en kullanışlı yöntem ilk olarak (Zadeh, 1965) tarafından geliştirilen bulanık kümeler teorisidir. Bununla beraber belirsizliklerle ilgili bu ve diğer yaklaşımların hepsinin kendilerine özgü zorlukları ve yetersiz kaldığı durumlar vardır. Dolayısıyla, belirsizliklerle ilgili olarak yeni yaklaşımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yaklaşımlardan güncel olan Soft kümeler teorisi ilk olarak (Molodtsov,1999) tarafından verilmiştir. Bulanık ve sezgisel bulanık kuramından farklı olarak soft kümeler teorisinde belirsizlikler reel değerli bir fonksiyon ile değil bir seçim fonksiyonu ile ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Bu seçim parametreler yardımıyla yapılmıştır. Soft küme bir nesnenin yaklaşık tanımlarından oluşan bir sınıftır. Soft sistemler parametrelerin dahil olmasıyla beraber çok genel bir yapı teşkil eder ve bu özelliği ile ilgili olarak çok geniş bir uygulama alanı olduğundan zengin bir potansiyele sahiptir. Soft kümeler teorisi ile ilgili olarak oyun teorisi, karar verme problemleri, Riemann integrali, Peron integrali, neuro sistemler, bilişim sistemleri, olasılık teorisi, ölçüm teorisi gibi pek çok alanda uygulamalar verilmiştir.

1.1. Kaynak Bildirişleri

Belirsizlikle ilgili en kullanışlı yöntemlerden biri olan bulanık kümeler teorisi ilk olarak (Zadeh, 1965) tarafından geliştirilmiştir.

Belirsizliklerle ilgili karşılaşılan zorlukları aşmanın yeni bir yöntemi olarak ifade edilen soft kümeler teorisi ilk olarak (Molodtsov,1999) tarafından verilmiştir Daha sonra bu teorinin geliştirilmesinde (Maji, 2003) katkıda bulunmuştur. (Ali ve ark., 2005) çalışmalarında soft küme teorisi ile ilgili olarak birleşme , kesişme gibi temel işlemleri tanımlayarak katkıda bulunmuşlardır. (Das ve Samanta, 2012) soft reel sayı kavramını tanımlamışlar ve özelliklerini vermişlerdir. (Feng ve ark., 2011) soft kaba küme kavramını tanımlamışlardır. (Majumdar ve ark.,, 2013) bir soft kümenin softluk derecesini tartışmışlardır.

(Maji ve ark, 2002) çalışmalarında iyi nesne seçimi için parametre düşürme yöntemini temel alan bir yöntemle soft küme teorisinin karar verme problemlerine bir uygulamasını vermişlerdir. Yine (Maji ve ark., 2012;2013) çalışmalarında karar verme problemlerinde netrosofik soft küme yaklaşımını kullanmışlardır. (Chen ve ark., 2003;2005) soft küme parametrizasyonunun indirgenmesi ile ilgili yeni bir tanım sunarak soft küme teorisinin bu anlamda uygulamalarını vermiştir. (Pie ve Miao., 2005) soft küme parametreleri ile ilgili olarak bilgi sistemlerini incelemişlerdir. (Xiao ve ark., 2005;2009) soft küme teorisinin soft bilgi tabanı ile ilgili ve birleşik ön tahmin yaklaşım tabanlı uygulamalarını vermişlerdir. (Çağman ve Enginoğlu, 2010a;2010b) soft matris teorisini tanımlayarak bir optimum değer bulma probleminde karar verme algoritmasını geliştirmişlerdir.

Soft cebir ile ilgili çalışmalar ilk olarak (Aktaş ve Çağman, 2007) soft grupları tanımlamaları ve bazı özelliklerini araştırmalarıyla başlamıştır. (Aslam ve Qurashi, 2012) soft gruplarla ilgili katkıda bulunmuşlardır. (Jun, 2008) çalışmalarında soft BCK/BCI-cebirlerini tanımlamışlar ve (Jun ve Park, 2008) soft BCK/BCI-cebirlerinin soft ideal teorisindeki soft kümelerin uygulamasını vermişlerdir. (Aygünoğlu ve Aygün, 2009) fuzzy soft grupları tanımlamışlardır. (Feng ve ark., 2008) soft semigrup, (Changphas ve Thongkam, 2012) soft $-\Gamma$ semigrup ve (Wu ve Zhan, 2012) soft hemiring ile ilgili bir çalışma yapmışlardır. (Sezgin ve Atagün, 2011) soft ve normal soft gruplar üzerine bir çalışma yaptılar. (Acar ve ark., 2010) soft halka kavramını tanımladılar. Soft modüller, bulanık soft modüller, sezgisel bulanık soft modüller ile bunların düz ve ters sistemleri ile ilgili olarak yapılan çalışmalar (Bayramov ve ark., 2013), (Gunduz ve Bayramov, 2011a;2011b), (Öztürk ve ark., 2013) ,(Sun ve ark., 2008) yazarlarına aittir.

Soft dönüşümler (Majumdar ve Samanta,2010) ve (Gündüz ve ark., 2013) çalışmalarında verilmiştir.

Soft topoloji ile ilgili ilk çalışmalar (Shabir ve Naz, 2011) ve (Çağman ve ark., 2011) olmak üzere, bu çalışmalarda soft topolojik uzaylar tanımlanmış ve soft topolojik uzayların bazı özellikleri araştırılmıştır.(Hussain ve Ahmad, 2011) ,(Min, 2011) ve

(Zorlutuna ve ark., 2012) çalışmalarında soft topolojik uzayın önemli özelliklerini vermişlerdir. bulanık soft topolojik uzay (Şimşekler ve Yüksek, 2013) ve (Atmaca ve Zorlutuna, 2013) çalışmalarında vermişlerdir. (Varol ve Aygün, 2013) çalışmasında soft Hausdorff uzayı tanımlamışlardır. (Bayramov ve Gunduz, 2013) Soft lokal kompakt ve soft parakompakt uzayları tanımlamışlardır. (Nazmul ve Samanta, 2013) çalışmasında soft topolojik uzayların komşuluk özellikleri ele almışlardır. Bir çok araştırmacı soft topolojik uzaylarla ilgili olarak pek çok çalışma yapmışlardır ve bu çalışmalarda soft nokta kavramı ile ilgili çeşitli yaklaşımlar olduğundan soft nokta kavramının tanımıyla ilgili tartışmalar devam etmektedir. Bu yaklaşımlardan biri (Bayramov ve Gunduz, 2013) ve (Das ve Samanta, 2013a) çalışmalarında tanımlanan soft nokta kavramı diğeri de (Das ve Samanta, 2013b) çalışmasında tanımlanan soft eleman kavramıdır.

Soft kümenin fonksiyonel analiz konularına taşınması çok güncel olmakla beraber bu alandaki ilk çalışmalar (Das ve Samanta, 2013a, 2013b) soft metrik kavramı tanımlanmasıyla başlamıştır. Bu iki çalışmada farklı soft nokta kullanımına bağlı olarak iki farklı soft metrik uzay tanımlanmıştır. (Das ve ark., 2013) de soft normlu uzay, (Das ve Sam anta, 2013c) 'de soft iç çarpım uzayı, (Das ve Samanta, 2013d;2014) 'de soft lineer operatörler, soft fonksiyoneller (Das ve Samanta, 2013b) de ise verilen soft eleman kavramını ele almıştır.

1.2. Materyal ve Yöntem

Fonksiyonel analizin temelini oluşturan metrik ve normlu uzaylar teorilerinin yeni bir yaklaşım olan soft kümeler teorisinin ele alınması temel olarak amaçlanmış ve soft metrik ve soft normlu uzay yapılarında farklılıklar veya benzerlikler araştırılmıştır.

Tez çalışmasına başlanırken soft kümeler teorisi ile ilgili temel teşkil eden çalışmalar (Molodtsov, 1999), (Maji, 2002), (Maji ve Roy, 2003), (Ali ve ark., 2005), (Chen ve ark., 2003), (Das ve ark., 2012) ve (Majümdar ve ve Samanta, 2013) incelenmiş soft kümeler teorisi hakkında bilgi sahibi olunarak temel kavramlar ve işlemler anlaşılmaya ve kavranmaya çalışılmıştır.

Daha sonra soft kümeler teorisinin uygulamaları hakkında fikir elde edebilmek açısından (Maji ve ark, 2002) ,(Maji ve ark., 2012;2013) ,(Chen ve ark., 2003;2005), (Pie ve Miao, 2005), (Xiao ve ark., 2005;2009), (Çağman ve Enginoğlu, 2010a;2010b) çalışmaları incelenmiştir.

Soft kümeler teorisi hakkında daha geniş bir açı kazanmak ve teorinin cebir alanı ile ilgili çalışmaları ve uygulamaları yüzeysel olarak araştırılmış ve incelenmiştir. Bu aşamada (Aktas ve Cagman, 2007) ,(Aslam ve Quarashi, 2012) ,(Jun, 2008), (Jun ve ark., 2008), (Aygunoğlu ve Aygün, 2009), (Feng ve ark., 2008), (Changphas ve Thongkam, 2012), (Wu ve Zhan, 2012), (Sezgin ve Atagün, 2011), (Acar ve ark., 2010), (Bayramov ve ark., 2013), (Gunduz ve Bayramov, 2011a;2011b), (Öztürk ve ark., 2013) ,(Sun ve ark., 2008), (Majumdar ve Samanta, 2010) ve (Gündüz ve ark., 2013) çalışmaları temel alınmıştır.

Tez çalışma konusuna temel teşkil edecek olan soft topoloji ile ilgili çalışmalar incelenerek soft topolojik kavramlar hakkında bilgi sahibi olunmuştur. Soft topoloji ile ilgili olarak (Shabir ve Naz, 2011), (Çağman ve ark., 2011), (Hussain ve Ahmad, 2011) ,(Min, 2011), (Zorlutuna ve ark., 2012), (Şimşekler ve Yüksek, 2013), (Atmaca ve Zorlutuna, 2013), (Varol ve Aygun, 2013), (Bayramov ve Gunduz, 2013) ve (Nazmul ve Samanta, 2013) çalışmaları incelenmiştir. Bu aşamada soft nokta kavramı ile ilgili farklı yaklaşımların olduğu tespit edilmiştir.

Tez konusu ile direkt ilgili ve fonksiyonel analiz konularını içeren çalışmalar derlenip incelenmiştir. (Das ve Samanta, 2013a, 2013b), (Das ve ark., 2013), (Das ve Samanta, 2013d;2014) ve (Das ve Samanta, 2013b) çalışmaları değerlendirilmiştir.

Son olarak yurtiçinde yapılan tezler araştırılarak yapılan çalışmalar okunmuştur. Bu tezler (Şenel, 2013) ve (Aygünoğlu, 2011) dir.

Bu tez çalışması Giriş kısmı dahil olmak üzere, Temel kavramlar, soft metrik uzaylar ve soft metrik uzaylarda soft daralma dönüşümleri, soft metrik uzaylarda soft kompakt kümeler, soft normlu lineer uzaylar, soft iç çarpım uzayı ve soft Hilbert uzayı başlıkları altında 6 bölümden oluşmaktadır.

ikicin bölümde tez çalışmasında gerekli olan önbilgiler, temel kavram ve sonuçlar ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak soft metrik ile üretilen soft topoloji ele alınmış ve her soft metrik uzayın metrik uzayların parametrize edilmiş bir ailesi olduğu ispat edilmiş ve bunun tersinin doğru olmadığı bir örnekle gösterilmiştir. Ayrıca, her soft metrik uzayın bir soft normal uzay olduğu kanıtlanmıştır.

Yine üçüncü bölümde soft metrik uzaylarda soft daralma dönüşümleri ele alınmıştır. Bu aşamada daralma dönüşümleri ile ilgili olarak (Long-Guang ve Xian, 2007) ve (Rhoades, 1997) çalışmalarından yararlanılmıştır. Soft sürekli dönüşüm, soft dizisel sürekli dönüşüm, Soft daralma dönüşümü kavramları tanımlanmıştır. Soft metrik uzaylarda soft daralma dönüşüm teoremi (Banach sabit nokta teoremi) ifade ve ispat edilerek bu teorem farklı koşullar altında da incelenmiştir.

Tez çalışmasının dördüncü bölümü olan soft metrik uzaylarda soft kompakt kümeler ele alınmıştır. Soft alt dizi, soft yığılma noktası, soft dizisel kompakt metrik uzay, $\tilde{\varepsilon}-$şebekesi, tam sınırlı soft uzay, soft Lebesque sayısı, soft düzgün sürekli dönüşüm tanımları verilmiştir. Soft dizisel kompakt uzay verildiğinde soft kümenin parametrelerine karşılık gelen metrik uzayların da dizisel kompakt olduğu ifade ve ispat edilmiştir. Bu sonucun tersinin doğru olmadığı bir örnekle ifade edilmiştir. Soft metrik uzaylarda soft kompakt kümelerle igili çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlardan bazıları aşağıdaki gibidir:

Soft dizisel kompakt uzayda her sonsuz soft kümenin bir yığılma noktası vardır, bir soft metrik uzayın soft tam sınırlılığı bu uzayda her soft dizinin bir Cauchy soft altdizisinin var olmasına denktir, soft dizisel kompakt uzay ile soft tam ve soft tam sınırlı olması kavramları denktir, soft dizisel kompakt metrik uzayda her soft açık örtünün bir soft Lebesque sayısı vardır, soft düzgün sürekli bir dönüşüm için her bir parametreye karşılık gelen $f:(X,d_{1e})\to\left(Y,d_{2\phi(e)}\right)$ dönüşümü düzgün süreklidir.

Tez çalışmasının beşinci bölümünde soft normlu lineer uzaylar ele alınarak soft normlu uzaylarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir Burada çok fazla önem teşkil eden soft vektör uzay kavramı tanımlanarak soft vektör uzayının yapısı ayrıntılı olarak incelenmiştir. Literatürde daha önce soft vektör uzayı kavramı (Das ve ark., 2013) geçmesine rağmen bu çalışmada tanımlanan soft vektör uzayı gerek soft vektör toplama, sklalerle çarpma işlemlerinin tanımlanması, gerekse de soft vektör tanımında baz alınan farklı bir soft nokta kavramın kullanılması açılarından tamamen farklı bir yapıya sahiptir. (Das ve ark., 2013), (Das ve Samanta, 2013d;2014) ve (Das ve Samanta, 2013b) çalışmalarında soft normlu lineer uzaylar ve burada kullanılan soft vektör yapısı nedeni ile parametrelerin etkisinin neredeyse kaybolduğu, bundan dolayı da softluk kavramının niteliği ile ilgili tartışmalara neden olabileceği düşünüldüğünden bu kapsamda burada ele alınan soft vektör uzayı kavramının parametrelerin soft kümeler teorinin yapısına uygun bir şekilde etkin olduğu konusunda iddiamızı belirtmek ihtiyacı hissedilmiştir.

Ayrıca, yine tezin beşinci bölümünde soft vektör alt uzayı, soft normlu uzay, soft tam uzay, soft Banach uzayı, soft lineer dönüşüm, soft sürekli lineer dönüşüm, soft sınırlı lineer dönüşüm kavramları tanımlanarak soft sürekli lineer operatörlerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Tez çalışmasının altıncı ve son bölümünde soft iç çarpım, soft Hilbert uzayı tanımlanarak soft iç çarpım fonksiyonunun sürekli olduğu ispat edilmiş ve soft Hilbert uzayı ile ilgili örnek verilmiştir.

1.3. Bulgular

Bu çalışma soft metrik uzaylar ve soft normlu uzaylar olmak üzere iki ana başlık altında ele alınmış ve bu uzaylarla ilgili çeşitli özellikler araştırılmıştır. Soft metrik uzaylar başlığı altında soft daralma dönüşümleri ve soft kompakt kümeler ele alınmıştır. Soft normlu uzaylar başlığı altında ise ilk olarak soft vektör uzayı tanımlanmış ve bu soft vektör uzayı üzerinde soft norm verilmiştir. Ayrıca, yine bu kısımda soft sürekli ve soft sınırlı dönüşümlerle ilgili çeşitli özellikler verilmiştir. Son olarak, bu başlıkta soft iç çarpım ve soft Hilbert uzayları ele alınarak çeşitli sonuçlara yer verilmiştir.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümü giriş ve ikinci bölümü temel kavramlar olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde soft daralma dönüşümleri ele alınarak bu bölümde farklı koşullar altında Banach sabit nokta teoreminin sağlandığı görülmüştür. Herhangi bir $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\rightarrow(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft daralma dönüşümü için her bir parametreye karşılık gelen dönüşümün de bir daralma dönüşümü olduğu elde edilmiştir. Bir önceki durumun tersinin doğru olmadığı bir örnekle verilmiştir. Eğer (f,φ) soft metrik uzay üzerinde bir soft daralma dönüşümü ise bu durumda f veya φ'nin birer daralma dönüşümü olmayabileceği bir örnekle ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde soft metrik uzaylarda soft kompakt kümeler incelenmiştir. İlk olarak Soft alt dizi, Soft yığılma noktası, Soft dizisel kompakt metrik uzay, $\tilde{\varepsilon}-$ şebekesi, Tam sınırlı soft uzay, Soft Lebesque sayısı, Soft düzgün sürekli dönüşüm tanımları verilmiştir. Soft dizisel kompakt bir metrik uzayda her bir parametreye karşılık gelen metrik uzaylarında dizisel kompakt olduğu tepit edilmiştir. Bu durumun tersinin doğru olmadığı bir örnekle gösterilmiştir. Soft dizisel kompakt bir uzayda her sonsuz soft kümenin bir yığılma noktasına sahip olduğu ispatlanmıştır. Soft dizisel kompaktlık ile soft kompaktlığın denk olduğu kanıtlanmıştır. Soft düzgün sürekli bir dönüşüm için her bir parametreye karşılık gelen $f:(X,d_{1e})\rightarrow\left(Y,d_{2\phi(e)}\right)$ dönüşümünün de düzgün sürekli olduğu gösterilmiştir. Soft dizisel kompakt metrik uzayda soft sürekli bir dönüşümün düzgün sürekli olduğu ispat edilmiştir.

Beşinci bölümde Soft normlu lineer uzaylar ele alınmış ve bu bölümde ilk olarak soft vektör alt uzayı, soft normlu uzay, soft tam uzay, soft Banach uzayı, soft lineer dönüşüm, soft sürekli lineer dönüşüm, soft sınırlı lineer dönüşüm kavramları tanımlanmıştır. Bir soft metrik uzayın soft normlu uzay olabilmesi için gerek ve yeter şart ifade edilmiştir. Her soft sürekli lineer dönüşümün soft sınırlı bir lineer dönüşüm olduğu tespit edilmiştir. Soft lineer operatörün normu ifade edilerek iki soft operatörün bileşkelerinin normu ile ilgili özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışmanın altıncı ve son bölümünde Soft iç çarpım uzayı ve soft Hilbert uzayı ele alınarak soft iç çarpım, soft Hilbert uzayı tanımları verilmiştir. Soft Hilbert uzayı ile ilgili Cauchy-Scwhartz, Paralel kenar kanunu gibi temel eşitsizliklerin sağlandığı görülmüştür. Soft Hilbert uzayı ile ilgili soft $\tilde{\ell}_2$ uzayı örneği verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu çalışmada materyal ve yöntem olarak kullanılacak temel kavramlardan aşağıda kısaca bahsedilmiştir.

X evrensel küme, E parametrelerin bir kümesi, $P(X)$, X 'in kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ dir.

Tanım 2.1. X ve E boştan farklı herhangi iki küme olsun. F, E'den X 'in tüm alt kümelerine giden $F : E \to P(X)$ bir dönüşüm ile birlikte (F,E) çiftine X üzerinde bir soft küme denir (Molodtsov,1999)

Başka bir ifadeyle soft küme; X kümesinin altkümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. Her $e \in E$ için $F(e)$, (F,E) soft kümesinin e-elemanlarının kümesi ya da soft kümenin e-yaklaşık elemanlarının kümesi olarak düşünülebilir.

Bu yaklaşıma göre (F,E) soft kümesi aşağıdaki yaklaşımların bir sınıfı olarak düşünülebilir:

$$(F,E) = \{F(e) : e \in E\}.$$

Tanım 2.2. Eğer X üzerinde (F,A) ve (G,B) iki soft kümesi için

1) $A \subset B$ ve
2) $\forall e \in A$, $F(e)$ ve $G(e)$ özdeş yaklaşımlar ise

(F,A)'ya, (G,B)'nin soft alt kümesi denir ve bu $(F,A) \tilde{\subset} (G,B)$ ile gösterilir.

Benzer olarak, Eğer (G,B), (F,A)' nin bir soft alt kümesi ise (F,A)'ya (G,B) nin soft üst kümesi denir ve bu $(F,A) \tilde{\supset} (G,B)$ ile gösterilir(Maji ve Roy, 2003).

Tanım 2.3. X üzerinde (F,A) ve (G,B) soft kümeleri verilsin. Eğer (F,A), (G,B) 'nin bir soft altkümesi ve (G,B), (F,A)'nın bir soft altkümesi ise bu iki soft küme eşittir denir(Maji ve Roy, 2003).

Tanım 2.4. X üzerinde (F,A) ve (G,B) soft kümeleri verilsin. Bu iki soft kümesinin kesişimi $C = A \cap B$ ve $\forall e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ olmak üzere (H,C) soft kümesidir. Bu ise $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir(Maji ve Roy, 2003).

Tanım 2.5. X üzerinde (F,A) ve (G,B) soft kümeleri verilsin. Bu iki soft kümesinin birleşimi $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için

$$H(e)=\begin{cases} F(e), & e\breve{g}er \ e\in A-B ise, \\ G(e), & e\breve{g}er \ e\in B-A ise, \\ F(e)\bigcup G(e), & e\breve{g}er \ e\in A\bigcap B ise. \end{cases}$$

olmak üzere (H,C) soft kümesidir. Bu bağıntı $(F,A)\tilde{\bigcup}(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir (Maji ve Roy, 2003).

Tanım 2.6. Eğer her $e\in E$ için $F(e)=\emptyset$ oluyorsa X üzerindeki (F,E) soft kümesine boş(null) soft küme denir ve Φ ile gösterilir (Maji ve Roy, 2003).

Tanım 2.7. Eğer her $e\in E$ için $F(e)=X$ oluyorsa X üzerindeki (F,E) soft kümesine mutlak soft küme denir (Maji ve Roy, 2003).

Tanım 2.8. ([3]). Bir (F,E) soft kümesinin tümleyeni $(F,E)^c$ ile gösterilir ve $F^c:E\to P(X)$ dönüşümü için $F^c(\alpha)=X-F(\alpha),\ \forall\alpha\in E$ olmak üzere $(F,E)^c=(F^c,E)$ şeklinde tanımlanır (Ali ve ark., 2005).

Tanım 2.9. $\mathbb{R}$, reel sayıların kümesi ve $B(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ 'nin boş olmayan sınırlı altkümelerinin bir sınıfı ve E parametreler kümesi olsun. Bu durumda bir $F:E\to B(\mathbb{R})$ dönüşümüne soft reel küme denir ve (F,E) ile gösterilir. Eğer (F,E) tek noktadan oluşan bir küme ise, (F,E) kümesini karşılık geldiği soft eleman ile ilişkilendirerek bu kümeye bir soft reel sayı denir ve bu sayılar $\tilde{r},\tilde{s},\tilde{t}$ ve benzeri şekilde gösterilir.

Her $e\in E$ için $\overline{0}(e)=0,\overline{1}(e)=1$ olmak üzere $\overline{0},\overline{1}$ soft reel sayılardır (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.10. İki soft reel sayı için;

(i) Her $e\in E$ için eğer $\tilde{r}(e)\leq\tilde{s}(e)$ oluyorsa $\tilde{r}\tilde{\leq}\tilde{s}$;

(ii) Her $e\in E$ için eğer $\tilde{r}(e)\geq\tilde{s}(e)$ oluyorsa $\tilde{r}\tilde{\geq}\tilde{s}$;

(iii) Her $e\in E$ için eğer $\tilde{r}(e)<\tilde{s}(e)$ oluyorsa $\tilde{r}\tilde{<}\tilde{s}$;

(iv) Her $e\in E$ için eğer $\tilde{r}(e)>\tilde{s}(e)$ oluyorsa $\tilde{r}\tilde{>}\tilde{s}$ dir.

(Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.11. X üzerinde bir (P,E) soft kümesi verilsin. Eğer bazı $x \in X$ ler için $P(e)=\{x\}$ olacak şekilde yalnız bir $e \in E$ parametresi var ve $\forall e' \in E/\{e\}$ için $P(e')=\varnothing$ ise (P,E) soft kümesine bir soft nokta denir ve $\tilde{x}_e$ ile gösterilir (Bayramov ve ark., 2013; Das ve Samanta, 2013a)

Tanım 2.12. X boştan farklı bir küme ve E boştan farklı parametreler kümesi olsun. $\varepsilon : E \to X$ fonksiyonuna X ' in soft elemanı denir. E indeks kümesine bağlı olarak X 'in bir A soft kümesi verildiğinde, eğer $\forall e \in E$ için $\varepsilon(e) \in A(e)$ ise ε soft elemanına A soft kümesine aittir denir ve $\varepsilon \tilde{\in} A$ ile gösterilir. Burada $A(e)=\{\varepsilon(e), \varepsilon \tilde{\in} A\}$ dir(Das ve Samanta, 2013b).

Tanım 2.13. Eğer $e=e'$ ve $P(e)=P(e')$ diğer bir ifadeyle $x=y$ ise iki $\tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'}$ soft noktası eşittir denir. Böylece, $\tilde{x}_e \neq \tilde{y}_{e'} \Leftrightarrow x \neq y$ veya $e \neq e'$ (Bayramov ve ark., 2013; Das ve Samanta, 2013a)

Önerme 2.14. Soft noktaların herhangi bir ailesinin birleşimi bir soft küme olarak düşünülebileceğinden her soft küme kendisine ait soft noktaların bir birleşimi olarak ifade edilebilir; $(F,E)=\bigcup_{\tilde{x}_e \in (F,E)} \tilde{x}_e$ (Das ve Samanta 2013b).

Tanım 2.15. τ , X üzerindeki soft kümelerin bir ailesi olsun, eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir soft topoloji denir;

1. $\Phi, X \in \tau$
2. τ ya ait herhangi sayıdaki soft kümenin birleşimi τ ya aittir.
3. τ ya ait sonlu sayıdaki soft kümenin kesişimi τ ya aittir.

(X,τ,E) üçlüsüne X üzerinde bir soft topolojik uzay denir (Shabir ve Naz, 2011). Tümleyeni açık olan soft kümeye soft kapalı küme denir.

Tanım 2.16. (X,τ,E) , X üzerinde soft topolojik uzay olsun. Bu durumda (F,E) tarafından kapsanan tüm soft açık kümelerin birleşimi olarak tanımlanan soft kümeye (F,E) soft kümesinin soft iç kümesi denir ve $(F,E)^{\circ}$ ile gösterilir (Hussain ve Ahmad, 2011).

Tanım 2.17. (X,τ,E) , X üzerinde soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. Bu durumda (F,E) yi kapsayan tüm soft kapalı kümelerin kesişimine

(F,E) soft kümesinin soft kapanışı denir ve $\overline{(F,E)}$ ile gösterilir (Hussain ve Ahmad, 2011).

Tanım 2.18. (X,τ,E) , X üzerinde soft topolojik uzay olsun. Bu durumda $\overline{(F,E)}\tilde{\cap}\overline{(F,E)^c}$ ile tanımlanan soft kümeye (F,E) soft kümesinin soft sınırı denir ve $\partial(F,E)$ ile gösterilir (Hussain ve Ahmad, 2011).

$\tilde{X}$ mutlak soft küme $SP(\tilde{X})$ soft noktalar kümesi ve $\mathbb{R}(E)^*$ negatif olmayan soft reel sayıların kümesi olsun.

Tanım 2.19. Bir $\tilde{d}:SP(\tilde{X})\times SP(\tilde{X})\to\mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\tilde{d}$ ye $\tilde{X}$ soft kümesi üzerinde bir soft metriktir denir:

(M1) Her $\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2})\tilde{\geq}\overline{0}$;

(M2) $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2})=\overline{0}$ ancak ve ancak $\tilde{x}_{e_1}=\tilde{y}_{e_2}$;

(M3) Her $\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2})=\tilde{d}(\tilde{y}_{e_2},\tilde{x}_{e_1})$;

(M4) Her $\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2},\tilde{z}_{e_3}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1},\tilde{z}_{e_3})\tilde{\leq}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2})+\tilde{d}(\tilde{y}_{e_2},\tilde{z}_{e_3})$

$\tilde{d}$ soft metriği ile beraber $\tilde{X}$ soft kümesine bir soft metrik uzay denir ve $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ ile gösterilir (Das ve Samanta, 2013a).

Tanım 2.20. Bir $\tilde{d}:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to\mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\tilde{d}$ ye $\tilde{X}$ soft kümesi üzerinde bir soft metriktir denir:

(M1) Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{\geq}\overline{0}$;

(M2) $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})=\overline{0}$ ancak ve ancak $\tilde{x}=\tilde{y}$;

(M3) Her $\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})=\tilde{d}(\tilde{y},\tilde{x})$;

(M4) Her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\tilde{\in}\tilde{X}$ için $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{z})\tilde{\leq}\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})+\tilde{d}(\tilde{y},\tilde{z})$;

(Das ve Samanta, 2013b)

Tanım 2.21. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay olsun ve $\tilde{\varepsilon}$ negatif olmayan bir soft reel sayı olsun. $B(\tilde{x}_e,\tilde{\varepsilon})=\{\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}\tilde{X}:\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})\tilde{<}\tilde{\varepsilon}\}$ kümesine $\tilde{x}_e$ merkezli ve $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı soft açık küre ve $B[\tilde{x}_e,\tilde{\varepsilon}]=\{\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}\tilde{X};\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})\tilde{\leq}\tilde{\varepsilon}\}$ kümesine $\tilde{x}_e$ merkezli ve $\tilde{\varepsilon}$ yarıçaplı soft kapalı küme denir (Das ve Samanta, 2013a).

Tanım 2.22. Let $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay ve (F,E), $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ uzayında boş olmayan soft altküme olsun. O zaman (F,E)'nin tüm iç noktaları (F,E)'ye aittir ancak ve ancak (F,E), $\tilde{X}$ 'de soft açıktır. (Das ve Samanta, 2013a).

Tanım 2.23. $\{\tilde{x}^n_{\lambda_n}\}$, $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ metrik uzayında soft noktalardan oluşan bir dizi olsun. Eğer $n\to\infty$ iken $d(\tilde{x}^n_{\lambda_n},\tilde{y}_\mu)\to\overline{0}$ olacak şekilde bir $\tilde{y}_\mu\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ soft noktası var ise $\{\tilde{x}^n_{\lambda_n}\}$ dizisi $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında yakınsaktır denir (Das ve Samanta, 2013a).

Teorem 2.24. Bir soft metrik uzayda bir dizinin limiti varsa bu limit tektir (Das ve Samanta, 2013a).

Tanım 2.25. (Soft Cauchy Dizisi). $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında soft noktalardan oluşan bir $\{\tilde{x}^n_{\lambda_n}\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\tilde{\varepsilon}\,\tilde{>}\,\overline{0}$ için , $\exists$ $N=N(\tilde{\varepsilon})$ doğal sayısı var öyleki her $\forall i,j\geq N$ için $d(\tilde{x}^i_{\lambda_i},\tilde{y}^j_{\mu_j})\,\tilde{\leq}\,\tilde{\varepsilon}$ oluyorsa $\{\tilde{x}^n_{\lambda_n}\}$ dizisine soft Cauchy dizisi denir (Das ve Samanta, 2013a)..

Tanım 2.26. (Soft Tam metrik uzay) $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayı verilsin. Eğer her $\tilde{X}$ deki her Cauchy dizisi $\tilde{X}$ 'de bir soft noktaya yakınsıyorsa $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ uzayına soft tam metrik uzay denir (Das ve Samanta, 2013a).

V bir $K(K=\mathbb{R})$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $\mathrm{F}:E\to P(V)$ soft kümesi verilsin. Burada (F,E) soft kümesi F ile gösterilsin.

Tanım 2.27. (Soft kümelerin toplam ve skaler çarpımı) $F_1,F_2,...,F_n$ (V,E) üzerinde n tane soft küme olsun. Bu durumda $F_1+F_2+...+F_n$ (V,E)'de bir soft kümedir ve $\forall\lambda\in E$ için $F(\lambda)=\{x_1+x_2+...+x_n : x_i\in F_i(\lambda), i=1,2,...,n\}$ olarak tanımlanır. $\alpha\in K$ bir skaler ve F , (V,E)'de bir soft küme olmak üzere αF , (V,E)'de bir soft kümedir ve $\lambda\in E$ için $\alpha F=G$ dir. Burada $G(\lambda)=\{\alpha x : x\in F(\lambda)\}$ dir(Das ve ark., 2013).

Tanım 2.28. V bir $K(K=\mathbb{R})$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve E parametrelerin bir kümesi olsun. (G,E), (V,E) üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall e\in E$ için $G(e)$ V 'nin bir vektör altuzayı ise (G,E) ye K cismi üzerinde (V,E)'nin soft vektör uzayı yada soft lineer uzayı denir (Das ve ark., 2013).

Tanım 2.29. (F,E), K cismi üzerinde V'nin bir soft vektör uzayı olsun. $G: E \to P(V)$, (V,E) üzerinde bir soft küme olsun. Bu durumda, eğer

i. Her bir $e \in E$ için $G(e)$, (V,E)'nin K cismi üzerinde bir vektör alt uzayı ve

ii. $F(e) \supseteq G(e), \forall e \in E$

oluyorsa (G,E)'ye (F,E)'nin bir soft vektör alt uzayı denir(Das ve ark., 2013).

Tanım 2.30. (G,E), K cismi üzerinde (V,E)'nin bir soft vektör uzayı olsun. Bu durumda (G,E) soft kümesinin bir soft elemanına (G,E)'nin bir soft vektörü denir. Benzer bir ifadeyle (K,E) soft kümesinin bir soft elemanına K bir cisim olmak üzere bir soft skaler denir (Das ve ark., 2013).

Tanım 2.31. $\tilde{x},\tilde{y}$, bir K cismi üzerinde (G,E) soft kümesinde iki soft vektör olsun. Bu durumda $\tilde{x}+\tilde{y}$ soft vektör toplamı $(\tilde{x}+\tilde{y})(\lambda)=\tilde{x}(\lambda)+\tilde{y}(\lambda), \forall\lambda \in E$ şeklinde tanımlanır. $\tilde{k}$ soft skaler olmak üzere $\tilde{k}$ ve $\tilde{x}$ in skaler çarpımı $(\tilde{k}\tilde{x})(\lambda)=\tilde{k}(\lambda)+\tilde{x}(\lambda), \forall\lambda \in E$ şeklinde tanımlanır. $\tilde{x}+\tilde{y}$ ve $\tilde{k}\tilde{x}$ (G,E)'nin soft vektörleridir (Das ve ark., 2013).

Örnek 2.32. $\mathbb{R}$ üzerinde n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ öklid uzayını ele alalım. $E=\{1,2,3,...,n\}$ parametreler kümesi olsun. $G: E \to P(\mathbb{R}^n)$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$G(i)=\{t \in \mathbb{R}^n : t' \text{ nin } i. \text{ koordinatı } 0\}, i=1,2,...,n$$

Bu durumda G, $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathbb{R}^n$ uzayının bir soft vektör uzayıdır.

X boştan farklı bir küme olmak üzere $\tilde{X}$ mutlak soft kümesi verilsin. $S(\tilde{X})$, $\forall\lambda \in E$ için $F(\lambda) \neq \varnothing$ olmak üzere ve Φ boş soft kümesi ile beraber $\tilde{X}$ üzerinde tüm (F,E) soft kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda (F,E)'nin tüm soft elemanlarının sınıfını $SE(F,E)$ ile göstereceğiz. $\tilde{X}$'in soft elemanlarının bir $\mathbb{I}$ sınıfı için $\mathbb{I}$ ile üretilen soft küme $SS(\mathbb{I})$ ile gösterilecektir (Das ve ark., 2013).

Tanım 2.33. $\tilde{X}$ mutlak soft küme olmak üzere $\tilde{X}$ vektör uzayı olsun, diğer bir ifadeyle $(F,E)=\tilde{X}$ olmak üzere $\tilde{X}(\lambda)=X, \forall\lambda \in E$ olsun. Bu durumda, eğer

$$\|.\|: SE(\tilde{X}) \to \mathbb{R}(E)^*,$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme $\tilde{X}$ üzerinde bir soft normdur denir:

(N1) Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\|\tilde{x}\| \geq \overline{0}$;

(N2) Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\|\tilde{x}\| = \overline{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = \theta$;

(N3) Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\tilde{\alpha}$ skaleri için $\|\tilde{\alpha}\tilde{x}\| = |\tilde{\alpha}|\|\tilde{x}\|$;

(N4) Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\|\tilde{x} + \tilde{y}\| \tilde{\leq} \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|$

$\tilde{X}$ vektör uzayı ve tanımlanan $\|.\|$ soft normu ile beraber $(\tilde{X}, \|.\|, E)$ üçlüsüne soft normlu uzay denir (Das ve ark., 2013).

Örnek 2.34. E parametre kümesi üzerinde tanımlı tüm soft reel sayıların $\mathbb{R}(E)$ kümesi verilsin. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \mathbb{R}(E)$ soft reel sayısı için $\|.\| := \mathbb{R}(E) \to \mathbb{R}(E)^*$ fonksiyonu $\|\tilde{x}\| = |\tilde{x}|$ şeklinde tanımlansın. Burada $|\tilde{x}|$ soft reel sayıların modülüdür. Bu durumda $\|.\| := \mathbb{R}(E) \to \mathbb{R}(E)^*$ fonksiyonu soft norm aksiyomlarını sağladığından bir soft normdur. $(\mathbb{R}(E), \|.\|, E)$ soft normlu bir uzaydır (Das ve ark., 2013).

Örnek 2.35. X kesin(crispt) vektör uzayı üzerinde $\{\|.\|_\lambda : \lambda \in A\}$ kesin(crispt) normlarının her parametrize ailesi $\tilde{X}$ soft vektör uzayı üzerinde bir soft norm olarak düşünülebilir (Das ve ark., 2013).

Önerme 2.36. V vektör uzayı üzerinde bir (G, E) soft vektör uzayında soft vektörlerin $S = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_n\}$ kümesi verilsin. S kümesindeki soft vektörler V de lineer bağımsızdır ancak ve ancak bazı $\lambda \in E$ ler için

$$S(\lambda) = \{\tilde{\alpha}_1(\lambda), \tilde{\alpha}_2(\lambda), ..., \tilde{\alpha}_n(\lambda)\}$$

kümesinin elemanları lineer bağımsızdır (Das ve ark., 2013).

Tanım 2.37. $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ soft normlu lineer uzaylar olmak üzere $T : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ operatörü verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa T 'ye lineer operatör denir:

1. Her $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \tilde{\in} \tilde{X}$ soft elemanları için $T(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = T(\tilde{x}_1) + T(\tilde{x}_2)$;
2. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ soft elemanı ve $\tilde{c}$ her soft skaleri için $T(\tilde{c}\tilde{x}) = \tilde{c}T(\tilde{x})$ (Das ve Samanta, 2013d).

Tanım 2.38. $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ soft normlu lineer uzaylar olmak üzere $T : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ operatörü verilsin. $\tilde{X}$ 'in soft elemanlarının her $\{\tilde{x}_n\}$ dizisi bir $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ noktasında süreklidir eğer $n \to \infty$ iken $\tilde{x}_n \to \tilde{x}_0$ olması durumunda $n \to \infty$ iken $T(\tilde{x}_n) \to T(\tilde{x}_0)$ oluyorsa veya başka bir ifadeyle $n \to \infty$ iken $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_0\| \to \bar{0}$ olması durumunda $n \to \infty$ iken $\|T(\tilde{x}_n) - T(\tilde{x}_0)\| \to \bar{0}$ oluyorsa T operatörü $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ noktasında süreklidir denir. Eğer T operatörü $\tilde{X}$ in her soft elemanında sürekli ise T ye sürekli operatör denir (Das ve Samanta, 2013d).

Örnek 2.39. $\tilde{X}$ soft normlu lineer uzayı verilsin. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ soft elemanı için $I(\tilde{x}) = \tilde{x}$ şeklinde tanımlanan özdeşlik operatörü $\mathrm{I}: SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X})$ sürekli bir soft lineer operatördür (Das ve Samanta, 2013d).

Örnek 2.40. E parametre kümesi üzerinde tanımlı tüm soft reel sayıların $\mathbb{R}(E)$ kümesi verilsin. Her $\tilde{x}$ soft reel sayısı için $T(\tilde{x}) = 2.\tilde{x}$ şeklinde tanımlanan $T: \mathbb{R}(E) \to \mathbb{R}(E)$ sürekli bir soft operatördür (Das ve Samanta, 2013d).

Tanım 2.41. $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ soft normlu lineer uzaylar olmak üzere $T: SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ operatörü verilsin. Eğer her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\|T(\tilde{x})\| \tilde{\leq} \tilde{M} \|\tilde{x}\|$ olacak şekilde pozitif bir $\tilde{M}$ soft reel sayısı var ise T operatörüne sınırlı operatör denir (Das ve Samanta, 2013d).

Teorem 2.42. $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ soft normlu lineer uzaylar olmak üzere $T: SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ operatörü verilsin. Eğer T operatörü sınırlı ise süreklidir (Das ve Samanta, 2013d).

3. SOFT METRİK UZAYLARDA SOFT DARALMA DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde soft metrik uzaylarla ilgili bazı önemli sonuçlar ele alınacaktır.

3.1. Soft Metrik ile Üretilen Soft Topoloji

$\tilde{X}$, E parametreler kümesi üzerinde mutlak soft küme ve $\tilde{X}_e$ soft noktaların bir ailesi olsun, diğer bir ifadeyle, $\forall e \in E$ için $\tilde{X}_e = \{\tilde{x}_e : x \in X\}$ olsun. Bu durumda $\tilde{X}_e$ soft kümesi ile X kümesi arasında birebir örten bir dönüşüm vardır.

Eğer $e \neq e' \in E$ ise bu durumda $\tilde{X}_e \cap \tilde{X}_{e'} = \Phi$ ve $\tilde{X} = \bigcup_{e \in E} \tilde{X}_e$ dir.

$(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ bir soft metrik uzay olsun. Bu durumda $e \in E$ için $(\tilde{X}_e, \tilde{d}_e, \{e\})$ bir soft metrik uzay olduğu açıktır. Bu durumda $\tilde{d}_e$ soft metriğini kullanarak X üzerinde şeklinde $d_e(x, y) = \tilde{d}_e(\tilde{x}_e, \tilde{y}_e)$ bir metrik tanımlayabiliriz. Dikkat edersek, $e \neq e' \in E$ olduğu durumda d_e ve $d_{e'}$, X üzerinde genellikle farklı metriklerdir.

Önerme 3.1.1. Her soft metrik uzay metrik uzayların parametrize edilmiş bir ailesidir.

Önerme 3.1.1 'in tersi genel olarak doğru olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnek ile gösterilmiştir.

Örnek 3.1.2. $E = \mathbb{R}$ bir parametre kümesi ve (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $\tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} \in SP(\tilde{X})$ için $\tilde{d} : SP(\tilde{X}) \times SP(\tilde{X}) \to \mathbb{R}(E)^*$ fonksiyonunu $\tilde{d}(\tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'}) = d(x, y)^{1+|e-e'|}$ ile tanımlayalım. Bu durumda her $e \in E$ için $\tilde{d}_e$, X üzerinde bir metriktir. Eğer $\tilde{d}(\tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'}) = \overline{0}$ ise bu her zaman $\tilde{x}_e = \tilde{y}_{e'}$ olduğu anlamına gelmediğinden dolayı $\tilde{d}$, X üzerinde bir soft metrik değildir.

Önerme 3.1.3. $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ bir soft metrik uzay ve $\tau_{\tilde{d}}$, $\tilde{d}$ soft metriği ile üretilen bir soft topoloji olsun. Bu durumda her bir $e \in E$ için X üzerinde tanımlı $(\tau_{\tilde{d}})_e$ topolojisi X üzerinde $\tilde{d}_e$ metriği ile üretilmiş $(\tau_{\tilde{d}})_e$ topolojisidir.

İspat. İspat açıktır.

Lemma 3.1.4. $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ bir soft metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $\tilde{x}_e \tilde{\in} \overline{(F,E)} \Leftrightarrow \tilde{d}(\tilde{x}_e,(F,E)) = \bar{0}$;

(ii) $\tilde{x}_e \tilde{\in} (F,E)^{\circ} \Leftrightarrow \tilde{d}\left(\tilde{x}_e,(F,E)^c\right) > \bar{0}$;

(iii) $\tilde{x}_e \tilde{\in} \partial(F,E) \Leftrightarrow \tilde{d}(\tilde{x}_e,(F,E)) = \tilde{d}\left(\tilde{x}_e,(F,E)^c\right) = \bar{0}$;

Dikkat edersek, eğer (F,E), $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında soft kapalı bir küme ve $\tilde{x}_e \tilde{\notin} (F,E)$ ise bu durumda $B(\tilde{x}_e,\tilde{\varepsilon}) \tilde{\cap} (F,E) = \Phi$ olacak şekilde bir $B(\tilde{x}_e,\tilde{\varepsilon})$ soft açık küresi vardır.

Teorem 3.1.5. Her soft metrik uzay bir soft normal uzaydır.

İspat. (F_1,E) ve (F_2,E), $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında iki ayrık soft kapalı kümeler olsun. Her $\tilde{x}_e \tilde{\in} (F_1,E)$ ve $\tilde{y}_{e'} \tilde{\in} (F_2,E)$ soft noktaları için $B\left(\tilde{x}_e,\tilde{\varepsilon}_{\tilde{x}_e}\right) \tilde{\cap} (F_2,E) = \Phi$ ve $B\left(\tilde{y}_{e'},\tilde{\delta}_{\tilde{y}_{e'}}\right) \tilde{\cap} (F_1,E) = \Phi$ olacak şekilde $B\left(\tilde{x}_e,\tilde{\varepsilon}_{\tilde{x}_e}\right)$ ve $B\left(\tilde{y}_{e'},\tilde{\delta}_{\tilde{y}_{e'}}\right)$ soft açık kürelerini seçelim. Böylece,

$$(F_1,E) \tilde{\subset} \tilde{\bigcup} B\left(\tilde{x}_e,(\tilde{\varepsilon}/3)_{\tilde{x}_e}\right) = (U,E) \text{ ve } (F_2,E) \tilde{\subset} \tilde{\bigcup} B\left(\tilde{y}_{e'},\left(\tilde{\delta}/3\right)_{\tilde{y}_{e'}}\right) = (V,E)$$

elde ederiz.

$(U,E) \tilde{\cap} (V,E) = \Phi$ boş küme olduğunu göstermek istiyoruz.

Kabul eldim ki $(U,E) \tilde{\cap} (V,E) \neq \Phi$ olsun. Bu durumda $\tilde{z}_{e''} \tilde{\in} (U,E) \tilde{\cap} (V,E)$ olacak şekilde bir $\tilde{z}_{e''}$ soft noktası vardır. Dolayısıyla, $\tilde{z}_{e''} \tilde{\in} B\left(\tilde{x}_e,(\tilde{\varepsilon}/3)_{\tilde{x}_e}\right)$ ve $\tilde{z}_{e''} \tilde{\in} B\left(\tilde{y}_{e'},\left(\tilde{\delta}/3\right)_{\tilde{y}_{e'}}\right)$ olacak şekilde $B\left(\tilde{x}_e,(\tilde{\varepsilon}/3)_{\tilde{x}_e}\right)$ ve $B\left(\tilde{y}_{e'},\left(\tilde{\delta}/3\right)_{\tilde{y}_{e'}}\right)$ soft açık küreleri vardır. Bu durumda, $\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}) \tilde{<} (\tilde{\varepsilon}/3)_{\tilde{x}_e}$ ve $\tilde{d}(\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}) \tilde{<} \left(\tilde{\delta}/3\right)_{\tilde{y}_{e'}}$ olacaktır. Eğer $\max\left\{(\tilde{\varepsilon}/3)_{\tilde{x}_e},\left(\tilde{\delta}/3\right)_{\tilde{y}_{e'}}\right\} = (\tilde{\varepsilon}/3)_{\tilde{x}_e}$, olarak alırsak bu durumda

$$\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}) \tilde{\leq} \tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}) + \tilde{d}(\tilde{z}_{e''},\tilde{y}_{e'}) \tilde{<} (\tilde{\varepsilon}/3)_{\tilde{x}_e} + \left(\tilde{\delta}/3\right)_{\tilde{y}_{e'}} \tilde{<} \tilde{\varepsilon}_{\tilde{x}_e}$$

elde ederiz ve böylece $\tilde{y}_{e'} \tilde{\in} B\left(\tilde{x}_e,\tilde{\varepsilon}_{\tilde{x}_e}\right)$ ve $\tilde{y}_{e'} \tilde{\in} (F_2,E)$ olur ki buda bizim kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla, $(U,E) \tilde{\cap} (V,E) = \Phi$ dir.

3.2. Soft Daralma Dönüşümleri

Bu bölümde soft daralma dönüşümleri üzerinde bazı sabit nokta teoremlerini ispatını vereceğiz.

$(\tilde{X},\tilde{d},E)$ ve $(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ iki soft metrik uzay olsun. $f:X\to Y$, $\varphi:E\to E'$ iki dönüşüm omak üzere $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ bir soft dönüşümdür.

Önerme 3.2.1. Her bir $\tilde{x}_e \tilde{\in} \tilde{X}$ soft noktası için $(f,\varphi)(\tilde{x}_e)$, $\tilde{Y}$ 'de bir soft noktadır.

İspat. $\tilde{x}_e \tilde{\in} \tilde{X}$ bir soft noktası olsun. Bu durumda

$$(f,\varphi)(\tilde{x}_e)(e') = \bigcup_{e\in\varphi^{-1}(e')} f(\tilde{x}_e(e)) = \bigcup_{\varphi(e)=e'} f(\tilde{x}_e(e)) = \left(\widetilde{(f(x)}\right)_{\varphi(e)}.$$

Tanım 3.2.1. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ ve $(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ iki soft metrik uzay ve $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ bir soft dönüşüm olsun. Eğer $(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ uzayının her soft açık $B((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{\varepsilon})$ küresi için $f\left(B(\tilde{x}_e,\tilde{\delta})\right)\tilde{\subseteq} B((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{\varepsilon})$ olacak şekilde $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ uzayının bir soft açık $B(\tilde{x}_e,\tilde{\delta})$ küresi varsa $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ dönüşümü $\tilde{x}_e \in SP(\tilde{X})$ soft noktasında süreklidir denir.

Eğer (f,φ) dönüşümü $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ uzayının her $\tilde{x}_e$ soft noktasında soft sürekli ise (f,φ) dönüşümü $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ uzayında soft süreklidir denir.

$\varepsilon-\delta$ tekniğini kullanarak soft sürekliliği aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

Eğer her $\tilde{\varepsilon}>0$ için $\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})\tilde{<}\tilde{\delta}$ iken $\tilde{\rho}((f,\varphi)(\tilde{x}_e),(f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}))<\tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $\tilde{\delta}>0$ varsa $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ dönüşümü $\tilde{x}_e \in SP(\tilde{X})$ soft noktasında soft süreklidir denir.

Teorem 3.2.3. $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ bir soft dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ soft sürekli bir dönüşümdür,

(2) Y'de her bir (G,E') soft açık kümesi için $(f,\varphi)^{-1}((G,E'))$ X'de soft açık kümedir,

(3) Y'de her bir (H,E') soft kapalı kümesi için $(f,\varphi)^{-1}((H,E'))$ X'de soft kapalı kümedir,

(4) X'de her bir (F,E) soft kümesi için $(f,\varphi)\left(\overline{(F,E)}\right) \subset \overline{((f,\varphi)(F,E))}$,

(5) Y'de her bir (G,E') soft kümesi için $\overline{\left((f,\varphi)^{-1}(G,E')\right)} \subset (f,\varphi)^{-1}\left(\overline{(G,E')}\right)$,

(6) Y'de her bir (G,E') soft kümesi için $f^{-1}\left((G,E')^{\circ}\right) \subset \left(f^{-1}(G,E')\right)^{\circ}$.dir.

Proof. (1)$\Rightarrow$(2) (f,φ) soft sürekli dönüşüm ve $(G,E') \subset (\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ soft açık bir küme olsun. $(f,\varphi)^{-1}(G,E')$ soft kümesini ele alalım. Eğer $(f,\varphi)^{-1}(G,E') = \Phi$ ise $(f,\varphi)^{-1}((G,E'))$ soft açık kümedir. $(f,\varphi)^{-1}(G,E') \neq \Phi$ olsun. Bu durumda $\tilde{x}_e \in (f,\varphi)^{-1}(G,E')$ olacak şekilde en az bir $\tilde{x}_e$ soft noktası vardır. Buradan $(f,\varphi)(\tilde{x}_e) \in (G,E')$ elde ederiz. (G,E') soft açık olduğundan $B((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{\varepsilon}) \subset (G,E')$ olacak şekilde soft açık bir $B((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{\varepsilon})$ yuvarı vardır. Aynı zamanda (f,φ) soft sürekli olduğundan $(f,\varphi)\left(B(\tilde{x}_e,\tilde{\delta})\right) \subset B((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{\varepsilon})$ olacak şekilde soft açık bir $B(\tilde{x}_e,\tilde{\delta})$ yuvarı vardır. Böylece,

$$B(\tilde{x}_e,\tilde{\delta}) \subset (f,\varphi)^{-1}(f,\varphi)\left(B(\tilde{x}_e,\tilde{\delta})\right) \subset (f,\varphi)^{-1} B((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{\varepsilon}) \subset (f,\varphi)^{-1}(G,E'),$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $(f,\varphi)^{-1}(G,E')$ soft açık bir kümedir.

(2) $\Rightarrow$(3) (H,E') Y'de herhangi bir soft kapalı küme olsun. Bu durumda $(H,E')^{c}$ soft açık bir kümedir. (2) 'den $\left((f,\varphi)^{-1}((H,E'))\right)^{c}$ 'nin X'de soft açık bir küme olacaktır. Dolayısıyla, $(f,\varphi)^{-1}((H,E'))$ soft kapalı bir kümedir.

(3)$\Rightarrow$(4) (F,E), X'de bir soft küme olsun.

$(F,E)\subset(f,\varphi)^{-1}\left((f,\varphi)(F,E)\right)$ ve $(f,\varphi)(F,E)\subset\overline{\left((f,\varphi)(F,E)\right)}$ olduğundan dolayı $(F,E)\subset(f,\varphi)^{-1}\left((f,\varphi)(F,E)\right)\subset(f,\varphi)^{-1}\overline{\left((f,\varphi)(F,E)\right)}$ elde ederiz. (3) ifadesinden $(f,\varphi)^{-1}\overline{\left((f,\varphi)(F,E)\right)}$, X'de soft kapalı bir küme olduğundan dolayı $\overline{(F,E)}\subset(f,\varphi)^{-1}\overline{\left((f,\varphi)(F,E)\right)}$ dir. Böylece,

$$(f,\varphi)\left(\overline{(F,E)}\right)\subset(f,\varphi)\left((f,\varphi)^{-1}\overline{(f,\varphi)(F,E)}\right)\subset\overline{(f,\varphi)(F,E)}$$

elde ederiz.

(4)$\Rightarrow$(5) (G,E'), Y'de bir soft küme ve $(f,\varphi)^{-1}(G,E')=(F,E)$ olsun. (4) ifadesinden

$$(f,\varphi)\left(\overline{(F,E)}\right)=(f,\varphi)\left(\overline{(f,\varphi)^{-1}(G,E')}\right)\subset\overline{(f,\varphi)\left((f,\varphi)^{-1}(G,E')\right)}\subset\overline{(G,E')},$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\overline{\left((f,\varphi)^{-1}(G,E')\right)}=\overline{(F,E)}\subset(f,\varphi)^{-1}\left((f,\varphi)\overline{(F,E)}\right)\subset(f,\varphi)^{-1}\left(\overline{(G,E')}\right)$$

olacaktır.

(5)$\Rightarrow$(6) (G,E'), Y'de bir soft küme olsun. (5) ifadesinde (G,E') yerine $(G,E')^c$ yazarsak bu durumda $\overline{(f,\varphi)^{-1}\left((G,E')^c\right)}\subset(f,\varphi)^{-1}\left(\overline{(G,E')^c}\right)$ elde ederiz. $(G,E')^{\circ}=\left(\overline{(G,E')^c}\right)^c$ olduğundan

$$(f,\varphi)^{-1}\left((G,E')^{\circ}\right)=(f,\varphi)^{-1}\left(\left(\overline{(G,E')^c}\right)^c\right)=\left((f,\varphi)^{-1}\left(\overline{(G,E')^c}\right)\right)^c\subset$$

$$\left(\overline{(f,\varphi)^{-1}\left((G,E')^c\right)}\right)^c=\left(\overline{\left((f,\varphi)^{-1}(G,E')\right)^c}\right)^c=\left((f,\varphi)^{-1}(G,E')\right)^{\circ},$$

dir.

(6)$\Rightarrow$(1) (G,E'), Y'de bir soft küme olsun.

$$\left((f,\varphi)^{-1}(G,E')\right)^{\circ}\subset(f,\varphi)^{-1}(G,E')=(f,\varphi)^{-1}\left((G,E')^{\circ}\right)\subset\left((f,\varphi)^{-1}(G,E')\right)^{\circ},$$

olduğundan $\left((f,\varphi)^{-1}(G,E')\right)^{\circ}=(f,\varphi)^{-1}(G,E')$ elde ederizki buda $f^{-1}(G,E')$'nün soft açık bir küme olduğu anlamına gelir.

Tanım 3.2.4. $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\rightarrow(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ soft dönüşümü $\tilde{x}_e\tilde{\in}SP(\tilde{X})$ soft noktasında soft dizisel süreklidir denir ancak ve ancak soft noktalardan oluşan her $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$ soft dizisi $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında bir $\tilde{x}_e$ soft noktasına yakınsarken $(f,\varphi)\left(\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}\right)$ soft dizisi $(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ uzayında bir $(f,\varphi)(\tilde{x}_e)\tilde{\in}SP(\tilde{Y})$ soft noktasına yakınsaktır.

Teorem 3.2.5. Soft metrik uzaylarda soft süreklilik soft dizisel sürekliliğe denktir.

İspat. $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\rightarrow(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ soft sürekli bir dönüşüm olsun ve $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$, $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında $\tilde{x}_e$ soft noktasına yakınsayan soft noktalardan oluşan herhangi bir dizi ve $B((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{\varepsilon})$, $(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ uzayında soft açık yuvar olsun. (f,φ) soft dönüşümü sürekli olduğundan $f\left(B(\tilde{x}_e,\tilde{\delta})\right)\tilde{\subseteq}B((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{\varepsilon})$ olacak şekilde X'de $\tilde{x}_e$ soft noktasını içeren bir soft açık $B(\tilde{x}_e,\tilde{\delta})$ yuvarı seçebiliriz. $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$ soft dizisi $\tilde{x}_e$ soft noktasına yakınsadığından dolayı bir $n_0\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyleki her $n\geq n_0$ için $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}\tilde{\in}B(\tilde{x}_e,\tilde{\delta})$ dir. Dolayısıyla, her $n\geq n_0$ için $f\left(\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}\right)\tilde{\in}f\left(B(\tilde{x}_e,\delta)\right)\tilde{\subseteq}B((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{\varepsilon})$ elde ederiz.

Tersine, $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\rightarrow(\tilde{Y},\tilde{\rho},E')$ soft dönüşümünün soft dizisel sürekli olduğunu fakat soft sürekli olmadığını kabul edelim. (f,φ), $\tilde{x}_e$ soft noktasında soft sürekli olmadığından dolayı bir $\tilde{\varepsilon}_0\tilde{>}\overline{0}$ vardır öyle ki tüm $\tilde{\delta}\tilde{>}\overline{0}$ sayıları için $\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})\tilde{<}\tilde{\delta}$ ve $\tilde{\rho}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e),(f,\varphi)(\tilde{y}_{e'})\right)\tilde{>}\tilde{\varepsilon}_0$ olacak şekilde bir $\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}SP(\tilde{X})$ soft noktası vardır. Dolayısıyla, tanımdan $\left\{\left(\tilde{y}_{e_n'}^n\right)\right\}(n\geq 1)$ soft dizisi $\tilde{x}_e$ soft noktasına yakınsar. Diğer taraftan, tanımdan $\left\{(f,\varphi)\left(\tilde{y}_{e_n'}^n\right)\right\}(n\geq 1)$ soft dizisi $(f,\varphi)(\tilde{x}_e)$ soft noktasına yakınsamaz. Diğer bir ifadeyle, (f,φ) dönüşümü $\tilde{x}_e$ noktasında dizisel sürekli değildir.

Tanım 3.2.6. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay olsun. Eğer her $\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\in SP(\tilde{X})$ soft noktaları için $\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}_e),(f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}))\tilde{\leq}\tilde{\alpha}.\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})$ olacak şekilde bir $\tilde{\alpha}\in\mathbb{R},\bar{0}\leq\tilde{\alpha}<\bar{1}$ soft reel sayısı var ise $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{X},\tilde{d},E)$ fonksiyonuna bir soft daralma dönüşümü denir.

Önerme 3.2.7. Her soft daralma dönüşümü soft süreklidir.

İspat. $\tilde{x}_e\in SP(\tilde{X})$ herhangi bir soft nokta ve keyfi bir $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\bar{0}$ sayısı verilmiş olsun. Eğer $d(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})\tilde{<}\tilde{\delta}\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ olarak seçersek bu durumda (f,φ) soft daralma dönüşümü olduğundan

$$\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}_e),(f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}))\tilde{\leq}\tilde{\alpha}.\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})<\tilde{\alpha}.\tilde{\delta}\tilde{\leq}\tilde{\varepsilon}$$

elde ederiz ve böylece (f,φ) soft süreklidir.

Teorem 3.2.8. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay olsun. Eğer $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{X},\tilde{d},E)$ dönüşümü bir soft tam metrik uzay üzerinde bir soft daralma dönüşümü ise bu durumda $(f,\varphi)(\tilde{x}_e)=\tilde{x}_e$ olacak şekilde bir tek $\tilde{x}_e\in SP(\tilde{X})$ soft noktası vardır.

İspat. $\tilde{x}_e^0$, $SP(\tilde{X})$'de herhangi bir nokta olsun.

$$\tilde{x}_{e_1}^1=(f,\varphi)(\tilde{x}_e^0)=\left(f(\tilde{x}_e^0)\right)_{\varphi(e)},\tilde{x}_{e_2}^2=\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_1}^1)\right)=\left(f^2(\tilde{x}_e^0)\right)_{\varphi^2(e)},\dots$$
$$,\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1}=\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n)\right)=\left(f^{n+1}(\tilde{x}_e^0)\right)_{\varphi^{n+1}(e)},\dots,$$

olarak teşkil edersek

$$\tilde{d}(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_{e_n}^n)=\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),(f,\varphi)(\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1})\right)\tilde{\leq}\tilde{\alpha}.\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1})\tilde{\leq}\tilde{\alpha}^2.\tilde{d}(\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1},\tilde{x}_{e_{n-2}}^{n-2})\tilde{\leq}\dots\tilde{\leq}\tilde{\alpha}^n.\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1}^1,\tilde{x}_e^0),$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $n>m$ için

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_m}^m)&\tilde{\leq}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1})+\tilde{d}(\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1},\tilde{x}_{e_{n-2}}^{n-2})+\dots+\tilde{d}(\tilde{x}_{e_{m+1}}^{m+1},\tilde{x}_{e_m}^m)\\&\tilde{\leq}(\tilde{\alpha}^{n-1}+\tilde{\alpha}^{n-2}+\dots+\tilde{\alpha}^m)\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1}^1,\tilde{x}_e^0)\\&\tilde{\leq}\frac{\tilde{\alpha}^m}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1}^1,\tilde{x}_e^0).\end{aligned}$$

O halde $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_m}^m)\tilde{\leq}\frac{\tilde{\alpha}^m}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1}^1,\tilde{x}_e^0)$ dir. Buradan $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_m}^m)\to\bar{0}$, $(n,m\to\infty)$ elde ederiz. Dolayısıyla, $\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$ bir soft Cauchy dizisidir. $\tilde{X}$'in tamlığından

$\tilde{x}_{e_n}^n \to \tilde{x}_e^* \ (n \to \infty)$ olacak şekilde bir $\tilde{x}_e^* \tilde{\in} \tilde{X}$ soft noktası vardır. (f,φ) daralma dönüşümü olduğundan

$$\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),\tilde{x}_e^*\right) \tilde{\leq} \tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),(f,\varphi)(\tilde{x}_e^*)\right)+\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),\tilde{x}_e^*\right)$$
$$\tilde{\leq} \tilde{\alpha}\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_e^*\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_e^*\right),$$

$$\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),\tilde{x}_e^*\right) \tilde{\leq} \tilde{\alpha}\left(\tilde{\alpha}\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_e^*\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_e^*\right)\right) \to \bar{0},$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),\tilde{x}_e^*\right) \to \bar{0}$ olmak üzere $(f,\varphi)(\tilde{x}_e^*)=\tilde{x}_e^*$ dır. Dolayısıyla, $\tilde{x}_e^*$ soft noktası (f,φ) dönüşümünün sabit bir soft noktasıdır.

Eğer $\tilde{y}_{e'}^*$ soft noktası (f,φ) dönüşümünün başka bir sabit soft noktası ise bu durumda

$$\tilde{d}\left(\tilde{x}_e^*,\tilde{y}_{e'}^*\right)=\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),(f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}^*)\right) \tilde{\leq} \tilde{\alpha}\tilde{d}\left(\tilde{x}_e^*,\tilde{y}_{e'}^*\right),$$

elde ederiz. Buradan $\tilde{\alpha} \tilde{<} \bar{1}$ için $\tilde{d}\left(\tilde{x}_e^*,\tilde{y}_{e'}^*\right)=\bar{0} \Rightarrow \tilde{x}_e^*=\tilde{y}_{e'}^*$ elde ederiz. Dolayısıyla, (f,φ) dönüşümünün sabit soft noktası tektir.

Teorem 3.2.9. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir tam soft metrik uzay olsun. $\tilde{\alpha} \in \left[\bar{0},\frac{\bar{1}}{2}\right)$ bir soft sabit olmak üzere $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E) \to (\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dönüşümünün her $\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'} \tilde{\in} \tilde{X}$ soft noktaları için

$$\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e),(f,\varphi)(\tilde{y}_{e'})\right) \tilde{\leq} \tilde{\alpha}\left[\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e),\tilde{x}_e\right)+\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}),\tilde{y}_{e'}\right)\right],$$

soft daralma şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda (f,φ) dönüşümünün $\tilde{X}$'de sabit soft noktası tektir.

İspat. $\tilde{x}_e^0$, $SP(\widetilde{X})$ kümesinde herhangi bir soft nokta olsun.

$$\tilde{x}_{e_1}^1=(f,\varphi)(\tilde{x}_e^0)=\left(f(\tilde{x}_e^0)\right)_{\varphi(e)},\tilde{x}_{e_2}^2=\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_1}^1)\right)=\left(f^2(\tilde{x}_e^0)\right)_{\varphi^2(e)},\ldots$$
$$,\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1}=\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n)\right)=\left(f^{n+1}(\tilde{x}_e^0)\right)_{\varphi^{n+1}(e)},\ldots,$$

olarak teşkil edersek, $\tilde{h}=\dfrac{\tilde{\alpha}}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}$ olmak üzere

$$\tilde{d}(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_{e_n}^n)=\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),(f,\varphi)(\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1})\right)$$
$$\tilde{\leq} \tilde{\alpha}\left[\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),\tilde{x}_{e_n}^n\right)+\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1}),\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1}\right)\right]$$
$$=\tilde{\alpha}\left[\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_{e_n}^n\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1}\right)\right],$$

$$\tilde{d}(\tilde{x}^{n+1}_{e_{n+1}},\tilde{x}^{n}_{e_n}) \tilde{\leq} \frac{\tilde{\alpha}}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}\tilde{d}(\tilde{x}^{n}_{e_n},\tilde{x}^{n-1}_{e_{n-1}}) = h\tilde{d}(\tilde{x}^{n}_{e_n},\tilde{x}^{n-1}_{e_{n-1}}),$$

elde ederiz. $n>m$ için

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{x}^{n}_{e_n},\tilde{x}^{m}_{e_m}) &\tilde{\leq} \tilde{d}(\tilde{x}^{n}_{e_n},\tilde{x}^{n-1}_{e_{n-1}})+\tilde{d}(\tilde{x}^{n-1}_{e_{n-1}},\tilde{x}^{n-2}_{e_{n-2}})+\cdots+\tilde{d}(\tilde{x}^{m+1}_{e_{m+1}},\tilde{x}^{m}_{e_m})\\ &\tilde{\leq}(\tilde{h}^{n-1}+\tilde{h}^{n-2}+\cdots+\tilde{h}^{m})\tilde{d}(\tilde{x}^{1}_{e_1},\tilde{x}^{0}_{e})\\ &\tilde{\leq}\frac{\tilde{h}^{m}}{\bar{1}-\tilde{h}}\tilde{d}(\tilde{x}^{1}_{e_1},\tilde{x}^{0}_{e}),\end{aligned}$$

olacaktır. O halde $\tilde{d}(\tilde{x}^{n}_{e_n},\tilde{x}^{m}_{e_m})\tilde{\leq}\frac{\tilde{h}^{m}}{\bar{1}-\tilde{h}}\tilde{\alpha}\tilde{d}(\tilde{x}^{1}_{e_1},\tilde{x}^{0}_{e})$ dir. Buradan, $\tilde{d}(\tilde{x}^{n}_{e_n},\tilde{x}^{m}_{e_m})\to\bar{0}$, $(n,m\to\infty)$ elde ederiz. Dolayısıyla, $\{\tilde{x}^{n}_{e_n}\}$ bir soft Cauchy dizisidir. $\tilde{X}$'in tamlığından $\tilde{x}^{n}_{e_n}\to\tilde{x}^{*}_{e}$ $(n\to\infty)$ olacak şekilde bir $\tilde{x}^{*}_{e}\tilde{\in}\tilde{X}$ soft noktası vardır. (f,φ) daralma şartını sağladığından

$$\begin{aligned}\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{*}_{e}),\tilde{x}^{*}_{e}) &\tilde{\leq}\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{n}_{e_n}),(f,\varphi)(\tilde{x}^{*}_{e}))+\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{n}_{e_n}),\tilde{x}^{*}_{e})\\ &\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\left[\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{n}_{e_n}),\tilde{x}^{n}_{e_n})+\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{n}_{e_n}),\tilde{x}^{*}_{e})\right]+\tilde{d}(\tilde{x}^{n+1}_{e_{n+1}},\tilde{x}^{*}_{e})\\ &\tilde{\leq}\frac{\bar{1}}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}\left[\tilde{\alpha}\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{n}_{e_n}),\tilde{x}^{n}_{e_n})+\tilde{d}(\tilde{x}^{n+1}_{e_{n+1}},\tilde{x}^{*}_{e})\right],\end{aligned}$$

$$\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{*}_{e}),\tilde{x}^{*}_{e})\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\frac{\bar{1}}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}\left(\tilde{\alpha}\tilde{d}(\tilde{x}^{n+1}_{e_{n+1}},\tilde{x}^{n}_{e_n})+\tilde{d}(\tilde{x}^{n+1}_{e_{n+1}},\tilde{x}^{*}_{e})\right)\to\bar{0}.$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{*}_{e}),\tilde{x}^{*}_{e})\to\bar{0}$ olmak üzere $(f,\varphi)(\tilde{x}^{*}_{e})=\tilde{x}^{*}_{e}$ dır. Dolayısıyla, $\tilde{x}^{*}_{e}$ soft noktası (f,φ) dönüşümünün sabit bir soft noktasıdır.

Eğer $\tilde{y}^{*}_{e'}$, (f,φ) dönüşümünün başka bir sabit soft noktası ise bu durumda

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{x}^{*}_{e},\tilde{y}^{*}_{e'}) &=\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{*}_{e}),(f,\varphi)(\tilde{y}^{*}_{e'}))\\ &\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\left[\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}^{*}_{e}),\tilde{x}^{*}_{e})+\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{y}^{*}_{e'}),\tilde{y}^{*}_{e'})\right]=\bar{0}\end{aligned}$$

olacaktır. Buradan, $\tilde{\alpha}\tilde{<}\bar{1}$ için $\tilde{d}(\tilde{x}^{*}_{e},\tilde{y}^{*}_{e'})=\bar{0}\Rightarrow\tilde{x}^{*}_{e}=\tilde{y}^{*}_{e'}$ elde ederiz. Dolayısıyla, (f,φ) dönüşümünün sabit soft noktası tektir.

Teorem 3.2.10. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft tam metrik uzay olsun. $\tilde{\alpha}\in\left[\bar{0},\frac{\bar{1}}{2}\right)$ bir soft sabit olmak üzere her $\tilde{x}_{e},\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}\tilde{X}$ soft noktaları için $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{X},\tilde{d},E)$ dönüşümü

$$\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}_{e}),(f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}))\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\left[\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}_{e}),\tilde{y}_{e'})+\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}),\tilde{x}_{e})\right],$$

daralma şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda (f,φ) dönüşümünün $\tilde{X}$'de sabit soft noktası tektir.

İspat. $\tilde{x}_e^0$, $SP(\tilde{X})$'de herhangi bir soft nokta olsun.

$$\tilde{x}_{e_1}^1=(f,\varphi)(\tilde{x}_e^0)=\left(f(\tilde{x}_e^0)\right)_{\varphi(e)},\tilde{x}_{e_2}^2=\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_1}^1)\right)=\left(f^2(\tilde{x}_e^0)\right)_{\varphi^2(e)},\dots$$
$$,\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1}=\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n)\right)=\left(f^{n+1}(\tilde{x}_e^0)\right)_{\varphi^{n+1}(e)},\dots,$$

olarak teşkil edersek

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_{e_n}^n)&=\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),(f,\varphi)(\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1})\right)\\ &\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\left[\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1}\right)+\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1}),\tilde{x}_{e_n}^n\right)\right]\\ &\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\left[\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_{e_n}^n\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1}\right)\right]\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, $\tilde{h}=\dfrac{\tilde{\alpha}}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}$ olmak üzere,

$$\tilde{d}(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_{e_n}^n)\tilde{\leq}\frac{\tilde{\alpha}}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1})=\tilde{h}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1}),$$

olacaktır. $n>m$ için

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_m}^m)&\tilde{\leq}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1})+\tilde{d}(\tilde{x}_{e_{n-1}}^{n-1},\tilde{x}_{e_{n-2}}^{n-2})+\dots+\tilde{d}(\tilde{x}_{e_{m+1}}^{m+1},\tilde{x}_{e_m}^m)\\ &\tilde{\leq}(\tilde{h}^{n-1}+\tilde{h}^{n-2}+\dots+\tilde{h}^m)\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1}^1,\tilde{x}_e^0)\\ &\tilde{\leq}\frac{\tilde{h}^m}{\bar{1}-\tilde{h}}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1}^1,\tilde{x}_e^0),\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_m}^m)\tilde{\leq}\dfrac{\tilde{h}^m}{\bar{1}-\tilde{h}}\tilde{\alpha}\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1}^1,\tilde{x}_e^0)$ dir. Buradan $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_{e_m}^m)\to\bar{0}$, $(n,m\to\infty)$ elde ederiz. Dolayısıyla, $\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$ bir soft Cauchy dizisidir. of $\tilde{X}$'in tamlığından $\tilde{x}_{e_n}^n\to\tilde{x}_e^*$ $(n\to\infty)$ olacak şekilde bir $\tilde{x}_e^*\tilde{\in}\tilde{X}$ soft noktası vadır. (f,φ) daralma şartını sağladığından dolayı

$$\begin{aligned}\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),\tilde{x}_e^*\right)&\tilde{\leq}\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),(f,\varphi)(\tilde{x}_e^*)\right)+\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),\tilde{x}_e^*\right)\\ &\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\left[\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),\tilde{x}_{e_n}^n\right)+\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_{e_n}^n),\tilde{x}_e^*\right)\right]+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_e^*\right)\\ &\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\left[\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),\tilde{x}_e^*\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_e^*\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_e^*\right)\right]+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_e^*\right)\\ &\tilde{\leq}\frac{\bar{1}}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}\left[\tilde{\alpha}\left(\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_e^*\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_e^*\right)\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_e^*\right)\right],\end{aligned}$$

$$\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),\tilde{x}_e^*\right)\tilde{\leq}\tilde{\alpha}\frac{\tilde{\alpha}}{\bar{1}-\tilde{\alpha}}\left[\tilde{\alpha}\left(\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_n}^n,\tilde{x}_e^*\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_e^*\right)\right)+\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n+1}}^{n+1},\tilde{x}_e^*\right)\right]\to\bar{0}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),\tilde{x}_e^*\right)\to\overline{0}$ olmak üzere $(f,\varphi)(\tilde{x}_e^*)=\tilde{x}_e^*$ dır. Böylece, $\tilde{x}_e^*$ soft noktası (f,φ) dönüşümünün sabit bir soft noktasıdır.

Eğer $\tilde{y}_{e'}^*$, (f,φ) dönüşümünün başka bir sabit noktası ise bu durumda

$$\begin{aligned}\tilde{d}\left(\tilde{x}_e^*,\tilde{y}_{e'}^*\right)&=\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),(f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}^*)\right)\\&\tilde{\leq}\,\tilde{\alpha}\left[\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{x}_e^*),\tilde{y}_{e'}^*\right)+\tilde{d}\left((f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}^*),\tilde{x}_e^*\right)\right]=\overline{0}\end{aligned}$$

olacaktır. Buradan $\tilde{\alpha}\tilde{<}\overline{1}$ için $\tilde{d}\left(\tilde{x}_e^*,\tilde{y}_{e'}^*\right)=\overline{0}\Rightarrow\tilde{x}_e^*=\tilde{y}_{e'}^*$ elde ederiz. Dolayısıyla, f (f,φ) dönüşümünün sabit soft noktası tektir.

Önerme 3.2.11. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay olsun. Eğer $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft daralma dönüşümü ise bu durumda her $e\in E$ için $f_e:(X,d_e)\to\left(X,d_{\varphi(e)}\right)$ bir daralma dönüşümüdür.

Aşağıdaki örnek Önerme 3.2.11 in tersinin her zaman geçerli olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.2.12. $E=\mathbb{R}$ parametreler kümesi ve $X=\mathbb{R}^2$ olsun. X kümesi üzerinde alışılmış metriği ele alalım ve $\tilde{X}$ soft kümesi üzerinde ki soft metriği $\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})=|e-e'|+d(x,y)$ şeklinde tanımlayalım. Eğer $(f,\varphi):(\tilde{X},\tilde{d},E)\to(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$(f,\varphi)(\tilde{x}_e)=\left(\frac{1}{2}x\right)_{3e},$$

Bu durumda

$$\tilde{d}((f,\varphi)(\widetilde{0,1})_2,(f,\varphi)(\widetilde{1,0})_1)=\tilde{d}\left(\widetilde{(0,\frac{1}{2})_6,(\frac{1}{2},0)_3}\right)=3+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tilde{d}\left((\widetilde{0,1})_2,(\widetilde{1,0})_1\right)=1+\sqrt{2}$$

olacaktır. $3+\frac{\sqrt{2}}{2}>1+\sqrt{2}$ olduğundan dolayı (f,φ) bir soft daralma dönüşümü değildir. Fakat $f:(X,d_e)\to(X,d_{3e})$ dönüşümü $e\in E$ parametresi için bir daralma dönüşümüdür.

Sonuç 3.2.13. E parametrelerin bir kümesi ve X bir küme olsun. Bu kümeler üzerinde verilen metrikleri kullanarak bir soft metrik elde edebiliriz. Eğer (f,φ) soft metrik uzay üzerinde bir soft daralma dönüşümü ise bu durumda f veya φ birer daralma dönüşümü olmayabilir.

Aşağıdaki örnek Sonuç 3.2.13 geçerli olduğunu göstermektedir.

Örnek 3.2.14. $(\tilde{\mathbb{R}},\tilde{d},E)$ aşağıda verilen metrikler ile tanımlanmış bir soft metrik uzay olsun,

$$d(x,y)=|x-y|\ ,\ d_1(x,y)=\min\{|x-y|,1\}\ \text{ve}$$

$$\tilde{d}(x_e,y_{e'})=\frac{1}{2}d_1(e,e')+d(x,y)$$

burada $E=[1,\infty)$ dur. $\varphi:[1,\infty)\to[1,\infty)$ ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun,

$$\varphi(x)=x+\frac{1}{x},\ f(x)=\frac{1}{5}x.$$

Burada,

$$(f,\varphi):(\tilde{\mathbb{R}},\tilde{d},E)\to(\tilde{\mathbb{R}},\tilde{d},E)$$

bileşke fonksiyonunun daralma daralma dönüşümü şartlarını sağladığı açıktır. $d_1(x,y)=\min\{|x-y|,1\}$ şeklinde tanımlanan metriğine göre $\varphi(x)=x+\frac{1}{x}$ fonksiyonunun bir daralma dönüşümü olmadığı halde (f,φ) dönüşümünün bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek istiyoruz.

$$\tilde{d}((f,\varphi)(\tilde{x}_e),(f,\varphi)(\tilde{y}_{e'}))=\tilde{d}\left(\left(\frac{1}{5}x\right)_{e+\frac{1}{e}},\left(\frac{1}{5}y\right)_{e'+\frac{1}{e'}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}d_1\left(e+\frac{1}{e},e'+\frac{1}{e'}\right)+\frac{1}{5}|x-y|$$

$$=\frac{1}{2}\min\left\{\left|e+\frac{1}{e}-e'+\frac{1}{e'}\right|,1\right\}+\frac{1}{5}|x-y|$$

$$=\frac{1}{2}\min\left\{|e-e'|\left|1-\frac{1}{ee'}\right|,1\right\}+\frac{1}{5}|x-y|$$

$$\leq\frac{1}{2}\min\{|e-e'|,1\}+\frac{1}{5}|x-y|$$

$$\leq\frac{1}{2}d_1(e,e')+\frac{1}{5}d(x,y)$$

$$\leq\frac{3}{4}(d_1(e,e')+d(x,y)),$$

olduğundan dolayı (f,φ) bir daralma dönüşümüdür.

4. SOFT METRİK UZAYLARDA SOFT KOMPAKT KÜMELER

Bu bölümde soft dizisel kompakt metrik uzaylarla ilgili bazı önemli özellikler ve tanımlar verilecektir.

Tanım 4.1. (Soft alt dizi) $\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$, $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında soft noktaların bir dizisi olsun. $\{\tilde{x}_{e_k}^k\}, k \in \mathbb{N}$ kesin artan bir dizi olmak üzere $\{\tilde{x}_{e_{n_k}}^{n_k}\}, k \in \mathbb{N}$ formundaki diziye $\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$ soft dizisinin bir soft alt dizisi denir.

Tanım 4.2. (Soft yığılma noktası) $\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$, $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında soft noktaların bir dizisi olsun. Eğer $(\tilde{x}_e, E)$'nin her (F,E) soft komşuluğu ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{x}_{e_m}^m \in (F,E)$ olacak şekilde bir $m \geq n$ doğal sayısı var ise $\tilde{x}_e \tilde{\in} \tilde{X}$ soft noktasına $\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$ soft dizisinin bir soft yığılma noktası denir.

Tanım 4.3. (Soft dizisel kompakt metrik uzay) $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay olsun. Eğer $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında her soft dizinin $\tilde{X}$'de soft yakınsayan bir soft altdizisi var ise bu uzaya soft dizisel kompakt metrik uzay denir.

Bir sonraki önerme her bir parametreye karşılık gelen metrik uzayların dizisel kompaktlığı ile soft metrik uzayaların soft dizisel kompaktlığı arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Önerme 4.4. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay olsun. Eğer $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft dizisel kompakt uzay ise bu durumda her bir $e \in E$ parametresi için (X,d_e) dizisel kompakt bir uzaydır.

İspat. Her bir $e \in E$ parametresi için $\{x^n\}$, (X,d_e) uzayında herhangi bir dizi olsun. Bu durumda $\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$, $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft metrik uzayında bir soft dizi olacaktır. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dizisel kompakt bir uzay olduğundan dolayı $\{\tilde{x}_{e_{n_k}}^{n_k}\}$ soft yakınsak bir soft altdizidir. Dolayısıyla, $\{x^{n_k}\}$ altdizisi her bir $e \in E$ parametresi için (X,d_e) uzayında yakınsaktır.

Önerme 4.4 ün tersi genel olarak doğru olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 4.5. $E=\mathbb{N}$, $X=[0,1]$ olsun ve $\tilde{d}$ soft metriği aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun;

$$\tilde{d}(x_e, y_{e'}) = |e-e'| + |x-y|.$$

Her bir $e \in E$ için (X, d_e) uzayının dizisel kompakt olduğu açıktır. Bununla beraber, $\left\{\left(\frac{1}{2^n}\right)_{e_n}\right\}$ soft dizisinin $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ soft metrik uzayında yakınsak bir soft altdizisi yoktur.

Önerme 4.6. $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ bir soft metrik uzay olsun. $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ soft dizisel kompakttır ancak ve ancak her sonsuz soft (F,E) kümesinin bir yığılma noktası vardır.

İspat. (F,E) bir sonsuz soft küme ve $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$, (F,E)'de bir soft dizi olsun. Bu durumda $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ soft dizisinin $\{\tilde{x}^{n_k}_{e_{n_k}}\}$ gibi bir soft yakınsak bir soft alt dizisi vardır. $\{\tilde{x}^{n_k}_{e_{n_k}}\}$ soft altdizisinin bir $\tilde{z}_{e_0}$ soft noktasına soft yakınsadığını kabul edelim.

$$\Phi \neq B\left(\tilde{z}_{e_0}, \tilde{\varepsilon}\right) \cap \{\tilde{x}^{n_k}_{e_{n_k}}\} \subset B\left(\tilde{z}_{e_0}, \tilde{\varepsilon}\right) \cap (F,E),$$

olduğundan dolayı $\tilde{z}_{e_0}$, (F,E)'de bir soft yığılma noktasıdır.

Tersine, $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ herhangi bir soft dizi olsun. Eğer $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ dizisi sonlu ise bu durumda bu soft dizinin yakınsak bir soft altdizisi vardır.

$\{\tilde{x}^n_{e_n}\} = (F,E)$ olarak alırsak $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ bir soft küme olacaktır. Önermenin şartından bu soft kümenin $\tilde{z}_{e_0}$ gibi bir soft yığılma noktası vardır.

$$B\left(\tilde{z}_{e_0}, \tilde{k}\right) \cap (F,E) \neq \Phi,$$

olduğundan dolayı her bir $\tilde{k} \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{x}^{n_k}_{e_{n_k}} \in B\left(\tilde{z}_{e_0}, \tilde{k}\right) \cap (F,E)$ olarak seçeriz.

Dolayısıyla, $\{\tilde{x}^{n_k}_{e_{n_k}}\}$ soft dizisi $\tilde{z}_{e_0}$ 'a yakınsar.

Tanım 4.7. ($\tilde{\varepsilon}-$**şebekesi**) $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay ve S soft noktalardan oluşan bir soft küme olsun. Eğer $\tilde{X} \subset \bigcup_{\tilde{x}_e \in S} B(\tilde{x}_e,\tilde{\varepsilon})$ sağlanıyor ise bu durumda S'ye $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ uzayında bir a soft $\tilde{\varepsilon}-$şebekesi denir.

Tanım 4.8. (Tam sınırlı soft uzay)$(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay olsun. Eğer $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ uzayının her $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için sonlu bir $\tilde{\varepsilon}-$şebekesi varsa $(\tilde{X},\tilde{d},E)$'ye tam sınırlı soft uzay denir.

Lemma 4.9. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay ve A sonsuz bir soft küme olsun. Bu durumda her $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $\tilde{d}(B) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $B \subset A$ sonsuz soft kümesi vardır.

İspat. $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ keyfi bir soft reel sayı olsun. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ tam sınırlı olduğundan dolayı $\tilde{H} = \{\tilde{x}_{e_1}^1, \tilde{x}_{e_2}^2, \ldots, \tilde{x}_{e_{n1}}^n\}$ gibi sonlu bir $\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}-$şebekesi vardır. Böylece, $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^{n} B(\tilde{x}_{e_i}^i,\tilde{\varepsilon})$ ve $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{n} B(\tilde{x}_{e_i}^i,\tilde{\varepsilon}) \cap A$ yazabiliriz. $1 \le i \le n$ için $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_{e_i}^i,\tilde{\varepsilon}) \cap A$ soft kümelerinden en az biri sonsuz sayıda elemana sahip olmalıdır. Eğer bu birleşimin elemanlarından birini B ile gösterirsek $\tilde{d}(B) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ olacağı açıktır.

Teorem 4.10. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay olsun. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ tam sınırlıdır ancak ve ancak $\tilde{X}$'deki her soft dizisinin bir Cauchy soft altdizisi vardır.

İspat. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ tam sınırlı ve $\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$ herhangi bir soft dizi olsun. Eğer $A = \{\tilde{x}_{e_n}^n\}$ sonlu ise ispat tamamdır. Kabul edelim ki $A = \{\tilde{x}_{e_n}^n\}$ sonsuzdur. Lemma 4.9 dan $\tilde{d}(B_1) \tilde{<} \overline{1}$ olacak şekilde sonsuz bir $B_1 \subset A$ soft kümesi vardır.

$\tilde{x}_{e_{n_1}}^{n_1} \in B_1$ olacak şekilde bir n_1 sayısı seçelim. Eğer B_1 kümesine Lemma 4.9'u uygularsak $\tilde{d}(B_1) \tilde{<} \frac{\overline{1}}{2}$ olacak şekilde sonsuz bir $B_2 \subset B_1$ soft kümesi elde ederiz.

$\tilde{x}_{e_{n_2}}^{n_2} \in B_2$ olacak şekilde $n_2 > n_1$ sayısını seçer ve yukardaki gibi sürece devam edersek $\{\tilde{x}_{e_{n_k}}^{n_k}\}$ soft altdizisini elde ederiz.

Şimdi bu $\left\{\tilde{x}_{e_{n_k}}^{n_k}\right\}$ soft dizisnin bir soft Cauchy altdizisi olduğunu gösterelim. Keyfi $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ için $\frac{\tilde{1}}{\tilde{k}_0} < \tilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $\tilde{k}_0$ sayısı seçelim. Bu durumda her $\tilde{k}, \tilde{m} \tilde{\geq} \tilde{k}_0$ için $\tilde{x}_{e_{n_k}}^{n_k}, \tilde{x}_{e_{n_m}}^{n_m} \tilde{\in} B_{\tilde{k}_0}$ olduğundan dolayı

$$\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_{n_k}}^{n_k}, \tilde{x}_{e_{n_m}}^{n_m}\right) \tilde{<} \frac{\overline{1}}{k_0} < \tilde{\varepsilon},$$

sağlanır.

Tersine, $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ tam sınırlı bir soft metrik uzay olmadığını kabul edelim. Bu durumda bazı $\tilde{\varepsilon}_0 \tilde{>} \overline{0}$ için $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ uzayının sonlu bir $\tilde{\varepsilon}_0$ – şebekesi yoktur. $\tilde{x}_{e_1}^1 \tilde{\in} \tilde{X}$ keyfi bir soft nokta olsun. Bu durumda $\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_1}^1, \tilde{x}_{e_2}^2\right) \tilde{\geq} \tilde{\varepsilon}_0$ olacak şekilde bir $\tilde{x}_{e_2}^2 \tilde{\in} \tilde{X}$ soft noktası vardır. $\left\{\tilde{x}_{e_1}^1, \tilde{x}_{e_2}^2\right\}$ soft kümesi bir $\tilde{\varepsilon}_0$ – şebekesi olmadığından

$$\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_1}^1, \tilde{x}_{e_3}^3\right) \tilde{\geq} \tilde{\varepsilon}_0, \quad \tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_2}^2, \tilde{x}_{e_3}^3\right) \tilde{\geq} \tilde{\varepsilon}_0,$$

olacak şekilde bir $\tilde{x}_{e_3}^3 \tilde{\in} \tilde{X}$ soft noktası vardır.

Bu şekilde devam edersek her i, j için $\tilde{d}\left(\tilde{x}_{e_i}^i, \tilde{x}_{e_j}^j\right) \tilde{\geq} \tilde{\varepsilon}_0$ olacak şekilde bir $\left\{\tilde{x}_{e_k}^k\right\}$ soft dizisi elde ederiz. $\left\{\tilde{x}_{e_k}^k\right\}$ dizisinin bir soft Cauchy altdizisinin olmadığı açıktır. Bu durum teoremin her soft dizinin bir soft Cauchy altdizisi vardır ifadesi ile çelişir. Dolayısıyla, ispat tamamdır.

Teorem 4.11. $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ soft metrik uzay olsun. $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ soft dizisel kompakt uzaydır ancak ve ancak $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ uzayı soft tam ve soft tam sınırlıdır.

İspat. $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ soft dizisel kompakt metrik uzay olsun. Bu durumda her $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$ soft dizisinin $\tilde{X}$ 'de soft yakınsak bir soft altdizisi vardır. $\tilde{X}$ 'de yakınsayan soft altdizi bir soft Cauchy dizisi olduğundan dolayı Teorem 4.11'den $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ tam sınırlıdır. Eğer $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$, $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ uzayında bir Cauchy soft dizi ve $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$ soft dizisinin soft yakınsak bir alt dizisi var ise bu durumda $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$ soft yakınsaktır.

Tersine, $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft tam, tam sınırlı bir uzay ve $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ keyfi bir soft dizi olsun. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ tam sınırlı olduğundan dolayı $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$'nin bir Cauchy soft altdizisi vardır. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft tam olduğundan dolayı bu altdizi $\tilde{X}$'de soft yakınsar. Sonuç olarak, $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dizisel kompakt metrik uzaydır.

Tanım 4.12. (Soft Lebesque sayısı) $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay ve U, $(\tilde{X},\tilde{d},E)$'nin bir soft açık örtüsü olsun. Eğer her $\tilde{x}_e \in \tilde{X}$ soft noktası için $B(\tilde{x}_e,\tilde{\varepsilon}) \tilde{\subset} (F,E)$ olacak şekilde bir $(F,E) \tilde{\in} \mathsf{U}$ soft kümesi var ise $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \bar{0}$ sayısına bir soft Lebesque sayısı denir.

Önerme 4.13. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dizisel kompakt metrik uzay olsun. Bu durumda $\tilde{X}$'deki her soft açık örtünün bir soft Lebesque sayısı vardır.

İspat. Soft açık örtü U'nun bir Lebesque sayısının olmadığını kabul edelim. Bu durumda herhangi n doğal sayısı için $(F,E) \tilde{\in} \mathsf{U}$ olacak şekilde bir $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ soft dizisi vardır öyleki $B\left(\tilde{x}^n_{e_n},\frac{\tilde{1}}{n}\right) \tilde{\subset} (F,E)$ sağlanmaz. Böylece yukarıdaki özelliğe sahip bir $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ soft dizisi elde ederiz. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dizisel kompakt olduğundan dolayı $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ soft dizisinin $\tilde{x}_e$ soft noktasına yakınsayan bir $\{\tilde{x}^{n_k}_{e_{n_k}}\}$ soft altdizisi vardır. $\tilde{x}_e \tilde{\in} (F,E) \tilde{\in}$ U olsun. (F,E) soft açık küme olduğundan dolayı $B\left(\tilde{x}_e,\frac{\tilde{2}}{m}\right) \tilde{\subset} (F,E)$ olacak şekilde bir $B\left(\tilde{x}_e,\frac{\tilde{2}}{m}\right)$ soft açık küresi vardır. Aynı zamanda $\{\tilde{x}^{n_k}_{e_{n_k}}\}$ soft dizisi $\tilde{x}_e$ soft noktasına yakınsadığından dolayı $k \geq k_0$ olmak üzere $\tilde{x}^{n_k}_{e_{n_k}} \tilde{\in} B\left(\tilde{x}_e,\frac{\tilde{2}}{m}\right)$ oacak şekilde bir k_0 sayısı vardır. $k \geq k_0$ sayısını $n_k \geq m$ olacak şekilde alırsak bu durumda

$$B\left(\tilde{x}^{n_k}_{e_{n_k}},\frac{\tilde{1}}{n_k}\right) \tilde{\subset} B\left(\tilde{x}_e,\frac{\tilde{2}}{m}\right) \tilde{\subset} (F,E) \tilde{\in} \mathsf{U}$$

elde deriz ki bu $\{\tilde{x}_{e_n}^n\}$ soft dizisinin seçimi ile çelişir.

Teorem 4.14. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

a) $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft kompakttır,

b) $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dizisel kompakttır.

İspat. $a \Rightarrow b$: $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft kompakt bir uzay ve $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dizisel kompakt bir uzay olmasın. Bu durumda $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ uzayında bir soft yığılma noktası olmayan sonsuz bir $\tilde{A}$ soft kümesi vardır. Dolayısıyla, her $x_e \tilde{\in} \tilde{A}$ için $B(\tilde{x}_e,\tilde{r}_{x_e}) \tilde{\cap} \tilde{A} = \{\tilde{x}_e\}$ olacak şekilde bir $\tilde{r}_{x_e}$ soft sayısı vardır. $\{B(\tilde{x}_e,\tilde{r}_{\tilde{x}_e})\}_{\tilde{x}_e \in \tilde{A}} \cup (\tilde{A})^c$ ailesi $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ uzayında bir soft açık örtüdür ve bu soft açık örtünün sonlu bir soft açık altörtüsü oktur. Bu $(\tilde{X},\tilde{d},E)$'nin soft kompakt olmadığı anlamına gelir. Bir çelişki elde edildiğinden $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dizisel kompakttır.

$b \Rightarrow a$: $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ soft dizisel kompakt bir uzay ve U, $(\tilde{X},\tilde{d},E)$'de herhangi bir soft açık örtü olsun. Bu durumda Önerme 4.13'den U 'nun bir $\tilde{\varepsilon} \tilde{>} \overline{0}$ Lebesque sayısı vardır. $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ tam sınırlı olduğundan $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ nin $\tilde{H} = \{\tilde{x}_{e_1}^1,\tilde{x}_{e_2}^2,\ldots,\tilde{x}_{e_{n1}}^n\}$ gibi sonlu bir $\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}$ – şebekesi vardır. Her $k = 1,2,\ldots,n$ için

$$\tilde{d}\left(B\left(\tilde{x}_{e_k}^k,\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}\right)\right) \tilde{\leq} \frac{2\tilde{\varepsilon}}{3} \tilde{<} \tilde{\varepsilon},$$

sağlanır. Bu durumda $B\left(\tilde{x}_{e_k}^k,\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}\right) \tilde{\subset} (F_k,E) \tilde{\in} \mathsf{U}$ soft kümesini elde ederiz.

$$\tilde{X} = \bigcup_{k=1}^{n} B\left(\tilde{x}_{e_k}^k,\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}\right) \tilde{\subset} \bigcup_{k=1}^{n} (F_k,E),$$

olduğundan dolayı $(\tilde{X},\tilde{d},E)$ bir soft kompakt metrik uzaydır.

Tanım 4.15. (Soft düzgün sürekli dönüşüm) Let $\left(\tilde{X},\tilde{d}_1,E_1\right)$ and $\left(\tilde{Y},\tilde{d}_2,E_2\right)$iki soft metrik uzay olsunlar. Eğer verilen herhangi bir $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ için bir $\tilde{\delta}>\overline{0}$ ($\tilde{\delta}$ sadece $\tilde{\varepsilon}$'a bağlı) öyle ki herhangi $\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}\tilde{X}$ soft noktaları için $\tilde{d}_1(x_e,y_{e'})\tilde{<}\tilde{\delta}$ iken $\tilde{d}_2\left(\tilde{f(x)}_{\phi(e)},\tilde{f(y)}_{\phi(e')}\right)\tilde{<}\tilde{\varepsilon}$ oluyorsa $(f,\phi):\left(\tilde{X},\tilde{d}_1,E_1\right)\to\left(\tilde{Y},\tilde{d}_2,E_2\right)$'ye soft düzgün sürekli dönüşüm denir.

Önerme 4.16. Eğer $(f,\phi):\left(\tilde{X},\tilde{d}_1,E_1\right)\to\left(\tilde{Y},\tilde{d}_2,E_2\right)$ soft düzgün sürekli dönüşüm ise bu durumda her bir $e\in E$ parametresi için $f:(X,d_{1_e})\to\left(Y,d_{2_{\phi(e)}}\right)$ düzgün sürekli bir dönüşümdür.

İspat. İspatı açıktır.

Teorem 4.17. Eğer $(f,\phi):\left(\tilde{X},\tilde{d}_1,E_1\right)\to\left(\tilde{Y},\tilde{d}_2,E_2\right)$ soft sürekli dönüşüm ve $\left(\tilde{X},\tilde{d}_1,E_1\right)$ soft dizisel kompakt metrik uzay ise bu durumda (f,φ) soft düzgün sürekli bir dönüşümdür.

İspat. $\left(\tilde{X},\tilde{d}_1,E_1\right)$ soft dizisel kompakt metrik uzay olduğunda aynı zamanda kompakt metrik uzaydır. Herhangi bir $\tilde{\varepsilon}\tilde{>}\overline{0}$ soft reel sayısı için (f,φ) soft sürekli olduğundan herhangi bir $\tilde{x}_e$ soft sayısı için bir $\tilde{\delta}(\tilde{x}_e)>\overline{0}$ soft reel sayısı vardır öyle ki $\tilde{d}_1(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})\tilde{<}2\tilde{\delta}(\tilde{x}_e)$ şatını sağlayan her $\tilde{y}_{e'}$ soft sayısı için $\tilde{d}_2\left(\tilde{f(x)}_{\phi(e)},\tilde{f(y)}_{\phi(e')}\right)\tilde{<}\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ dir. Bu durumda $\mathsf{U}=\left\{B\left(\tilde{x}_e,\tilde{\delta}(\tilde{x}_e)\right)\right\}_{\tilde{x}_e\in\tilde{X}}$ ailesi $\left(\tilde{X},\tilde{d}_1,E_1\right)$'de soft açık bir örtüdür. $\left(\tilde{X},\tilde{d}_1,E_1\right)$ soft kompakt olduğundan bu soft açık örtünün

$$\left\{B\left(\tilde{x}^1_{e_1},\tilde{\delta}\left(\tilde{x}^1_{e_1}\right)\right),\ldots,B\left(\tilde{x}^n_{e_n},\tilde{\delta}\left(\tilde{x}^n_{e_n}\right)\right)\right\}$$

şeklinde sonlu bir soft altörtüsü vardır.

$$\tilde{\delta}=\min\left\{\tilde{\delta}\left(\tilde{x}^1_{e_1}\right),\ldots,\tilde{\delta}\left(\tilde{x}^n_{e_n}\right)\right\}$$

olarak alalım. $\tilde{d}_1(\tilde{y}_e, \tilde{z}_{e'}) < \tilde{\delta}$ olacak şekilde iki $\tilde{x}_e, \tilde{z}_{e'} \tilde{\in} \tilde{X}$ soft noktalarını ele alalım. $\tilde{y}_e \tilde{\in} B\left(\tilde{x}^i_{e_i}, \tilde{\delta}\left(\tilde{x}^i_{e_i}\right)\right)$, $1 \le i \le n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\tilde{d}_1\left(\tilde{y}_e, \tilde{x}^i_{e_i}\right) \tilde{<} \tilde{\delta}\left(\tilde{x}^i_{e_i}\right)$ ve

$$\tilde{d}_1\left(\tilde{z}_{e'}, \tilde{x}^i_{e_i}\right) \tilde{\le} \tilde{d}_1\left(\tilde{z}_{e'}, \tilde{y}_e\right) + \tilde{d}_1\left(\tilde{y}_e, \tilde{x}^i_{e_i}\right) \tilde{<} \tilde{\delta} + \tilde{\delta}\left(\tilde{x}^i_{e_i}\right) \tilde{\le} 2\tilde{\delta}\left(\tilde{x}^i_{e_i}\right)$$

ifadeleri sağlanır. (f,φ) dönüşümü $\tilde{x}_e$ soft noktasında sürekli olduğundan dolayı

$$\tilde{d}_2\left(f(\tilde{y})_{\phi(e)}, f(\tilde{x}^i)_{\phi(e_i)}\right) \tilde{<} \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \text{ and } \tilde{d}_2\left(f(\tilde{z})_{\phi(e')}, f(\tilde{x}^i)_{\phi(e_i)}\right) \tilde{<} \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$$

olacaktır. Böylece,

$$\tilde{d}_2\left(f(\tilde{y})_{\phi(e)}, f(\tilde{z})_{\phi(e')}\right) \tilde{<} \tilde{d}_2\left(f(\tilde{y})_{\phi(e)}, f(\tilde{x}^i)_{\phi(e_i)}\right) < +\tilde{d}_2\left(f(\tilde{x}^i)_{\phi(e_i)}, f(\tilde{z})_{\phi(e')}\right) \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$$

olacaktır. Sonuç olarak, (f,φ) soft düzgün sürekli bir dönüşümdür.

5. SOFT NORMLU LİNEER UZAYLAR

Bu bölümde soft nokta kavramını kullanarak soft vektör uzayını ve soft normu yeni bir bakış açısıyla tanımlayacağız ve soft normlu uzayların bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca soft sürekli lineer operatörlerin bazı özelliklerini ele alacağız.

X, reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı ve başlangıç evrensel kümesi ve $E=\mathbb{R}$ parametrelerin boş olmayan bir kümesi olsun.

Tanım 5.1. X kümesi üzerinde (F,E) soft kümesi verilsin ve $(P,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olsun. Eğer bazı $x\in X$ 'ler için $P(e)=\{x\}$ olacak şekilde yalnız bir tane $e\in E$ parametresi var ve $\forall e'\in E-\{e\}$ için $P(e')=\phi$ ise bu durumda (P,E) soft kümesine bir soft vektör denir ve $\tilde{x}_e$ ile gösterilir.

Tüm $\tilde{x}_e$ soft vektörlerinden oluşan kümeye soft vektörler kümesi denir ve $SV(\tilde{X})$ ile gösterilir.

Önerme 5.2. $SV(\tilde{X})$ kümesi aşağıdaki işlemlerle beraber bir vektör uzayıdır.

1-) $\forall \tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\tilde{\in} SV(\tilde{X})$ için $\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}=(\widetilde{x+y})_{(e+e')}$

2-) $\forall \tilde{x}_e\tilde{\in} SV(\tilde{X})$ ve her $\tilde{\alpha}$ soft reel sayısı için $\tilde{\alpha}.\tilde{x}_e=(\widetilde{\alpha x})_{(\tilde{\alpha}e)}$

İspat: Eğer $\theta\in X$ bir sıfır vektörü ve $e=0\in\mathbb{R}$ ise bu durumda $\tilde{\theta}_0$ soft vektörü $SV(\tilde{X})$ kümesinde soft sıfır vektörüdür. Ayrıca $(-\tilde{x})_{(-e)}$ soft vektörü $\tilde{x}_e$ soft vektörünün toplamaya göre tersidir.

$SV(\tilde{X})$ 'in bir vektör uzayı olduğu açıktır.

Tanım 5.3. $SV(\tilde{X})$ önerme 5.2 de tanımlanan vektör toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında bir vektör uzayıdır. Bu uzaya soft vektör uzayı denir

Tanım 5.4. Eğer $1\leq i\leq n$ olmak üzere her $\tilde{r}_i$ soft reel sayısı için

$$\tilde{r}_1.\tilde{x}^1_{e_1}+\tilde{r}_2.\tilde{x}^2_{e_2}+\ldots+\tilde{r}_n.\tilde{x}^n_{e_n}=\tilde{\theta}_0 \Leftrightarrow \tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots,\tilde{r}_n=\tilde{0}$$

şartı sağlanıyorsa $S=\left\{\tilde{x}^1_{e_1},\tilde{x}^2_{e_2},\ldots,\tilde{x}^n_{e_n}\right\}$ kümesindeki soft vektörlere lineer bağımsızdır denir.

Önerme 5.5. Eğer X vektör uzayındaki $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ kümesinin elemanları lineer bağımsız ve $r_1.e_1 + r_2.e_2 + ... + r_n.e_n = 0$ şartı sağlanıyorsa $S = \{\tilde{x}^1_{e_1}, \tilde{x}^2_{e_2}, ..., \tilde{x}^n_{e_n}\}$ kümesindeki soft vektörler lineer bağımsızdır.

İspat: $1 \le i \le n$ olmak üzere her $\tilde{r}_i$ soft reel sayısı için

$$\tilde{r}_1.\tilde{x}^1_{e_1} + \tilde{r}_2.\tilde{x}^2_{e_2} + ... + \tilde{r}_n.\tilde{x}^n_{e_n} = \tilde{\theta}_0$$

$$\Leftrightarrow \overline{(r_1.x^1 + r_2.x^2 + ... + r_n.x^n)}_{(r_1.e_1 + r_2.e_2 + ... + r_n.e_n)} = \tilde{\theta}_0$$

$$\Leftrightarrow \overline{(r_1.x^1 + r_2.x^2 + ... + r_n.x^n)} = \tilde{\theta} \text{ ve } (r_1.e_1 + r_2.e_2 + ... + r_n.e_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, ..., \tilde{r}_n = \tilde{0}$$

Tanım 5.6. $SV(\tilde{X})$ bir soft vektör uzayı ve $\tilde{M} \tilde{\subset} SV(\tilde{X})$ bir alt küme olsun. Eğer $\tilde{M}$ bir soft vektör uzayı ise $\tilde{M}$ 'ye $SV(\tilde{X})$'in bir soft vektör alt uzayı denir ve $SV(\tilde{M}) \tilde{\subset} SV(\tilde{X})$ ile gösterilir.

Örnek 5.7. $\{\tilde{x}^k_{e_k}\}_{k=\overline{1,n}}$ soft vektörlerinin bir sınıfı verilsin. Bu durumda $\{\tilde{x}^k_{e_k}\}_{k=\overline{1,n}}$ sınıfı ile üretilen $\left\{\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i.\tilde{x}^i_{e_i}\right\}$ uzay bir soft vektör uzayıdır.

Örnek 5.8. Eğer $M \subset X$ bir vektör alt uzayı ise bu durumda $SV(\tilde{M}) \tilde{\subset} SV(\tilde{X})$ bir soft vektör alt uzayıdır.

Soft vektör tanımını kullanarak soft normun doğal tanımını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Tanım 5.9. $SV(\tilde{X})$ bir soft vektör uzayı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa

$$\|.\| : SV(\tilde{X}) \to \mathbb{R}^+(E),$$

dönüşümüne $SV(\tilde{X})$ uzayı üzerinde bir soft normdur denir;

(N1) $\forall \tilde{x}_e \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ için $\|\tilde{x}_e\| \tilde{\ge} \tilde{0}$ ve $\|\tilde{x}_e\| = \tilde{0} \Leftrightarrow \tilde{x}_e = \tilde{\theta}_0$;

(N2) $\forall \tilde{x}_e \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ ve $\forall \tilde{\alpha}$ soft reel sayısı için $\|\tilde{\alpha}\tilde{x}_e\| = \tilde{\alpha}\|\tilde{x}_e\|$;

(N3) $\forall \tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ için $\|\tilde{x}_e + \tilde{y}_{e'}\| \tilde{\le} \|\tilde{x}_e\| + \|\tilde{y}_{e'}\|$.

$SV(\tilde{X})$ vektör uzayı üzerinde tanımlı bir $\|.\|$ soft normla beraber $(\tilde{X}, \|.\|)$ ifadesine soft normlu uzay denir.

Örnek 5.10. X normlu bir uzay olsun. Bu durumda parametreler kümesi $E=\mathbb{R}$ olmak üzere $\forall \tilde{x}_e \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ için

$$\|\tilde{x}_e\| = |e| + \|x\|$$

Bir soft normdur.

Her $\tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ ve için $\tilde{\alpha}$ soft skaleri için;

(N1) $\|\tilde{x}_e\| = |e| + \|x\| \tilde{\geq} \tilde{0}$ ve

$$\|\tilde{x}_e\| = \tilde{0} \Leftrightarrow |e| + \|x\| = \tilde{0} \Leftrightarrow e = 0, \tilde{x} = \tilde{\theta} \Leftrightarrow \tilde{x}_e = \tilde{\theta}_0;$$

(N2) $\|\tilde{\alpha}\tilde{x}_e\| = \left\|\left(\widetilde{\alpha.x}\right)_{\alpha e}\right\| = |\alpha e| + \|\alpha.x\| = |\alpha|\left(|e| + \|x\|\right) = |\tilde{\alpha}|\|\tilde{x}_e\|$;

(N3)

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}_e + \tilde{y}_{e'}\| = \left\|\left(\widetilde{x+y}\right)_{(e+e')}\right\| &= |e+e'| + \|x+y\| \\ &\leq |e| + |e'| + \|x\| + \|y\| \\ &= \left(|e| + \|x\|\right) + \left(|e'| + \|y\|\right) \\ &= \|\tilde{x}_e\| + \|\tilde{y}_{e'}\|\end{aligned}$$

Tanım 5.11. $(\tilde{X}, \|.\|)$ soft normlu uzayında soft vektörlerden oluşan bir $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ soft dizisi verilsin. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tilde{x}^n_{e_n} - \tilde{x}^0_{e_0}\| = \tilde{0}$ oluyorsa $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ soft dizisi $\tilde{x}^0_{e_0}$ soft vektörüne yakınsaktır denir ve $n \to \infty$ iken $\tilde{x}^n_{e_n} \to \tilde{x}^0_{e_0}$ ile gösterilir.

Tanım 5.12. $(\tilde{X}, \|.\|)$ soft normlu uzayında soft vektörlerden oluşan bir $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ soft dizisi verilsin. Eğer $\forall \tilde{\varepsilon} \tilde{>} \tilde{0}$ a karşılık bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall m, n \geq n_0$ için $\|\tilde{x}^m_{e_m} - \tilde{x}^n_{e_n}\| \tilde{<} \tilde{\varepsilon}$ oluyorsa $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ dizisine soft Cauchy dizisi denir, diğer bir ifadeyle $m, n \to \infty$ iken $\tilde{x}^m_{e_m} \to \tilde{x}^n_{e_n}$.

Önerme 5.13. Her yakınsak soft dizi bir soft Cauchy dizisidir.

İspat: İspatı açıktır.

Tanım 5.14. $(\tilde{X}, \|.\|)$ soft normlu lineer uzayı verilsin. Eğer $(\tilde{X}, \|.\|)$ uzayında ki her soft Cauchy dizisi bu uzayda bir soft vektöre yakınsıyor ise $(\tilde{X}, \|.\|)$ uzayına soft tam uzay denir.

Tanım 5.15. Soft tam normlu uzaya soft Banach uzayı denir.

Önerme 5.16. Her soft normlu uzay bir soft metrik uzaydır.

İspat: $\left(\tilde{X},\|.\|\right)$ soft normlu bir uzay olsun. Eğer soft metriği $\forall\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}SV(\tilde{X})$ için $\tilde{d}\left(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\right)=\|\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'}\|$ olarak tanımlarsak bu durumda soft metrik şartlarının sağlandığı açıktır. Dolayısıyla, her soft normlu uzay bir soft metrik uzaydır.

Teorem 5.17. $\tilde{d}:SV(\tilde{X})\times SV(\tilde{X})\to\mathbb{R}^{+}(E)$ bir soft metrik olsun. $SV(\tilde{X})$ bir soft normlu uzaydır ancak ve ancak $\forall\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}SV(\tilde{X})$ ve $\forall\tilde{\alpha}$ soft reel sayısı için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa;

a) $\tilde{d}(\tilde{x}_e+\tilde{z}_{e''},\tilde{y}_{e'}+\tilde{z}_{e''})=\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})$

b) $\tilde{d}(\tilde{\alpha}\tilde{x}_e,\tilde{\alpha}\tilde{y}_{e'})=|\tilde{\alpha}|\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})$

İspat: Eğer $\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})=\|\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'}\|$ ise bu durumda

$$\tilde{d}(\tilde{x}_e+\tilde{z}_{e''},\tilde{y}_{e'}+\tilde{z}_{e''})=\|\tilde{x}_e+\tilde{z}_{e''}-\tilde{y}_{e'}-\tilde{z}_{e''}\|=\|\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'}\|=\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})$$

ve

$$\tilde{d}(\tilde{\alpha}\tilde{x}_e,\tilde{\alpha}\tilde{y}_{e'})=\|\tilde{\alpha}\tilde{x}_e-\tilde{\alpha}\tilde{y}_{e'}\|=|\tilde{\alpha}|\|\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'}\|=|\tilde{\alpha}|\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}),$$

dir. Önermede verilen şartların sağlandığını kabul edelim. Her $\tilde{x}_e\tilde{\in}SV(\tilde{X})$ için $\|\tilde{x}_e\|=\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{\theta}_0)$ olarak alalım. Bu durumda,

N1. $\|\tilde{x}_e\|=\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{\theta}_0)\tilde{\geq}\tilde{0}$ ve $\|\tilde{x}_e\|=\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{\theta}_0)=\tilde{0}\Leftrightarrow\tilde{x}_e=\tilde{\theta}_0$;

N2. $\|\tilde{\alpha}\tilde{x}_e\|=\tilde{d}(\tilde{\alpha}\tilde{x}_e,\tilde{\theta}_0)=\tilde{d}(\tilde{\alpha}\tilde{x}_e,\tilde{\alpha}\tilde{\theta}_0)=|\tilde{\alpha}|\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{\theta}_0)=|\tilde{\alpha}|\|\tilde{x}_e\|$;

N3.

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}\|&=\tilde{d}(\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'},\tilde{\theta}_0)\\&=\tilde{d}(\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}-\tilde{y}_{e'},\tilde{\theta}_0-\tilde{y}_{e'})=\tilde{d}(\tilde{x}_e,-\tilde{y}_{e'})\\&\tilde{\leq}\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{\theta}_0)+\tilde{d}(\tilde{\theta}_0,-\tilde{y}_{e'},)\\&=\|\tilde{x}_e\|+|-1|\|\tilde{y}_{e'}\|=\|\tilde{x}_e\|+\|\tilde{y}_{e'}\|\end{aligned}$$

Tanım 5.18. $T:SV(\tilde{X})\to SV(\tilde{Y})$ bir soft dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa T'ye soft lineer operatör denir;

L1. T toplamsaldır, diğer bir ifadeyle, $\forall \tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ için $T(\tilde{x}_e + \tilde{y}_{e'}) = T(\tilde{x}_e) + T(\tilde{y}_{e'})$;

L2. T homojendir, diğer bir ifadeyle, Her $\tilde{\alpha}$ soft skaleri için $T(\tilde{\alpha}\tilde{x}_e) = \tilde{\alpha}T(\tilde{x}_e)$.

Tanım 5.19. Eğer $SV(\tilde{X})$ kümesindeki soft vektörlerden oluşan her $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$ soft dizisi ve $T: SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ soft lineer operatörü verilsin. Eğer $n \to \infty$ iken $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\} \to \tilde{x}_{e_0}^0$ olması durumunda $n \to \infty$ iken $T\left(\tilde{x}_{e_n}^n\right) \to T\left(\tilde{x}_{e_0}^0\right)$ oluyorsa T soft operatörüne $\tilde{x}_{e_0}^0 \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ soft noktasında soft süreklidir denir. Eğer T soft operatörü her $\tilde{x}_{e_0}^0 \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ soft noktasında süreklidir denir.

Tanım 5.20. $T: SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ soft lineer operatörü verilsin. Eğer her $\tilde{x}_e \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ için

$$\|T(\tilde{x}_e)\| \tilde{\leq} \tilde{M}\|\tilde{x}_e\|$$

olacak şekilde bir soft reel $\tilde{M}$ sayısı var ise T operatörüne soft sınırlı operatör denir.

Teorem 5.21. $T: SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ soft lineer operatörü soft süreklidir ancak ve ancak T soft sınırlıdır.

İspat: $T: SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ soft operatörünün soft sürekli olduğunu ve soft sınırlı olmadığını kabul edelim. T soft operatörü sınırlı olmadığından en az bir $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$ soft dizisi vardır öyle ki $\tilde{n}$ herhangi bir soft reel sayı olmak üzere

$$\left\|T\left(\tilde{x}_{e_n}^n\right)\right\| \tilde{>} \tilde{n}\left\|\tilde{x}_{e_n}^n\right\| \tag{5.1}$$

dir. $\tilde{x}_{e_n}^n \neq \tilde{\theta}_0$ olduğu açıktır. Aşağıda ki şekilde bir soft dizi teşkil edelim;

$$\tilde{y}_{e_n}^n = \frac{\tilde{x}_{e_n}^n}{\tilde{n}\left\|\tilde{x}_{e_n}^n\right\|}.$$

$n \to \infty$ iken $\tilde{y}_{e_n}^n \to \tilde{\theta}_0$ olduğu açıktır. T soft sürekli olduğundan $n \to \infty$ iken $\left\|T\left(\tilde{y}_{e_n}^n\right)\right\| \to \tilde{0}$ olacaktır.

$$\left\|T\left(\tilde{y}_{e_n}^n\right)\right\| = \left\|T\left(\frac{\tilde{x}_{e_n}^n}{\tilde{n}\left\|\tilde{x}_{e_n}^n\right\|}\right)\right\| = \frac{\tilde{1}}{\tilde{n}\left\|\tilde{x}_{e_n}^n\right\|}\left\|T\left(\tilde{x}_{e_n}^n\right)\right\| \tilde{\geq} \frac{\tilde{n}\left\|\tilde{x}_{e_n}^n\right\|}{\tilde{n}\left\|\tilde{x}_{e_n}^n\right\|} = \tilde{1},$$

elde ederiz ki bu $\left\|T\left(\tilde{y}_{e_n}^n\right)\right\| \to \tilde{0}$ olması ile çelişir. Sonuç olarak T soft sınırlıdır.

Tersine, $T : SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ soft operatörünün soft sınırlı ve $\left\{\tilde{x}_{e_n}^n\right\}$ soft dizisinin $\tilde{x}_{e_0}^0$ soft noktasına yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda,

$$\left\|T\left(\tilde{x}_{e_n}^n\right)-T\left(\tilde{x}_{e_0}^0\right)\right\| = \left\|T\left(\tilde{x}_{e_n}^n-\tilde{x}_{e_0}^0\right)\right\| \tilde{\leq} \tilde{M}\left\|\tilde{x}_{e_n}^n-\tilde{x}_{e_0}^0\right\| \to \tilde{0},$$

elde ederiz. Sonuç olarak T soft sürekli bir operatördür.

Tanım 5.22. $T : SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ soft sürekli bir operatör olsun.

$$\|T\| = \inf\left\{\tilde{M} : \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \tilde{\leq} \tilde{M}\left\|\tilde{x}_e\right\|\right\}.$$

ifadesine T nin normu denir.

$$\left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \tilde{\leq} \|T\|\left\|\tilde{x}_e\right\|$$

olduğu açıktır.

Teorem 5.23. $T : SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ soft sürekli bir operatör olsun. Bu durumda

$$\|T\| = \sup_{\tilde{x}_e \neq \tilde{\theta}_0} \frac{\left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\|}{\left\|\tilde{x}_e\right\|} = \sup_{\left\|\tilde{x}_e\right\| \tilde{\leq} \tilde{1}} \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\|.$$

İspat: $\left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \tilde{\leq} \|T\|\left\|\tilde{x}_e\right\|$ olduğundan

$$\sup_{\left\|\tilde{x}_e\right\| \tilde{\leq} \tilde{1}} \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \tilde{\leq} \sup_{\left\|\tilde{x}_e\right\| \tilde{\leq} \tilde{1}} \|T\|\left\|\tilde{x}_e\right\| \tilde{\leq} \|T\|.$$

Böylece,

$$\sup_{\left\|\tilde{x}_e\right\| \tilde{\leq} \tilde{1}} \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \tilde{\leq} \|T\|, \tag{5.2}$$

dir. Diğer taraftan, $\|T\|$ nin tanımından $\forall \tilde{\varepsilon} \tilde{>} \tilde{0}$ için

$$\left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \tilde{>} \left(\|T\|-\tilde{\varepsilon}\right)\left\|\tilde{x}_e\right\|, \tag{5.3}$$

olacak şekilde bir $\tilde{x}_e$ soft noktası vardır.

$\tilde{x}_e \neq \tilde{\theta}_0$ olmak üzere $\tilde{y}_e = \dfrac{\tilde{x}_e}{\left\|\tilde{x}_e\right\|}$ olarak alalım. Bu durumda $\left\|\tilde{y}_e\right\| = \tilde{1}$ olacaktır. Eğer (5.3) eşitsizliğinde $\tilde{x}_e$ yerine $\tilde{x}_e\left\|\tilde{y}_e\right\|$ alırsak,

$$\left\|T\left(\tilde{y}_e\left\|\tilde{x}_e\right\|\right)\right\| \tilde{>} \left(\|T\|-\tilde{\varepsilon}\right)\left\|\tilde{y}_e\left\|\tilde{x}_e\right\|\right\|,$$

ve buradan

$$\left\|T\left(\tilde{y}_e\right)\right\| \tilde{>} \left(\|T\|-\tilde{\varepsilon}\right)\left\|\tilde{y}_e\right\| = \left(\|T\|-\tilde{\varepsilon}\right), \tag{5.4}$$

elde ederiz. (5.4) eşitsizliğinde $\tilde{y}_e$ yerine $\tilde{x}_e$ yazarsak, bu durumda

$$\sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \tilde{>} \|T\|-\tilde{\varepsilon},$$

elde ederiz. $\tilde{\varepsilon}$ keyfi olduğundan

$$\sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \tilde{\geq} \|T\|, \tag{5.5}$$

elde ederiz. (5.2) ve (5.5) den

$$\|T\| = \sup_{\tilde{x}_e \neq \tilde{\theta}_0} \frac{\left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\|}{\left\|\tilde{x}_e\right\|} = \sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\|.$$

Teorem 5.24. $T: SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ ve $S: SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ soft sürekli birer operatör olsunlar. Bu durumda $\|T\|$ bir soft normdur.

İspat.

N1. $\|T\| \tilde{\geq} \bar{0}$. Eğer $\|T\| = \bar{0}$ ise bu durumda her $\tilde{x}_e \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ için $T(\tilde{x}_e) = \tilde{\theta}_0$ olduğundan $T = \theta$ olacaktır.

N2. $\|\tilde{\alpha}T\| = \sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} \left\|\tilde{\alpha}T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| = \sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} |\tilde{\alpha}| \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| = |\tilde{\alpha}| \sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| = |\tilde{\alpha}|\|T\|.$

N3.

$$\begin{aligned}
\|T+S\| = \sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} \left\|(T+S)\left(\tilde{x}_e\right)\right\| &= \sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)+S\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \\
&\tilde{\leq} \sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} \left\|T\left(\tilde{x}_e\right)\right\| + \sup_{\|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \bar{1}} \left\|S\left(\tilde{x}_e\right)\right\| \\
&= \|T+S\|.
\end{aligned}$$

Teorem 5.25. $T: SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{Y})$ ve $S: SV(\tilde{Y}) \to SV(\tilde{Z})$ soft sürekli birer operatör olsunlar. Bu durumda

a) $\|S \circ T\| \tilde{\leq} \|S\|\|T\|$;

b) $T: SV(\tilde{X}) \to SV(\tilde{X})$ soft operatörü için $\left\|T^n\right\| \tilde{\leq} \|T\|^n$ dir.

İspat:

a)

$$\begin{aligned}\|S\circ T\| &= \sup\left\{\|(S\circ T)(\tilde{x}_e)\| : \|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \tilde{1}\right\}\\ &= \sup\left\{\|S(T(\tilde{x}_e))\| : \|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \tilde{1}\right\}\\ &\tilde{\leq} \sup\left\{\|S\|\|(T(\tilde{x}_e))\| : \|\tilde{x}_e\| \tilde{\leq} \tilde{1}\right\}\\ &\tilde{\leq} \sup\|S\|\|T\|\end{aligned}$$

b) Eğer $\|S\circ T\| \tilde{\leq} \|S\|\|T\|$ eşitsizliğinde $T = S$ olarak alırsak $\|T^2\| \tilde{\leq} \|T\|^2$ elde ederiz.

Operatör üzerinde bileşke işlemine devam edersek $\|T^n\| \tilde{\leq} \|T\|^n$ elde ederiz.

6. SOFT HİLBERT UZAYI

6.1. Soft İç Çarpım Uzayı

X, reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı ve başlangıç evrensel kümesi ve $E=\mathbb{R}$ parametrelerin boş olmayan bir kümesi olsun. X kümesi üzerinde (F,E) soft kümesi verilsin ve $(P,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olsun. Eğer bazı $x\in X$'ler için $P(e)=\{x\}$ olacak şekilde yalnız bir tane $e\in E$ parametresi var ve $\forall e'\in E-\{e\}$ için $P(e')=\phi$ ise bu durumda (P,E) soft kümesine bir soft vektör denir ve $\tilde{x}_e$ ile gösterilir. Tüm $\tilde{x}_e$ soft vektörlerinden oluşan soft vektörler kümesi $SV(\tilde{X})$ aşağıdaki işlemlerle beraber bir soft vektör uzayıdır:

1-) $\forall\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}SV(\tilde{X})$ için $\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}=(\widetilde{x+y})_{(e+e')}$

2-) $\forall\tilde{x}_e\tilde{\in}SV(\tilde{X})$ ve her $\tilde{\alpha}$ soft reel sayısı için $\tilde{\alpha}.\tilde{x}_e=(\widetilde{\alpha x})_{(\tilde{\alpha}e)}$

Tanım 6.1.1.(Soft iç çarpım): $SV(\tilde{X})$ soft vektör uzayı olsun.

$$<.>: SV(\tilde{X})\times SV(\tilde{X})\to\mathbb{R}(E),$$

($\mathbb{R}(E)$ soft reel sayılar kümesi)

dönüşümü aşağıdaki şartları $\forall\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}\tilde{\in}SV(\tilde{X})$ ve her $\tilde{\alpha}$ soft reel sayısı için sağlıyorsa bu dönüşüme $SV(\tilde{X})$ soft vektör uzayı üzerinde bir soft iç çarpım denir:

İ1-) $<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>\tilde{\geq}\tilde{0}$ ve $<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>=\tilde{0}\Leftrightarrow\tilde{x}_e=\tilde{\theta}_{\tilde{0}}$,

İ2-) $<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>=<\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e>$

İ3-) $<\tilde{\alpha}\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>=<\tilde{x}_e,\tilde{\alpha}\tilde{y}_{e'}>=\tilde{\alpha}<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>$

İ4-) $<\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>=<\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}>+<\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>$

$SV(\tilde{X})$ soft vektör uzayına üzerinde tanımlı bir soft iç çarpım $<.>$ ile beraber bir soft iç çarpım uzayı denir ve $\left(SV(\tilde{X}),<.>,E\right)$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.2. $SV(\tilde{\mathbb{R}})$ soft vektör uzayı üzerinde

$$<.>: SV(\tilde{\mathbb{R}})\times SV(\tilde{\mathbb{R}})\to\mathbb{R}(E)\ \left(E=\mathbb{R}\right)$$

Aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\forall \tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} \tilde{\in} SV(\tilde{\mathbb{R}})$ için

$$< \tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} >= e.e' + < x, y > \; (x, y \in \mathbb{R}, e, e' \in \mathbb{R} \text{ ve } < . >: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}).$$

Bu durumda $< . >$, $SV(\tilde{\mathbb{R}})$ üzerinde bir soft iç çarpımdır.

İ1-) $\forall \tilde{x}_e \tilde{\in} SV(\tilde{\mathbb{R}})$ ve için $< \tilde{x}_e, \tilde{x}_e >= e.e + < x, x >= e^2 + \|x\| \geq 0$ ve

$$\begin{aligned} < \tilde{x}_e, \tilde{x}_e >= \overline{0} &\Leftrightarrow e.e + < x, x >= \overline{0} \\ &\Leftrightarrow e = \overline{0} \text{ ve } x = \tilde{\theta} \\ &\Leftrightarrow \tilde{x}_\lambda = \tilde{\theta}_{\overline{0}} \end{aligned}$$

İ2-) $\forall \tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} \tilde{\in} SV(\tilde{\mathbb{R}})$ için

$$< \tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} >= e.e' + < x, y >= e'.e + < y, x >=< \tilde{y}_{e'}, \tilde{x}_e >$$

İ3-) $\forall \alpha \in \mathbb{R}(E)$ ve $\forall \tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} \tilde{\in} SV(\tilde{\mathbb{R}})$ için

$$< \tilde{\alpha}\tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'} >= \tilde{\alpha}.e.e' + < x, y >= \alpha.e'.e + \alpha < y, x >=< \tilde{\alpha}\tilde{y}_{e'}, \tilde{x}_e >$$

İ4-) $\forall \tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'}, \tilde{z}_{e''} \tilde{\in} SV(\tilde{\mathbb{R}})$ için

$$\begin{aligned} < \tilde{x}_e + \tilde{y}_{e'}, \tilde{z}_{e''} > &=< \widetilde{(x + y)}_{(e+e')}, \tilde{z}_{e''} > \\ &= (e + e').e'' + < x + y, z > \\ &= e.e'' + e'.e'' + < x, z > + < y, z > \\ &= e.e'' + < x, z > + e'.e'' < y, z > \\ &= < \tilde{x}_e + \tilde{z}_{e''} > + < \tilde{y}_{e'}, \tilde{z}_{e''} > \end{aligned}$$

Not 6.1.3. $\left(SV(\tilde{X}), < . >, E\right)$ bir soft iç çarpım uzayı olsun. $e = 0$ parametresi için $\tilde{X}$ soft vektör uzayı X vektör uzayına eşit olup

$$< . >_0 : X \times X \to \mathbb{R}$$

iç çarpım fonksiyonu elde edilir ve dolayısıyla $e = 0$ parametresi için $(X, < . >_0)$ iç çarpım uzayıdır.

Diğer bir ifadeyle, X vektör uzayı üzerindeki iç çarpım uzayı, $\tilde{X}$ soft vektör uzayı üzerinde tanımlı soft iç çarpım uzayının $e = 0$ parametresi için özel bir halidir.

Önerme 6.1.4. $\left(SV(\tilde{X}), < . >, E\right)$ bir soft iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda $\forall \tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'}, \tilde{z}_{e''} \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ ve $\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \tilde{\in} \mathbb{R}(E)$ için;

i. $<\tilde{\alpha}\tilde{x}_e+\tilde{\beta}\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>=\tilde{\alpha}<\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}>+\tilde{\beta}<\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>$

ii. $<\tilde{x}_e,\tilde{\alpha}\tilde{y}_{e'}+\tilde{\beta}\tilde{z}_{e''}>=\tilde{\alpha}<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>+\tilde{\beta}<\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}>$

İspat:

$$\begin{aligned}<\tilde{\alpha}\tilde{x}_e+\tilde{\beta}\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>&=<\tilde{\alpha}\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}>+<\tilde{\beta}\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>\\&=\tilde{\alpha}<\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}>+\tilde{\beta}<\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>\end{aligned}$$

i.

$$\begin{aligned}<\tilde{x}_e,\tilde{\alpha}\tilde{y}_{e'}+\tilde{\beta}\tilde{z}_{e''}>&=<\tilde{\alpha}\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>+<\tilde{\beta}\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}>\\&=\tilde{\alpha}<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>+\tilde{\beta}<\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}>\end{aligned}$$

Önerme 6.1.5. (Paralel Kenar Kanunu) $\left(SV(\tilde{X}),<.>,E\right)$ bir soft iç çarpım uzayı olsun. $\forall\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}SV(\tilde{X})$ için

$$\|\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}\|^2+\|\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'}\|^2=2\left(\|\tilde{x}_e\|^2+\|\tilde{y}_{e'}\|^2\right)$$

İspat:

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}\|^2+\|\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'}\|^2&=<\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}>+<\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'}>\\&=<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>+<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>+<\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e>+<\tilde{y}_{e'},\tilde{y}_{e'}>\\&\quad+<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>-<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>-<\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e>+<\tilde{y}_{e'},\tilde{y}_{e'}>\\&=2\left(\|\tilde{x}_e\|^2+\|\tilde{y}_{e'}\|^2\right)\end{aligned}$$

Teorem 6.1.6. (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği) $\left(SV(\tilde{X}),<.>,E\right)$ bir soft iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda $\forall\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}SV(\tilde{X})$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir;

$$|<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>|\,\tilde{\leq}\,\|\tilde{x}_e\|.\|\tilde{y}_{e'}\|. \tag{6.1}$$

İspat: $\tilde{\alpha}$ bir soft skaler olsun, bu durumda $<\tilde{x}_e-\tilde{\alpha}\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e-\tilde{\alpha}\tilde{y}_{e'}>\tilde{\geq}\bar{0}$ dır. Diğer bir ifadeyle,

$$<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>-\tilde{\alpha}<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>-\tilde{\alpha}\left[<\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e>-\tilde{\alpha}<\tilde{y}_{e'},\tilde{y}_{e'}>\right]\tilde{\geq}\bar{0}, \tag{6.2}$$

olacaktır.

Eğer $<\tilde{y}_{e'},\tilde{y}_{e'}>=\bar{0}$ ise bu durumda $y_{e'}=\tilde{\theta}_{\bar{0}}$ ve $<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>=<\tilde{x}_e,\tilde{\theta}_{\bar{0}}>=\bar{0}$ olduğundan (6.1) eşitsizliği sağlanır.

Eğer $<\tilde{y}_{e'},\tilde{y}_{e'}>\tilde{>}\bar{0}$ ise bu durumda $\tilde{\alpha}=\dfrac{<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>}{<\tilde{y}_{e'},\tilde{y}_{e'}>}$ olarak alırsak (6.2) eşitsizliğinden

$$\|\tilde{x}_e\|^2 - \frac{|<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>|^2}{\|\tilde{y}_{e'}\|^2} - \frac{<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>}{\|\tilde{y}_{e'}\|^2}\left[<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}> - \frac{|<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>|^2\|\tilde{y}_{e'}\|^2}{\|\tilde{y}_{e'}\|^2}\right] \tilde{\geq} \bar{0}$$

$$\|\tilde{x}_e\|^2 - \frac{|<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>|^2}{\|\tilde{y}_{e'}\|^2} \tilde{\geq} \bar{0}$$

ve buradan da

$$|<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>|^2 \tilde{\leq} \|\tilde{x}_e\|^2\|\tilde{y}_{e'}\|^2,$$

elde edilir.

Önerme 6.1.7. $(SV(\tilde{X}),<.>,E)$ bir soft iç çarpım uzayı olsun. $\|\tilde{x}_e\| = \sqrt{<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>}$ şeklinde tanımlanan $\|.\|: SV(\tilde{X}) \to \mathbb{R}^+(E)$ fonksiyon bir soft normdur. Bu norma soft iç çarpım normu denir.

İspat: $\|.\|: SV(\tilde{X}) \to \mathbb{R}^+(E)$ fonksiyonun soft norm şartlarını sağladığını gösterelim.

(N1) $\forall \tilde{x}_e \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ için $\|\tilde{x}_e\| = \sqrt{<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>} \tilde{\geq} \bar{0}$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\|\tilde{x}_e\| = \sqrt{<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>} = \bar{0} \Leftrightarrow <\tilde{x}_e,\tilde{x}_e> = \bar{0} \Leftrightarrow \tilde{x}_e = \tilde{\theta}_{\bar{0}}.$$

(N2) $\forall \tilde{x}_e \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ ve $\forall \tilde{\alpha} \tilde{\in} \mathbb{R}(E)$ için $\|\tilde{\alpha}\tilde{x}_e\|^2 = <\tilde{\alpha}\tilde{x}_e,\tilde{\alpha}\tilde{x}_e> = \tilde{\alpha}^2 <\tilde{x}_e,\tilde{x}_e> = \tilde{\alpha}^2\|\tilde{x}_e\|^2$ olduğundan

$$\|\tilde{\alpha}\tilde{x}_e\| = |\tilde{\alpha}|\|\tilde{x}_e\| \text{ dir.}$$

(N3) $\forall \tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'} \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ için

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}\|^2 &= <\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}> \\ &= \|\tilde{x}_e\|^2 + 2<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}> + \|\tilde{y}_{e'}\|^2 \\ &\tilde{\leq} \|\tilde{x}_e\|^2 + 2|<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>| + \|\tilde{y}_{e'}\|^2 \quad \text{(Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden)} \\ &\tilde{\leq} \|\tilde{x}_e\|^2 + 2\|\tilde{x}_e\|\|\tilde{y}_{e'}\| + \|\tilde{y}_{e'}\|^2 \\ &= (\|\tilde{x}_e\| + \|\tilde{y}_{e'}\|)^2\end{aligned}$$

Not 6.1.8.. Yukarıda tanımlanan norm vasıtasıyla tanımlanan

$$\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}) = \|\tilde{x}_e - \tilde{y}_{e'}\| = \sqrt{<\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e-\tilde{y}_{e'}>},$$

metriğine soft iç çarpım normuyla tanımlanan soft metrik denir.

Örnek 6.1.9. $SV(\tilde{\mathbb{R}}^n)$ soft vektör uzayı ile $E=\mathbb{R}$ parametreler kümesi verilsin. $\tilde{x}_e=(\tilde{x}^1_{e_1},\tilde{x}^2_{e_2},...,\tilde{x}^n_{e_n})$, $\tilde{y}_{e'}=(\tilde{y}^1_{e'_1},\tilde{y}^2_{e'_2},...,\tilde{y}^n_{e'_n})\,\tilde{\in}\, SV(\tilde{\mathbb{R}}^n)$ olmak üzere bu soft uzay üzerinde $<.>: SV(\tilde{\mathbb{R}}^n)\times SV(\tilde{\mathbb{R}}^n)\rightarrow \mathbb{R}(E)$ iç çarpım fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}> &= \tilde{x}^1_{e_1}.\tilde{y}^1_{e'_1}+\tilde{x}^2_{e_2}.\tilde{y}^2_{e'_2}+\cdots+\tilde{x}^n_{e_n}.\tilde{y}^n_{e'_n}\\
&=\widetilde{(x^1y^1)}_{e_1.e'_1}+\widetilde{(x^2y^2)}_{e_2.e'_2}+\cdots+\widetilde{(x^ny^n)}_{e_n.e'_n}
\end{aligned}
$$

olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun iç çarpım özelliklerini sağladığını gösterelim. İç çarpımın İ1, İ2 ve İ3 özelliklerinin sağlandığı açıktır. İ4 özelliğinin sağlandığını gösterelim:

$\forall \tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}\,\tilde{\in}\, SV(\tilde{\mathbb{R}}^n)$ için

$$
\begin{aligned}
<\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}> &= <\widetilde{(x+y)}_{(e+e')},\tilde{z}_{e''}>\\
&=\widetilde{(x+y)}_{(e+e')}.\tilde{z}_{e''}\\
&=\left\{\widetilde{(x^1+y^1)}_{(e_1+e'_1)}.\tilde{z}^1_{e''_1}+\widetilde{(x^2+y^2)}_{(e_2+e'_2)}.\tilde{z}^2_{e''_2}+\cdots+\widetilde{(x^n+y^n)}_{(e_n+e'_n)}.\tilde{z}^n_{e''_n}\right\}\\
&=\left(\widetilde{\left(x^1+y^1\right).z^1}_{(e_1+e'_1).e''_1}+\widetilde{(x^2+y^2).z^2}_{(e_2+e'_2).e''_2}+\ldots+\widetilde{(x^n+y^n).z^n}_{(e_n+e'_n).e''_n}\right)\\
&=\left(\widetilde{(x^1+z^1)}_{(e_1+e''_1)}+\widetilde{(y^1+z^1)}_{(e'_1+e''_1)}+\ldots+\widetilde{(x^n+z^n)}_{(e_n+e''_n)}+\widetilde{(y^n+z^n)}_{(e'_n+e''_n)}\right)\\
&=\left\{\left(\tilde{x}^1_{e_1}.\tilde{z}^1_{e''_1}+\tilde{y}^1_{e'_1}.\tilde{z}^1_{e''_1}\right)+\left(\tilde{x}^2_{e_2}.\tilde{z}^2_{e''_2}+\tilde{y}^2_{e'_2}.\tilde{z}^2_{e''_2}\right)+\left(\tilde{x}^n_{e_n}.\tilde{z}^n_{e''_n}+\tilde{y}^n_{e'_n}.\tilde{z}^n_{e''_n}\right)\right\}\\
&=\left(\tilde{x}^1_{e_1}.\tilde{z}^1_{e''_1}+\tilde{x}^2_{e_2}.\tilde{z}^2_{e''_2}+\ldots+\tilde{x}^n_{e_n}.\tilde{z}^n_{e''_n}\right)+\left(\tilde{y}^1_{e'_1}.\tilde{z}^1_{e''_1}+\tilde{y}^2_{e'_2}.\tilde{z}^2_{e''_2}+\ldots+\tilde{y}^n_{e'_n}.\tilde{z}^n_{e''_n}\right)\\
&=<\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}>+<\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>.
\end{aligned}
$$

Önerme 6.1.10. Bir soft iç çarpım uzayında soft iç çarpım fonksiyonu süreklidir. Diğer bir ifadeyle, $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}\rightarrow\tilde{x}_e$ ve $\{\tilde{y}^n_{e'_n}\}\rightarrow\tilde{y}_{e'}$ ise bu durumda $<\tilde{x}^n_{e_n},\tilde{y}^n_{e'_n}>\rightarrow<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>$ dir.

İspat: Üçgen eşitsizliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini kullanarak

$$
\begin{aligned}
\left|<\tilde{x}^n_{e_n},\tilde{y}^n_{e'_n}>-<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>\right| &= \big|<\tilde{x}^n_{e_n},\tilde{y}^n_{e'_n}>-<\tilde{x}^n_{e_n},\tilde{y}_{e'}>\\
&\quad+<\tilde{x}^n_{e_n},\tilde{y}_{e'}>-<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>\big|\\
&\leq\left|<\tilde{x}^n_{e_n},\tilde{y}^n_{e'_n}-\tilde{y}_{e'}>\right|+\left|<\tilde{x}^n_{e_n}-\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\right|\\
&\leq\left\|\tilde{x}^n_{e_n}\right\|\left\|\tilde{y}^n_{e'_n}-\tilde{y}_{e'}\right\|+\left\|\tilde{x}^n_{e_n}-\tilde{x}_e\right\|\left\|\tilde{y}_{e'}\right\|,
\end{aligned}
$$

elde edilir. $n \to \infty$ için $\{\tilde{x}^n_{e_n}\} \to \tilde{x}_e$ ve $\{\tilde{y}^n_{e'_n}\} \to \tilde{y}_{e'}$ olduğundan $<\tilde{x}^n_{e_n}, \tilde{y}^n_{e'_n}> \to <\tilde{x}_e, \tilde{y}_{e'}>$ dir.

Önerme 6.1.11. $\left(SV(\tilde{X}), <.>, E\right)$ bir soft iç çarpım uzayı ve $\{\tilde{x}^n_{e_n}\}$ ve $\{\tilde{y}^n_{e'_n}\}$ bu uzayda iki Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $<\tilde{x}^n_{e_n}, \tilde{y}^n_{e'_n}>$ bir soft Cauchy dizisidir.

İspat: Üçgen eşitsizliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}\left|<\tilde{x}^n_{e_n}, \tilde{y}^n_{e'_n}> - <\tilde{x}^m_{e_m}, \tilde{y}^m_{e'_m}>\right| &= \Big|<\tilde{x}^n_{e_n}, \tilde{y}^n_{e'_n}> - <\tilde{x}^n_{e_n}, \tilde{y}^m_{e'_m}> \\ &\quad + <\tilde{x}^n_{e_n}, \tilde{y}^m_{e'_m}> - <\tilde{x}^m_{e_m}, \tilde{y}^m_{e'_m}>\Big| \\ &\le \left|<\tilde{x}^n_{e_n}, \tilde{y}^n_{e'_n} - \tilde{y}^m_{e'_m}>\right| + \left|<\tilde{x}^n_{e_n} - \tilde{x}^m_{\lambda_m}, \tilde{y}^m_{e'_m}\right| \\ &\le \left\|\tilde{x}^n_{e_n}\right\| \left\|\tilde{y}^n_{e'_n} - \tilde{y}^m_{e'_m}\right\| + \left\|\tilde{x}^n_{e_n} - \tilde{x}^m_{\lambda_m}\right\| \left\|\tilde{y}^m_{e'_m}\right\|,\end{aligned}$$

elde edilir. Her Cauchy dizisi sınırlı olduğundan $n, m \to \infty$ için eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gider.

Tanım 6.1.12. $SV(\tilde{X})$ soft vektör uzayı ile $E = \mathbb{R}$ parametreler kümesi verilsin. $\tilde{x}_e = \left\{\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}\right\} = \left\{\tilde{x}^{1(i)i}_{e_1^{(i)}}, \tilde{x}^{2(i)}_{e_2^{(i)}}, \ldots\right\} \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ soft dizisi için $\left\|\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}\right\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(x^{(i)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(e^{(i)}\right)^2\right]^{1/2} < \infty$ oluyorsa, bu soft dizilerin oluşturduğu dizi uzayına soft $\tilde{\ell}_2$ uzayı denir.

Not 6.1.13. Bir önceki tanımda $\left\{\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}\right\} \tilde{\in} SV(\tilde{X})$ soft $\tilde{\ell}_2$ uzayında bir soft dizi ise bu durumda $\left\|\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}\right\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(x^{(i)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(e^{(i)}\right)^2\right]^{1/2} < \infty$ olduğundan $\sum_{i=1}^{\infty}\left(x^{(i)}\right)^2 < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty}\left(e^{(i)}\right)^2 < \infty$ elde ederiz. Dolayısıyla, $\left\{x^{(i)}\right\} \in \ell_2$ ve $\left\{e^{(i)}\right\} \in \ell_2$ dir.

Önerme 6.1.14. $\tilde{x}_e = \left\{\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}\right\}, \tilde{y}_{e'} = \left\{\tilde{y}^i_{e'^{(i)}}\right\} \tilde{\in} \tilde{\ell}_2$ soft dizileri verilsin. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}} \cdot \tilde{y}^{(i)}_{e'^{(i)}}\right| \tilde{\le} \left\|\tilde{x}_e\right\| \cdot \left\|\tilde{y}_{e'}\right\| \tag{6.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ negatif olmayan herhangi iki soft reel sayı ise

$$0 \le (\tilde{a}-\tilde{b})^2 \Rightarrow 0 \,\tilde{\le}\, \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 - 2\tilde{a}\tilde{b}$$
$$\Rightarrow 4\tilde{a}\tilde{b} \,\tilde{\le}\, \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + 2\tilde{a}\tilde{b}$$
$$\Rightarrow 4\tilde{a}\tilde{b} \,\tilde{\le}\, (\tilde{a}+\tilde{b})^2$$
$$\Rightarrow \tilde{a}^{1/2}.\tilde{b}^{1/2} \,\tilde{\le}\, \frac{\left(\tilde{a}+\tilde{b}\right)}{2}$$

olduğunu biliyoruz.

$\tilde{x}_e = \tilde{\theta}_0$ ve $\tilde{y}_{e'} = \tilde{\theta}_0$ olarak alırsak (6.3) eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır.

$\tilde{x}_e \ne \tilde{\theta}_0$ ve $\tilde{y}_{e'} \ne \tilde{\theta}_0$ olduğunu kabul edelim. $\tilde{a}_i = \left(\frac{\left|\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}\right|}{\left\|\tilde{x}_e\right\|}\right)^2$ ve $\tilde{b}_i = \left(\frac{\left|\tilde{y}^{(i)}_{e'(i)}\right|}{\left\|\tilde{y}_{e'}\right\|}\right)^2$ olarak alalım.

Bu durumda $\left\|\tilde{x}_e\right\| = \left\|\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}\right\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(x^{(i)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(e^{(i)}\right)^2\right]^{1/2}$ olduğundan $\tilde{a}_i = \left(\frac{\left|\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}\right|}{\left\|\tilde{x}_e\right\|}\right)^2 \,\tilde{<}\, \tilde{1}$ ve

$\tilde{b}_i = \left(\frac{\left|\tilde{y}^{(i)}_{e'(i)}\right|}{\left\|\tilde{y}_{e'}\right\|}\right)^2 \,\tilde{<}\, \tilde{1}$ olacaktır. Soft reel sayılar için yukarıda ifade edilen eşitsizliği kullanarak her bir i için

$$\frac{\left|\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}.\tilde{y}^{(i)}_{e'(i)}\right|}{\left\|\tilde{x}_e\right\|.\left\|\tilde{y}_{e'}\right\|} \,\tilde{\le}\, \frac{\left|\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}\right|^2 / \left\|\tilde{x}_e\right\|^2 + \left|\tilde{y}^{(i)}_{e'(i)}\right|^2 / \left\|\tilde{y}_{e'}\right\|^2}{2} \tag{6.4}$$

(6.4) de verilen eşitsizliği $i = \overline{1,\infty}$ olmak üzere taraf tarafa toplarsak

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}.\tilde{y}^{(i)}_{e'(i)}\right|}{\left\|\tilde{x}_e\right\|.\left\|\tilde{y}_{e'}\right\|} \,\tilde{\le}\, \frac{\left|\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}\right|^2 / \left\|\tilde{x}_e\right\|^2 + \left|\tilde{y}^{(i)}_{e'(i)}\right|^2 / \left\|\tilde{y}_{e'}\right\|^2}{2} \le \frac{1+1}{2} = 1$$

elde ederiz ki buradan istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Önerme 6.1.15. $\tilde{x}_e = \left\{\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}\right\}, \tilde{y}_{e'} = \left\{\tilde{y}^{i}_{e'(i)}\right\} \,\tilde{\in}\, \tilde{\ell}_2$ soft dizileri verilsin. Bu durumda $\tilde{x}_e + \tilde{y}_{e'} \,\tilde{\in}\, \tilde{\ell}_2$ dir.

İspat: $\tilde{x}_e = \left\{\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}\right\}, \tilde{y}_{e'} = \left\{\tilde{y}^{i}_{e'(i)}\right\} \,\tilde{\in}\, \tilde{\ell}_2$ ise bu durumda $\left\|\tilde{x}^{(i)}_{e(i)}\right\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(x^{(i)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(e^{(i)}\right)^2\right]^{1/2} < \infty$

ve $\left\|\tilde{y}^{(i)}_{e(i)}\right\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(y^{(i)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(e'^{(i)}\right)^2\right]^{1/2} < \infty$ dur.

$$\left\|\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}\right\|^2=\left\|\widetilde{(x+y)}_{e+e'}\right\|^2$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left((x+y)^{(i)}\right)^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left((e+e')^{(i)}\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(x^{(i)}+y^{(i)}\right)^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left(e^{(i)}+e'^{(i)}\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}x^{2(i)}+y^{2(i)}+x^{(i)}.y^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}e^{2(i)}+e'^{2(i)}+e^{(i)}.e'^{(i)}$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(x^{(i)}\right)^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left(e^{(i)}\right)^2\right]+\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(y^{(i)}\right)^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left(e'^{(i)}\right)^2\right]+\left[\sum_{i=1}^{\infty}x^{(i)}.y^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}e^{(i)}.e'^{(i)}\right]$$
$$=\left\|\tilde{x}_e\right\|^2+\left\|\tilde{y}_{e'}\right\|^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left|\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}.\tilde{y}^{(i)}_{e'^{(i)}}\right| \text{ (Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden)}$$
$$\leq\left\|\tilde{x}_e\right\|^2+\left\|\tilde{y}_{e'}\right\|^2+\left\|\tilde{x}_e\right\|.\left\|\tilde{y}_{e'}\right\|$$
$$=\left(\left\|\tilde{x}_e\right\|+\left\|\tilde{y}_{e'}\right\|\right)^2<\infty$$

$\left\|\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}\right\|^2<\infty$ ise $\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}\tilde{\ell}_2$ dir.

Önerme 6.1.16. Her $\tilde{x}_e=\left\{\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}\right\},\tilde{y}_{e'}=\left\{\tilde{y}^{i}_{e'^{(i)}}\right\}\tilde{\in}\tilde{\ell}_2$ soft dizileri için $<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>=\sum_{i=1}^{\infty}e^{(i)}.e'^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{x}^{(i)}.\tilde{y}^{(i)}$ şeklinde tanımlanan $<.>:\tilde{\ell}_2\times\tilde{\ell}_2\to\mathbb{R}(E)$ dönüşümü verilsin. $E=\mathbb{R}$ olmak üzere $\tilde{\ell}_2$ soft vektör uzayı üzerinde bir iç çarpımdır.

İspat. İç çarpım şartlarının sağlandığını gösterelim:

İ1-) $\forall\tilde{x}_e\tilde{\in}\tilde{\ell}_2$ için $<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>=\sum_{i=1}^{\infty}e^{(i)}.e^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}x^{(i)}.y^{(i)}\geq 0$ ve

$$<\tilde{x}_e,\tilde{x}_e>=\tilde{0}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}e^{(i)}.e^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}x^{(i)}.y^{(i)}=0$$
$$\Leftrightarrow \forall i=\overline{1,\infty} \text{ için } e^{(i)}=0 \text{ ve } x^{(i)}=0^{(i)}$$
$$\Leftrightarrow e=0 \text{ ve } \tilde{x}=\tilde{\theta}$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_e=\tilde{\theta}_0$$

İ2-) $\forall\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}\tilde{\ell}_2$ için

$$<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>=\sum_{i=1}^{\infty}e^{(i)}.e'^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}x^{(i)}.y^{(i)}=\sum_{i=1}^{\infty}e'^{(i)}.e^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}y^{(i)}.x^{(i)}=<\tilde{y}_{e'},\tilde{x}_e>$$

İ3-) $\forall\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}(E)$ ve $\forall\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}\tilde{\in}\tilde{\ell}_2$ için

$$<\tilde{\alpha}.\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>=<\widetilde{\alpha x}_{\alpha e},\tilde{y}_{e'}>=\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha.e)^{(i)}.e'^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha x^{(i)}.y^{(i)}$$
$$=\alpha\sum_{i=1}^{\infty}e^{(i)}.e'^{(i)}+\alpha\sum_{i=1}^{\infty}x^{(i)}.y^{(i)}$$
$$=\tilde{\alpha}<\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'}>$$

İ4-) $\forall\tilde{x}_e=\{\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}\},\tilde{y}_{e'}=\{\tilde{y}^{(i)}_{e'^{(i)}}\},\tilde{z}_{e''}=\{\tilde{z}^{(i)}_{e''^{(i)}}\}\tilde{\in}\tilde{\ell}_2$ için

$$<\tilde{x}_e+\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>=\sum_{i=1}^{\infty}(e+e')^{(i)}.e''^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}(x+y)^{(i)}.z^{(i)}$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}e^{(i)}.e''^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}e'^{(i)}.e''^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}(x.z)^{(i)}+\sum_{i=1}^{\infty}(y.z)^{(i)}$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}e_i.e''_i+\sum_{i=1}^{\infty}(x.z)^{(i)}\right)+\left(\sum_{i=1}^{\infty}e'_i.e''_i+\sum_{i=1}^{\infty}(y.z)^{(i)}\right)$$
$$=<\tilde{x}_e,\tilde{z}_{e''}>+<\tilde{y}_{e'},\tilde{z}_{e''}>.$$

Sonuç olarak $(\tilde{\ell}_2,<.>,E)$ bir iç çarpım uzayıdır.

6.2. Soft Hilbert Uzayı ve Özellikleri

Tanım 6.2.1. (Soft Hilbert Uzayı) $(SV(\tilde{X}),<.>,E)$ soft iç çarpım uzayı ile bu uzaydaki iç çarpımdan elde edilen $\tilde{d}:SV(\tilde{X})\times SV(\tilde{X})\to\mathbb{R}^+(E)$ soft metriği verilsin. Eğer $(SV(\tilde{X}),<.>,E)$ soft iç çarpım uzayı $\tilde{d}$ soft metriğine göre tam uzay ise $(SV(\tilde{X}),<.>,E)$ uzayına soft Hilbert uzayı denir.

Örnek 6.2.2 $(\tilde{\ell}_2,<.>,E)$ soft iç çarpım uzayı verilsin. $\tilde{x}_e=\{\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}\},\tilde{y}_{e'}=\{\tilde{y}^{i}_{e'^{(i)}}\}\tilde{\in}\tilde{\ell}_2$ olmak üzere

$$\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|e^{(i)}-e'^{(i)}\right|^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left|x^{(i)}-y^{(i)}\right|^2\right]^{1/2},$$

olarak tanımlanan $\tilde{d}:\tilde{\ell}_2\times\tilde{\ell}_2\to\mathbb{R}(E)$ fonksiyonu bir soft metriktir.

Örnek 6.2.3. $(\tilde{\ell}_2,<.>,E)$ soft iç çarpım uzayı bir soft Hilbert uzayıdır. $\tilde{x}_e=\{\tilde{x}^{(i)}_{e^{(i)}}\},\tilde{y}_{e'}=\{\tilde{y}^{i}_{e'^{(i)}}\}\tilde{\in}\tilde{\ell}_2$ olmak üzere $\tilde{d}(\tilde{x}_e,\tilde{y}_{e'})=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|e^{(i)}-e'^{(i)}\right|^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left|x^{(i)}-y^{(i)}\right|^2\right]^{1/2}$

ile soft metriği ve $\|\tilde{x}_e\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty}|e^{(i)}|^2 + \sum_{i=1}^{\infty}|x^{(i)}|^2\right]^{1/2}$ soft normu ifade edelim. $(\tilde{X},\tilde{d})$ metrik uzayında bir $\{\tilde{x}_{e^n}^n\}_n$ Cauchy dizisi alalım. Bu dizinin n. terimi $\tilde{x}_e^n = \{x_{e^{i,n}}^{i,n}\}_i$ Bu durumda $\forall\tilde{\varepsilon} > \tilde{0}$ soft reel sayısı için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m,n \geq n_0$ için $\tilde{d}(\tilde{x}_e^n, \tilde{x}_e^m) \tilde{\leq} \sum_{i=1}^{\infty}|e^{i,n} - e^{i,m}|^2 + \sum_{i=1}^{\infty}|x^{i,n} - y^{i,m}|^2 \tilde{\leq} \tilde{\varepsilon}^2$ dir. Buradan $m,n > n_0$ olmak üzere her $i = \overline{1,\infty}$ için

$$|e^n - e^m|^2 + |x^n - y^m|^2 \tilde{\leq} \tilde{\varepsilon}^2,$$

elde ederiz. Dolayısıyla, her i için $\tilde{x}_e^n = \{x_{e^{i,n}}^{i,n}\}_i$ bir Cauchy dizisidir. $|x^n - x^m| \tilde{\leq} \tilde{\varepsilon}$ olduğundan $\{x^n\}$ dizisi $X = \ell_2$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $X = \ell_2$ bir tam uzay olduğundan $\{x^n\} \to x$ olacak şekilde bir $x \in \ell_2$ dizisi vardır.

Diğer taraftan, $\sum_{i=1}^{\infty}|e^n - e^m| \leq \varepsilon$ olduğundan $\{e^n\}$ dizisi de ℓ_2 uzayında bir Cauchy dizisidir. ℓ_2 bir tam uzay olduğundan $\{e^n\} \to e$ olacak şekilde bir $e \in \ell_2$ dizisi vardır.

Sonuç olarak $x \in \ell_2$ dizisinin parametreleri olarak $e \in \ell_2$ dizisini alırsak bu durumda $\tilde{x}_e$ soft dizisini elde ederiz. Bu durumda $\{\tilde{x}_{e^{(n)}}^{(n)}\} \to \tilde{x}_e$ elde ederiz.

Son olarak $x \in \ell_2$ olduğundan $\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty}|x^{(i)}|^2\right]^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$ ve yine $e \in \ell_2$ olduğundan $\|e\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty}|e^{(i)}|^2\right]^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$ dir ve buradan $\|\tilde{x}_e\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty}|e^{(i)}|^2 + \sum_{i=1}^{\infty}|x^{(i)}|^2\right]^{1/2} < \varepsilon$ elde ederiz. Bu durumda $\tilde{x}_e \tilde{\in} \tilde{\ell}_2$ dir. $\{\tilde{x}_{e^{(n)}}^{(n)}\}$ soft Cauchy dizisi keyfi olduğundan soft $\tilde{\ell}_2$ uzayı bir Hilbert uzayıdır.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Mühedislik, doğal bilimler ve sosyal bilimlerde dahil olmak üzere geniş bir alanda belirsizlik içeren problemlerin çözülmesine yeni bir bakış açısı getiren soft kümeler teorisini klasik ve fonksiyonel analizin temel teşkil eden metrik ve normlu uzaylar konsuna taşıyarak softluk kavramının bu uzaylarda nasıl bir yapı teşkil ettiğini inceleyerek, klasik teoriyle benzer ve farklı yönlerini ortaya koymuş olduk. Soft teorinin fonksiyonel analiz konularına taşınması (Bu alanda ilk makaleler 2013 yılında yayımlanmıştır) ve soft topolojik uzaylarla ilgili çalışmaların (Bu alanda ilk makaleler 2011 yılında yayımlanmıştır) çok güncel olmasından dolayı bazı kavramlar üzerindeki tartışmalar devam etmekte olup aynı kavramlar farklı çalışmalarda farklı yaklaşımlarla ifade edilmiştir. Örneğin üzerinde tartışma devam eden kavramlardan bir tanesi soft nokta kavramıdır. Soft nokta kavramına yaklaşımlarından bir tanesi (Bayramov ve Gündüz, 2013) ve (Das ve Samanta, 2013a) çalışmalarında yer alırken, diğer tarafta soft nokta kavramı soft eleman adı altında (Das ve Samanta, 2013b) çalışmasında farklı bir yaklaşımla ele alınmıştır.

Soft nokta kavramı üzerindeki bu farklı yaklaşımlardan dolayı da soft metrik kavramı literatürde iki farklı yaklaşımla ifade edilmiştir. Bu yalaşımlardan her ikisi de Das ve Samanta 'ya aittir. Bu çalışmada kullanılan soft nokta kavramı Bayramov ve Gündüz, 2013) ve (Das ve Samanta, 2013a) ait olmakla beraber soft metrik kavramı (Das ve Samanta, 2013a) çalışmasından alınmştır ve çalışmada bu metrik kavramı kullanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Soft metrik uzaylarda soft daralma dönüşümlerinin özellikleri çalışılmış, farklı koşullar altında söz konusu soft daralma dönüşümlerine ait soft sabit noktanın var olduğu sonucu elde edilmiştir.

Soft metrik uzaylarda soft kompakt kümelerin özellikleri çalışılmış ve elde edilen bu özelliklerin klasik teoriyle büyük ölçüde benzer olduğu tespit edilmiştir.

Parametrelerin dahil edilmesiyle oluşturulan uzayda vektör toplama ve skalerle çarpma işlemleri parametreler kullanılarak bu çalışmaya özgün olarak tanımlanmıştır ve bu işlemlerle bir soft vektör uzayı elde edilmiştir. Söz konusu soft vektör uzayı üzerinde soft normlu lineer uzay, soft iç çarpım uzayı ve soft Hilbert uzayı tanımlanmış ve bazı özellikler çalışılmıştır. Bu özelliklerin genel olarak klasik teoriyle benzer olduğu sonucuna varılmıştır. Soft normlu uzaylarda soft lineer operatör kavramı verilerek çok kısıtlı bir kapsamda bu soft operatörlerin özellikleri verilmiştir. Soft Hilbert uzayına bir örnek olarak klasik ℓ_2 uzayına parametreler dahil edilerek soft $\tilde{\ell}_2$ uzayı elde edilmiş ve bu uzayın bir soft Hilbert uzayı olduğu gösterilmiştir.

Sonuç olarak, soft metrik ve soft normlu uzaylar teorisi soft kümeler kuramının fonksiyonel analiz konularına taşınmasına rehberlik edeceğinden büyük bir önem arz etmektedir. Bu tez çalışma konusunun çok güncel olması ve bazı kavramlar üzerinde tartışmalara açık taraflarının olmasından dolayı bu konu üzerinde yeni çalışmalara ihtiyaç olduğu muhakkaktır. Bu çalışmadan yararlanılarak soft lineer operatörler ve fonksiyonel analizin klasik ve önemli teorileri soft kümeler teorisi kapsamında yapılabilir.

KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., 2010. Soft sets and soft rings. ***Computers and Mathematics with Applications***. **59**: 3458-3463.

Aktaş, H., Çağman, N., 2007. Soft sets and soft group. ***Information Science.*** **177**: 2726-2735.

Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., Shabir, M., 2005. On some new operations in soft set theory. ***Computers and Mathematics with Applications***. **49**: 1547-1553.

Aslam,M., Qurashi, S. M., 2012. Some contributions to soft groups. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** 4(1):177-195.

Atmaca, S., Zorlutuna, I., 2013. On fuzzy soft topological spaces. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** **5**(2):377-386.

Aygunoğlu, A., Aygün, H., 2009. Introduction to fuzzy soft groups. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **58**:1279-1286.

Aygunoğlu, A., Aygün, H., 2011. Some notes on soft topological spaces. ***Neural Computation and Application.*** **21**:113-119.

Aygunoğlu, A., 2012. ***Esnek Topolojik Uzaylar*** (doktora tezi, basılmamış). Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.

Bayramov, S., Gündüz(Aras), Ç.,2004. ***Genel Topoloji.*** Çağlayan Kitabevi, İstanbul. 360.

Bayramov, S., Gündüz(Aras), Ç., 2013. Soft locally compact and soft paracompact spaces. ***Journal of Mathematics and System Science.*** **3**(3)**:**122-130.

Bayramov, S., Gündüz(Aras), Ç., Yazar, M. I., 2012. Inverse system of fuzzy soft modules. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** 4(2):349-363.

Changphas, T., Thongkam, B., 2012. On soft $-\Gamma$ semigroups. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** 4(2) :217-223.

Chen, D., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S., 2003. Some notes on the parameterization reduction of soft sets. ***International Conference on Machine Learning and Cybernetic.*** 2-5 October, Xi'an/China, 2003. 1442-1445.

Chen, D., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S., Wang, X., 2005. The parameterization reduction of soft sets and its applications. ***Computers and Mathematics with Applications***, **49(1):**757-763.

Çağman, N., Enginoğlu, S., 2010. Soft matrix theory and its decision making. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **59**:3308-3314.

Çağman, N., Enginoğlu, S., 2010. Soft set theory and uni-int decision making. ***European Journal of Operational Research.*** **207**:848-855.

Çağman, N., Karataş, S., Enginoğlu, S., 2011. Soft Topology. ***Computers and Mathematics with Applications***. **62:**351-358.

Das, S., Samanta, S.K., 2012. Soft real sets, soft real numbers and their properties. ***J. Fuzzy Math.*** **20**(3): 551-576.

Das, S., Samanta, S.K., 2013. Soft metric. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** **6**(1):77-94.

Das, S., Samanta, S.K., 2013. On soft metric spaces. ***J. Fuzzy Math, acce pted.***

Das, S., Samanta, S.K., 2013. On soft inner product spaces. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*** **.6**(1) :151-170.

Das, S., Majumdar, P., Samanta, S.K., 2013. On soft lineer spaces and soft normed lineer spaces. ***Communicated to the Ukrainian Math. Journal.***

Das, S., Samanta, S.K., 2013. Soft linear operators in soft normed linear spaces. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** **6**(2):295-314.

Das, S., Samanta, S.K., 2014. Soft linear functionals in soft normed linear spaces. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics***. (Accepted).

Feng, F., Jun, Y., Zhao B., 2008. Soft Semirings. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **56**:2621-2628.

Feng, F., Liu, X. Leoreanu-Fotea, V., Jun, Y. B., 2011. Soft sets and soft rough sets. ***Information Sciences.*** **181**:1125-1137.

Gündüz(Aras), Ç., Sonmez, A., Çakallı, H., 2013. On Soft Mappings. ***arXiv:1305.4545v1*** **[math.GM]**.

Gündüz(Aras), Ç., Bayramov, S., 2011. Fuzzy Soft Modules. ***International Matematical Forum.*** **6**(11):517-527.

Gündüz(Aras), Ç., Bayramov, S., 2011. Intuitionistic Fuzzy Soft Modules. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **62**:2480-2486.

Hussain, S., Ahmad, B., 2011. Some properties of soft topological spaces. ***Computers and Mathematics with Applications.*****62**:4058-4067.

Jun, Y.B., 2008. Soft BCK/BCI-algebras. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **56**:1408-14413.

Jun, Y.B., Park, C. H., 2008. Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras. ***Information Sciences.*** **178**:2466-2475.

Long-Guang, H., Xian, Z., 2007. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. **J. Math. Anal. Appl. 332**:1468-1476.

Maji, P. K., Roy, A.R., Biswas, R., 2002. An application of soft sets in a decision making problem. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **44**:1077-1083.

Maji, P. K., Roy, A.R., 2003. Soft set theory. ***Computers and Mathematics with Applications.*45**:555-562.

Maji, P. K., 2012. A neutrosophic soft set approach to a decision making problem. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** 3(2):267-280.

Maji, P. K., 2013. Neutrosophic soft set. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** **5**(1):157-168.

Majumdar, P., Samanta,S. K., 2010. On soft mappings, ***Computers and Mathematics with Applications.*** **60**:2666-2672.

Majumdar,P., Samanta, S. K., 2013. Softness of a soft set: Soft Set Entropy, ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** **6**(1)**:**59-68.

Min, W. K., 2011. A Note on Soft Topological Spaces. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **62:**3524-3528.

Molodtsov, D., 1999. Soft set-theory-first results, ***Computers and Mathematics with Applications.*** **37**:19-31.

Nazmul, SK., Samanta, S. K, 2013. Neighbourhood properties of soft topological spaces. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*6**(1) 1-15.

Ozturk, T.Y., Gündüz(Aras),Ç., Bayramov, S., 2013. Inverse and direct systems of soft modules. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*5**(1):73-85.

Pie, D., Miao, .D., 2005. From sof sets to information systems. ***Granular Computing, IEEE International Conference.*** 25-27 July 2005, Beijing/China. 617–622.

Rhoades, B.E., 1997. A comparison of various definition of contractive mappings. ***Trans. Amer. Math. Soc.*** **266**:257-290.

Sezgin, A., Atagün, A. O., 2011. Soft groups and normalistic soft groups. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **62:**685-698.

Shabir, M., Naz,M., 2011. On soft topological spaces. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **61**:1786-1799.

Sun, Q.M., Zhang, Z.L., Liu, J., 2008. Soft Sets and Soft Modules. ***Lecture Notes in Comput. Sci.*** **5009**:403-409.

Şenel, G., 2013. ***Esnek Metrik*** *Uzaylar*(doktora tezi, basılmamış). Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat.

Şimsekler, T., Yüksel, Ş., 2013. Fuzzy soft topological spaces. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** **5**(1):87-96.

Varol, B. P., Aygün, H., 2013. On soft Hausdorff spaces. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** **5**(1):15-24.

Wu, H., Zhan, J., , 2012. The characterizations of some kinds of soft hemirings. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** **3**(2):267-280.

Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. ve Ye, S., 2005. Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets. ***In Proceedings of ICSSSM-05.*** 13-15 June 2005, Chongqing/China. 1104-1106.

Xiao, Z., Gong, K. ve Zou, Y., 2009. A Combined Forecasting Approach Based on Fuzzy Soft Sets. ***Computers and Mathematics with Applications.*** **228**:326-333.

Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets. ***Inform. and Control.*****8**(1):338-353.

Zorlutuna,I., Akdağ, M., Min, W.K., Atmaca, S., 2012. Remarks on soft topological spaces. ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.*** **3**(2):171-185.

ÖZGEÇMİŞ

Aslen Artvin-Şavşat' lı olup 1976 yılında Ankara' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Van' da tamamladı. 1994 yılında girdiği Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1998 yılında mezun oldu. Aynı yıl Van Vali Mithatbey İlköğretim Okulun' a Matematik öğretmeni olarak atandı. 1999 yılında Kars Kafkas Üniversitesi Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2004 yılında Kars Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2007 yılında Yüksek Lisans öğrenimini bitirdi. 2008 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Doktora öğrenimine başladı. 2014 yılında doktora eğitimini tamamladı. Halen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaktadır.