T.C
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NEUTRAL FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DERECE TEORİSİ İLE ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Hayri TOPAL
DANIŞMAN : Doç. Dr. Ali SIRMA

VAN-2014

T.C
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NEUTRAL FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DERECE TEORİSİ İLE ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Hayri TOPAL
DANIŞMAN : Doç. Dr. Ali SIRMA

VAN-2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Ali Sırma danışmanlığında, Hayri Topal tarafından sunulan "Neutral Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Derece Teorisi ile Çözümünün Varlığı Problemi" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim–Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 15/07/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof.Dr.Heybetkulu S.MUSTAFAYEV	İmza: ....
Üye	: Prof.Dr.Tunay BİLGİN	İmza: ....
Üye	: Doç. Dr. Ali SIRMA	İmza: ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18/07/2014 tarih ve 2014/28-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....../....../2014

Prof. Dr. Dr. Turgut AYGÜN

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza
Adı Soyadı
Hayri TOPAL

ÖZET

NEUTRAL FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DERECE TEORİSİ İLE ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI PROBLEMİ

TOPAL, Hayri
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali SIRMA
Temmuz 2014, 101 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Tezin ilk bölümünde neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin periyodik çözümünün varlığının incelenmesi konusunda literatürde yapılan bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem ve ön bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerle ilgili olarak D ve D_1 operatörlerinin bazı özellikleri araştırıldı.

Dördüncü bölümde çoklu sapma argümanlı neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerle ilgili olarak D ve D_2 operatörlerinin bazı özellikleri araştırıldı.

Beşinci bölümde neutral diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığı Mawhin`nin süreklilik teoremi ve üçüncü ve dördüncü bölümde elde edilen D, D_1 ve D_2 operatörünün özellikleri kullanılarak incelendi.

Son bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar kelimeler: D operatörü, Mawhin`nin süreklilik teoremi, neutral fonksiyonel diferansiyel denklemler, periyodik çözüm

ABSTRACT

EXISTENCE PROBLEM OF SOLUTION OF NEUTRAL FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEGREE THEORY

TOPAL, Hayri
Msc Thesis, Mathematic Science
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ali SIRMA
July 2014, 101 Pages

This study consists of six chapters.

In the first part of the thesis, the investigation about of the existence of periodic solutions of neutral functional differential equations and some information about the relevant studies in the literature are given.

In the second part of the thesis, some basic definitions, theorems and preliminaries are given.

In the third chapter some properties of the operators D and D_1 in view of neutral functional differential equations were investigated.

In the fourth chapter, some properties of the operators D and D_2 in view of neutral functional differential equations with multiple deviated arguments were investigated.

In the fifth chapter, the existence of periodic solutions of neutral differential equations were investigated by using Mawhin`s the continuation theorem and using the properties of the D, D_1 and D_2 operators obtained in 3rd and 4th chapters.

In the last chapter, the obtained results have been summarized.

Key words: D operator, Mawhin`s continuation theorem, neutral functional differential equations, periodic solution.

ÖN SÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında ve tamamlanmasında öneri ve eleştirilerini benimle paylaşan tez danışmanım Doç. Dr. Ali SIRMA'ya, çalışmalarım esnasında desteğini esirgemeyen hocalarıma teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Daha kapsamlı çalışmalara ilham olması dileğiyle…

2014

Hayri TOPAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\boldsymbol{C}$	$[-r, 0]$ dan $\mathbb{R}^n$ ye sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\boldsymbol{f'(x)}$	$f(x)$ fonksiyonunun Jacobian matrisi
$\boldsymbol{J_f(x)}$	$f'(x)$ nin determinantı
$\boldsymbol{Q_f}$	f nin kritik noktalarının kümesi
$\mathbf{K}^\infty$	$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \mathbb{R}$ olan (x_n) diziler kümesi
$\boldsymbol{l_p}$	K^∞ içinde $\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_n \rvert^p$ yakınsak olan tüm (x_n) diziler kümesi
$\boldsymbol{B(x_0, \delta)}$	x_0 merkezli ve δ yarı çaplı açık yuvar

Kısaltmalar	**Açıklama**
NFDD	Neutral Fonksiyonel Diferansiyel Denklem

EKLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Çevremizde gelişen olaylar ve bağlı oldukları sistemler hakkında bilgi sahibi olmak, anlamak ve yorumlamak bilimsel yönden oldukça önemlidir. Uygulamalı bilim dallarının pek çoğunda; örneğin fizik, matematik gibi bir çok alanda ele alınan problemlerin matematiksel modellemesine bir diferansiyel denklem karşılık gelmektedir.

Bilindiği gibi adi diferansiyel denklemler ile oluşturulan bir modeldeki değişim oranı geçmişteki durumdan bağımsız olup sadece o andaki zamana bağlıdır. Halbuki, tutarlı bir matematiksel modelde gerçek durum böyle değildir. Pek çok fiziksel olayda bir sistemin şu anki durumu geçmiş durumuna bağlı kalınarak ifade edilir. Yani, bir çok uygulama, fiziksel sistemlerdeki değişim oranının sadece bugünkü zaman ve duruma bağlı olmadığını, aynı zamanda geçmişe de bağlı olduğunu göstermektedir.

Model kurarken bu tür gecikmeler de hesaba katılırsa oluşturulan yapılar adi diferansiyel denklemden farklı olup "delay, neutral, advanced" şeklinde sınıflandırılan diferansiyel denklemler karşımıza çıkmaktadır.

Bu tür denklemler literatürde ilk kez on sekizinci yüzyılın ikinci yarısında Kondorse (1771) çalışmasında rastlanması rağmen, gecikmeli diferansiyel denklemler 1950 yılından sonra A.D. Myshkis, R. Bellman tarafından sistematik olarak incelenmeye başlanmış ve daha sonraki yıllarda L.E. El`sgol`ts, N.N. Krasovskii, J.Hale ve diğerlerinin yaptıkları çalışmalar ile bu konunun gelişimi hızlanmıştır. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin fiziksel ve biyolojik sistemlerde birçok uygulama alanına sahip olması da bu teoriyi matematiğin en hızlı gelişen dallarından biri haline getirmiştir.

Kabul edileceği gibi adi diferansiyel denklemlerin veya gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği gibi niteliksel davranışlarını belirlemek önemli olduğundan pek çok araştırmacı tarafından adi diferansiyel denklemler ve gecikmeli diferansiyel denklemler için periyodik çözümlerinin varlığı üzerine olan çalışmalarında, derece teorisinin özellikle adi diferansiyel denklemlere uygulamalarına yaptığı katkılarla tanınmış J. Mawhin`nin Süreklilik Teoremi (Mawhin`s continuation theorem) kullanıldı.

Derece teorisi, lineer olmayan analizin uygulanabilir bir alanı olup başka bir amacı da; f, E Banach uzayının A alt kümesinden E ye bir tasvir olmak üzere, $f(x) = p$ şeklindeki denklemlerin çözümünün varlığı ile ilgili sonuçlara ulaşmaktır. Bu denklemin çözümünün varlığı çoğunlukla derecenin hesaplanmasıyla elde edilir.

Neutral fonksiyonel diferansiyel denklemler için periyodik çözümün varlığı üzerine olan çalışmalar daha az sayıda araştırmacı tarafından ele alındığı görülmektedir. Bunun sebeplerine bakıldığında karşımıza iki sebep çıkmaktadır. Öncelikli olarak X Banach uzayı ve $\Omega \subset X$ açık sınırlı bir alt kümesi olmak üzere $\bar{\Omega}$ kümesi üzerinde lineer olmayan N operatörü için L-kompakt operatörü belirlemenin zorluğu ikinci olarak da çözümün muhtemel veya mümkün sınırlarını tahmin etmenin kolay olmaması Mawhin`nin süreklilik teoremi kullanmak araştırmacılar için daha az tercih sebebi olmuştur.

Çalışmamızda neutral fonksiyonel diferansiyel denklemler ile ilgili olan lineer D ve D_2 operatörleri ile lineer olmayan D_1 operatörünün özellikleri araştırıldı. Elde edilen özellikler kullanılarak ve Mawhin`nin süreklilik teoremi yardımıyla neutral fonksiyonel diferansiyel sistemler için periyodik çözümün varlığı problemi araştırıldı. Elde edilen sonuçta D operatörü kararlı olması gerekmemekte, kararsız olması halinde de herhangi bir periyodik çözümünün sürekli türeve sahip olduğu görülmektedir.

Gecikmeli diferansiyel denklemler üzerine pek çok çalışma mevcuttur. Özellikle yirmici yüzyılın ikinci yarısından itibaren gecikmeli diferansiyel denklemler üzerine olan çalışmalarda hızlı bir artış görülmektedir.

Belmann ve Cooke (1963), birinci mertebeden sabit katsayılı gecikmeye sahip diferansiyel fark denklemleri üzerinde çalışmışlardır. Belmann ve Cooke çalışmasında gecikmeli (retarded), neutral diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliğini göstermiş, Laplace yöntemiyle çözümlerini ele almışlardır. Yine birinci mertebeden sabit katsayılı gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerini ve lineer olmayan durumları incelemişlerdir. Driver (1977), gecikmeli diferansiyel denklemleri genişletmiş, çözümlerinin varlık ve teklik teorilerini vermiştir. El'sgol'ts ve Norkin (1971), stochastik (olasılıklı) gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılığını incelemiş ve gecikmeye sahip denklemlerin kararlı çözümlerini ele almışlardır.

Hale ve Lunel (1993), fonksiyonel diferansiyel denklemlerin karakteristik denklemlerini ele almış ve çözümlerin özelliklerini, otonom ve periyodik süreçleri incelemiş, neutral gecikmeli diferansiyel denklemlerin özelliklerini vermişlerdir. Hale (1977), neutral tipli denklemleri operatör aracılığı ile incelemiş, özelliklerini ortaya koymuş ve neutral denklemler kuramı ile ilgili temel teoremler ve uygulamadan ilginç örnekler vererek araştırmacıların bu konuya ilgilerinin yoğunlaşmasını sağlamıştır. Hale (1963), sabit katsayılı lineer fonksiyonel diferansiyel denklemlerin temel özelliklerine yer vermiştir.

Kuang (1993), popülasyon dinamiğinde gecikmeli diferansiyel denklemleri ortaya koymuş ve neutral tipli gecikmeli diferansiyel denklemlerin modellemelerine yer vermiştir. Diekmann, Van Gils, Lunel ve Walther (1995), sonsuz boyutlu dinamik sistemlerin matematiksel teorisini vermişler, modellerin sınıflandırılmasını, yani, bu modellerin gecikmeli diferansiyel denklemlerle tanımlanmasını göstermişlerdir. Bellen ve Zennaro (2003), gecikmeli diferansiyel denklemleri genel olarak incelemiş ve bu denklemlerin sayısal çözümleri üzerine yöntemler vermişlerdir. Erneux (2009) ise çalışmasında gecikmeli diferansiyel denklemlerle yapılan modellemelere yer vermiştir.

Yakın dönemin çalışmalarına bakıldığında; Fan ve Wang (2000), kararlı fark operatörü D nin özelliklerden yararlanarak bazı sabit nokta teoremleri ile $\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t)$ denkleminin periyodik çözümünün varlığı problemi üzerine çalıştı. Ayrıca çalışmalarında sonlu veya sonsuz gecikme argümanlı D operatör tipli konveks neutral fonksiyonel diferansiyel denklemler ve sonlu gecikme argümanlı hiperneutral fonksiyonel diferansiyel denklemleri inceleyerek periyodik çözümün varlığı sınırlı çözümün varlığını gerektirdiği sonucunu elde ettiler.

Lu ve Ge (2003), fark operatörü D nin kararsız olması halinde Mawhin`nin süreklilik teoremi kullanılarak neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin periyodik çözümleri için varlık kriterleri oluşturdu. Ayrıca Lu ve Ge (2004), örtüşen derece teorisinin (coincidence degree theory) genel süreklilik teoremi (generalized continuation theorem) kullanılarak

$$\frac{d^2}{dt^2}\big(x(t) + Cx(t-r)\big) + \frac{d}{dt}grad\, F\big(x(t)\big) + grad\, G\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right) = p(t)$$

formundaki gecikme argümanlı ikinci mertebeden neutral diferansiyel sistemi için $\tau(t)$ ve r gecikme argümanlarına bağlı periyodik çözümünün varlığı üzerine yeni sonuçlar elde etti. Lu ve ark. (2004),

$$\big(x(t) + cx(t-\delta)\big)'' + f\big(x'(t)\big) + g\big(x(t-\tau)\big) = p(t)$$

şeklindeki gecikme argümanlı neutral diferansiyel denklemini üzerine çalışma yaptılar. önceki yapılan çalışmalar genişletilerek örtüşen derece teorisinin süreklilik teoremi kullanılarak denklemin periyodik çözümünün varlığı üzerine bazı yeni sonuçlar ifade ettiler. Lu ve Ge (2004),

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t)-\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i u(t-\tau_i)) = f\big(u(t)\big)u'(t)+\alpha(t)g\big(u(t)\big)$$
$$+\textstyle\sum_{j=1}^{n}\beta_j(t)g\left(u\left(t-\gamma_j(t)\right)\right)+p(t)$$

şeklindeki ikinci mertebeden çok gecikmeli neutral fonksiyonel diferansiyel denklem için örtüşen derece teorisisinin süreklilik teoremi kullanılarak denklemin periyodik çözümünün varlığını incelediler ve ayrıca lineer fark operatörü D nin kararlı olması gerekmediğini gösterdiler. Fan ve ark. (2005), sonsuz gecikme argümanlı $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}D(x_t)=f(t,x_t)$ şeklindeki neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin periyodik çözümünün varlığı için Horn sabit nokta teoremini kullandılar. Denklemin periyodik çözümünün varlığı için yeni kriterler belirlediler. Liu ve Huang (2006; 2007),

$$\big(x(t)+Bx(t-\delta)\big)' = g_1\big(t,x(t)\big)+g_2\big(t,x(t-\tau)\big)+p(t)$$
$$\big(x(t)+Bx(t-\delta)\big)'' = Cx'(t)+g\left(x\big(t-\tau(t)\big)\right)=p(t)$$

birinci mertebeden ve ikinci mertebeden neutral fonksiyonel diferansiyel denklemler için periyodik çözümünün varlık ve tekliği üzerine yeni sonuçlar belirlemek için örtüşen derece teorisini kullandılar. Wang ve Lu (2007),

$$\big(x(t)+Bx(t-\delta)\big)^n = f\big(x(t)\big)x'(t)+g\left(\textstyle\int_{-r}^{0}x(t+s)d\alpha(s)\right)=p(t)$$

şeklindeki dağınık gecikmeli yüksek mertebeden neutral fonksiyonel diferansiyel denklemler için Mawhin`nin örtüşen derece teorisi kullanılarak periyodik çözümün varlığı üzerine yeni sonuçlar elde ettiler. Raffoul ve Islam (2007) tarafından

$$\frac{d}{dt}x(t)=A(t)x(t)+\frac{d}{dt}Q\left(t,x\big(t-g(t)\big)\right)+G\left(t,x(t),x\big(t-g(t)\big)\right)$$

şeklindeki bir neutral fonksiyonel diferansiyel denklem için $Q(t,x)$ ve $G(t,x,y)$ sürekli fonksiyonlarına global Lipschitz koşulları uygulanarak ve Krasnoselskii sabit nokta teoremi aracılığı ile

$$\frac{d}{dt}\left\{x(t)-Q\left(t,x\big(t-g(t)\big)\right)\right\}=A(t)\left\{x(t)-Q\left(t,x\big(t-g(t)\big)\right)\right\}$$
$$+A(t)Q\left(t,x\big(t-g(t)\big)\right)+G\left(t,x(t),x\big(t-g(t)\big)\right)$$

denkleminin periyodik çözüme sahip olduğu gösterildi.

Lu ve ark. (2011) tarafından lineer D fark operatörünün yeni özellikleri araştırıldı ve bu yeni özellikler kullanılarak D operatörünün kararsız olması durumunda neutral fonksiyonel diferansiyel sistemler için periyodik çözümünün varlığı problemi çalışıldı.

Lu ve Chen (2012), $D_1(\varphi) = \varphi(0) - B\varphi(-\tau) - h(\varphi)$ lineer olmayan fark operatörünün özelliklerini araştırdı ve bu yeni özellikler kullanılarak D_1 fark operatör ile birlikte neutral fonksiyonel diferansiyel sistemler için periyodik çözümünün varlığını inceledi.

Konu ile ilgili olarak ayrıca Lu (2008), Ren ve Cheng (2009), Kolmanovskii ve Myshkis (1999), Kuang (1993), Èl'sgol'ts ve Norkin (1973), Arino ve ark. (2002), Hale (1977), Hale ve Lunel (1993), Akhmerov ve ark. (1982), Azbelev ve ark. (2007), Hino ve ark. (1991) ve Burton (1985) gibi kaynaklara başvurulabilir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. (Norm ve Normlu Uzay)

X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\,.\,\| : X \to \mathbb{R}_+\,, \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|;$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.

Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa, bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.3.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x + p) = f(x)$ olacak şekilde p sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir (Schröder, 2007).

Tanım 2.4.

X ve Y iki Banach uzayı, $\Omega \subset X$ ve $F: \Omega \to Y$ bir operatör olsun. Eğer F sürekli ve $F(\Omega)$ ön kompakt ise F operatörüne kompakt operatör denir (Deimling, 2010).

Lemma 2.1.

a) p ve q, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere

$\forall x = (x_n) \in l_p, y = (y_n) \in l_q$ için

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}$ (Hölder Eşitsizliği)

b) $\forall x = (x_n) \in l_p, y = (y_n) \in l_p$ için

$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p}$ (Minkowski Eşitsizliği)

eşitsizlikleri doğrudur (Musayev ve Alp, 2000).

Lemma 2.2.

a) p ve q, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere

$\forall f, g \in C[a, b]$ için

$\int_0^{\omega} |f(s)g(s)| ds \leq \left(\int_a^b |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(s)|^p ds \right)^{1/q}$ (Hölder Eşitsizliği)

b) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\forall f, g \in C[a, b]$ için

$\left(\int_a^b |f(s) + g(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$ (Minkowski Eşitsizliği)

eşitsizlikleri doğrudur (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.5.

X bir normlu vektör uzayı ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, x, y \in X$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\|$$

olacak şekilde $0 < \alpha < 1$ sayısı varsa T ye daralma (büzülme) fonksiyonu denir (Soykan, 2008).

Tanım 2.6.

$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere $T : X \to X$ bir daralma fonksiyonu ise o zaman T nin bir ve yalnız bir sabit noktası vardır (Soykan, 2008).

Tanım 2.7.

X ve Z vektör uzayları, $Dom(L)$ X in bir alt vektör uzayı, $L: Dom(L) \subset X \to Z$ bir lineer operatör ve $P: X \to X$ ve $Q: Z \to Z$ lineer izdüşüm operatörleri olmak üzere $P \xrightarrow{P} Dom(L) \xrightarrow{L} Z \xrightarrow{Q} Z$ zinciri tam (exact), yani $ImP = KerL$ ve $ImL = kerQ$ olsun. Ayrıca L nin $Dom(L) \cap KerP$ ye sınırlandırılışını

$$L_P : Dom(L) \cap KerP \to ImL$$

şeklinde tanımlayalım. L_P bir cebirsel izomorfizm (Gaines ve Mawhin, 1977), olduğundan $K_P \coloneqq {L_P}^{-1}$ şeklinde tanımlayalım. O halde

$$K_P : ImL \to Dom(L) \cap KerP$$

bir cebirsel izomorfizmdir.

Her $z, z' \in Z$ için $z \sim z' \Leftrightarrow z - z' \in ImL$ ifadesi Z de bir denklik bağıntısıdır. Bu taktirde $z \in Z$ için bu bağıntıya karşılık gelen z nin denklik sınıfı

$$\bar{z} = z + ImL = \{z + y : y \in ImL\}$$

olarak yazılır. Böylece

$$CokerL = Z/ImL = \{z + ImL : z \in Z\}$$

şeklinde tanımlanır.

X ve Z normlu reel uzaylar, $\Omega \subset X$ açık sınırlı bir küme ve $\bar{\Omega}$, Ω nin kapanışı olsun ve

$$L : Dom(L) \subset X \to Z \text{ ve } N : \bar{\Omega} \subset X \to Z$$

operatörleri aşağıdaki şartları sağlasın.

i. L lineer ve ImL de Z nin kapalı bir alt kümesi;

ii. $KerL$ ve $CokerL = Z/ImL$ sonlu boyutlu ve $dim\, KerL = dim\, cokerL$;

iii. $N: \bar{\Omega} \subset X \to Z$ sürekli olmak üzere $QN(\Omega)$ sınırlı;

iv. $K_{P,Q} = K_P(I - Q)$ olmak üzere $K_{P,Q}N: \bar{\Omega} \to Z$ operatörü $\bar{\Omega}$ üzerinde kompakt olsun.

Tanım 2.8.

(i) ve (ii) şartlarını sağlayan $L : Dom(L) \subset X \to Z$ operatörüne indeksi sıfır olan **Fredholm operatörü** denir (Gaines ve Mawhin, 1977).

Tanım 2.9.

(iii) ve (iv) şartlarını sağlayan $N: \bar{\Omega} \subset X \to Z$ operatörüne ***L*-kompakt operatör** denir (Gaines ve Mawhin, 1977).

Teorem 2.1. $(F. Riesz)$

$C[a,b]$ sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde sürekli lineer her F fonksiyoneli, g, $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlı ve $g(a) = 0$ olan bir fonksiyon olmak üzere

$$F(f) = \int_a^b f(t)dg(t)$$

biçiminde gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Lemma 2.3.

$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha \geq 1$ ise $\forall\, x, y \ \geq 0$ için $x^\alpha + y^\alpha \leq (x+y)^\alpha$ dır.

İspat: $\alpha = 1$ için eşitsizlik aşikardır. $\alpha > 1$ için denklemin her iki tarafı $x \neq 0$ için x^α ile bölünürse $t = y/x$ olmak üzere

$$1 + t^\alpha \leq (1+t)^\alpha$$

eşitsizliği elde edilir. $f(t) = (1+t)^\alpha - t^\alpha - 1$ ise $f^{'}(t) > 0$ dır. Yani $t > 0$ ise $f(t) > f(0)$ dır. Böylece $1 + t^\alpha < (1+t)^\alpha$.

Ayrıca buradan denklemin genel durumu

$${x_1}^\alpha + {x_2}^\alpha + \cdots + {x_n}^\alpha \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\alpha$$

şeklinde elde edilebilir. ■

2.1. Sapma Argümanlı Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Tanım 2.1.1.

Adi diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sadece t anında hesaplanır. Yani bir fiziksel olayı adi diferansiyel denklem yardımıyla tanımlamak o olayın gelecekteki durumunu geçmişteki durumundan bağımsız olarak hesaplamak demektir. Halbuki pek çok fiziksel olayda sistemin şu anki durumu geçmiş durumuna bağlı kalınarak ifade edilir. Bu tür diferansiyel denklemlerde $\tau > 0$ olmak üzere bilinmeyen fonksiyon ve türevleri $t - \tau$ veya $t + \tau$ anında hesaplanır. Bu tür diferansiyel denklemlere fonksiyonel diferansiyel denklemler denir.

Yani bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon, argümanların farklı değerlerine bağlı olarak ortaya çıkıyorsa bu tür denklemler sapma bileşenli diferansiyel denklem denir (Driver, 1977).

Örneğin;

$$x'(t) = -2x(t-1),$$

$$x'(t) = x(t) - x\left(\frac{t}{2}\right) + x^{'}(t-1),$$

$$x'(t) = x(t)x(t-1) + t^2x(t+2),$$

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t), x(t-\tau(t)), x'(t-\tau(t))\big),$$

$$x''(t) = -x'(t) - x'(t-1) - 3sinx(t) + cost$$

denklemleri birer sapma bileşenli diferansiyel denklemdir.

Tanım 2.1.2.

Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevi sadece t gibi bir bağımsız değişkene bağlı ve bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin denklemde bulunan diğer bileşenleri t nin t den önceki parametrelerine bağlı ise bu tür bir sapma argümanlı diferansiyel denkleme gecikmeli (delay, retarded) veya gecikme argümanlı diferansiyel denklem denir.

Örneğin;

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_2(t))\big),$$

$$x'(t) = 1 - x(t - cos^2 t),$$

$$x''(t) = 5x(t-3) - 7x^{'}(t-2) + 3(t-1),$$

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t), x(t - \tau(t)), x'(t - \tau(t))\big)$$

denklemleri $\tau(t) \geq 0$ için gecikmeli diferansiyel denklemlere birer örnektir.

Eğer bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevi sadece t gibi bir bağımsız değişkene bağlı ve bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin denklemde bulunan diğer bileşenleri t veya t den daha ilerideki parametrelerine bağlı ise bu tür bir diferansiyel denkleme ileri argümanlı diferansiyel denklem denir.

$\tau_1 < 0$ ve $\tau_2 < 0$ için

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)\big),$$

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t + \tau(t))\big),\ \tau(t) \geq 0$$

denklemleri ileri argümanlı diferansiyel denklemlere örnektir.

Bu tür denklemlerin dışında kalan denklemler ise neutral diferansiyel denklemler (differential equations of neutral type) olarak adlandırılır.

Örneğin;

$$x'(t) = -\frac{1}{(t+1)} x'(t-1) + x(t-2) + 5sint,$$

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t - \tau(t)), x'(t - \tau(t))\big),$$

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t), x(t - \tau(t)), x'(t - \tau(t)), x''(t - \tau(t))\big)$$

denklemleri neutral tipten sapma argümanlı diferansiyel denklemlerdir.

2.2. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Temel Teorisi

Verilen α, β $(\alpha \leq \beta)$ sayıları için $C([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n)$ ile $[\alpha,\beta]$ kapalı aralığından $\mathbb{R}^n$ üzerine tanımlanmış olan sürekli fonksiyonlar uzayını gösterelim. Bu uzayda verilen herhangi $\varphi \in C([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun normunu $\|\varphi\| = sup_{\alpha\leq\theta\leq,\beta}|\varphi(\theta)|$ olarak tanımlayalım. Bu norm altında $C([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n)$ fonksiyon uzayı bir Banach uzayıdır.

$r > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ ve $A \geq 0$ için $C([\sigma - r, \sigma + A),\mathbb{R}^n)$ ve $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ sırasıyla $[\sigma - r, \sigma + A)$ dan $\mathbb{R}^n$ ye ve $[-r,0]$ dan $\mathbb{R}^n$ ye tanımlanmış sürekli fonksiyonlar uzayı olsun.

Şimdi keyfi $x \in C([\sigma - r, \sigma + A),\mathbb{R}^n)$ sürekli fonksiyonu alınsın. Bu x sürekli fonksiyonundan yeni sürekli fonksiyonlar elde edilecektir. Şöyle ki her $t \in [\sigma, \sigma + A]$ için

$$[\sigma, \sigma + A] \to \mathbb{R}^n$$

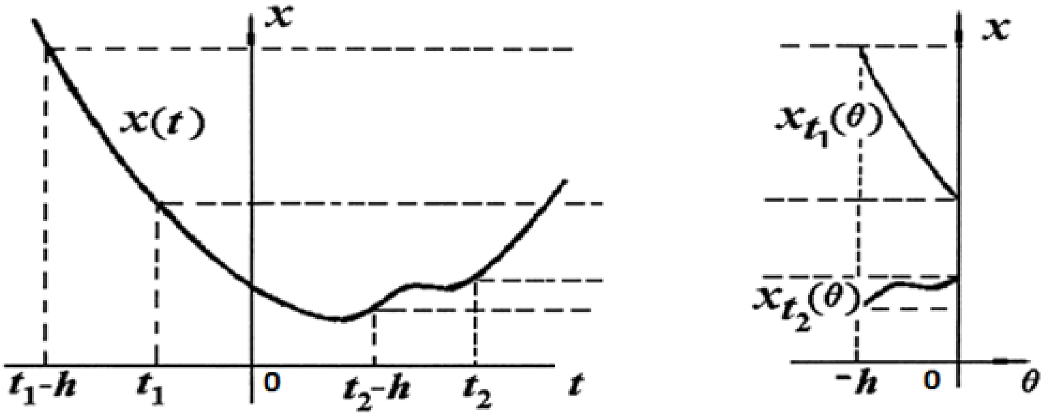
$$t \to x_t$$

öyle ki $\theta \in [-r, 0]$ olmak üzere

$$x_t : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$$

$$x_t(\theta) = x(t + \theta)$$

x_t fonksiyonu aslında x fonksiyonunun bir kesitidir. Yani x_t fonksiyonunun değer kümesi x fonksiyonunun değer kümesinin bir alt kümesidir (Şekil 1.1).



Şekil 1.1. x fonksiyonundan x_t fonksiyonuna geçişin geometrik yorumu (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999).

$\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ ve $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon ve " $'$ " ile x fonksiyonunun sağ türevini gösterelim. Bu tanımlar altında

$$x'(t) = f(t, x_t) \tag{2.2.1}$$

diferansiyel denklemine **gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem** (Retarded Functional Differential Equation, $RFDE(f)$) denir (Kuang, 1993).

Eğer $f(t, x_t) = L(t, x_t) + h(t)$ eşitliğinde $L(t, x_t)$, x_t ye göre lineer ise (2.2.1) denklemi lineer, $h(t) \equiv 0$ ise lineer homojen, $h(t) \not\equiv 0$ ise lineer homojen olmayan denklem denir.

Ayrıca $f(t, x_t) = f(x_t)$ ise yani f, t ye bağlı olmayan bir fonksiyon ise otonom ve diğer durumlarda otonom olmayan denklem olarak adlandırılır (Kuang, 1993).

Tanım 2.2.1.

$\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ kompakt bir küme $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere her $(t, \phi_i) \in \Omega$, $i = 1,2$ için $|f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2)| \leq k|\phi_1 - \phi_2|$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $k > 0$ sayısı varsa $f(t, \phi)$ fonksiyonu ϕ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyor denir (Kuang, 1993).

Tanım 2.2.2.

$t_0 \geq 0$ ve $\varphi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu $H \geq 0$ için $\|\varphi\| \leq H$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer herhangi $A \geq 0$ sayısı için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $x_t(t_0, \varphi)$ fonksiyonuna başlangıç fonksiyonu φ fonksiyonu olan (2.2.1) denkleminin bir çözümüdür denir.

i. $t_0 \leq t \leq t_0 + A$ olacak şekilde her bir t sayısı için $x_t(t_0, \varphi) \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu tanımlı ve $\|x_t(t_0, \varphi)\| \leq H$ dır.

ii. $x_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$.

iii. $x_t(t_0, \varphi)$ fonksiyonu (2.2.1) denklemini her bir $t_0 \leq t \leq t_0 + A$ için sağlar (Hale, 1963).

Eğer $t_0 = 0$ ise $x(t_0, \varphi)$ fonksiyonu $x(\varphi)$ ile gösterilir.

$f(t, \varphi)$ fonksiyonu φ fonksiyonuna göre sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlıyor ve t değişkenine göre de sürekli ise (2.2.1) denkleminin bir çözümü vardır ve bu çözüm her bir φ başlangıç fonksiyonu için tektir. Ayrıca $x(t_0, \varphi)$ fonksiyonu φ fonksiyonuna sürekli olarak bağlıdır (Hale, 1963).

(2.2.1) denkleminde $f(t, \varphi) = f(\varphi)$ fonksiyonu homojen ve toplanabilir ise yani lineer ise denklemimize sabit katsayılı lineer fonksiyonel diferansiyel denklem denir (Hale, 1963).

Tanım 2.2.3.

$\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ ve $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon,

$$x'(t) = f(t, x_t) \tag{2.2.2}$$

gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem ve $\phi \in C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ olsun.

$\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $f(t, 0) = 0$ olsun. Eğer her $\sigma \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(\sigma, \varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $\phi \in B(0, \delta)$ olmak üzere $t \geq \sigma$ için $x_t(\sigma, \phi) \in B(0, \varepsilon)$ ise (2.2.2) denkleminin $x = 0$ çözümü kararlıdır denir.

Eğer denklemin sıfır çözümü kararlı ve $\exists\, b_0 = b_0(\sigma) > 0$ vardır öyle ki $\phi \in B(0, b_0)$ olmak üzere $t \to \infty$ iken $x(\sigma, \phi)(t) \to 0$ ise (2.2.2) denkleminin $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır denir. $\delta = \delta(\epsilon)$ ise yani δ, σ dan bağımsız ise (2.2.2) denkleminin $x = 0$ çözümü düzgün kararlıdır denir (Hale,1977).

Neutral gecikmeli diferansiyel denklemlerin genel sınıflandırmasının tanımı için "atomik" (atomic) tanımına ihtiyaç vardır. Şimdi bu tanımı verelim.

X ve Y birer Banach uzayı, $\mathbb{L}(X, Y)$ ile X den Y ye tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin Banach uzayı gösterilsin. $\lambda \in \Lambda$ için $L(\lambda) \in \mathbb{L}(C, \mathbb{R}^n)$ olsun. Bu taktirde Riesz Temsil Teoreminden η, elemanları $[-r, 0]$ üzerinde tanımlı sınırlı salınımlı $(n \times n)$ matris fonksiyonu vardır ki

$$L(\lambda)(\phi) = \int_{-r}^{0} \phi(\theta) d_\theta \eta(\lambda, \theta)$$

ifadesi geçerlidir. Burada $\int_{-r}^{0} \phi(\theta) d_\theta \eta(\lambda, \theta)$ Riemann–Stieltjes integralini ve d_θ integral değişkeninin θ olduğunu göstermektedir (Kuang, 1993).

Tanım 2.2.4.

$\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$A(\lambda, \beta, L) = \eta(\lambda, \beta^+) - \eta(\lambda, \beta^-)$$

matrisi $\lambda = \lambda_0$ noktasında singüler değilse $L(\lambda)$, λ_0 noktasında $\boldsymbol{\beta}$ **da atomiktir** denir. Eğer $A(\lambda, \beta, L)$ matrisi $K \subset \Lambda$ kümesi üzerindeki her noktada singüler değilse bu taktirde $L(\lambda)$, K kümesi üzerinde β da atomiktir denir (Kuang, 1993).

Bu tanım sadece lineer dönüşümler için geçerlidir. Şimdi aşağıda lineer olmayan dönüşümler için de geçerli olan tanım verelim.

Tanım 2.2.5.

Kabul edelim ki $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ ve $D: \Omega \to \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $D(t, \phi)$ sürekli ve ϕ ye göre lineer, birinci ve ikinci Frechet türevleri mevcut ise D ye Ω üzerinde β da atomiktir denir.

Eğer $D(t,\phi)$, ϕ ye göre lineer, (t,ϕ) ye göre sürekli ve

$$D(t,\phi) = \int_{-r}^{0} \phi(\theta) d_\theta \eta(\lambda,\theta)$$

ise o zaman $A(t,\phi,\beta) = A(t,\beta)$ dir, yani $A(t,\phi,\beta)$, ϕ den bağımsızdır. Bu durumda eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\det A(t,\beta) \neq 0$ ise $D(t,\phi)$, $\mathbb{R} \times C$ üzerinde β da atomiktir.

Örneğin $\beta \in [-r,0)$ olmak üzere

$$D(t,\phi) = \phi(0) + B(t)\phi(\beta)$$

olsun. Bu durumda $A(t,\beta) = B(t)$ dir. Eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\det B(t) \neq 0$ ise $D(t,\phi)$, $\mathbb{R} \times C$ üzerinde β da atomiktir. Ayrıca $A(t,0) = I$ ise $D(t,\phi)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ için 0 (sıfır) da atomiktir (Kuang, 1993).

2.3. Neutral Tipli Denklemler ve Temel Özellikleri

Tanım 2.3.1.

Kabul edelim ki $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ açık bir küme, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $D\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonlar ve D, sıfır noktasında atomik olsun. Bu durumda

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \tag{2.3.1}$$

bağıntısı **Neutral Fonksiyonel Diferansiyel Denklem**, $(NFDD(D,f))$ ve D fonksiyonu da $NFDD(D,f)$ için **fark operatörü** olarak adlandırılır (Hale, 1977).

Tanım 2.3.2.

(2.3.1) neutral fonksiyonel diferansiyel denklemi $(NFDD(D,f))$ verilsin. Eğer $\sigma \in R$, $A > 0$ için

$$x \in C([\sigma - r, \sigma + A), \mathbb{R}^n), \quad (t,x_t) \in \Omega, \quad t \in [\sigma, \sigma + A),$$

ve $D(t,x_t)$ fark operatörü sürekli diferansiyellenebilir olacak şekilde $[\sigma, \sigma + A)$ üzerinde (2.3.1) denklemini sağlayan x fonksiyonuna $NFDD(D,f)$ nin bir çözümü denir. Verilen $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ ve $(\sigma,\phi) \in \Omega$ için $x(\sigma,\phi,D,f)$ fonksiyonuna (2.3.1) denkleminin σ da ϕ başlangıç değerli bir çözümü denir (Hale, 1977).

Tanım 2.3.3.

$D_0(t,\phi)$ ve $L(t,\phi)$, ϕ ye göre lineer fonksiyonlar olmak üzere eğer $D(t,\phi)$ ve $f(t,\phi)$ fonksiyonları $D(t,\phi) = D_0(t,\phi) - g(t)$, $f(t,\phi) = L(t,\phi) + h(t)$ şeklinde yazılabiliyorsa $NFDD(D,f)$ lineer, $g \equiv 0$ ve $h \equiv 0$ ise lineer homojen, $g \not\equiv 0$ ve $h \not\equiv 0$ ise lineer homojen olmayan denklem olarak adlandırılır. $D(t,\phi)$ ve $f(t,\phi)$ "t" ye bağlı değilse $NFDD(D,f)$ otonom denklem olarak adlandırılır (Hale, 1977).

Örnek 2.3.1.

$\forall\, \phi \in C$ için $D(\phi) = \phi(0)$ ise D, 0 (sıfır) da atomiktir. Böylece $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu için (D,f) bir $NFDD$ tanımlar. Sonuç olarak bir gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem neutral fonksiyonel diferansiyel denklemdir (Hale, 1977).

Şimdi tanımlanan D operatörünün 0 (sıfır) da atomik olduğunu gösterelim. $\forall\theta \in [-r,0]$ için η, elemanları $[-r,0]$ üzerinde tanımlı sınırlı salınımlı matris fonksiyonu

$$\eta(\lambda,\theta) = \left(\omega_{i,j}(\theta)\right)$$

$$\omega_{i,j}(\theta) = \begin{cases} 1\ , & i = j \quad \text{ve} \quad \theta = 0 \quad \text{ise} \\ 0\ , & i \neq j \quad \text{ve} \quad -r \leq 0 < 0 \ \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $P_n = \{t_0, t_1,\, t_2 \ldots, t_n\}$ kümesi de

$-r = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 0$ olmak üzere $[-r,0]$ üzerinde herhangi bir parçalanış olsun. Bu taktirde

$$\sum_{j=1}^{n} \phi(t_j)\left[\eta(\lambda,t_j) - \eta(\lambda,t_{j-1})\right] = \phi(t_n) = \phi(0)$$

olduğundan

$$\int_{-r}^{0} \phi(\theta) d_\theta \eta(\lambda,\theta) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} \sum_{j=1}^{n} \phi(t_j)\left[\eta(\lambda,t_j) - \eta(\lambda,t_{j-1})\right]$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} \phi(0) = \phi(0)$$

elde edilir.

Diğer yandan

$$A(t,\theta)=\eta(t,\theta^{+})-\eta(t,\theta^{-})$$

matrisi $\theta=0$ değeri için

$$A(t,0)=\eta(t,0^{+})-\eta(t,0^{-})=\eta(t,0^{+})=\omega_{i,j}(0^{+})$$

elde edilir ki $\omega_{i,j}(0^{+})=\begin{cases}1\ , & i=j\\ 0\ , & i\neq j\end{cases}$ olduğundan $A(t,0)=I_{n\times n}$ birim matrisidir. $\det A(t,0)=\det(I_{n\times n})=1\neq 0$ olduğundan D operatörü 0 (sıfır) da atomiktir.

Örnek 2.3.2.

$r>0$, $B=[b_{ij}]_{nxn}$ sabit bir matris, $D(\phi)=\phi(0)-B\phi(-r)$ ve $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^{n}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere (D,f) çifti bir $NFDD$ tanımlar. Yani,

$$\frac{d}{dt}[x(t)-Bx(t-r)]=f(t,x_t)$$

denklemi bir $NFDD$ dir (Hale, 1977).

Şimdi de verilen örneğimiz için D operatörünün 0 (sıfır) da atomik olduğunu gösterelim. $\theta\in[-r,0]$ olsun ve

$$\eta(\lambda,\theta)=\left(\omega_{i,j}(\theta)\right)$$

$$\omega_{i,j}(\theta)=\begin{cases}1 & \theta=0\ \ \text{ve}\quad i=j\\ b_{ij} & \theta=-r\ \ \text{ve}\quad i\neq j\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $P_n=\{t_0,t_1,\ t_2\ldots,t_n\}$ de $-r=t_0<\ t_1<\ t_2<\cdots<t_n=0$ olmak üzere $[-r,0]$ üzerinde herhangi bir parçalanış olsun. Ayrıca B sabit bir matris olduğundan η, elemanları $[-r,0]$ üzerinde tanımlı sınırlı salınımlı matris fonksiyonudur. Bu taktirde

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\phi(t_j)\left[\eta(\lambda,t_j)-\eta(\lambda,t_{j-1})\right]&=-\phi(t_1)\eta(t,-r)+\phi(0)\eta(t,0)\\&=\eta(t,0)\phi(0)-\eta(t,-r)\phi(t_1)\\&=I\phi(0)-B\phi(t_1)=\phi(0)-B\phi(t_1)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_{-r}^{0}\phi(\theta)d_\theta\eta(\lambda,\theta) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} \sum_{j=1}^{n}\phi(t_j)\left[\eta(\lambda,t_j)-\eta(\lambda,t_{j-1})\right]$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} [\phi(0)-B\phi(t_1)]$$

elde edilir. Diğer yandan $\|P\|\to 0$ iken $t_1\to t_0$ olur ki ϕ sürekli olduğundan $\phi(t_1)\to\phi(t_0)=\phi(-r)$ olur. O halde

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} [\phi(0)-B\phi(t_1)] = \phi(0)-B\phi(-r)$$

yani

$$\int_{-r}^{0}\phi(\theta)d_\theta\eta(\lambda,\theta) = \phi(0)-B\phi(-r) = D(\phi)$$

elde edilir. Böylece

$$A(t,0) = \eta(t,0^+)-\eta(t,0^-) = I_{n\times n}$$

$A(t,0)=I_{n\times n}$ birim matrisidir. $\det(I_{n\times n})\neq 0$ olduğundan D operatörü 0 (sıfır) da atomiktir.

Örnek 2.3.3.

$r>0$, x skaler, $D(\phi)=\phi(0)-\phi^2(-r)$ ve $f{:}\,\Omega\to\mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere (D,f) çifti bir $NFDD$ tanımlar. Yani

$$\frac{d}{dt}[x(t)-x^2(t-r)] = f(t,x_t)$$

denklemi bir $NFDD$ tanımlar (Hale, 1977).

Teorem 2.3.1.

$\sigma\in R$, $\phi\in C$ olmak üzere eğer $\Omega\subset\mathbb{R}\times C$ de açık bir küme ve $(\sigma,\phi)\in\Omega$ ise bu taktirde $NFDD$ (D,f) nin (σ,ϕ) boyunca bir çözümü vardır (Hale, 1977).

Teorem 2.3.2.

$\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ açık ve $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω-nın kompakt kümesi üzerinde ϕ ye göre Lipschitz koşulunu sağlıyorsa bu taktirde her $(\sigma, \phi) \in \Omega$ için $NFDD(D, f)$ nin (σ, ϕ) boyunca tek bir çözümü vardır (Hale, 1977).

2.4. Sonlu Boyutlu Derece Teorisi

Bu bölümde Degla'nın 1997 yılındaki çalışmasından yararlanılarak Brouwer derecesinin tanımı, kabul edilebilir üçlü olma şartı, Brouwer derecesinin bazı temel özellikleri ve Brouwer derecesinin hesaplanması verilmiştir.

Tanım 2.4.1.

$D \subset R^n$ açık sınırlı bir küme, $f \in C(\overline{D})$ olsun. Eğer $f(x_0) = p$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \partial D$ noktası varsa $p \in \mathbb{R}^n$ noktasına f nin sınır görüntüsü denir (Degla, 1997).

Tanım 2.4.2.

$f \in C^1(\overline{D})$ olsun. Eğer

$$\begin{cases} J_f(x_0) = 0 \\ f(x_0) = p \end{cases}$$

sistemini sağlayacak en az bir $x_0 \in \overline{D}$ noktası varsa, $p \in \mathbb{R}^n$ noktasına f nin kritik nokta görüntüsü denir (Degla, 1997).

Tanım 2.4.3.

$f \in C(\overline{D})$ ve $p \in \mathbb{R}^n$ alınsın. Eğer p noktası f nin sınır görüntüsü değilse (f, D, p) üçlüsüne kabul edilebilir üçlü denir (Degla, 1997).

Tanım 2.4.4.

$f \in C^1(\overline{D})$, $p \in \mathbb{R}^n$ alınsın ve p noktası f nin ne sınır görüntüsü ne de kritik nokta görüntüsü olsun.

Bu taktirde, ***f* nin *D* ye göre *p* noktasındaki derecesi**;

$$d(f,D,p) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(p)} sgn\, J_f(x) \ , & f^{-1}(p) \neq \emptyset \\ 0 \ , & f^{-1}(p) = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f^{-1}(p) = f^{-1}(\{p\})$ (Degla, 1997).

2.4.1. Sonlu Boyutlu Derecenin Özellikleri

Bu bölümde sonlu boyutlu derecenin özellikleri Degla (1997)`dan yararlanarak verilmektedir.

Teorem 2.4.1.1. (Toplanabilirlik Özelliği)

$i = 1,2,\dots,m$ olmak üzere D_i kümeleri, birbirleriyle ikişerli kesişimleri boş küme olan $\mathbb{R}^n$ nin açık ve sınırlı bazı alt kümeleri olsun. Eğer $D = \cup_{i=1}^{m} D_i$, $f \in C(\overline{D})$ ve $p \in R^n - f(\partial D)$ ise $i = 1,2,\dots,m$ için (f, D_i, p) üçlüleri kabul edilebilir üçlülerdir

ve

$$d(f,D,p) = \sum_{i=1}^{n} d(f, D_i, p)$$

dir (Degla, 1997).

Teorem 2.4.1.2. (Çıkartma Özelliği)

$f \in C(\overline{D})$ ve $p \in \mathbb{R}^n - f(\partial D)$ alınsın. $p \notin f(K)$ olmak üzere $K \subset \overline{D}$ kompakt olsun. Bu taktirde $(f, D - K, p)$ üçlüsü kabul edilebilir üçlüdür ve

$$d(f,D,p) = d(f, D - K, p)$$

dir (Degla, 1997).

Sonuç 2.4.1.1. (Çıkartma- Parçalama Özelliği)

$f \in C(\overline{D})$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$, olacak şekilde D_1 ve D_2 kümeleri D nin açık alt kümeleri olsun. Bunun yanında kabul edilsin ki $p \notin f\left(\overline{D} - (D_1 \cup D_2)\right)$ olsun. Bu taktirde (f, D, p), (f, D_1, p) ve (f, D_2, p) üçlüleri kabul edilebilir üçlülerdir ve

$$d(f, D, p) = d(f, D_1, p) + d(f, D_2, p)$$

eşitliği sağlanır (Degla, 1997).

Teorem 2.4.1.3. (Varlık Teoremi)

$f \in C(\overline{D})$ ve $p \in \mathbb{R}^n - f(\partial D)$ alınsın. Kabul edilsin ki $d(f, D, p) \neq 0$ olsun. Bu taktirde $\exists x_0 \in D$ öyle ki

$$f(x_0) = p$$

dir (Degla, 1997).

Teorem 2.4.1.4. (Homotopi Altında Değişmezlik Özelliği)

$$H: [0,1] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^n$$

sürekli bir fonksiyon olsun ve $H_t(x) = H(t, x)$ şeklinde tanımlansın. $p \in \mathbb{R}^n$ öyle ki $\forall t \in [0,1]$ ve $\forall x \in \partial D$ için

$$H(t, x) \neq p$$

olsun. Bu taktirde $\forall t \in [0,1]$ için (H_t, D, p) üçlüleri kabul edilebilir üçlülerdir ve t değişkeni $[0,1]$ aralığında değişirken $d(H_t, D, p)$ sabittir.

Özel olarak

$$d(H_0, D, p) = d(H_1, D, p)$$

olur (Degla, 1997).

3. NEUTRAL FARK OPERATÖRLERİ

3.1. Lineer Fark Operatörü

Neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerle bağlantılı olan D operatörüne ait özellikler Lu ve ark. (2011) tarafından incelendi. Bu bölümde Lu ve ark. (2011) tarafından elde edilen sonuçlar verilecektir.

$$\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t) \tag{3.1}$$

neutral fonksiyonel diferansiyel denklemini $(NFDD(D, f)$ ele alalım.

Bu denklemde $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $\tau > 0$ sabit bir sayıdır. $D: C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ lineer, sürekli ve sıfır da atomik, her $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için $f(t + \omega, \varphi) \equiv f(t, \varphi)$ periyodik, $f \in C(R \times (C[-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ ve $\Omega \subset C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ sınırlı kümesi için $f([0, \omega] \times \Omega)$ kümesi $\mathbb{R}^n$ de sınırlıdır.

D operatörü

$$D: C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, \quad D(\varphi) = \varphi(0) - B\varphi(-\tau) \tag{3.2}$$

şeklinde olsun. Burada $B = [b_{ij}]_{nxn}$ reel değerli bir matris, $\tau > 0$ bir sabittir.

Tanım 3.1.

$D: C \to \mathbb{R}^n$ lineer, sürekli, sıfır da atomik ve $C_D = \{\phi \in C: D\phi = 0\}$ olsun. Eğer

$$Dy_t = 0, \ t \geq 0, \ y_0 = \psi \in C_D$$

homojen "fark" denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik olarak kararlı ise D operatörü kararlıdır denir (Hale, 1977).

Teorem 3.1.

$\Omega \subset C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ açık ve D kararlı ise (3.1) denklemi için herhangi bir ω-periyodik çözümü sürekli birinci türeve sahiptir (Hale, 1977).

Burada şöyle bir soru akla gelmektedir. D operatörü kararsız olması durumunda (3.1) denkleminin herhangi bir periyodik çözümü sürekli birinci türeve sahip midir?

3.1.1. D-operatörünün özellikleri

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{C}^n$ kompleks vektör ve $|a| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2}$, $H = [h_{ij}]_{nxn}$ kompleks matrisi ve $|H| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|h_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$ olsun.

$C_\omega = \{x : x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), x(t+\omega) \equiv x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ $|\varphi|_{C_\omega} = max_{t\in[0,\omega]}|\varphi(t)|$,

$C_\omega^1 = \{x : x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), x(t+\omega) \equiv x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ $|\varphi|_{C_\omega^1} = max\left\{|\varphi|_{C_\omega}, |\varphi'|_{C_\omega}\right\}$,

$P_\omega = \{x : x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$ $|\varphi|_\infty = max_{t\in[0,\omega]}|\varphi(t)|$,

$P_\omega^1 = \{x : x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$ $\|\varphi\| = max\left\{|\varphi|_\infty, |\varphi'|_\infty\right\}$,

$T_\omega = \{x = (x_1, x_2, \dots x_n) : x_i \in P_\omega, i = 1,2, \dots, n\}$ $|x|_{T_\omega} = max_{t\in[0,\omega]}|x(t)|$,

$T_\omega^1 = \{x = (x_1, x_2, \dots x_n) : x_i \in P_\omega^1, i = 1,2, \dots, n\}$ $|x|_{T_\omega^1} = \max\left\{|x|_{T_\omega}, |x'|_{T_\omega}\right\}$.

$C_\omega, C_\omega^1, P_\omega, P_\omega^1, T_\omega$ ve T_ω^1 tanımlanan normlara göre birer Banach uzaylarıdır. (3.2) de verilen D operatörünün tanımından

$$D(x_t) = x_t(0) - Bx_t(-\tau) = x(t) - Bx(t-\tau) \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir.

$$A : C_\omega \to C_\omega,\ [Ax](t) = x(t) - Bx(t-\tau) \tag{3.4}$$

olmak üzere herhangi $h \in C_\omega$ için

$$D(x_t) = h(t) \tag{3.5}$$

fark sisteminin $u(t)$ sürekli ω-periyodik çözümünün varlığı,

$$[Ax](t) = h(t) \tag{3.6}$$

fark sisteminin $u(t)$ sürekli ω-periyodik çözümünün varlığına denktir.

Böylece (3.5) denklemi için sürekli ω-periyodik çözümünün varlığını araştırmak için (3.6) nın sürekli ω-periyodik çözümüne sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Diğer yandan $B = [b_{ij}]_{nxn}$ reel değerli bir matris olduğundan, kompleks değerli U matrisi vardır öyle ki

$$UBU^{-1} = E_\lambda = diag(J_1, J_2, \dots, J_l) \tag{3.7}$$

Jordan normal matrisidir. Burada her bir J_i ;

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

$\sum_{i=1}^{l} = n$ olmak üzere Jordan blok matrisleridir. $\{\lambda_i : i = 0, 1, 2, \dots, l\}$ kümesi de B matrisinin öz değerlerinin kümesidir.

$\forall t \in [0, \omega]$ ve $i = 1, 2, \dots, l$ için A_i dönüşümü

$$A_i : P_\omega \to P_\omega$$

$$[A_i y](t) = y(t) - \lambda_i y(t - \tau) \tag{3.8}$$

şeklinde olsun. Bu takdirde;

Lemma 3.1.

$|\lambda_i| \neq 1$ ise $A_i^{-1} : P_\omega \to P_\omega$ olacak şekilde aşağıdaki özellikleri sağlayan A_i nin tersi vardır.

1. $\forall e \in P_\omega$ için

$$[A_i^{-1} e](t) = \begin{cases} \sum_{j \geq 0} \lambda_i^{\,j} e(t - j\tau) & |\lambda_i| < 1 \\ -\sum_{j \geq 0} \lambda_i^{-j-1} e(t + (j+1)\tau) & |\lambda_i| > 1; \end{cases}$$

2. $\|A_i^{-1}\| \leq \frac{1}{|1 - |\lambda_i||}$;

3. $e \in P_\omega$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$\int_0^\omega \left|[A_i^{-1} e](t)\right|^p dt \leq \frac{1}{|1 - |\lambda_i||^p} \int_0^\omega |e(t)|^p dt$ (Lu ve ark., 2011).

İspat: $i = 1, 2, \ldots, l$ ve $t \in [0, \omega]$ için $A_i: P_\omega \to P_\omega$, $[A_i y](t) = y(t) - \lambda_i y(t-\tau)$ olsun. Keyfi $y \in KerA_i$ alalım. O halde $y(t) - \lambda_i y(t-\tau) = 0$ olur. $|\lambda_i| < 1$ ise, $y(t) - \lambda_i y(t-\tau) = 0$ denkleminde $(t \to t-\tau)$ dönüşümü yapılır ve

$$y(t) = \lambda_i y(t-\tau)$$

$$y(t-\tau) = \lambda_i y(t-2\tau)$$

$$y(t-2\tau) = \lambda_i y(t-3\tau)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y(t-(k-1)\tau) = \lambda_i y(t-k\tau)$$

denklemler taraf tarafa çarpılır ise $y(t) = {\lambda_i}^k y(t-k\tau)$ elde edilir. $|\lambda_i| < 1$ olduğundan $k \to \infty$ için limit alınırsa $y(t) = 0$ bulunur.

Benzer şekilde $|\lambda_i| > 1$ için $y(t) - \lambda_i y(t-\tau) = 0$ denkleminde $(t \to t+\tau)$ dönüşümü yapılır ise $y(t) = {\lambda_i}^{-k} y(t+k\tau)$ bulunur. $k \to \infty$ için limit alınırsa $y(t) = 0$ elde edilir. Böylece $KerA_i = \{0\}$ olduğundan A_i dönüşümü bire-birdir. Şimdi A_i dönüşümünün örten olduğunu gösterelim.

$|\lambda_i| < 1$ ve $e \in P_\omega$ olsun. Bu durumda

$$A_i\left[\sum_{j\geq 0} {\lambda_i}^j e(t-j\tau)\right] = \sum_{j\geq 0} {\lambda_i}^j e(t-j\tau) - \lambda_i \sum_{j\geq 0} {\lambda_i}^j e(t-(j+1)\tau)$$

$$= e(t)$$

ve diğer yandan $|\lambda_i| > 1$ için

$$A_i\left[-\sum_{j\geq 0} {\lambda_i}^{-j-1} e(t+(j+1)\tau)\right] = -\sum_{j\geq 0} {\lambda_i}^{-j-1} e(t+(j+1)\tau)$$

$$-\lambda_i \sum_{j\geq 0} {\lambda_i}^{-j-1} e(t+(j+1)\tau)$$

$$= e(t)$$

olduğundan A_i dönüşümü örtendir. Böylece ${A_i}^{-1}$ ters operatörü vardır. O halde şimdi $\left[{A_i}^{-1} e\right](t)$ fonksiyonunu bulalım.

1. İspatımızı sırasıyla $|\lambda_i| < 1$ ve $|\lambda_i| > 1$ değerleri için ayrı ayrı gösterelim. Eğer $|\lambda_i| < 1$ ise, $y(t) - \lambda_i y(t-\tau) = e(t)$ denkleminde $(t \to t-\tau)$ dönüşümü ile

$$y(t) = \lambda_i y(t-\tau) + e(t)$$

$$y(t-\tau) = \lambda_i y(t-2\tau) + e(t-\tau)$$

$$y(t-2\tau) = \lambda_i y(t-3\tau) + e(t-2\tau)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y(t-(k-1)\tau) = \lambda_i y(t-k\tau) + e(t-(k-1)\tau)$$

denklemleri elde edilir. Şimdi her bir denklem sırasıyla $1, \lambda_i, \lambda_i^{\,2}, \dots, \lambda_i^{\,k-1}$ çarpanları ile çarpılır ve denklemler taraf tarafa toplanır ise $y(t) = \lambda_i^{\,k} y(t-k\tau) + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_i^{\,j} e(t-j\tau)$ bulunur. $|\lambda_i| < 1$ olduğundan $k \to \infty$ için limit alınırsa $y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_i^{\,j} e(t-j\tau)$ elde edilir.

Diğer yandan $|\lambda_i| > 1$ ise, benzer şekilde $y(t) - \lambda_i y(t-\tau) = e(t)$ denkleminde $(t \to t+\tau)$ dönüşümü ile

$$y(t+\tau) = \lambda_i y(t) + e(t+\tau)$$

$$y(t+2\tau) = \lambda_i y(t+\tau) + e(t+2\tau)$$

$$y(t+3\tau) = \lambda_i y(t+2\tau) + e(t+3\tau)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y(t+k\tau) = \lambda_i y(t+(k-1)\tau) + e(t+k\tau)$$

elde edilir. Her bir denklem sırasıyla $\lambda_i^{\,-1}, \lambda_i^{\,-2}, \dots, \lambda_i^{\,-k}$ çarpanları ile çarpılır ve denklemler taraf tarafa toplanır ise $\lambda_i^{\,-k} y(t+k\tau) = y(t) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_i^{\,-j} e(t+j\tau)$ yani $\lambda_i^{\,-k} y(t+k\tau) = y(t) + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_i^{\,-j-1} e(t+(j+1)\tau)$ denklemi elde edilir. Buradan $|\lambda_i| > 1$ olduğundan $k \to \infty$ için limit alınırsa $y(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_i^{\,-j-1} e(t+(j+1)\tau)$ elde edilir. ■

2. $|\lambda_i| < 1$ olsun. Yukarıda elde edilen A_i^{-1}dönüşümünün tanımı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılır ise

$$
\begin{aligned}
\left|A_i^{-1}e\right|_\infty &= max_{t\in[0,\omega]}\left|\left[A_i^{-1}e\right](t)\right| = max_{t\in[0,\omega]}\left|\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_i^{\,j}e(t-j\tau)\right| \\
&\le max_{t\in[0,\omega]}\left\{\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\left|\lambda_i^{\,j}\right||e(t-j\tau)|\right\} \\
&= max_{t\in[0,\omega]}\left\{|e(t)| + |\lambda_i||e(t-\tau)| + \left|\lambda_i^{\,2}\right||e(t-2\tau)| \right. \\
&\quad \left. + \cdots + |\lambda_i^{\,n}||e(t-n\tau)| + \cdots\right\} \\
&\le max_{t\in[0,\omega]}|e(t)| + |\lambda_i| max_{t\in[0,\omega]}|e(t-\tau)| \\
&\quad + \left|\lambda_i^{\,2}\right| max_{t\in[0,\omega]}|e(t-2\tau)| + \cdots + |\lambda_i^{\,n}| max_{t\in[0,\omega]}|e(t-n\tau)| + \cdots \\
&= |e|_\infty + |\lambda_i||e|_\infty + |\lambda_i|^2|e|_\infty + \cdots + |\lambda_i|^n|e|_\infty + \cdots \\
&= \frac{1}{1-|\lambda_i|}|e|_\infty
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan $\left|A_i^{-1}e\right|_\infty \le \frac{1}{1-|\lambda_i|}|e|_\infty$ olur ve böylece $\left\|A_i^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-|\lambda_i|}$ elde edilir.

Diğer yandan $|\lambda_i| > 1$ olsun. Benzer şekilde yukarıda $|\lambda_i| > 1$ için elde edilen A_i^{-1}dönüşümünün tanımı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılır ise

$$
\begin{aligned}
\left|A_i^{-1}e\right|_\infty &= max_{t\in[0,\omega]}\left|\left[A_i^{-1}e\right](t)\right| = max_{t\in[0,\omega]}\left|-\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_i^{\,-j-1}e(t+(j+1)\tau)\right| \\
&\le max_{t\in[0,\omega]}\left\{\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\left|\lambda_i^{\,-j-1}\right||e(t+(j+1)\tau)|\right\} \\
&= max_{t\in[0,\omega]}\left\{\left|\lambda_i^{\,-1}\right||e(t+\tau)| + \left|\lambda_i^{\,-2}\right||e(t+2\tau)| + \left|\lambda_i^{\,-3}\right||e(t+3\tau)| \right. \\
&\quad \left. + \cdots + |\lambda_i^{\,-n}||e(t+n\tau)| + \cdots + \cdots\right\} \\
&\le \left|\lambda_i^{\,-1}\right| max_{t\in[0,\omega]}|e(t+\tau)| + \left|\lambda_i^{\,-2}\right| max_{t\in[0,\omega]}|e(t+2\tau)| \\
&\quad + \left|\lambda_i^{\,-3}\right| max_{t\in[0,\omega]}|e(t+3\tau)| + \cdots + |\lambda_i^{\,-n}| max_{t\in[0,\omega]}|e(t+n\tau)| + \cdots \\
&= \left|\lambda_i^{\,-1}\right||e|_\infty + \left|\lambda_i^{\,-2}\right||e|_\infty + \left|\lambda_i^{\,-3}\right||e|_\infty + \cdots + |\lambda_i^{\,-n}||e|_\infty + \cdots \\
&= |\lambda_i|^{-1}|e|_\infty + |\lambda_i|^{-2}|e|_\infty + |\lambda_i|^{-3}|e|_\infty + \cdots + |\lambda_i|^{-n}|e|_\infty + \cdots \\
&= \frac{1}{|\lambda_i|-1}|e|_\infty
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $\left|A_i^{-1}e\right|_\infty \le \frac{1}{|\lambda_i|-1}|e|_\infty$ bulunur ve dolayısıyla $\left\|A_i^{-1}\right\| \le \frac{1}{|\lambda_i|-1}$ sağlanır. $|\lambda_i| < 1$ ve $1 < |\lambda_i|$ eşitsizlikleri birlikte düşünüldüğünde $\left\|A_i^{-1}\right\| \le \frac{1}{||\lambda_i|-1|}$ eşitsizliği de elde edilmiş olur.■

3. $e \in P_\omega$ ve $|\lambda_i| < 1$ olsun. ${A_i}^{-1}$dönüşümünün tanımından

$$\int_0^\omega \left|[{A_i}^{-1}e](t)\right|^p dt = \int_0^\omega \left|\sum_{j=0}^{\infty} {\lambda_i}^j e(t-j\tau)\right|^p dt$$

eşitliği yazılabilir. $\left(\int_0^\omega \left|\sum_{j=0}^{\infty} {\lambda_i}^j e(t-j\tau)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ ifadesi için de Minkowski eşitsizliği kullanılır ise $\left(\int_0^\omega \left|\sum_{j=0}^{\infty} {\lambda_i}^j e(t-j\tau)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_i|^j \left(\int_0^\omega |e(t-j\tau)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ elde edilir. Diğer taraftan son eşitsizlikte $u = t - j\tau$ dönüşümü ve $e(t)$ fonksiyonunun ω-periyodikliği kullanılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_i|^j \left(\int_0^\omega |e(t-j\tau)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_i|^j \left(\int_{-j\tau}^{\omega-j\tau} |e(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_i|^j \left(\int_0^\omega |e(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{1}{1-|\lambda_i|} \left(\int_0^\omega |e(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^\omega \left|[{A_i}^{-1}e](t)\right|^p dt = \int_0^\omega \left|\sum_{j=0}^{\infty} {\lambda_i}^j e(t-j\tau)\right|^p dt \leq \frac{1}{(1-|\lambda_i|)^p} \int_0^\omega |e(u)|^p du$$

$$\int_0^\omega \left|[{A_i}^{-1}e](t)\right|^p dt \leq \frac{1}{(1-|\lambda_i|)^p} \int_0^\omega |e(t)|^p dt$$

elde edilir.

Diğer taraftan $|\lambda_i| > 1$ olsun ve ${A_i}^{-1}$dönüşümünün $|\lambda_i| > 1$ için elde edilen tanımı kullanılır ise

$$\int_0^\omega \left|[{A_i}^{-1}e](t)\right|^p dt = \int_0^\omega \left|-\sum_{j\geq 0} {\lambda_i}^{-j-1} e(t+(j+1)\tau)\right|^p dt$$

eşitliği yazılır. $\left(\int_0^\omega \left|-\sum_{j\geq 0} {\lambda_i}^{-j-1} e(t+(j+1)\tau)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ ifadesi için de Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\left(\int_0^\omega \left|-\sum_{j\geq 0} {\lambda_i}^{-j-1} e(t+(j+1)\tau)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_i|^{-j-1} \left(\int_0^\omega |e(t+(j+1)\tau)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. $u = t + (j+1)\tau$ dönüşümü yapılır ve $e(t)$ fonksiyonunun ω-periyodik olduğu da kullanılır ise

$$\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_i|^{-j-1}\left(\int_0^{\omega}|e(t+(j+1)\tau)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_i|^{-j-1}\left(\int_{(j+1)\tau}^{\omega+(j+1)\tau}|e(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_i|^{-j-1}\left(\int_0^{\omega}|e(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{1}{|\lambda_i|-1}\left(\int_0^{\omega}|e(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^{\omega}\left|[A_i{}^{-1}e](t)\right|^p dt = \int_0^{\omega}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_i{}^{-j-1}e(t+(j+1)\tau)\right|^p dt$$

$$\leq \frac{1}{(|\lambda_i|-1)^p}\int_0^{\omega}|e(u)|^p du$$

yani

$$\int_0^{\omega}\left|[A_i{}^{-1}e](t)\right|^p dt \leq \frac{1}{(|\lambda_i|-1)^p}\int_0^{\omega}|e(t)|^p dt$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizlikler birlikte düşünüldüğünde

$$\int_0^{\omega}\left|[A_i{}^{-1}e](t)\right|^p dt \leq \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^p}\int_0^{\omega}|e(t)|^p dt$$

eşitsizliği yazılabilir ve böylece Lemma 3.1`in ispatı tamamlamış olur. ■

Teorem 3.2.

U matrisi ile A operatörü sırasıyla (3.7) ve (3.4) de tanımlandığı gibi ve her $i = 1, 2, \ldots, l$ için $|\lambda_i| \neq 1$ olsun. O zaman A operatörünün aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde $A^{-1} : C_\omega \to C_\omega$ tersi mevcuttur.

1. $\|A^{-1}\| \leq |U^{-1}||U|\sigma_0$,
   burada $\sigma_0 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}$.
2. $\forall f \in C_\omega$ için $\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](s)|^p ds \leq |U^{-1}|^p|U|^p\sigma_1 \int_0^{\omega}|f(s)|^p ds$, $p \in [1, \infty)$
   eşitsizlikleri sağlanır. Burada σ_1

$$\sigma_1 = \begin{cases} \left[2^{n-1} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-|\lambda_i|}\right)^k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, & p = 1 \\ n^{\frac{2-p}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-|\lambda_i|}\right)^k\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}, & p \in (1,2) \\ \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-|\lambda_i|}\right)^k\right)^2, & p = 2 \\ \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-|\lambda_i|}\right)^k\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}, & p \in (2,\infty) \end{cases}$$

şeklinde ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $q>1$ bir sabittir (Lu ve ark., 2011).

İspat: $f \in C_\omega$ olmak üzere

$$x(t) - Bx(t-\tau) = f(t) \tag{3.9}$$

fark sistemini göz önüne alalım. $x(t) = U^{-1}y(t)$ dönüşümü ile

$$y(t) - E_\lambda y(t-\tau) = Uf(t) = g(t) \tag{3.10}$$

elde edilir ki bu denklemde $g, y \in T_\omega$ dir. Yani

$$y(t) = \left(y_{1,1}(t), \dots, y_{1,n_1}(t), \dots, y_{i,1}(t), \dots, y_{i,n_i}(t), \dots, y_{l,1}(t), \dots, y_{l,n_l}(t)\right)^T$$

$$g(t) = \left(g_{1,1}(t), \dots, g_{1,n_1}(t), \dots, g_{i,1}(t), \dots, g_{i,n_i}(t), \dots, g_{l,1}(t), \dots, g_{l,n_l}(t)\right)^T$$

şeklindedir. (3.10) denkleminden

$$y_{i,n_i}(t) - \lambda_i y_{i,n_i}(t-\tau) = g_{i,n_i}(t) \tag{3.11}$$

ve $j = 1,2,\dots,n_i - 1,\ i = 1,2,\dots,l$ için

$$y_{i,j}(t) - \lambda_i y_{i,j}(t-\tau) - y_{i,j+1}(t-\tau) = g_{i,j}(t) \tag{3.12}$$

olarak yazılabilir. Burada $y_{i,n_i}, y_{i,j} \in P_\omega$ ve $|\lambda_i| \neq 1$ olduğundan Lemma 3.1, (3.11) denklemine uygulanır ise

$$\left|y_{i,n_i}\right|_\infty \leq \left\|[A_i^{-1}\right\|\left|g_{i,n_i}\right|_\infty \leq \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left|g_{i,n_i}\right|_\infty \tag{3.13}$$

ve

$$\int_0^{\omega}\left|y_{i,n_i}(t)\right|^p dt = \int_0^{\omega}\left|[A_i{}^{-1}g_{i,n_i}](t)\right|^p dt \leq \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^p \int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt \tag{3.14}$$

eşitsizlikleri elde edilir. A_i dönüşümünün tersi, $A_i{}^{-1}$ var ve sınırlı olduğundan (3.11) denkleminin $y_{i,n_i}(t) = [A_i{}^{-1}g_{i,n_i}](t)$ olacak şekilde bir tek $y_{i,n_i}(t)$ çözümü vardır. Tamamen benzer şekilde $j = n_i - 1$ için (3.12)`ye Lemma 3.1 uygulanır ise

$$\left|y_{i,n_i-1}\right|_{\infty} \leq \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left[\left|g_{i,n_i-1}\right|_{\infty} + \left|y_{i,n_i}\right|_{\infty}\right] \tag{3.15}$$

eşitsizliği ile birlikte ve diğer taraftan da

$$\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,n_i-1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\omega}\left|A_i{}^{-1}\left[g_{i,n_i-1} + y_{i,n_i}(t-\tau)\right]\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^{\omega}\left|[A_i{}^{-1}g_{i,n_i-1}](t) + [A_i{}^{-1}y_{i,n_i}](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olur ki, Minkowski eşitsizliği de kullanılırsa

$$\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,n_i-1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left[\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i-1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right] \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen ifadelerden yararlanarak (3.13) eşitsizliği (3.15) de;

$$\left|y_{i,n_i-1}\right|_{\infty} \leq \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left|g_{i,n_i-1}\right|_{\infty} + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^2\left|g_{i,n_i}\right|_{\infty} \tag{3.17}$$

ve benzer şekilde (3.14) eşitsizliği de (3.16) da yerine yazılırsa

$$\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,n_i-1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i-1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^2\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.18}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu durumda da (3.12) denkleminin $y_{i,n_i-1}(t) = A_i{}^{-1}\left(g_{i,n_i-1}\right)$ olacak şekilde bir tek $y_{i,n_i-1}(t)$ çözümü vardır.

Diğer durumlar yani y_{i,n_i-2}, y_{i,n_i-3},..., $y_{i,2}$, $y_{i,1}$ için de tamamen benzer şekilde yapılırsa

$$\left|y_{i,n_i-2}\right|_\infty \le \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left|g_{i,n_i-2}\right|_\infty + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^2 \left|g_{i,n_i-1}\right|_\infty + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^3 \left|g_{i,n_i}\right|_\infty \tag{3.19}$$

$\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,$ $\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,$

$$\left|y_{i,2}\right|_\infty \le \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left|g_{i,2}\right|_\infty + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^2 \left|g_{i,3}\right|_\infty + \cdots + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^{n_i-1} \left|g_{i,n_i}\right|_\infty \tag{3.20}$$

$$\left|y_{i,1}\right|_\infty \le \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left|g_{i,1}\right|_\infty + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^2 \left|g_{i,2}\right|_\infty + \cdots + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^{n_i} \left|g_{i,n_i}\right|_\infty \tag{3.21}$$

ve (3.13), (3.17) eşitsizlikleriyle birlikte yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}\right|_\infty \le \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left|g_{i,1}\right|_\infty + \left[\frac{1}{|1-|\lambda_i||} + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^2\right]\left|g_{i,2}\right|_\infty$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{|1-|\lambda_i||} + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^{n_i}\right]\left|g_{i,n_i}\right|_\infty$$

yani

$$\sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}\right|_\infty \le \sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{|1-|\lambda_i||^k}\right)\left|g_{i,j}\right|_\infty \tag{3.22}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$\left(\int_0^\omega \left|y_{i,n_i-2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left(\int_0^\omega \left|g_{i,n_i-2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^2 \left(\int_0^\omega \left|g_{i,n_i-1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^3 \left(\int_0^\omega \left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.23}$$

$\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,$ $\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,$

$$\left(\int_0^\omega \left|y_{i,2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{|1-|\lambda_i||}\left(\int_0^\omega \left|g_{i,2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^2 \left(\int_0^\omega \left|g_{i,3}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^{n_i-1} \left(\int_0^\omega \left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.24}$$

$$\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}\right)^2\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}\right)^{n_i}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.25}$$

(3.14) ve (3.18) eşitsizlikleriyle birlikte yukarıdaki eşitsizlikler de taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{j=1}^{n_i}\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}\right]\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left[\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}+\left(\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}\right)^2\right]\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}+\left(\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}\right)^2\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}\right)^{n_i}\right]\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

yani

$$\sum_{j=1}^{n_i}\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \tag{3.26}$$

eşitsizliği elde edilir.

1. (3.11) ve (3.12) denklemleri tek bir çözüme sahip olduğundan

$$y(t)-E_{\lambda}y(t-\tau)=g(t)$$

denkleminin de bir tek $y \in T_{\omega}$ çözümü vardır. Diğer yandan

$$|y|_{T_{\omega}} = max_{t\in[0,\omega]}|y(t)| = max_{t\in[0,\omega]}\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left|y_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left|y_{i,j}\right|_{\infty}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left|y_{i,j}\right|_{\infty}$$

olduğundan ve ayrıca (3.22) den

$$|y|_{T_{\omega}} \leq \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)\left|g_{i,j}\right|_{\infty}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k} |g|_{T_\omega}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k} |Uf|_{T_\omega}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k} |U||f|_{C_\omega}$$

elde edilir ki böylece (3.9) denklemi

$$max_{t\in[0,\omega]}|x(t)| \leq |U^{-1}||y|_{T_\omega} \leq |U||U^{-1}| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k} |f|_{C_\omega}$$

eşitsizliğini sağlayan bir tek $x(t) = U^{-1}y(t)$ sürekli ω-periyodik çözüme sahiptir. Dolayısıyla

$$|A^{-1}f|_{C_\omega} = |x|_{C_\omega} \leq |U||U^{-1}| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k} |f|_{C_\omega}$$

yani

$$\|A^{-1}\| \leq |U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}$$

elde edilir.■

2. Eğer $\boldsymbol{p} = \mathbf{1}$ **ise;** $p = 1$ ve $|y(t)|^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}(t)\right|^2$ olduğundan

$$\left(\int_0^\omega |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \int_0^\omega |y(t)| dt = \int_0^\omega \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}(t)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

yazılır. Lemma 2.3 den

$$\int_0^\omega |y(t)| dt \leq \int_0^\omega \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}(t)\right|\right) dt = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\int_0^\omega \left|y_{i,j}(t)\right| dt\right)$$

olur ki (3.26) eşitsizliği ve sonrasında da Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_0^\omega |y(t)| dt \leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|}\right)^k\right) \int_0^\omega \left|g_{i,j}(t)\right| dt$$

$$\int_0^\omega |y(t)|dt \leq \left[\sum_{i=1}^{l} \ \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\int_0^\omega \left|g_{i,j}(t)\right|dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\int_0^\omega |y(t)|dt \leq \left[\sum_{i=1}^{l} \ \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|g_{i,j}(t)\right|dt$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca

$$\int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \ \sum_{j=1}^{n_i} \ \left|g_{i,j}(t)\right|dt \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\omega \left(\sum_{i=1}^{l} \ \sum_{j=1}^{n_i} \ \left|g_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\omega |g(t)|dt$$

olduğundan

$$\int_0^\omega |y(t)|dt \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \ \sum_{j=1}^{n_i} \ \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\omega |g(t)|dt$$

elde edilir ki $x(t) = [A^{-1}f](t)$, $x(t) = U^{-1}y(t)$ ve $g(t) = Uf(t)$ olduğu da kullanılır ise

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\omega |[A^{-1}f](t)|dt\right) &= \int_0^\omega |x(t)|dt = \int_0^\omega |U^{-1}y(t)|dt \\
&= |U^{-1}| \int_0^\omega |y(t)|dt \\
&\leq |U^{-1}| 2^{\frac{n-1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \ \sum_{j=1}^{n_i} \ \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\omega |g(t)|dt \\
&\leq |U^{-1}||U| 2^{\frac{n-1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \ \sum_{j=1}^{n_i} \ \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\omega |f(t)|dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece

$$\int_0^\omega |[A^{-1}f](t)|dt \leq |U^{-1}||U| 2^{\frac{n-1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \ \sum_{j=1}^{n_i} \ \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\omega |f(t)|dt$$

eşitsizliği elde edilir.

$\boldsymbol{p} \in (\mathbf{1}, \mathbf{2})$ **ise;** Benzer şekilde $|y(t)|^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}(t)\right|^2$ olduğundan

$$\left(\int_0^\omega |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\omega \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}(t)\right|^2\right]^{\frac{p}{2}} dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılır. Sırası ile Lemma 2.3 ve Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\left(\int_0^\omega |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^\omega \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}(t)\right|\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\int_0^\omega \left|y_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Sonrasında sırası ile (3.26) ve Hölder eşitsizliklerinden faydalanırsak

$$\left(\int_0^\omega |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k} \left(\int_0^\omega \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \int_0^\omega \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

yani

$$\int_0^\omega |y(t)|^p dt \le \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}} \int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt \qquad (3.27)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi $\int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt$ ifadesini özel olarak ele alalım. Bu durumda ele alınan ifade

$$\int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt = \int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} n \frac{1}{n} \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt$$

$$= \int_0^\omega n \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{n} \left|g_{i,j}(t)\right|^p\right) dt$$

şeklinde yazılabilir. $1 < p < 2$, $1 < t = \frac{2}{p}$ ve $\frac{1}{t} + \frac{1}{q} = 1$ için integral içindeki toplam ifadesine Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left|g_{i,j}(t)\right|^p dt \leq \int_0^{\omega} n\left[\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left|\frac{1}{n}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|\left|g_{i,j}(t)\right|^p\right|^t\right)^{\frac{1}{t}}\right]dt$$

bulunur. Ayrıca $q=\frac{2}{2-p}$ ve $t=\frac{2}{p}$ eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left|g_{i,j}(t)\right|^p dt = \int_0^{\omega} n\left[\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)^{\frac{2-p}{2}}\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left|g_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right]dt$$

$$= \int_0^{\omega} n\left[\left(n\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)^{\frac{2-p}{2}}\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|g_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right]dt$$

$$= n^{\frac{2-p}{2}}\int_0^{\omega}\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|g_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}dt$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left|g_{i,j}(t)\right|^p dt \ \leq n^{\frac{2-p}{2}}\int_0^{\omega}\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left|g_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}dt = n^{\frac{2-p}{2}}\int_0^{\omega}|g(t)|^p dt$$

yani

$$\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt \leq n^{\frac{2-p}{2}}\int_0^{\omega}|g(t)|^p dt$$

eşitsizliği bulunur. Bulunan bu eşitsizlik (3.27) de yerine yazılırsa

$$\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt \leq n^{\frac{2-p}{2}}\left[\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}|g(t)|^p dt$$

elde edilir ki sonuç olarak

$$\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|^p dt = \int_0^{\omega}|x(t)|^p dt$$

$$\leq |U^{-1}|^p\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt$$

$$\leq |U^{-1}|^p|U|^p n^{\frac{2-p}{2}}\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}|f(t)|^p dt$$

eşitsizliğin sağlandığı görülür.

$\boldsymbol{p=2}$ **ise;** Öncelikle $|y(t)|^2=\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left|y_{i,j}(t)\right|^2$ olduğunu kullanılır ise yani

$$\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|y_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği yazılır. Diğer yandan Lemma 2.3 ile birlikte

$$\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\le\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,j}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. (3.26) ve Hölder eşitsizliklerinden de faydalanırsak

$$\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,j}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\int_0^{\omega}|g(t)|^2 dt\ \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\omega}|g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Ayrıca $x(t)=[A^{-1}f](t)$, $x(t)=U^{-1}y(t)$ ve $Uf(t)=g(t)$ olduğundan

$$\left(\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^{\omega}|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_0^{\omega}|U^{-1}y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\le|U^{-1}|\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le|U^{-1}|\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\omega}|g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le|U^{-1}||U|\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\omega}|f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|^2 dt\ \le\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^2\right)|U^{-1}|^2|U|^2\int_0^{\omega}|f(t)|^2 dt \qquad (3.28)$$

eşitsizlik elde edilmiş olur.

$\boldsymbol{p} \in (\mathbf{2}, \infty)$ **ise;** (3.27) eşitsizliği ile birlikte Lemma 2.3 de $\alpha = \frac{p}{2}$ kullanılır ise

$$\int_0^\omega |y(t)|^p dt \leq \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}} \int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\left|g_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}} \int_0^\omega \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|g_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}} \int_0^\omega |g(t)|^p dt$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^\omega |[A^{-1}f](t)|^p dt = \int_0^\omega |x(t)|^p dt$$

$$\leq |U^{-1}|^p \int_0^\omega |y(t)|^p dt$$

$$\leq |U^{-1}|^p \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}} \int_0^\omega |g(t)|^p dt$$

$$\leq |U^{-1}|^p |U|^p \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}} \int_0^\omega |f(t)|^p dt$$

olduğu görülür. Sonuç olarak Teorem 3.2 nin ispatı tamamlanmış olur (Lu ve ark., 2011).

Teorem 3.3.

$f \in C_\omega^1$ ve her $i = 1,2,\ldots,l$ için $|\lambda_i| \neq 1$ olsun. Bu taktirde $A^{-1}: C_\omega \to C_\omega$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $A^{-1}f \in C_\omega^1$;
2. $[A^{-1}f]'(t) = [A^{-1}f'](t),\ \forall t \in \mathbb{R}$;
3. $\int_0^\omega \left|[A^{-1}f]'(s)\right|^p ds \leq |U^{-1}|^p |U|^p \sigma_1 \int_0^\omega \left|f'(s)\right|^p ds,\ p \in [1,\infty)$.

Burada σ_1, Teorem 3.2 de verilen σ_1 dir (Lu ve ark., 2011).

İspat:

1. $f \in C^1_\omega$ ve $g(t) = Uf(t)$ olduğundan $g \in T^1_\omega$ dir. Herhangi bir n_i pozitif tamsayısı için (3.11) ve Lemma 3.1 den

$$y_{i,n_i}(t) = \begin{cases} \sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j g_{i,n_i}(t - j\tau) & |\lambda_i| < 1 \\ -\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} g_{i,n_i}(t + (j+1)\tau) & |\lambda_i| > 1 \end{cases} \tag{3.29}$$

yazılabilir. $g \in T^1_\omega$ olduğundan $j = 1,2, \dots, n_i - 1$, $i = 1,2, \dots, l$ için $g_{i,j} \in P^1_\omega$ dir.

$|\lambda_i| < 1$ için ;

$$\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j g_{i,n_i}(t - j\tau) \text{ , } \sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j g'_{i,n_i}(t - j\tau)$$

$|\lambda_i| > 1$ için ;

$$-\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} g_{i,n_i}(t + (j+1)\tau) \text{ , } -\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} g'_{i,n_i}(t + (j+1)\tau) \text{ i}$$

serileri düzgün yakınsaktır (Bkz. Ek-3). Dolayısıyla

$$y'_{i,n_i}(t) = \sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j g'_{i,n_i}(t - j\tau), y'_{i,n_i}(t) = -\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} g'_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)$$

gerçeklenir. Yani $y_{i,n_i} \in P^1_\omega$ dir. Benzer şekilde $y_{i,n_i-1}, y_{i,n_i-2}, \dots, y_{i,1} \in P^1_\omega$ olduğu görülebilir. Böylece $y \in T^1_\omega$. $x(t) = U^{-1}y(t)$ olduğundan $A^{-1}f = x \in C^1_\omega$ elde edilir.

2. $x(t) - Bx(t - \tau) = f(t)$ fark sistemini ele alalım. Bu fark sistemi

$A^{-1}f = x \in C^1_\omega$ olacak şekilde tek bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla

$$[A^{-1}f](t) - B[A^{-1}f](t - \tau) = f(t)$$
$$[A^{-1}f]'(t) - B[A^{-1}f]'(t - \tau) = f'(t)$$

ve

$$A\left([A^{-1}f]'(t)\right) = [A^{-1}f]'(t) - B[A^{-1}f]'(t - \tau) = f'(t)$$

olacağından

$$[A^{-1}f]'(t) = [A^{-1}f'](t) \text{ , } \forall t \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

3. Teorem 3.2 in 2. koşulunda $A^{-1}f$ yerine $A^{-1}f'$ kullanılır ise benzer şekilde

$$\int_0^\omega \left|[A^{-1}f]'(s)\right|^p ds = \int_0^\omega \left|[A^{-1}f'](s)\right|^p ds \leq |U^{-1}|^p |U|^p \sigma_1 \int_0^\omega \left|f'(s)\right|^p ds \text{ , } p \in [1, \infty).$$

eşitsizliği elde edilir (Lu ve ark., 2011).

Not 3.1.

$k > 1$ pozitif tamsayı ve her $i = 1,2,\ldots,l$ için $|\lambda_i| \neq 1$ olmak üzere eğer $f \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \cap C_\omega$ ise o zaman Teorem 3.3`de olduğu gibi tamamen benzer şekilde aşağıdaki iddialar ispatlanabilir (Lu ve ark., 2011).

1. $\frac{d^k}{dt^k}[A^{-1}f](t) = \left[A^{-1}\frac{d^k}{dt^k}f\right](t);$
2. $\int_0^\omega \left|\frac{d^k}{dt^k}[A^{-1}f](s)\right|^p ds \le |U^{-1}|^p|U|^p\sigma_1 \int_0^\omega \left|\frac{d^k}{dt^k}f(s)\right|^p ds, \quad p \in [1,\infty).$

İspat:

1. $k = 2$ ise, yani $i = 1,2,\ldots,l$ için $|\lambda_i| \neq 1$ olmak üzere $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \cap C_\omega$ olsun. $f \in C_\omega^2$ ve $g(t) = Uf(t)$ olduğundan $g \in T_\omega^2$ dır. Herhangi bir n_i pozitif tamsayısı için (3.11) ve Lemma 3.1 den

$$y_{i,n_i}(t) = \begin{cases} \sum_{j\ge 0} \lambda_i^{\,j} g_{i,n_i}(t - j\tau) & |\lambda_i| < 1 \\ -\sum_{j\ge 0} \lambda_i^{\,-j-1} g_{i,n_i}(t + (j+1)\tau) & |\lambda_i| > 1 \end{cases}$$

yazılabilir. $g \in T_\omega^2$ olduğundan $j = 1,2,\ldots,n_i - 1$, $i = 1,2,\ldots,l$ için $g_{i,j} \in P_\omega^2$ dir.

$|\lambda_i| < 1$ için ;

$$\sum_{j\ge 0} \lambda_i^{\,j} g_{i,n_i}(t - j\tau)\,,\ \sum_{j\ge 0} \lambda_i^{\,j} g''_{i,n_i}(t - j\tau)$$

$|\lambda_i| > 1$ için ;

$$-\sum_{j\ge 0} \lambda_i^{\,-j-1} g_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)\,,\ -\sum_{j\ge 0} \lambda_i^{\,-j-1} g''_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)$$

serileri düzgün yakınsak olduğundan

$$y''_{i,n_i}(t) = \sum_{j\ge 0} \lambda_i^{\,j} g''_{i,n_i}(t - j\tau)\ ,\ y''_{i,n_i}(t) = -\sum_{j\ge 0} \lambda_i^{\,-j-1} g''_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)$$

gerçeklenir. Yani $y_{i,n_i} \in P_\omega^2$ dir. Benzer şekilde $y_{i,n_i-1}, y_{i,n_i-2}, \ldots, y_{i,1} \in P_\omega^2$ olduğu görülebilir. Böylece $y \in T_\omega^2$. $x(t) = U^{-1}y(t)$ olduğundan $A^{-1}f = x \in C_\omega^2$ elde edilir.

Diğer yandan $x(t) - Bx(t - \tau) = f(t)$ denklemini ele alalım. Bu fark sistemi $A^{-1}f = x \in C_\omega^2$ olacak şekilde tek bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla

$$[A^{-1}f](t) - B[A^{-1}f](t - \tau) = f(t)$$

$A^{-1}f \in C_\omega^2$ ve $f \in C_\omega^2$ olduğundan

$$[A^{-1}f]''(t) - B[A^{-1}f]''(t - \tau) = f''(t)$$

ve

$$A\left([A^{-1}f]''(t)\right) = [A^{-1}f]''(t) - B[A^{-1}f]''(t-\tau) = f''(t)$$

olacağından

$$[A^{-1}f]''(t) = [A^{-1}f''](t)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

2. Teorem 3.2 nin ikinci koşulu ile $[A^{-1}f]''(t) = [A^{-1}f''](t)$ eşitliği kullanılır ise

$$\begin{aligned}\int_0^{\omega}\left|\frac{d^k}{dt^k}[A^{-1}f](s)\right|^p ds &= \int_0^{\omega}\left|[A^{-1}f]''(s)\right|^p ds \\ &= \int_0^{\omega}\left|[A^{-1}f''](t)\right|^p ds \\ &\leq |U^{-1}|^p|U|^p\sigma_1\int_0^{\omega}\left|f''(s)\right|^p ds\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 3.1.

Kabul edelim ki $i = 1,2,\dots,l$ için $|\lambda_i| \neq 1$ sağlansın. Bu taktirde aşağıdaki sonuçlar doğrudur.

1. $\forall f \in C_\omega$için $D(x_t) = f(t)$ (3.30)

fark sistemi bir tek ω-periyodik çözümüne sahiptir ve

$$\int_0^{\omega} |x(s)|^p ds \leq |U^{-1}|^p|U|^p\sigma_1\int_0^{\omega} |f(s)|^p ds \quad p \in [1,\infty)$$

eşitsizliği sağlanır.

2. $k > 1$ pozitif bir tamsayı olmak üzere $\forall f \in C_\omega^k \coloneqq C_\omega \cap C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$

(3.30) denklemi bir tek $x \in C_\omega^k$ ω-periyodik çözüme sahiptir ve

$$\int_0^{\omega} \left|x^{(k)}(s)\right|^p ds \leq |U^{-1}|^p|U|^p\sigma_1\int_0^{\omega} \left|f^{(k)}(s)\right|^p ds, \quad p \in [1,\infty)$$

sağlanır (Lu ve ark., 2011).

Teorem 3.4.

(3.3) de tanımlanan D operatörü $D\varphi = \varphi(0) - B\varphi(-\tau)$ ve $\forall\, i = 1,2,\dots,l$ için $|\lambda_i| \neq 1$ ise $\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t,x_t)$ denklemi için herhangi $x(t)$ ω-periyodik çözümü $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olmalıdır (Lu ve ark., 2011).

İspat: (3.1) denklemi için $u(t)$ herhangi ω-periyodik çözümü olsun. Yani

$$\frac{d}{dt}D(u_t) = f(t,u_t) \tag{3.31}$$

denkleminin $[0,\omega]$ aralığında integral alınırsa

$$\int_0^{\omega} f(s,u_s)\,ds = 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. Ayrıca (3.31) denkleminde $t \in [0,\omega]$ aralığı üzerinde integral alınır ise

$$D(u_t) - D(u_0) = \int_0^t f(s,u_s)\,ds$$

yani

$$D(u_t) = D(u_0) + \int_0^t f(s,u_s)\,ds$$

$$D(u_t) = u(0) - Bu(-\tau) + \int_0^t f(s,u_s)\,ds$$

elde edilir. Diğer yandan

$$u(0) - Bu(-\tau) + \int_0^t f(s,u_s)\,ds = h(t)$$

yani

$$D(u_t) = h(t)$$

olsun.

Dolayısıyla $f \in C((R \times C[-\tau,0],\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n)$ olduğundan $h \in C_\omega^1$dir. Sonuç 3.1`den $u \in C_\omega^1$ sonucu elde edilir (Lu ve ark., 2011).■

Sonuç 3.2.

D operatörünün kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda_i| < 1$ olmasıdır. Ayrıca D kararlı ise (3.1) denklemi için herhangi bir ω-periyodik çözümü sürekli birinci türeve sahiptir. Ancak elde edildi ki; $|\lambda_i| > 1$ olması durumunda da (3.1) denklemi için herhangi $x(t)$ ω-periyodik çözümü $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olmaktadır.

3.2. Lineer Olmayan Fark Operatörü

Neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerle bağlantılı olan D_1 operatörüne ait özellikler Lu ve Chen (2012) tarafından incelendi. Bu bölümde Lu ve Chen (2012) tarafından elde edilen sonuçlar verilecektir. D_1, lineer olmayan bir fark operatörü olmak üzere

$$\frac{d}{dt}D_1(x_t) = f(t,x_t) \tag{3.33}$$

şeklindeki neutral fonksiyonel diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Burada her $\theta \in [-\tau, 0]$ için $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ ve lineer olmayan D_1 operatörü de

$$D_1 : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n,\ D_1(\varphi) = \varphi(0) - B\varphi(-\tau) - h(\varphi) \qquad (3.34)$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun.

Ayrıca $B = [b_{ij}]_{nxn}$ reel değerli bir matris, $h \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $\forall \varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ için $f(t+\omega, \varphi) \equiv f(t, \varphi)$ ve $f \in C(\mathbb{R} \times (C[-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ sınırlı kümesi için $f([0, \omega] \times \Omega)$ kümesi de R^n de sınırlı ve $\tau > 0$ bir sabittir.

3.2.1. D_1 operatörünün özellikleri

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in C^{\mathrm{n}}$ kompleks bir vektör ve $|a| = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{1/2}$, $H = [h_{ij}]_{nxn}$ kompleks bir matris ve $|H| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|h_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$ olsun.

Lineer olmayan D_1 fark operatörünün özelliklerini incelemek için

$$A : C_\omega \to C_\omega\ ,\ [Ax](t) := x(t) - Bx(t-\tau) \qquad (3.35)$$

ve

$$\Gamma : C_\omega \to C_\omega, [\Gamma x](t) \coloneqq [Ax](t) - h(x_t) = x(t) - Bx(t-\tau) - h(x_t) \qquad (3.36)$$

şeklinde tanımlansın.

D_1 lineer olmayan fark operatörünün tanımından her $e \in C_\omega$ için,

$$D_1(x_t) = e(t) \qquad (3.37)$$

fark sisteminin $u(t)$ sürekli ω-periyodik çözümünün varlığı

$$[\Gamma x](t) = e(t) \qquad (3.38)$$

fark sisteminin $u(t)$ sürekli ω-periyodik çözümünün varlığına denktir. Böylece (3.37) denkleminin sürekli ω-periyodik çözümünün varlığını incelemek için (3.38) denkleminin sürekli ω-periyodik çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir.

$B = [b_{ij}]_{nxn}$reel değerli matrisi için kompleks değerli bir U matrisi vardır öyle ki $UBU^{-1} = E_\lambda = diag(J_1, J_2, \dots, J_l)$ Jordan normal matrisidir. Burada her bir J_i ;

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

$\sum_{i=1}^{l} = n$ olmak üzere Jordan blok matrisleridir. $\{\lambda_i : i = 0, 1, 2, \dots, l\}$ kümesi de B matrisinin öz değerlerinin kümesidir.

Teorem 3.5.

Aşağıdaki koşullar sağlandığını kabul edelim.

1. $\forall\ \varphi_1, \varphi_2 \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ ve $\rho \in (0, +\infty)$ için h fonksiyoneli $h(0) = 0$ ve $|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)| \leq \rho\ max_{\theta \in [-\tau, 0]} |\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)|$;
2. $\forall\ i = 1,2, .. l$ için $|\lambda_i| \neq 1$;
3. $\rho |U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{\mathrm{l}} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{\mathrm{j}} \frac{1}{|1-|\lambda_i||^k} < 1.$

Bu taktirde $e \in C_\omega$ için $D_1(x_t) = e(t)$ denkleminin C_ω de bir tek u^* çözümü vardır ve

$$\|u^*\| \leq \frac{|U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{\mathrm{l}} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{\mathrm{j}} \frac{1}{|1-|\lambda_i||^k}}{1 - \rho |U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{\mathrm{l}} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{\mathrm{j}} \frac{1}{|1-|\lambda_i||^k}} \|e\|,$$

$$\|\Gamma^{-1} e\| \leq \frac{|U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{\mathrm{l}} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{\mathrm{j}} \frac{1}{|1-|\lambda_i||^k}}{1 - \rho |U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{\mathrm{l}} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{\mathrm{j}} \frac{1}{|1-|\lambda_i||^k}} \|e\|$$

eşitsizlikleri ile $\|\Gamma^{-1}\| \leq \frac{|U^{-1}||U|\sigma_0}{1-\rho|U^{-1}||U|\sigma_0}$ sağlanır (Lu ve Chen, 2012).

İspat: Bu teoremin ispatında Banach sabit nokta teoremi kullanılacak olup C_ω bir Banach uzayı olmak üzere F operatörü

$$F: C_\omega \to C_\omega$$

$$[Fx](t) = A^{-1}\big[h\big(x(\cdot + \theta)\big) + e\big](t), \qquad \theta \in [-\tau, 0]$$

şeklinde tanımlansın. A^{-1} ve L operatörlerinin tanımlarından $F(C_\omega) \subseteq C_\omega$ olduğu görülür. Şimdi F operatörünün bir daralma dönüşümü olduğu gösterilsin.

$\forall x, y \in C_\omega$ ve $\theta \in [-\tau, 0]$ için

$$\begin{aligned}\|Fx - Fy\| &= max_{t\in[0,\omega]}\left|A^{-1}\left[h\big(x(\cdot+\theta)\big) + e\right](t) - A^{-1}\left[h\big(y(\cdot+\theta)\big) + e\right](t)\right| \\ &\leq \|A^{-1}\|\rho max_{t\in[0,\omega]}\, max_{\theta\in[-\tau,0]}|x(t+\theta) - y(t+\theta)| \\ &\leq \|A^{-1}\|\rho\|x - y\|\end{aligned}$$

ve ayrıca $\rho|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k} < 1$ olduğundan F operatörü $u^* \in C_\omega$ olacak şekilde bir tek sabit noktaya sahiptir.

yani

$$[Au^*](t) = [hu_t^*](t) + e(t) \ , \ t \in R$$

ve dolayısıyla u^*

$$[\Gamma u^*](t) = e(t)\ , t \in R$$

denklemi için de bir ω-periyodik çözümdür. Böylece D_1 fark sisteminin çözümünün varlığı Γ fark sisteminin çözümünün varlığına denk olduğundan

$$D_1(u_t^*) = e(t)$$

denklemi de C_ω üzerinde bir tek u^* çözümüne sahiptir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\|u^*\| &= max_{t\in[0,\omega]}|u^*(t)| = max_{t\in[0,\omega]}|A^{-1}[h(u_t^*) + e(t)]| \\ &\leq \|A^{-1}\| max_{t\in[0,\omega]}|h(u_t^*) + e(t)| \\ &\leq \|A^{-1}\|\left\{max_{t\in[0,\omega]}|h(u_t^*)| + max_{t\in[0,\omega]}|e(t)|\right\}\end{aligned}$$

olur. Teorem 3.5 in 1. koşulu kullanılır ise

$$\begin{aligned}\|u^*\| &\leq \|A^{-1}\|\left\{\rho max_{t\in[0,\omega]}\, max_{\theta\in[-\tau,0]}|u^*(t+\theta)| + max_{t\in[0,\omega]}|e(t)|\right\} \\ &\leq \|A^{-1}\|\rho\|u^*\| + \|A^{-1}\|\|e\|\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak Teorem 3.2. den

$$\|u^*\| \leq |U^{-1}||U|\sigma_0\rho\|u^*\| + |U^{-1}||U|\sigma_0\|e\|$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenir ise

$$\|u^*\| \leq \frac{|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}{1-\rho|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}\|e\|$$

elde edilir. (Lu ve Chen, 2012).

Sonuç 3.3.

Teorem 3.5`in şartları sağlansın, $e(t) \equiv a \in \mathbb{R}^n$ ve $F(x) = A^{-1}(h(t) + a)$ olsun. Bu taktirde $A^{-1}(b) = (I - B)^{-1}(b)$, $\forall\, b \in \mathbb{R}^n$ için sağlar. Teorem 3.5 deki gibi benzer ispat ile $D_1(x_t) = a$ denkleminin bir tek $u^* \in \mathbb{R}^n$ çözümü vardır ve $|u^*| \leq \frac{|U^{-1}||U|\sigma_0}{1-\rho|U^{-1}||U|\sigma_0}|a|$ sağlanır (Lu ve Chen, 2012).

Teorem 3.6.

Teorem 3.5 in (1)-(3) şartları sağlansın. Bu taktirde $\Gamma^{-1}: C_\omega \to C_\omega$ vardır ve aşağıdaki özellikler sağlanır (Lu ve Chen, 2012).

1. $\|\Gamma^{-1}e\| \leq \dfrac{|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}{1-\rho|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}\|e\|;$
2. Γ^{-1}, C_ω üzerinde süreklidir.

Sonuç 3.4.

$h(\varphi)$ fonksiyonunun aranan koşullarına bakıldığında $\forall \varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ için sadece sürekli olması şartı aranmaktadır. Böylece $\frac{d}{dt}D_1(x_t) = f(t, x_t)$ denkleminin herhangi bir ω-periyodik çözümünün birinci türevi olmayabilir. Bundan başka $h \equiv 0$ ise D_1 operatörünün kararlı olması gerekmemektedir.

4. ÇOKLU SAPMA ARGÜMANLI NEUTRAL FARK OPERATÖRLERİ

4.1. Çoklu Sapma Argümanlı Lineer Fark Operatörü

Bu bölümde neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çoklu sapma argümanlı olması durumunda D operatörüne ait özellikler verildi. Diğer yandan üçüncü bölüm elde edilen D operatörüne ait özelliklerin diferansiyel denklemin çoklu sapma argümanlı olması halinde yani m, gecikme argüman sayısı olmak üzere $m|\lambda_i| \neq 1$ ve D operatörünün kararsız olması koşulu ile sağlanıp sağlanamadığı araştırıldı.

$$\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t) \tag{4.1}$$

neutral fonksiyonel diferansiyel denklemini $\big(NFDD(D,f)\big)$ göz önüne alalım. D operatörü

$$D : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, \quad D(\varphi) = \varphi(0) - B\sum_{k=1}^{m} \varphi(-\tau_k) \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $B = [b_{ij}]_{nxn}$ reel değerli bir matris, $\tau = \max_{1\le k\le m}\{\tau_k\}$ ve $\tau > 0$ bir sabittir. O halde D operatörünün tanımından $x_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ için

$$D(x_t) = x_t(0) - B\sum_{k=1}^{m} x_t(-\tau_k) = x(t) - B\sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k) \tag{4.3}$$

yazılabilir.

$$A : C_\omega \to C_\omega, \; [Ax](t) = x(t) - B\sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k) \tag{4.4}$$

olmak üzere $h \in C_\omega$ için

$$D(x_t) = h(t) \tag{4.5}$$

fark sisteminin $u(t)$ sürekli ω-periyodik çözümünün varlığı

$$[Ax](t) = h(t) \tag{4.6}$$

fark sisteminin $u(t)$ sürekli ω-periyodik çözümünün varlığına denktir.

Böylece (4.5) denklemi için sürekli ω-periyodik çözümünün varlığını araştırmak için (4.6)`nın sürekli ω-periyodik çözümüne sahip olduğunu göstermek yeterlidir. $B = [b_{ij}]_{nxn}$ reel değerli matris için, kompleks değerli U matrisi vardır öyle ki $UBU^{-1} = E_\lambda = diag(J_1, J_2, \dots, J_l)$ Jordan normal matrisidir. Burada her bir J_i, $\sum_{i=1}^{l} = n$ olmak üzere (3.7) de verilen Jordan blok matrisleridir. $\{\lambda_i : i = 0, 1, 2, \dots, l\}$ kümesi de B matrisinin öz değerlerinin kümesi olmak üzere A_i dönüşümü

$$A_i : P_\omega \to P_\omega, \ \ [A_i y](t) = y(t) - \lambda_i \sum_{k=1}^{m} y(t - \tau_k) \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 4.1.

$T: P_\omega \to P_\omega$, $[Tx](t) = \lambda_i \sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k)$ olsun. Aşağıdaki özellikler T dönüşümü için geçerlidir.

1. $\|T\| \le m|\lambda_i|$;
2. $\int_0^\omega |[Tx](t)|^p dt \le [m|\lambda_i|]^p \int_0^\omega |x(t)|^p dt$, $p \ge 1$ için.

İspat:

1. $\|Tx\| = max_{t\in[0,\omega]} |[Tx](t)| = max_{t\in[0,\omega]} |\lambda_i \sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k)| \le m|\lambda_i| \|x\|$ olduğundan $\|T\| \le m|\lambda_i|$ olur.

2. T dönüşümünün tanımı ve x fonksiyonunun periyodikliği kullanılır ise

$$\left(\int_0^\omega |[Tx](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\omega |\lambda_i \sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le |\lambda_i| \sum_{k=1}^{m} \left(\int_0^\omega |x(t - \tau_k)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\lambda_i| \sum_{k=1}^{m} \left(\int_{-\tau_k}^{\omega-\tau_k} |x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\lambda_i| \sum_{k=1}^{m} \left(\int_0^\omega |x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = m|\lambda_i| \left(\int_0^\omega |x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

bulunur ki ve böylece $\left(\int_0^\omega |[Tx](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le m|\lambda_i| \left(\int_0^\omega |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ eşitsizliği elde edilir. ■

Lemma 4.2.

Eğer $m|\lambda_i| < 1$ ise A_i nin tersi vardır ve $A_i^{-1}: P_\omega \to P_\omega$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\|A_i^{-1}\| \leq \frac{1}{1-m|\lambda_i|}$;
2. $\int_0^\omega \left|[A_i^{-1}f](t)\right|^p dt \leq \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^p \int_0^\omega |f(t)|^p dt$, $\forall f \in P_\omega$ ve $p \geq 1$.

İspat:

1. $m|\lambda_i| < 1$ olduğundan Lemma 4.1`den $\|T\| < 1$ olur ki buradan $(I-T)$ operatörünün $(I-T)^{-1}$ tersi var ve $\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$ dir. $I - T = A_i$ olduğundan ayrıca $(I-T)^{-1} = A_i^{-1}$ olur ve $\|A_i^{-1}\| = \|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|} \leq \frac{1}{1-m|\lambda_i|}$ elde edilir.
2. $(I-T)^{-1} = A_i^{-1}$ ve $\|T\| < 1$ den

$$\left(\int_0^\omega \left|[A_i^{-1}f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\omega |[(I-T)^{-1}f](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^\omega \left|\sum_{j=0}^\infty [T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılabilir. Diğer yandan $\left(\int_0^\omega \left|\sum_{j=0}^\infty [T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=0}^\infty \left(\int_0^\omega \left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ olduğundan (Bkz. Ek 1)

$$\left(\int_0^\omega \left|[A_i^{-1}f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=0}^\infty \left(\int_0^\omega \left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left(\int_0^\omega \left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq m|\lambda_i| \left(\int_0^\omega \left|[T^{j-1} f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \cdots \leq (m|\lambda_i|)^j \left(\int_0^\omega |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği de kullanılır ise

$$\sum_{j=0}^\infty \left(\int_0^\omega \left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{j=0}^\infty (m|\lambda_i|)^j \left(\int_0^\omega |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{1-|\lambda_i|} \left(\int_0^\omega |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Böylece $\int_0^\omega \left|[A_i^{-1}f](t)\right|^p dt \leq \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^p \int_0^\omega |f(t)|^p dt$ elde edilir. ■

Teorem 4.1.

U matrisi ve A operatörü sırasıyla (3.7) ve (4.4) de tanımlandığı gibi olsun. Her $i = 1, 2, \dots, l$ için $m|\lambda_i| < 1$ ise $A^{-1}: C_\omega \to C_\omega$ aşağıdaki şartları sağlar.

1. $\|A^{-1}\| \le |U||U^{-1}|\sigma_0$, burada $\sigma_0 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|} \right)^k m^{k-1} \right)$.

2. $f \in C_\omega$ olmak üzere $\int_0^\omega |[A^{-1}f](s)|^p ds \le |U|^p |U^{-1}|^p \sigma_1 \int_0^\omega |f(s)|^p ds, \; p \ge 1$.

burada σ_1,

$$\sigma_1 = \begin{cases} \left[2^{n-1} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|} \right)^k m^{k-1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, & p = 1 \\ n^{\frac{2-p}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|} \right)^k m^{k-1} \right)^q \right]^{\frac{p}{q}}, & p \in (1,2) \\ \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|} \right)^k m^{k-1} \right)^2, & p = 2 \\ \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|} \right)^k m^{k-1} \right)^q \right]^{\frac{p}{q}}, & p \in (2,\infty) \end{cases}$$

şeklinde ve $q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sağlayan sabit bir sayıdır.

İspat: $f \in C_\omega$ olmak üzere aşağıdaki fark sistemini ele alalım.

$$x(t) - B \sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k) = f(t) \tag{4.8}$$

$x(t) = U^{-1} y(t)$ ile

$$y(t) - E_\lambda \sum_{k=1}^{m} y(t - \tau_k) = U f(t) = g(t) \tag{4.9}$$

elde edilir ki bu denklemde $y, g \in T_\omega$ dir.

Yani y ve g fonksiyonları

$$y(t) = \left(y_{1,1}(t), y_{1,2}(t) \; \dots, y_{1,n_1}(t), \dots, y_{i,1}(t), \dots, y_{i,n_i}(t), \dots, y_{l,1}(t), \dots, y_{l,n_l}(t) \right)^T$$

$$g(t) = \left(g_{1,1}(t), g_{1,2}(t) \dots, g_{1,n_1}(t), \dots, g_{i,1}(t), \dots, g_{i,n_i}(t), \dots, g_{l,1}(t), \dots, g_{l,n_l}(t) \right)^T$$

şeklindedir. (4.9) denkleminden $j = 1, 2, \dots, n_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, l$ için

$$y_{i,n_i}(t) - \lambda_i \sum_{k=1}^{m} y_{i,n_i}(t-\tau_k) = g_{i,n_i}(t) \tag{4.10}$$

$$y_{i,j}(t) - \lambda_i \sum_{k=1}^{m} y_{i,j}(t-\tau_k) - \sum_{k=1}^{m} y_{i,j+1}(t-\tau_k) = g_{i,j}(t) \tag{4.11}$$

yazılır. (4.10) denklemine Lemma 4.2 uygulanırsa

$$|y_{i,n_i}|_\infty \le \|[A_i{}^{-1}\|\,|g_{i,n_i}|_\infty \le \frac{1}{1-m|\lambda_i|}|g_{i,n_i}|_\infty \tag{4.12}$$

ve

$$\left(\int_0^\omega |y_{i,n_i}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\omega |[A_i{}^{-1}g_{i,n_i}](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left(\int_0^\omega |g_{i,n_i}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.13}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca Lemma 4.2 de görüldüğü üzere A_i dönüşümünün tersi $A_i{}^{-1}$ var ve sınırlı olduğundan (4.10) denkleminin tek bir $y_{i,n_i}(t)$ çözümü vardır. Tamamen benzer şekilde $j = n_i - 1$ için (4.11) denklemine Lemma 4.2 uygulanır ise

$$|y_{i,n_i-1}|_\infty \le \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left[m|y_{i,n_i}|_\infty + |g_{i,n_i-1}|_\infty\right] \tag{4.14}$$

eşitsizliği ile birlikte ve ayrıca diğer taraftan da

$$\left(\int_0^\omega |y_{i,n_i-1}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\omega \left|A_i{}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{m} y_{i,n_i}(t-\tau_k) + g_{i,n_i-1}(t)\right]\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^\omega \left|\left[\sum_{k=1}^{m}[A_i{}^{-1}y_{i,n_i}](t-\tau_k) + [A_i{}^{-1}g_{i,n_i-1}](t)\right]\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olur ki Minkowski eşitsizliği de kullanılır ise

$$\left(\int_0^\omega |y_{i,n_i-1}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=1}^{m}\left(\int_0^\omega |[A_i{}^{-1}y_{i,n_i}](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\omega |[A_i{}^{-1}g_{i,n_i-1}](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left[m\left(\int_0^\omega |y_{i,n_i}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\omega |g_{i,n_i-1}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right] \tag{4.15}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra (4.12), (4.14) eşitsizliğinde yerine yazılır

$$|y_{i,n_i-1}|_\infty \le \frac{1}{1-m|\lambda_i|}|g_{i,n_i-1}|_\infty + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m|g_{i,n_i}|_\infty \tag{4.16}$$

ve benzer şekilde (4.13), (4.15) de yerine yazılırsa

$$\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,n_i-1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i-1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.17)$$

elde edilir. Diğer durumlar için yani y_{i,n_i-2}, y_{i,n_i-3},..., $y_{i,2}$, $y_{i,1}$ için de tamamen benzer şekilde yapılırsa

$$\left|y_{i,n_i-2}\right|_{\infty} \leq \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left|g_{i,n_i-2}\right|_{\infty} + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m\left|g_{i,n_i-1}\right|_{\infty} + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^3 m^2\left|g_{i,n_i}\right|_{\infty} \quad (4.18)$$

$\ldots,\ldots,\ldots,\ldots, \qquad \ldots,\ldots,\ldots,\ldots,$

$$\left|y_{i,2}\right|_{\infty} \leq \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left|g_{i,2}\right|_{\infty} + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m\left|g_{i,3}\right|_{\infty} + \cdots + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^{n_i-1} m^{n_i-2}\left|g_{i,n_i}\right|_{\infty} \quad (4.19)$$

$$\left|y_{i,1}\right|_{\infty} \leq \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left|g_{i,1}\right|_{\infty} + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m\left|g_{i,2}\right|_{\infty} + \cdots + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^{n_i} m^{n_i-1}\left|g_{i,n_i}\right|_{\infty} \quad (4.20)$$

ifadeleri bulunur. Ayrıca (4.12) ve (4.14) eşitsizlikleri de göz önüne alınır ve yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ise

$$\sum_{j=1}^{n_i}\left|y_{i,j}\right|_{\infty} \leq \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left|g_{i,1}\right|_{\infty} + \left[\frac{1}{1-m|\lambda_i|} + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m\right]\left|g_{i,2}\right|_{\infty}$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{1-m|\lambda_i|} + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m + \cdots + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^{n_i} m^{n_i-1}\right]\left|g_{i,n_i}\right|_{\infty}$$

yani

$$\sum_{j=1}^{n_i}\left|y_{i,j}\right|_{\infty} \leq \sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)\left|g_{i,j}\right|_{\infty} \quad (4.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,n_i-2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i-2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i-1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^3 m^2\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.22)$$

$\dots,\dots,\dots,\dots,$ $\dots,\dots,\dots,\dots,$

$$\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,3}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^{n_i-1} m^{n_i-2}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.23)$$

$$\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^2 m\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^{n_i} m^{n_i-1}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.24)$$

eşitsizlikleri de (4.13) ve (4.15) eşitsizlikleri ile birlikte taraf tarafa toplanır ise

$$\sum_{j=1}^{n_i}\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left[\frac{1}{|1-m|\lambda_i||}\right]\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,1}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left[\frac{1}{|1-m|\lambda_i||}+\left(\frac{1}{|1-m|\lambda_i||}\right)^2 m\right]\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,2}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{|1-m|\lambda_i||}+\left(\frac{1}{|1-m|\lambda_i||}\right)^2 m\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{|1-m|\lambda_i||}\right)^{n_i} m^{n_i-1}\right]\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,n_i}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

yani

$$\sum_{j=1}^{n_i}\left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.25)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

1. (4.10) ve (4.11) denklemleri tek bir çözüme sahip olduğundan

$$y(t)-E_{\lambda}\sum_{k=1}^{m} y(t-\tau_k)=g(t)$$

denklemi de bir tek $y \in T_{\omega}$ çözümüne sahiptir ve ayrıca diğer yandan

$$|y|_{T_{\omega}} = max_{t\in[0,\omega]}|y(t)| = max_{t\in[0,\omega]}\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left|y_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}\right|_{\infty}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}\right|_{\infty}$$

yazılabilir. (4.21) den dolayı

$$|y|_{T_\omega} \leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right) \left|g_{i,j}\right|_{\infty}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1} |g|_{T_\omega}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1} |Uf|_{T_\omega}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1} |U||f|_{C_\omega}$$

elde edilir. Böylece $x(t) - B\sum_{k=1}^{m} x(t-\tau_k) = f(t)$ fark sistemi

$max_{t\in[0,\omega]}|x(t)| \leq |U^{-1}||y|_{T_\omega}$

$$\leq |U||U^{-1}| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1} |f|_{C_\omega}$$

eşitsizliğini sağlayan bir tek $x(t) = U^{-1}\, y(t)$ sürekli ω −periyodik çözüme sahiptir. Sonuç olarak

$$|A^{-1}f|_{C_\omega} = |x|_{C_\omega} \leq |U||U^{-1}| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1} |f|_{C_\omega}$$

yani

$$\|A^{-1}\| \leq |U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}$$

$$\|A^{-1}\| \leq |U^{-1}||U|\sigma_0 \tag{4.26}$$

elde edilir. ■

2. Eğer $\boldsymbol{p = 1}$ **ise;** $p = 1$ ve $|y(t)|^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}(t)\right|^2$ olduğundan

$$\left(\int_0^\omega |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \int_0^\omega |y(t)| dt = \int_0^\omega \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}(t)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

olur. Lemma 2.3 den

$$\left(\int_0^\omega |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^\omega \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|y_{i,j}(t)\right|\right) dt = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\int_0^\omega \left|y_{i,j}(t)\right| dt\right)$$

elde edilir. Sırasıyla (4.25) ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_0^\omega |y(t)| dt \leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right) \int_0^\omega \left|g_{i,j}(t)\right| dt$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\int_0^\omega \left|g_{i,j}(t)\right| dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

olarak yazılabildiğinden, böylece

$$\int_0^\omega |y(t)| dt \leq \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|g_{i,j}(t)\right| dt$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\int_0^\omega \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|g_{i,j}(t)\right| dt \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\omega \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left|g_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\omega |g(t)| dt$$

olduğundan

$$\int_0^\omega |y(t)| dt \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\omega |g(t)| dt$$

elde edilir. $x(t) = [A^{-1}f](t)$, $x(t) = U^{-1}y(t)$ ve $g(t) = Uf(t)$ eşitsizlikte kullanılırsa

$$\int_0^\omega |[A^{-1}f](t)| dt = \int_0^\omega |x(t)| dt = \int_0^\omega |U^{-1}y(t)| dt = |U^{-1}| \int_0^\omega |y(t)| dt$$

$$\leq |U^{-1}| 2^{\frac{n-1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\omega |g(t)| dt$$

$$\leq |U^{-1}||U| 2^{\frac{n-1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\omega |f(t)| dt$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|dt \le |U^{-1}||U|2^{\frac{n-1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\int_0^{\omega}|f(t)|dt$$

elde edilir.

$\boldsymbol{p} \in (\mathbf{1},\mathbf{2})$ **ise;** $|y(t)|^p = \left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left|y_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}$ olduğundan

$$\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\omega}\left[\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|y_{i,j}(t)\right|^2\right]^{\frac{p}{2}}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Sırası ile Lemma 2.3 ve Minkowski eşitsizliğinden

$$\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^{\omega}\left[\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|y_{i,j}(t)\right|\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olduğundan (4.25) denklemi ve sonrasında Hölder eşitsizliği de kullanılır ise

$$\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,j}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,j}(t)\right|^p dt\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\ \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

yani

$$\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt \le \left[\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt \qquad (4.27)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|g_{i,j}(t)\right|^p dt \le n^{\frac{2-p}{2}}\int_0^{\omega}\left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|g_{i,j}(t)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}dt = n^{\frac{2-p}{2}}\int_0^{\omega}|g(t)|^p dt$$

olduğundan (Bkz. Bölüm 3), (4.27) de yerine yazılırsa

$$\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt \le n^{\frac{2-p}{2}}\left[\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}|g(t)|^p dt$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|^p dt = \int_0^{\omega}|x(t)|^p dt \leq |U^{-1}|^p \int_0^{\omega}|y(t)|^p dt$$

$$\leq |U^{-1}|^p|U|^p n^{\frac{2-p}{2}}\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}|f(t)|^p dt \tag{4.28}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

$p = 2$ ise; $p = 2$ ve $|y(t)|^2 = \sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left|y_{i,j}(t)\right|^2$ olduğundan

$$\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\omega}|y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left|y_{i,j}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Lemma 2.3 ile

$$\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\int_0^{\omega}\left|y_{i,j}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur ki (4.25) denklemi ve Hölder eşitsizliği de kullanırsak

$$\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)\left(\int_0^{\omega}\left|g_{i,j}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\omega}|g(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Ayrıca $x(t) = [A^{-1}f](t)$, $x(t) = U^{-1}y(t)$ ve $Uf(t) = g(t)$ olduğu bilindiğinden

$$\left(\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\omega}|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^{\omega}|U^{-1}y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq |U^{-1}|\left(\int_0^{\omega}|y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |U^{-1}|\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left[\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right]^k m^{k-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\omega}|g(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |U^{-1}||U|\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\sum_{k=1}^{j}\left[\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right]^k m^{k-1}\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\omega}|f(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|^2dt \le |U^{-1}|^2|U|^2\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\sum_{k=1}^{j}\left[\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right]^k m^{k-1}\right]^2\int_0^{\omega}|f(s)|^2ds \quad (4.29)$$

eşitsizliği sağlanır.

$\boldsymbol{p} \in (\mathbf{2},\infty)$ **ise;** (4.27) eşitsizliği ve Lemma 2.3 kullanılır ise

$$\int_0^{\omega}|y(t)|^pdt \le \left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\left|g_{i,j}(t)\right|^2\right]^{\frac{p}{2}}dt$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left|g_{i,j}(t)\right|^2\right]^{\frac{p}{2}}dt$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}|g(t)|^pdt$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$\int_0^{\omega}|[A^{-1}f](t)|^pdt = \int_0^{\omega}|x(t)|^pdt \le |U^{-1}|^p\int_0^{\omega}|y(t)|^pdt$$

$$\le |U^{-1}|^p\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}|g(t)|^pdt$$

$$\le |U^{-1}|^p|U|^p\left[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-m|\lambda_i|}\right)^k m^{k-1}\right)^q\right]^{\frac{p}{q}}\int_0^{\omega}|f(t)|^pdt$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.

$f \in C_{\omega}^1$ ve $\forall\, i = 1,2,\dots,l$ için $m|\lambda_i| < 1$ olsun. Bu taktirde $A^{-1}: C_{\omega} \to C_{\omega}$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $A^{-1}f \in C_{\omega}^1$;
2. $[A^{-1}f]'(t) = [A^{-1}f'](t),\ \forall t \in \mathbb{R}$;
3. $\int_0^{\omega}|[A^{-1}f]'|^pds \le |U^{-1}|^p|U|^p\sigma_1\int_0^{\omega}|f'(s)|^pds,\ p \in [1,\infty)$.

İspat: $f \in C_\omega^1$ ve $g(t) = Uf(t)$ olduğundan $g \in T_\omega^1$ dir.

1. Herhangi bir n_i pozitif tamsayısı için (4.10) ve Lemma 4.2 den

$$\left[A_i y_{i,n_i}\right](t) = y_{i,n_i}(t) - \lambda_i \sum_{k=1}^{m} y_{i,n_i}(t - \tau_k) = g_{i,n_i}(t)$$

olduğundan

$$y_{i,n_i}(t) = \left[A_i^{-1} g_{i,n_i}\right](t) = \left[(I - T)^{-1} g_{i,n_i}\right](t) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[T^j g_{i,n_i}\right](t)$$

olur. yani,

$$y_{i,n_i}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[T^j g_{i,n_i}\right](t) \tag{4.30}$$

elde edilir. $g_{i,n_i} \in P_\omega'$ ve $\sum_{j=0}^{\infty}\left[T^j g_{i,n_i}\right]'(t)$ serisi $\mathbb{R}$ de düzgün yakınsak olduğundan (Bkz. Ek 2)

$$y'_{i,n_i}(t) = \left[\sum_{j=0}^{\infty}\left[T^j g_{i,n_i}\right](t)\right]' = \sum_{j=0}^{\infty}\left[T^j g_{i,n_i}\right]'(t)$$

dir. Dolayısıyla $y_{i,n_i} \in P_\omega^1$ elde edilir. Benzer şekilde (4.11) denklemi kullanılarak $y_{i,n_i-1}, y_{i,n_i-2}, \dots, y_{i,1} \in P_\omega^1$ ve dolayısıyla $y \in T_\omega^1$ olduğu görülebilir. Ayrıca $x(t) = U^{-1}y(t)$ olduğundan $A^{-1}f \in C_\omega^1$ elde edilmiş olur.

2. $x(t) - B\sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k) = f(t)$ sistemini ele alalım. Bu fark sistemi

$x = A^{-1}f \in C_\omega^1$ olacak şekilde bir tek çözümü sahiptir. Dolayısıyla $x = A^{-1}f$ fark sisteminde yerine yazılırsa

$$[A^{-1}f](t) - B\sum_{k=1}^{m}[A^{-1}f](t - \tau_k) = f(t)$$

bulunur. Ayrıca f ve $A^{-1}f \in C_\omega^1$ için

$$[A^{-1}f]'(t) - B\sum_{k=1}^{m}[A^{-1}f]'(t - \tau_k) = f'(t)$$

olduğundan ve böylece

$$[A^{-1}f]'(t) = [A^{-1}f'](t) \ \forall t \in R \text{ için}$$

elde edilir.

3. Teorem 4.1`in 2. şartında $A^{-1}f$ yerine $A^{-1}f'$ kullanılır ise benzer şekilde

$$\int_0^\omega |[A^{-1}f]'(s)|^p ds = \int_0^\omega |A^{-1}f'](s)|^p ds \le |U^{-1}|^p |U|^p \sigma_1 \int_0^\omega |f'(s)|^p ds \ , p \in [1, \infty)$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Not 4.1.

$k > 1$ pozitif tamsayı ve her $i = 1,2,\dots,l$ için $m|\lambda_i| < 1$ olmak üzere eğer $f \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \cap C_\omega$ ise o zaman Teorem 4.2 de olduğu gibi tamamen benzer şekilde aşağıdaki iddialar ispatlanabilir.

1. $\frac{d^k}{dt^k}[A^{-1}f](t) = \left[A^{-1}\frac{d^k}{dt^k}f\right](t);$
2. $\int_0^\omega \left|\frac{d^k}{dt^k}[A^{-1}f](s)\right|^p ds \le |U^{-1}|^p|U|^p\sigma_1 \int_0^\omega \left|\frac{d^k}{dt^k}f(s)\right|^p ds, p \in [1,\infty).$

Sonuç 4.1.

Her $i = 1,2,\dots,l$ için $m|\lambda_i| < 1$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın.

1. $\forall f \in C_\omega$ için $D(x_t) = f(t)$ (4.31)

fark sistemi bir tek ω-periyodik çözümüne sahiptir ve

$\int_0^\omega |x(s)|^p ds \le |U^{-1}|^p|U|^p\sigma_1 \int_0^\omega |f(s)|^p ds,\ p \in [1,\infty)$ eşitsizliği sağlanır.

2. $k > 1$ pozitif tamsayı olmak üzere $\forall f \in C_\omega^k := C_\omega \cap C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ için (4.31)

denklemi bir tek $x \in C_\omega^k$ ω-periyodik çözüme sahiptir ve

$$\int_0^\omega \left|x^{(k)}(s)\right|^p ds \le |U^{-1}|^p|U|^p\sigma_1 \int_0^\omega \left|f^{(k)}(s)\right|^p ds \quad p \in [1,\infty).$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 4.3.

D operatörü $D\varphi = \varphi(0) - B\sum_{k=1}^m \varphi(-\tau_k)$ olmak üzere $\forall\, i = 1,2,\dots,l$ için $m|\lambda_i| < 1$ ise o zaman (4.1) denkleminin herhangi $x(t)$ ω-periyodik çözümü $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olmalıdır.

İspat: $u(t)$, (4.1) denklemi için herhangi ω-periyodik çözümü olsun. Yani

$$\frac{d}{dt}D(u_t) = f(t,u_t) \tag{4.32}$$

eşitliği sağlanır. Denklem $[0,\omega]$ olmak üzere integral alınırsa

$$\int_0^\omega f(s,u_s)\,ds = 0 \tag{4.33}$$

dır. Ayrıca (4.32) denkleminde $t \in [0,\omega]$ için integral alınırsa

$$D(u_t) - D(u_0) = \int_0^t f(s,u_s)\,ds$$

yani

$$D(u_t) = D(u_0) + \int_0^t f(s,u_s)\,ds$$

$$D(u_t) = u(0) - B\sum_{k=1}^{m} u(-\tau_k) + \int_0^t f(s, u_s)\, ds$$

elde edilir. Diğer yandan

$$u(0) - B\sum_{k=1}^{m} u(-\tau_k) + \int_0^t f(s, u_s)\, ds = h(t)$$

yani

$$D(u_t) = h(t)$$

olsun. Ayrıca $f \in C((R \times C[-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ olduğundan $h \in C_\omega^1$dir. Sonuç 4.1 den $u \in C_\omega^1$ elde edilir. ■

Sonuç 4.2.

$m|\lambda_i| < 1$ olduğundan D operatörü kararlıdır. Yani D operatörü kararlı olması halinde çoklu sapma argümanlı (4.1) neutral fonksiyonel diferansiyel denklemi için herhangi bir $x(t)$ ω-periyodik çözümü $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olmaktadır. Böylece Lu ve ark., (2011) de yaptığı çalışmanın D operatörünün kararlı olması durumunda çoklu sapma argümanlı neutral fonksiyonel diferansiyel denkleme genellemesi yapılmıştır. Fakat bu yöntemle $m|\lambda_i| > 1$ olduğunda Lu ve ark., (2011) yaptığı çalışmanın çoklu sapma argümanlı neutral fonksiyonel diferansiyel denkleme genelleşmesi yapılamamıştır. Bu problemin üstesinden gelebilmek için aşağıda farklı bir yöntem ile yaklaşım verilecektir.

4.2. Çoklu Sapma Argümanlı Lineer Fark Operatörlerine Farklı Bir Yaklaşım

Şimdi bu bölümde Lu ve ark. (2011)`de yaptığı çalışmanın $m|\lambda_i| > 1$ olması durumun da çoklu sapma argümanlı neutral fonksiyonel diferansiyel denkleme genellemesi yapılacaktır. Yani böylelikle çoklu sapma argümanlı neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerde D operatörünün kararlı olmaması durumunda çözümün sürekli birinci türevinin olabileceği gösterilecektir.

$$\frac{d}{dt}D_2(x_t) = f(t, x_t) \tag{4.34}$$

neutral fonksiyonel diferansiyel denklemini $\big(NFDD(D_2, f)\big)$ göz önüne alalım. D_2 operatörü

$$D_2: C([-\tau, 0], R^n) \to R^n, \quad D_2(\varphi) = \varphi(0) - B\sum_{k=1}^{m} \varphi(-\tau_k) \tag{4.35}$$

şeklinde olsun. Bu denklemde $B = [b_{ij}]_{nxn}$ reel değerli bir matris, $\tau = max_{1\le k\le m}\{\tau_k\}$ ve $\tau > 0$ bir sabittir. D_2 operatörünü

$$D_2(\varphi) = \varphi(0) - B\varphi(-\tau_1) - B\sum_{k=2}^{m} \varphi(-\tau_k)$$

şeklinde ele alalım. Yani D_2 operatörünün tanımından

$$D_2(x_t) = x(t) - Bx(t-\tau_1) - B\sum_{k=2}^{m} x(t-\tau_k) \tag{4.36}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$A : C_\omega \to C_\omega, \;\; [Ax](t) := x(t) - Bx(t-\tau_1) \tag{4.37}$$

$$L : C_\omega \to C_\omega, \;\; [Lx](t) := B\sum_{k=2}^{m} x(t-\tau_k) \tag{4.38}$$

şeklinde olmak üzere

$$\Gamma : C_\omega \to C_\omega, \;\; [\Gamma x](t) \coloneqq [Ax](t) - [Lx](t)$$

$$= x(t) - Bx(t-\tau_1) - B\sum_{k=2}^{m} x(t-\tau_k) \tag{4.39}$$

operatörünü tanımlayalım.

Bu taktirde D_2 fark operatörü tanımından her $e \in C_\omega$ için,

$$D_2(x_t) = e(t) \tag{4.40}$$

fark sisteminin $u(t)$ sürekli ω-periyodik çözümünün varlığı

$$[\Gamma x](t) = e(t) \tag{4.41}$$

fark sisteminin $u(t)$ sürekli ω-periyodik çözümünün varlığına denktir.

Teorem 3.5`de olduğu gibi tamamen benzer şekilde (4.40) denkleminin sürekli ω-periyodik çözümünün varlığını incelemek için (4.41) denkleminin sürekli ω-periyodik çözüme sahip olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Teorem 4.4.

Aşağıdaki koşullar sağlansın.

1. $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in C_\omega$ ve $\rho \in (0, +\infty)$ için L fonksiyoneli $L(0) = 0$ ve $|L(\varphi_1) - L(\varphi_2)| \le \rho\, max_{t \in [\,0,\omega]} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$;
2. $\forall\, i = 1,2,..\, l$ için $|\lambda_i| \neq 1$;
3. $\rho |U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k} < 1.$

Bu taktirde $e \in C_\omega$ için $D_2(x_t) = e(t)$ denkleminin C_ω de bir tek u^* çözümü vardır ve

$$\|u^*\| \le \frac{|U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}{1-\rho|U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}} \|e\|,$$

$$\|\Gamma^{-1} e\| \le \frac{|U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}{1-\rho|U^{-1}||U| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}} \|e\|$$

ile birlikte $\|\Gamma^{-1}\| \le \frac{|U^{-1}||U|\sigma_0}{1-\rho|U^{-1}||U|\sigma_0}$ eşitsizliği sağlanır. Burada $\sigma_0 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}$ dır.

İspat: Bu teoremin ispatında Banach sabit nokta teoremi kullanılacaktır. C_ω bir Banach uzayı olmak üzere F operatörü

$$F: C_\omega \to C_\omega$$

$$[Fx](t) = A^{-1}[Lx + e](t), \qquad t \in [\,0, \omega]$$

şeklinde tanımlansın. A^{-1} ve L operatörlerinin tanımlarından $F(C_\omega) \subseteq C_\omega$ olduğu görülür. Şimdi F operatörünün bir daralma dönüşümü olduğu gösterilsin.

$\forall x, y \in C_\omega$ için F operatörünün tanımından

$$\|Fx - Fy\| = max_{t\in[0,\omega]}|[A^{-1}(Lx + e)](t) - [A^{-1}(Ly + e)](t)|$$
$$\leq \|A^{-1}\|\rho\, max_{t\in[0,\omega]}|x(t) - y(t)|$$
$$\leq \|A^{-1}\|\rho\|x - y\|$$

elde edilir. Ayrıca $\rho|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k} < 1$ olduğundan F operatörü $u^* \in C_\omega$ olacak şekilde bir tek sabit noktaya sahiptir. Yani

$$[Au^*](t) = [Lu^*](t) + e(t), \ t \in R$$

ve dolayısıyla u^*

$$[\Gamma u^*](t) = e(t)\,, \ t \in R$$

denklemi için de bir ω-periyodik çözümdür. Böylece D_2 fark sisteminin çözümünün varlığı Γ fark sisteminin çözümünün varlığına denk olduğundan

$$D_2(u^*{}_t) = e(t)$$

denklemi de C_ω üzerinde bir tek u^* çözümüne sahiptir. Diğer taraftan

$$\|u^*\| = max_{t\in[0,\omega]}|u^*(t)| = max_{t\in[0,\omega]}|A^{-1}[Lu^* + e](t)|$$
$$= max_{t\in[0,\omega]}|[A^{-1}Lu^*](t) + [A^{-1}e](t)|$$
$$\leq \|A^{-1}\|\left\{max_{t\in[0,\omega]}|Lu^*(t)| + max_{t\in[0,\omega]}|e(t)|\right\}$$

olur. Teorem 4.4 ün 1. koşulundan

$$\|u^*\| \leq \|A^{-1}\|\rho\|u^*\| + \|A^{-1}\|\|e\|$$

bulunur. Teorem 3.2. den

$$\leq |U^{-1}||U|\sigma_0\rho\|u^*\| + |U^{-1}||U|\sigma_0\|e\|$$

ve böylece

$$\|u^*\| \leq \frac{|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}{1-\rho|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}\|e\|$$

elde edilir.

Ayrıca diğer yandan $u^*(t) = [\Gamma^{-1}e](t)$ olduğundan son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\|\Gamma^{-1}e\| \leq \frac{|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}{1-\rho|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}\|e\|$$

ve

$$\|\Gamma^{-1}\| \leq \frac{|U^{-1}||U|\sigma_0}{1-\rho|U^{-1}||U|\sigma_0}$$

elde edilir. ■

Not 4.2.

Bir sonraki teoremde kullanılacak bazı tanımlara yer verelim. A dönüşümü

$$A : P_\omega \to P_\omega,\ [Ax](t) = x(t) - \lambda \sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k)$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $f \in P_\omega$ fonksiyonu için Fourier serisi

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{i\mu_n t}$$

olsun. Burada $f_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(s)e^{-i\mu_n s}ds$ Fourier katsayıları, $\mu_n = \frac{2n\pi}{\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, $\lambda \in \mathbb{R}$ dir. Bu taktirde $[Ax](t) = x(t) - \lambda\sum_{k=1}^{m} x(t-\tau_k) = f(t)$ olmak üzere $x(t) = [A^{-1}f](t)$ ters dönüşümü

$$[A^{-1}f](t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_n}{1-\lambda\sum_{k=1}^{m} e^{-i\mu_n\tau_k}} e^{i\mu_n t} \qquad (4.42)$$

şeklinde ifade edilebilir (Lu ve Ge, 2004).

Teorem 4.5.

$\phi \in C^k(R, R)$ olsun. Ayrıca $n \in \mathbb{Z}$, $\mu_n = \frac{2n\pi}{\omega}$ için $C_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \phi(s)e^{-i\mu_n s}ds$, ϕ fonksiyonun Fourier katsayısı olmak üzere $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{i\mu_n t}$ Fourier serisi $k \geq 2$ için düzgün yakınsaktır (Vasy, 2009).

İspat: C_n, ϕ fonksiyonun Fourier katsayıları olmak üzere

$$\left|C_n e^{i\mu_n t}\right| = |C_n| \leq \left|\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \phi(s) e^{-\frac{i2n\pi s}{\omega}} ds\right| \leq \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \left|\phi(s) e^{-\frac{i2n\pi s}{\omega}}\right| ds$$

$$\leq \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} |\phi(s)| ds \leq sup_{s\in[0,\omega]} |\phi(s)| \qquad (4.43)$$

olduğundan katsayılar dizisi düzgün sınırlıdır. $n \neq 0$ ve $\phi \in C^k$ için

$$C_n = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega}{i2n\pi}\right)\int_0^{\omega} [\partial_s \phi](s) e^{-\frac{i2n\pi s}{\omega}} ds$$

elde edilir ki, bu işlem k defa tekrar edilirse

$$C_n = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega}{i2n\pi}\right)^k \int_0^{\omega} [\partial_s^k \phi](s) e^{-\frac{i2n\pi s}{\omega}} ds$$

eşitliği bulunur. (4.43) kullanılırsa

$$|C_n| \leq \left(\frac{\omega}{2|n|\pi}\right)^k sup_{s\in[0,\omega]} |[\partial_s^k \phi](s)| = \frac{\mathcal{E}}{|n|^k}\ , \mathcal{E} = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^k sup_{s\in[0,\omega]} |[\partial_s^k \phi](s)|$$

yani

$$|C_n| \leq \frac{\mathcal{E}}{|n|^k}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da $k \geq 2$ için Weierstrass M-testinden Fourier serisi düzgün yakınsaktır (Vasy, 2009).■

Not 4.3.

$f \in C_\omega$ olmak üzere Γ fonksiyonu (4.39) de tanımlandığı gibi

$$\Gamma : C_\omega \to C_\omega,\ \ [\Gamma x](t) = x(t) - B\sum_{k=1}^{m} x(t-\tau_k) = f(t)$$

şeklinde olsun. Yani,

$$x(t) - B\sum_{k=1}^{m} x(t-\tau_k) = f(t) \qquad (4.44)$$

dir. $x(t) = U^{-1}y(t)$ dönüşümü ile

$$U^{-1}y(t) - BU^{-1}\sum_{k=1}^{m} y(t-\tau_k) = f(t)$$

olur ki böylece

$$y(t) - E_\lambda \sum_{k=1}^{m} y(t-\tau_k) = Uf(t) = g(t)$$

$y, g \in T_\omega$ olmak üzere denklemi elde edilir. Denklem sistemimiz düzenlenir ise

$$y_{i,n_i}(t) - \lambda_i \sum_{k=1}^{m} y_{i,n_i}(t-\tau_k) = g_{i,n_i}(t) \tag{4.45}$$

ayrıca $j = 1,2,\dots,n_i - 1$ ve $i = 1,2,\dots,l$ için

$$y_{i,j}(t) - \lambda_i \sum_{k=1}^{m} y_{i,j}(t-\tau_k) - \sum_{k=1}^{m} y_{i,j+1}(t-\tau_k) = g_{i,j}(t) \tag{4.46}$$

denklemleri elde edilir.

Teorem 4.6.

Kabul edelim ki Teorem 4.4`ün (1)-(3) koşulları sağlansın. $k \geq 2$ için $f \in C_\omega^k$ olsun. Bu taktirde $\Gamma^{-1}: C_\omega \to C_\omega$ vardır ve Γ^{-1} operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\Gamma^{-1} f \in C_\omega^1$;
2. $[\Gamma^{-1} f]'(t) = [\Gamma^{-1} f'](t), \ \forall t \in \mathbb{R}$.

İspat:

1. Γ^{-1} varlığı Teorem 4.4 kullanılarak gösterilebilir. Diğer yandan $Uf(t) = g(t)$ olduğundan $g \in T_\omega^1$ dir. n_i pozitif tamsayısı için (4.45) ve (4.46)`dan

$$[A^{-1} g_{i,n_i}](t) = y_{i,n_i}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{g_n}{1-\lambda_i \sum_{k=1}^{m} e^{-i\mu_n \tau_k}} e^{i\mu_n t} \tag{4.47}$$

yazılabilir. Burada $\frac{g_n}{1-\lambda_i \sum_{k=1}^{m} e^{-i\mu_n\tau_k}} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega [A^{-1} g_{i,n_i}](s) e^{-i\mu_n s} ds, \ \mu_n = \frac{2n\pi}{\omega}, \ n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesidir. Diğer yandan

$$y_{i,n_i}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{g_n}{1-\lambda_i \sum_{k=1}^{m} e^{-i\mu_n \tau_k}} e^{i\mu_n t}$$

$$y'_{i,n_i}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{g_n}{1-\lambda_i \sum_{k=1}^{m} e^{-i\mu_n \tau_k}} i\mu_n e^{i\mu_n t}$$

serileri düzgün yakınsak olduğunda $y_{i,n_i} \in P_\omega^1$ dir. Benzer şekilde diğer durumlar için de $y_{i,n_i-1}, y_{i,n_i-2}, \dots, y_{i,1} \in P_\omega^1$ dir. Sonuç olarak $y \in T_\omega^1$, $x(t) = U^{-1} y(t)$ olduğundan $\Gamma^{-1} f = x \in C_\omega^1$ olur.

2. Γ operatörünün tanımından

$$[\Gamma x](t) = x(t) - B \sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k) = f(t)$$

yazılabilir. $[\Gamma^{-1}f](t) = x(t)$ olduğundan denklemde yerine yazılır ise

$$[\Gamma^{-1}f](t) - B \sum_{k=1}^{m} [\Gamma^{-1}f](t - \tau_k) = f(t)$$

elde edilir ki 1. özellikten yani $\Gamma^{-1}f \in C_\omega^1$ olduğundan

$$[\Gamma^{-1}f]'(t) - B \sum_{k=1}^{m} [\Gamma^{-1}f]'(t - \tau_k) = f'(t)$$

$$[\Gamma^{-1}f'](t) = [\Gamma^{-1}f]'(t)$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.3.

4.Bölümün bu ikinci kısmında Fourier serileri kullanılarak $m|\lambda_i| > 1$ olduğunda da, yani çoklu sapma argümanlı D operatörü kararsız olması durumunda da $\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t)$ neutral fonksiyonel diferansiyel denklemi için herhangi bir $x(t)$ ω-periyodik çözümü $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğu gösterilebilir.

5. UYGULAMALAR

Bu bölümde (3.1), (3.33) ve (4.1) denklemlerinin periyodik çözümlerinin varlığı, Bölüm 3 ve Bölüm 4 de elde edilen operatörlere ait özellikler ve Mawhin`nin süreklilik teoremi kullanılarak incelendi ve konu ile ilgili problemler, çözümleri ile birlikte verildi.

Teorem 5.1.

X ve Y birer Banach uzayı, $L : Dom(L) \subset X \rightarrow Y$ operatörü indeksi sıfır olan Fredholm operatörü olsun. Ω, $Dom(L) \cap \Omega \neq 0$ olacak şekilde X in açık sınırlı alt kümesi ve $N: \bar{\Omega} \rightarrow Y$ operatörü de $\bar{\Omega}$ üzerinde L-kompakt operatör olsun. Aşağıdaki şartlar sağlansın.

1. $Lx \neq \lambda Nx\,, \forall x \in \partial\Omega\,,\ \lambda \in (0,1)$
2. $Nx \notin ImL\,, \forall x \in \partial\Omega \cap KerL$
3. $\deg\{JQN, \Omega \cap KerL\,, 0\} \neq 0.$

Burada $J: ImQ \rightarrow kerL$ bir izomorfizmdir. O zaman $Lx = Nx$ denkleminin $\bar{\Omega} \cap Dom(L)$ üzerinde bir çözümü vardır (Gaines ve Mawhin, 1977).

$\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t)$ şeklinde bir denklemin periyodik çözümlerinin varlığını incelemek ve Teorem 5.1`i kullanmak için öncelikle bazı ön hazırlıklara ihtiyacımız var.

$X = Y = C_\omega$ ve $Dom(L) = \{\, y \in C_\omega : Dy_t, \mathbb{R}$ de sürekli diferansiyellenebilir$\}$ olmak üzere

$$L: Dom(L) \cap C_\omega \rightarrow C_\omega\,, \quad [Lx](t) = \frac{d}{dt}D(x_t) = \frac{d}{dt}\big(x(t) - Bx(t-\tau)\big)$$

$$N: C_\omega \rightarrow C_\omega\,, \quad [Ny](t) = f(t, y_t)$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 5.1.

$KerL \cong \mathbb{R}^n$ dir.

İspat: Keyfi $x(t) = c \in \mathbb{R}^n$ sabit fonksiyonunu alalım. Bu taktirde $[Lx](t) = \frac{d}{dt}\big(x(t) - Bx(t-\tau)\big) = \frac{d}{dt}(c - Bc) = 0$ dır. Diğer yandan keyfi $x \in KerL$ alalım. O zaman $[Lx](t) = \frac{d}{dt}\big(x(t) - Bx(t-\tau)\big) = 0$ yani $x(t) - Bx(t-\tau) = c$ dir. Ayrıca $x(t) = U^{-1}y(t)$ dönüşümü kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $y(t) - E_\lambda y(t-\tau) = Uc = d$ denklemi ile

$$y_{i,n_i}(t) - \lambda_i y_{i,n_i}(t-\tau) = d_{i,n_i}$$

ve $j = 1,2,\dots,n_i - 1$, $i = 1,2,\dots,l$ için

$$y_{i,j}(t) - \lambda_i y_{i,j}(t-\tau) - y_{i,j+1}(t-\tau) = d_{i,j}$$

denklemleri elde edilir. Lemma 3.1 den

$$y_{i,n_i}(t) = A_i^{-1}(d_{i,n_i}) = \begin{cases} \sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j d_{i,n_i} = \frac{d_{i,n_i}}{1-|\lambda_i|} & |\lambda_i| < 1 \\ -\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} d_{i,n_i} = \frac{d_{i,n_i}}{|\lambda_i|-1} & |\lambda_i| > 1 \end{cases}$$

ve $d_{i,n_i} \in \mathbb{R}$ olduğundan $y_{i,n_i} \in \mathbb{R}$ elde edilir.

Benzer şekilde diğer durumlar yani y_{i,n_i-2}, y_{i,n_i-3},..., $y_{i,2}$, $y_{i,1}$ için de tamamen benzer şekilde yapılırsa $y \in \mathbb{R}^n$ ve dolayısıyla $x = U^{-1}y$ ile $x \in \mathbb{R}^n$ elde edilir. Bu da $KerL \cong \mathbb{R}^n$ olduğunu gösterir. ■

Lemma 5.2.

$ImL = \left\{y \in C_\omega : \int_0^\omega y(s)ds = 0\right\}$ dir.

İspat: $A = \left\{y \in C_\omega : \int_0^\omega y(s)ds = 0\right\}$ olsun. $y \in ImL$ alalım. Bu taktirde en az bir $x \in Dom(L)$ vardır ki $Lx = y$ sağlanır. Bu taktirde

$$\int_0^\omega y(s)ds = \int_0^\omega Lx(s)ds = \int_0^\omega \frac{d}{dt}(\, x(s) - Bx(s-\tau)\,)ds$$

$$= [x(\omega) - Bx(\omega - \tau)] - [x(0) - Bx(-\tau)] = 0$$

olduğundan $ImL \subset A$ dır.

Diğer yandan $y \in A$ alalım. (3.9), (3.10) ve (3.29) denklemlerini kullanarak $Lx = y$ olacak şekilde $x \in Dom(L)$ bulunabilir. Bu da $A \subset ImL$ olduğunu gösterir ki böylelikle $ImL = \left\{y \in C_\omega : \int_0^\omega y(s)ds = 0\right\}$ olduğu ispatlanmış olur.■

Lemma 5.3.

ImL, C_ω de kapalı bir kümedir.

İspat: T dönüşümü $T: C_\omega \to \mathbb{R}^n$, $T(y) = \int_0^\omega y(s)ds$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $\delta = \frac{\varepsilon}{\omega}$ seçilirse $\|y - z\|_\infty < \delta$ ise

$$|T(y) - T(z)| < \int_0^\omega |y(s) - z(s)|ds \leq \int_0^\omega \|y - z\|_\infty ds = \omega\|y - z\|_\infty < \varepsilon$$

olduğundan T operatörü süreklidir.

Bunun yanında $B = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ tek nokta kümesi kapalı bir kümedir. Sürekli fonksiyon altında kapalı bir kümenin ters görüntüsü kapalı olduğundan $T^{-1}(B) = \left\{y : y \in C_\omega, \int_0^\omega y(s)ds = 0\right\}$ kümesi de C_ω kümesi üzerinde kapalı bir kümedir. Yani ImL, C_ω de kapalıdır.■

Şimdi aşağıdaki izdüşüm operatörleri tanımlansın.

$P : X \to KerL\,,\;\; Px = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(s)ds$

$Q : Y \to ImQ\,,\;\; Qy = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y(s)ds\,.$

Açıktır ki $KerL = ImP$ ve $KerQ = ImL$ dir. Yani $P \overset{P}{\to} Dom(L) \overset{L}{\to} Y \overset{Q}{\to} Y$ zinciri tamdır.

Lemma 5.4.

$CoKer\,L \cong ImQ$ dur.

İspat: Π operatörü

$$\Pi : ImQ \to CoKer\,L = Y/ImL\,, \qquad \Pi(y) = y + ImL$$

şeklinde tanımlansın.

Kabul edelim ki $\Pi(y_1) = \Pi(y_2)$ olsun. O halde $y_1 + ImL = y_2 + ImL$ dir. Yani $y_1 - y_2 \in ImL = KerQ$ dur. $Q(y_1 - y_2) = 0$ dır. Q lineer olduğundan $Q(y_1) = Q(y_2)$ bulunur. Diğer yandan $y_1, y_2 \in ImQ$ olduğundan $Q(t_1) = y_1$ ve $Q(t_2) = y_2$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in Y$ mevcuttur.

$Q(y_1) = Q(y_2) \Leftrightarrow Q\big(Q(t_1)\big) = Q\big(Q(t_2)\big) \Leftrightarrow Q^2(t_1) = Q^2(t_2)$ bulunur ki Q bir izdüşüm operatörü olduğundan $Q^2 = Q$ dur. O halde $Q(t_1) = Q(t_2)$ yani $y_1 = y_2$ olduğu görülür. O halde Π, birebir operatördür.

$y \in Y$ olmak üzere keyfi $y + ImL \in CoKer\,L$ alalım. Q bir izdüşüm operatörü olduğundan $Y = ImQ \oplus KerQ$ şeklinde yazılabilir. Eğer $y + ImL = ImL$ ise $y = 0 \in ImQ$ alınabilir. Eğer $y + ImL \neq ImL$ ise $y \notin ImL = KerQ$ olduğundan $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in ImQ$, $y_1 \neq 0$ ve $y_2 \in KerQ$ şeklinde yazılabilir. $\Pi(y) = \Pi(y_1)$ olduğundan $y = y_1 \in ImQ$ alırsak $\Pi(y_1) = y + ImL$ olur ki böylelikle Π nin örten olduğu gösterilmiş olur. Bu şekilde $CoKer\,L \cong ImQ$ olduğu ispatlanmış olur. ■

Lemma 5.1`den $KerL \cong \mathbb{R}^n$ olduğundan $dimKer\,L = n$ dir. Lemma 5.4`den $CoKer\,L \cong ImQ$ ve Q nun tanımından $ImQ \cong \mathbb{R}^n$ dir. Ayrıca

$$codimImL = dim\,Y/ImL = dimCoKer\,L = dimImQ = n$$

olduğundan

L nin indeksi $= dimKer\, L - codimImL = n - n = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak 5.2 ve 5.3 Lemmaları da kullanılırsa $L : Dom(L) \subset X \to Y$ operatörün indeksi sıfır olan bir **Fredholm operatörü** olduğu görülür. ■

$$K_P: ImL \subset C_\omega \to Dom(L) \cap KerP, \quad [K_P z](t) = [A^{-1}Fz](t)$$

$[Fz](t) = \int_0^t z(s)ds$ olmak üzere Teorem 3.3`den $A^{-1}Fz \in C_\omega^1$ elde edilir ki $K_P$, tamamen sürekli bir operatördür. Böylece $N$, $\bar{\Omega}$ üzerinde $L$- kompakttır. Dolayısı ile $J: R^n \to R^n$, $J(x) = x$ olmak üzere Teorem 5.1`i kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 5.2.

$i = 1,2,\ldots,l$ için $|\lambda_i| \neq 1$, $\Omega \subset C_\omega$ açık, sınırlı bir küme olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın.

1. $\forall\, \lambda \in (0,1)$ için $\frac{d}{dt}D(x_t) = \lambda\, f(t, x_t)$ denklemi $\partial\Omega$ üzerinde herhangi bir çözüme sahip değildir.
2. $QNx = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(s, x_s)ds = 0$ denklemi $\partial\Omega \cap R^n$ üzerinde çözüme sahip değildir.
3. Brouwer derecesi $d_B\{QN, \partial\Omega \cap R^n, 0\} \neq 0$ olsun.

Bu takdirde (3.1) denklemi $\bar{\Omega}$ üzerinde en az bir ω-periyodik çözüme sahiptir (Lu ve ark., 2011).

Örnek 5.1. $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big) \in \mathbb{R}^3$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}(x(t) - Bx(t-\tau)) = \delta g\big(x(t-\mu)\big) + e(t) \tag{5.1}$$

denklemini ele alalım. Burada $B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -20 & 0 & 16 \\ 48 & 3 & -51 \\ -16 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, $e(t) = (sint\,, cost, sint)^T$ ve $g(x) = \left(\frac{x_1^3}{1+x_1^2} + \frac{x_2^3}{1+x_2^2}, \frac{x_2^3}{1+x_2^2} + \frac{x_1^2}{1+x_1^2}, \frac{x_2^3}{1+x_2^2} - \frac{x_3^3}{1+x_3^2}\right)^T$ şeklinde olsun. Bu takdirde $f(t, x_t) = \delta g\big(x(t-\mu)\big) + e(t)$ olur. Diğer yandan $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ seçilir ise $U^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ ve $UBU^{-1} = E_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisleri ile öz değerlerimiz $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 2$ şeklinde elde edilir. Kabul edelim ki $u \in C_{2\pi}$

$$\frac{d}{dt}(x(t) - Bx(t-\tau)) = \lambda\delta g\big(x(t-\mu)\big) + \lambda e(t)\ , \lambda \in (0,1) \tag{5.2}$$

denkleminin keyfi bir çözümü olsun. Bu taktirde

$$\int_0^{2\pi} g\big(u(t-\mu)\big)dt = \int_0^{2\pi} e(t)dt = 0$$

olduğundan $\int_0^{2\pi} g\big(u(t)\big)dt = 0$ dır. Yani,

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{u_1^3(s)}{1+u_1^2(s)} + \frac{u_2^3(s)}{1+u_2^2(s)}\right]ds = \int_0^{2\pi}\left[\frac{u_2^3(s)}{1+u_2^2(s)} + \frac{u_1^2(s)}{1+u_1^2(s)}\right]ds = \int_0^{2\pi}\left[\frac{u_2^3(s)}{1+u_2^2(s)} - \frac{u_3^3(s)}{1+u_3^2(s)}\right]ds = 0$$

elde edilir. Denklemlerimiz tekrardan düzenlenir ise

$$\int_0^{2\pi}\frac{u_1^2(s)[u_1(s)-1]}{1+u_1^2(s)} = 0,\ \int_0^{2\pi}\left[\frac{u_2^3(s)}{1+u_2^2(s)} + \frac{u_1^2(s)}{1+u_1^2(s)}\right]ds = 0 \ \text{ ve } \int_0^{2\pi}\left[\frac{u_1^2(s)}{1+u_1^2(s)} + \frac{u_3^3(s)}{1+u_3^2(s)}\right]ds = 0$$

bulunur. Böylece $u_1(t_0) = 1$, $u_2(t_1) \leq \frac{3}{2}$ ve $u_3(t_1) \leq \frac{3}{2}$ olacak şekilde $t_0,\ t_1$ ve $t_2 \in [0,2\pi]$ noktaları mevcuttur ve

$$|u_1|_\infty \leq 1 + \int_0^{2\pi}|u_1'(s)|ds,\ |u_2|_\infty \leq \frac{3}{2} + \int_0^{2\pi}|u_2'(s)|ds$$

$$|u_3|_\infty \leq \frac{3}{2} + \int_0^{2\pi}|u_3'(s)|ds$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca Teorem 3.4 den $u \in C_{2\pi}^1$ olduğu da görülür. Şimdi bütün bu hazırlıklardan sonra $\int_0^{2\pi}|u'(t)|dt$ ifadesi için bir sınır belirleyelim. Bunun için Teorem 3.3 ve (5.2) denklemi kullanılır ise

$$\int_0^{2\pi}|u'(t)|dt = \int_0^{2\pi}\big|[A^{-1}Au'](t)\big|dt = \int_0^{2\pi}|[A^{-1}(Au)'](t)|dt$$

$$\leq |U||U^{-1}|2^{\frac{n-1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)^k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\big|[Au]'(t)\big|\,dt$$

$$\leq |U||U^{-1}|2\left[\frac{1}{|1-|\lambda_1||} + \frac{1}{|1-|\lambda_2||} + \frac{1}{|1-|\lambda_3||}\right]\int_0^{2\pi}\big|[Au]'(t)\big|\,dt$$

$$\leq |U||U^{-1}|2\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)\left(\int_0^{2\pi}\delta\big|g\big(x(t-\mu)\big)\big|dt + \int_0^{2\pi}|e(t)|dt\right) \tag{5.3}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer yandan $\frac{1}{|1-|\lambda_1||}+\frac{1}{|1-|\lambda_2||}+\frac{1}{|1-|\lambda_3||}=4,\ |U^{-1}|=\frac{\sqrt{133}}{6}\ |U|=\sqrt{35}$ olarak bulunur. Ayrıca

$$\left|g\big(x(t-\mu)\big)\right|^2=\left|\frac{u_1^3(t-\mu)}{1+u_1^2(t-\mu)}+\frac{u_2^3(t-\mu)}{1+u_2^2(t-\mu)}\right|^2+\left|\frac{u_2^3(t-\mu)}{1+u_2^2(t-\mu)}+\frac{u_1^2(t-\mu)}{1+u_1^2(t-\mu)}\right|^2$$

$$+\left|\frac{u_2^3(t-\mu)}{1+u_2^2(t-\mu)}-\frac{u_3^3(t-\mu)}{1+u_3^2(t-\mu)}\right|^2$$

$$\leq\left[\ \left|\frac{u_1^3(t-\mu)}{1+u_1^2(t-\mu)}+\frac{u_2^3(t-\mu)}{1+u_2^2(t-\mu)}\right|+\left|\frac{u_2^3(t-\mu)}{1+u_2^2(t-\mu)}+\frac{u_1^2(t-\mu)}{1+u_1^2(t-\mu)}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\frac{u_2^3(t-\mu)}{1+u_2^2(t-\mu)}-\frac{u_3^3(t-\mu)}{1+u_3^2(t-\mu)}\right|\ \right]^2$$

$$\leq[|u_1(t-\mu)|+|u_2(t-\mu)|+|u_2(t-\mu)|+1$$

$$+|u_2(t-\mu)|+|u_3(t-\mu)|]^2$$

yani

$$\left|g\big(x(t-\mu)\big)\right|\leq|u_1|_\infty+3|u_2|_\infty+|u_3|_\infty+1$$

ve

$$|e(t)|=(|sint|^2+|cost|^2+|sint|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq|sint|+|cost|+|sint|$$

$$\leq 3$$

olduğundan

$$\delta\int_0^{2\pi}\left|g\big(x(t-\mu)\big)\right|dt\leq 2\pi\delta(|u_1|_\infty+3|u_2|_\infty+|u_3|_\infty+1)$$

ve

$$\int_0^{2\pi}|e(t)|dt\leq 6\pi$$

eşitsizlikleri elde edilir. Elde edilen ifadeler (5.3)`de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\int_0^{2\pi}|u^{'}(t)|dt \leq |U||U^{-1}|2\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{|1-|\lambda_i||}\right)\left(\int_0^{2\pi}\delta\left|g\big(x(t-\mu)\big)\right|dt+\int_0^{2\pi}|e(t)|dt\right)$$

$$\leq \sqrt{35}\,\sqrt{133}\,\frac{8}{3}\pi[\,\delta\,(\,|u_1|_\infty+3|u_2|_\infty+|u_3|_\infty+1)+3\,]$$

$$\leq \sqrt{35}\,\sqrt{133}\,\frac{8}{3}\pi[\delta\,(\,3|u_1|_\infty+3|u_2|_\infty+3|u_3|_\infty+3)+3]$$

$$\leq \sqrt{35}\,\sqrt{133}\,8\pi[\delta\,(\,|u_1|_\infty+|u_2|_\infty+|u_3|_\infty+1)+1]$$

yani

$$\int_0^{2\pi}|u'(t)|dt \leq \sqrt{35}\,\sqrt{133}\,8\pi[\delta\,(|u_1|_\infty+|u_2|_\infty+|u_3|_\infty+1)+1] \qquad (5.4)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$|u_1|_\infty+|u_2|_\infty+|u_3|_\infty \leq 4+\int_0^{2\pi}\left(|u_1'(s)|+|u_2'(s)|+|u_3'(s)|\right)ds$$

$$\leq 4+2\int_0^{2\pi}\left(|u_1'(s)|^2+|u_2'(s)|^2+|u_3'(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}}ds$$

$$=4+2\int_0^{2\pi}|u^{'}(s)|ds \qquad (5.5)$$

olduğundan, (5.4) ve (5.5) den $\delta < \frac{1}{16\,\pi\sqrt{35}\,\sqrt{133}}$ için

$$\int_0^{2\pi}|u^{'}(s)|ds \leq \frac{8\,\pi\sqrt{35}\,\sqrt{133}\,(1+5\delta)}{1-16\,\delta\,\pi\sqrt{35}\,\sqrt{133}} := M$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$|u|_{C_{2\pi}} = max_{t\in[0,\omega]}|u(t)| = max_{t\in[0,\omega]}\,(|u_1(s)|^2+|u_2(s)|^2+|u_3(s)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq max_{t\in[0,\omega]}(\,|u_1(s)|+|u_2(s)|+|u_3(s)|\,) \leq |u_1|_\infty+|u_2|_\infty+|u_3|_\infty$$

$$\leq 4+2\int_0^{2\pi}|u^{'}(s)|ds = 4+2M := M_0$$

bulunur ki $\Omega = \left\{x \in C_{2\pi}\,:\,|x|_{C_{2\pi}} < M_0+1\right\}$ olarak belirlenir ise Teorem 5.2`nin 1. şartı sağlanmış olur.

Diğer yandan kabul edelim ki $u \in \partial\Omega \cap KerL = \partial\Omega \cap \mathbb{R}^3$ için $Nu \in ImL = \left\{y: y \in C_\omega, \int_0^\omega y(s)ds = 0\right\}$ olsun. Yani

$$\int_0^\omega Nu(s)ds = \int_0^\omega f(s, x_s)ds = \int_0^\omega \big(\delta g\big(x(s-\mu)\big) + e(s)\big)ds = 0$$

dır. $\int_0^\omega e(s)ds = 0$ dan $\delta \int_0^\omega g\big(x(s-\mu)\big)ds = 0$ ve dolayısıyla $\int_0^\omega g\big(x(s)\big)ds = 0$ olur. Ayrıca $u = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ olduğundan

$$\frac{x_1^3}{1+x_1^2} + \frac{x_2^3}{1+x_2^2} = 0,\ \frac{x_2^3}{1+x_2^2} + \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = 0 \text{ ve } \frac{x_2^3}{1+x_2^2} - \frac{x_3^3}{1+x_3^2} = 0$$

denklem sistemleri elde edilir ki denklem sisteminin çözüm kümesi

$$(x_1, x_2, x_3)^T = \{(1, -1, -1)^T, (0, 0, 0)^T\}$$

olarak bulunur. Böylece $(x_1, x_2, x_3)^T \notin \partial\Omega \cap KerL$ yani $\forall u \in \partial\Omega \cap KerL$ için $Nu \notin ImL$ dir. Böylece Teoremin 2. koşulu da sağlanmış olur.

Son olarak $(JQN)^{-1}[(0,0,0)^T] = \{(1, -1, -1)^T, (0, 0, 0)^T\}$ den

$$d_B\{JQN, \Omega \cap \mathbb{R}^3, 0\} = sgn\ det \frac{\partial g(x)}{\partial x}\Big|_{x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=-1}$$

$$+ sgn\ det \frac{\partial g(x)}{\partial x}\Big|_{x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0} = -1 \neq 0$$

elde edilir. Böylece $\delta < \frac{1}{16\,\pi\sqrt{35}\,\sqrt{133}}$ için (5.1) denklemi $\bar{\Omega}$ üzerinde 2π periyotlu en az bir çözüme sahiptir.■

Teorem 5.3.

$i = 1,2,\dots,l$ için $m|\lambda_i| \leq 1$, $\Omega \subset C_\omega$ açık, sınırlı bir küme olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın.

1. $\forall\, \lambda \in (0,1)$ için $\frac{d}{dt}D(x_t) = \lambda f(t, x_t)$ denklemi $\partial\Omega$ üzerinde çözüme sahip değildir.
2. $QNx = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(s, x_s)ds = 0$ denklemi $\partial\Omega \cap R^n$ üzerinde çözüme sahip değildir.
3. Brouwer derecesi $d_B\{QN, \partial\Omega \cap R^n, 0\} \neq 0$ olsun.

Bu takdirde (4.1) denklemi $\bar{\Omega}$ üzerinde en az bir ω-periyodik çözüme sahiptir.

Örnek 5.2. $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in R^2$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}(x(t) - B[x(t-\tau_1) + x(t-\tau_2)]) = \delta g(x(t-\mu)) + e(t) \tag{5.6}$$

denklemini ele alalım. Burada $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $g(x) = \left(\frac{x_1^3}{1+x_1^2} + \frac{x_2^5}{2+x_2^4}, \frac{3x_1^2}{1+x_1^2} + \frac{x_2^5}{2+x_2^4}\right)^T$ ve $e(t) = (sint, cost)^T$ olsun. Bu takdirde $f(t, x_t) = \delta g(x(t-\mu)) + e(t)$ şeklindedir. U matrisi, $U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ise bu taktirde $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $UBU^{-1} = E_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ matrisleri ve böylece $2|\lambda_i| \leq 1$ şartını sağlayan $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ öz değerleri elde edilir. Kabul edelim ki $\forall\lambda \in (0,1)$ için $u \in C_{2\pi}$

$$\frac{d}{dt}(x(t) - B[\, x(t-\tau_1) + x(t-\tau_2)]) = \lambda\delta g(x(t-\mu)) + \lambda e(t) \tag{5.7}$$

denkleminin keyfi bir çözümü olsun. Bu taktirde

$$\int_0^{2\pi} g(u(t-\mu))dt = \int_0^{2\pi} e(t)dt = 0$$

ve böylece $\int_0^{2\pi} g(u(t))dt = 0$ dır. Yani,

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{u_1^3(t)}{1+u_1^2(t)} + \frac{u_2^5(t)}{2+u_2^4(t)}\right] dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{3u_1^2(t)}{1+u_1^2(t)} + \frac{u_2^5(t)}{2+u_2^4(t)}\right] dt = 0$$

olur. Denklemler düzenlenirse

$$\int_0^{2\pi} \frac{u_1^2(t)[u_1(t)-3]}{1+u_1^2(t)} = 0 \quad \text{ve} \quad \int_0^{2\pi} \left[\frac{3u_1^2(t)}{1+u_1^2(t)} + \frac{u_2^5(t)}{2+u_2^4(t)}\right] ds = 0$$

bulunur. Böylece $u_1(t_0) = 3$ ve $|u_2(t_1)| \leq 3$ olacak şekilde $t_0, t_1 \in [0,2\pi]$ vardır ve

$$|u_1|_\infty \leq 3 + \int_0^{2\pi} |u_1'(s)| ds \quad \text{ve} \quad |u_2|_\infty \leq 3 + \int_0^{2\pi} |u_2'(s)| ds$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca Teorem 4.3`den $u \in C_{2\pi}^1$ elde edilir. Şimdi bütün bu hazırlıklardan sonra $\int_0^{2\pi} |u'(t)| dt$ ifadesi için bir sınır belirleyelim. Bunun için Teorem 4.2 ve (5.7) denklemi kullanılır ise

$$\int_0^{2\pi}|u'(t)|dt = \int_0^{2\pi}|[A^{-1}Au'](t)|dt = \int_0^{2\pi}|[A^{-1}Au]'(t)|dt$$

$$\leq |U||U^{-1}|\sqrt{2}\left[\sum_{i=1}^{2}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \left(\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{1-2|\lambda_i|}\right)^k 2^{k-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}|[Au]'(t)|\,dt$$

$$\leq |U||U^{-1}|\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-2|\lambda_1|}+\frac{1}{1-2|\lambda_2|}\right)\left(\delta\int_0^{2\pi}\left|g\big(x(t-\mu)\big)\right|dt+\int_0^{2\pi}|e(t)|dt\right)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\int_0^{2\pi}\left|g\big(x(t-\mu)\big)\right|dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left|\frac{u_1^3(t-\mu)}{1+u_1^2(t-\mu)}+\frac{u_2^5(t-\mu)}{2+u_2^4(t-\mu)}\right|^2+\left|\frac{3u_1^2(t-\mu)}{1+u_1^2(t-\mu)}+\frac{u_2^5(t-\mu)}{2+u_2^4(t-\mu)}\right|^2}\,dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\left(\left|\frac{u_1^3(t-\mu)}{1+u_1^2(t-\mu)}+\frac{u_2^5(t-\mu)}{2+u_2^4(t-\mu)}\right|+\left|\frac{3u_1^2(t-\mu)}{1+u_1^2(t-\mu)}+\frac{u_2^5(t-\mu)}{2+u_2^4(t-\mu)}\right|\right)dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi}(\ |u_1(t-\mu)|+2|u_2(t-\mu)|+3\ )dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi}(\ |u_1|_\infty+2|u_2|_\infty+3\ )dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi}(\ 3|u_1|_\infty+3|u_2|_\infty+3\ )dt$$

$$= 6\pi(|u_1|_\infty+|u_2|_\infty+1)$$

ve

$$\int_0^{2\pi}|e(t)|dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{|sint|^2+|cost|^2}dt = 2\pi$$

değerleri eşitsizlikte yerine yazılır ise

$$\int_0^{2\pi}|u'(t)|dt \leq |U||U^{-1}|\sqrt{2}\left(\frac{1}{|1-2|\lambda_1||}+\frac{1}{|1-2|\lambda_2||}\right)\{6\pi\delta\ (\ |u_1|_\infty+|u_2|_\infty+1)+2\pi\}$$

$$= |U||U^{-1}|\sqrt{2}(3+3)2\pi\{3\delta(|u_1|_\infty+|u_2|_\infty+1)+1\}$$

$$\leq |U||U^{-1}|\sqrt{2}(3+3)2\pi\left\{3\delta\left(6+\int_0^{2\pi}(|u_1'(s)|+|u_2'(s)|)ds+1\right)+1\right\}$$

$$\leq \frac{88\sqrt{2}\pi}{3}\left\{3\delta\left(6+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(|u_1'(s)|^2+|u_2'(s)|^2)^{\frac{1}{2}}dt+1\right)+1\right\}$$

$\int_0^{2\pi}|u'(t)|dt \leq \frac{88\sqrt{2}\pi}{3}\left\{3\delta\left(7+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|u'(t)|dt\right)+1\right\}$

$\leq \frac{88\sqrt{2}\pi}{3}\left\{21\delta+3\sqrt{2}\delta\int_0^{2\pi}|u'(t)|dt+3\delta\right\}$

$= 616\sqrt{2}\pi\delta+176\pi\delta\int_0^{2\pi}|u'(t)|dt+88\sqrt{2}\pi\delta$

yani $\delta < \frac{1}{176\pi}$ için

$$\int_0^{2\pi}|u'(t)|ds \leq \frac{616\sqrt{2}\pi\delta+88\sqrt{2}\pi}{1-176\pi\delta} := M$$

elde edilir. Böylece

$|u|_{C_{2\pi}} = max_{t\in[0,\omega]}|u(t)| = max_{t\in[0,\omega]}\left\{(|u_1(t)|^2+|u_2(t)|^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$

$\leq max_{t\in[0,\omega]}\{|u_1(t)|+|u_2(t)|\}$

$\leq |u_1|_\infty + |u_2|_\infty$

$\leq 6+\int_0^{2\pi}\left(\left|u_1^{'}(t)\right|+\left|u_2^{'}(t)\right|\right)dt$

$\leq 6+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\left|u_1^{'}(t)\right|^2+\left|u_2^{'}(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}dt$

$\leq 6+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|u^{'}(t)\right|dt$

$= 6+\sqrt{2}M \coloneqq M_0$

bulunur ki $\Omega = \left\{x \in C_{2\pi} :\ |x|_{C_{2\pi}} < M_0+1\right\}$ olarak belirlenir ise Teorem 5.3`ün 1. şartı sağlanmış olur.

Diğer yandan kabul edelim ki $u \in \partial\Omega \cap KerL = \partial\Omega \cap R^2$ için eğer $Nu \in ImL = \left\{y : y \in C_\omega, \int_0^\omega y(s)ds = 0\right\}$ olsun. Yani

$$\int_0^\omega Nu(s)ds = \int_0^\omega f(s,x_s)ds = \int_0^\omega\left(\delta g\big(x(s-\mu)\big)+e(s)\right)ds = 0$$

dır. $\int_0^\omega e(s)ds = 0$ dan $\delta\int_0^\omega g\big(x(s-\mu)\big)ds = 0$ ve dolayısıyla $\int_0^\omega g\big(x(s)\big)ds = 0$ olur. Ayrıca $u = (x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ olduğundan

$$\frac{x_1^3}{1+x_1^2}+\frac{x_2^5}{2+x_2^4}=0 \text{ ve } \frac{3x_1^2}{1+x_1^2}+\frac{x_2^5}{2+x_2^4}=0$$

denklem sistemleri elde edilir ki denklem sisteminin çözüm kümesi

$$(x_1,x_2)^T=\{(3,-2.78)^T,(0,0)^T\}$$

olarak bulunur. Böylece $(x_1,x_2)^T \notin \partial\Omega \cap KerL$ yani $\forall u \in \partial\Omega \cap KerL$ için $Nu \notin ImL$ dir. Böylece Teoremin 2. koşulu sağlanmış olur.

Ayrıca $(JQN)^{-1}[(0,0)^T]=\{(3,-2.78)^T,(0,0)^T\}$ den dolayı

$$d_B\{JQN,\Omega \cap R^2,0\}=sgn\, det\frac{\partial g(x)}{\partial x}|_{x_1=3,\ x_2=-2.78}+sgn\, det\frac{\partial g(x)}{\partial x}|_{x_1=0,\ x_2=0}$$

$$=1\neq 0$$

elde edilir. Böylece eğer $\delta<\frac{1}{176\pi}$ ise (5.6) denklemi $\bar{\Omega}$ kümesi üzerinde 2π-periyotlu en az bir çözüme sahiptir.■

Son örneğimiz D_1 lineer olmayan fark operatörü için bir örnek olacaktır. Bu örneğimizde D_1 lineer olmayan bir fark operatörü olduğundan Teorem 5.1 örneğimize doğrudan uygulanamayabilir. Kabul edelim ki

$$y(t)=D_1(x_t)$$

olsun. Böylece (3.36) denkleminden $y(t)=x(t)-Bx(t-\tau)-h(x_t)=[\Gamma x](t)$ ifadesi elde edilir ve ayrıca Teorem 3.5 de ifade edilen (1)-(3) koşulları da sağlansın. Dolayısıyla artık $\frac{d}{dt}D_1(x_t)=f(t,x_t)$ denkleminin ω-periyodik çözümünün varlığı

$$y'(t)=f(t,[\Gamma^{-1}y]_t)$$

denkleminin ω-periyodik çözümünün varlığına denktir. Böylece biz $y'(t)=f(t,[\Gamma^{-1}y]_t)$ denkleminin ω-periyodik çözümünün varlığını incelememiz yeterli olacaktır. Örneğimize geçmeden önce Teorem 5.1 uygulayabilmemiz için ayrıca bazı düzenlemelere ihtiyacımız var. $X=Y=C_\omega$, $Dom(L)=\{y: y\in C_\omega^1\}$ olmak üzere

$L: Dom(L)\cap C_\omega \to C_\omega$, $\qquad Ly=y'$

$N: C_\omega \to C_\omega$, $\qquad [Ny](t)=f(t,[\Gamma^{-1}y]_t)$

şeklinde tanımlansın.

Açıktır ki $KerL = R^n$, $ImL = \left\{y \in C_\omega : \int_0^\omega y(s)ds = 0\right\}$ ve böylece ImL, $Y = C_\omega$ de kapalıdır. Diğer yandan $dimKer\ L = codimImL = n$ olduğundan L, indeksi sıfır olan bir Fredholm operatörüdür.

$P: X \to KerL,\ \ Px = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(s)ds$ ve $Q: Y \to ImQ,\ \ Qy = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y(s)ds$

projeksiyon operatörler olmak üzere $KerL = ImP$ ve $KerQ = ImL$ olacak şekilde tam (exact) zinciri vardır.

$K_P: ImL \subset C_\omega \to D(L) \cap KerP,\quad [K_P z](t) = \int_0^\omega f(s, [\Gamma^{-1}z]_s)ds$

K_P, sürekli bir operatördür. Böylece N, $\bar{\Omega}$ üzerinde L- kompakttır.

Dolayısıyla $J: R^n \to R^n$, $J(x) = x$ olmak üzere $deg\{JQN, \Omega \cap KerL, 0\} = deg\ \{JQN, \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(s, [\Gamma^{-1}a])ds, 0\}$ ise Teorem 5.1`den aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 5.4.

D_1 fark operatörü $D_1(\varphi) = \varphi(0) - B\varphi(-\tau) - h(\varphi)$ şeklinde olsun ve Teorem 3.5`deki (1)-(3) koşulları sağlansın.

1. $\forall\,\lambda \in (0,1)$ için $y'(t) = \lambda f(t, [\Gamma^{-1}y]_t)$ denklemi $\partial\Omega$ üzerinde çözüme sahip değildir.
2. $\Delta(a) := \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(s, [\Gamma^{-1}a])ds = 0$ denklemi $\partial\Omega \cap R^n$ de çözüme sahip değildir.
3. Brouwer derecesi $d_B\{QN, \partial\Omega \cap R^n, 0\} \neq 0$ olsun.

Bu takdirde (3.33) denkleminin $\bar{\Omega}$ üzerinde en az bir ω-periyodik çözüme sahiptir.

Sonuç 5.1.

D_1 lineer olmayan fark operatörü (3.33) de tanımlandığı gibi olsun ve Teorem 3.5`de verilen (1)-(3) koşulları sağlansın. Eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\rho > 0$ sayısı var ise öyle ki:

1. $\forall\,\lambda \in (0,1)$ için $y'(t) = \lambda f(t, [\Gamma^{-1}y]_t)$ denklemi $\partial\Omega_\rho$ üzerinde çözüme sahip değildir.
2. $\Delta(a) := \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(s, [\Gamma^{-1}a])ds = 0$ denklemi $\partial\Omega \cap R^n$ de çözüme sahip değildir.
3. Brouwer derecesi $d_B\left\{\Delta_1, \Gamma^{-1}\left(B_\rho\right), 0\right\} \neq 0$.

Bu takdirde (3.33) denkleminin $\bar{\Omega}$ üzerinde en az bir ω-periyodik çözüme sahiptir. Burada $\Delta_1 : R^n \to R^n$, $\Delta_1(a) := \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(s, a)ds = 0$, $\rho > 0$ sabit bir sayı olmak üzere $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \rho\}$ ve $\Omega_\rho = \{x \in C_\omega : \|x\| < \rho\}$.

Örnek 5.3. Sonuç 5.1`in bir uygulaması olarak aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - Bx(t-\tau) - s\big(x(t-\tau)\big)\right] = g\big(x(t-\tau)\big) + e(t) \tag{5.8}$$

Burada $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)^T \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\tau > 0$ bir sabit, $B = \begin{pmatrix} 16 & -16 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$, $s(x) = s\big(x_1(t), x_2(t)\big) = \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}(|x_1| + |x_2|), \frac{1}{5\sqrt{2}}(|x_1| - |x_2|)\right)^T$, $e(t) = (\sin t, \cos t)^T$ ve $g(x) = \left(\frac{1}{4}x_1^3, -\frac{1}{4}(x_1^3 + x_2^3)\right)^T$ şeklinde olsun. Diğer yandan $U = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse $U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ve Jordan matrisi $E_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ şeklinde olur. Yani öz değerlerimiz $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = -2$ olur. Eğer $h(x_t) = s\big(x_t(-\tau)\big) = s\big(x(t-\tau)\big)$ ve $f(t, x_t) = g\big(x_t(-\tau)\big) + e(t) = g\big(x(t-\tau)\big) + e(t)$ ise (5.7) denklemimiz $\frac{d}{dt}D_1(x_t) = f(t, x_t)$ şeklinde olur. Ayrıca Teorem 3.5`in koşulları da göz önüne alınarak $l = \frac{1}{5}$ olarak seçilir ise

$$|h(x_t) - h(y_t)| = \left|s\big(x(t-\tau)\big) - s\big(y(t-\tau)\big)\right| \le l|x_t(-\tau) - y_t(-\tau)|$$

$$\le l max_{\theta\in[-\tau,0]}|x_t(\theta) - y_t(\theta)|$$

ve $l|U||U^{-1}|\sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \sum_{k=1}^{j}\frac{1}{|1-|\lambda_i||^k} < 1$ sağlandığı görülür. Gerçekten

$$|U| = 3,\ |U^{-1}| = \frac{3}{4} \text{ ve } \sum_{i=1}^{l}\ \sum_{j=1}^{n_i}\ \sum_{k=1}^{j}\frac{1}{|1-|\lambda_i||^k} = 2 \tag{5.9}$$

yani $l < \frac{2}{9}$ olur ki eşitsizlik sağlanır. Diğer yandan

$$|h(x_t) - h(y_t)| = \left|s\big(x(t-\tau)\big) - s\big(y(t-\tau)\big)\right|$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}}\Big|\Big(\big(|x_1(t-\tau)| + |x_2(t-\tau)|\big), \big(|x_1(t-\tau)| - |x_2(t-\tau)|\big)\Big)$$

$$-\Big(\big(|y_1(t-\tau)| + |y_2(t-\tau)|\big), \big(|y_1(t-\tau)| - |y_2(t-\tau)|\big)\Big)\Big|$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}} |(|x_1(t-\tau)| + |x_2(t-\tau)| - |y_1(t-\tau)| - |y_2(t-\tau)|\,,$$

$$|x_1(t-\tau)| - |x_2(t-\tau)| - |y_1(t-\tau)| + |y_2(t-\tau)|)|$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}} [(\,|x_1(t-\tau)| + |x_2(t-\tau)| - |y_1(t-\tau)| - |y_2(t-\tau)|)^2$$

$$+(|x_1(t-\tau)| - |x_2(t-\tau)| - |y_1(t-\tau)| + |y_2(t-\tau)|)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{5} [|x_1(t-\tau)|^2 + |x_2(t-\tau)|^2 + |y_1(t-\tau)|^2 + \ |y_2(t-\tau)|^2$$

$$-2|x_1(t-\tau)||y_1(t-\tau)| - 2|x_2(t-\tau)||y_2(t-\tau)|]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{5} [(|x_1(t-\tau)| - |y_1(t-\tau)|)^2 + (|x_2(t-\tau)| - |y_2(t-\tau)|)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{5} \left|\big(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)\big) - \big(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau)\big)\right|$$

$$= \frac{1}{5} |x_t(-\tau) - y_t(-\tau)|$$

$$\leq \frac{1}{5} max_{\theta\in[-\tau,0]} |x_t(\theta) - y_t(\theta)| \tag{5.10}$$

eşitsizliği de sağlanır. Dolayısıyla (5.9) ve (5.10) dan Teorem 3.5`in şartları sağlanmış olur. Şimdi ise Sonuç 5.1 de belirtilen Ω_ρ kümesini oluşturalım. Herhangi bir $u \in C_{2\pi}$

$$\frac{d}{dt}\big[x(t) - Bx(t-\tau) - s\big(x(t-\tau)\big)\big] = \lambda g\big(x(t-\tau)\big) + \lambda e(t),\ \lambda \in (0,1)$$

denkleminin keyfi bir çözümü olsun. Yani $\lambda \in (0,1)$ için

$$\frac{d}{dt}\big[u(t) - Bu(t-\tau) - s\big(u(t-\tau)\big)\big] = \lambda g\big(u(t-\tau)\big) + \lambda e(t) \tag{5.11}$$

olur. Son ifadede denklemin her iki tarafı $u(t) - Bu(t-\tau) - s\big(u(t-\tau)\big)$ çarpanı ile çarpılır ve $[0,2\pi]$ üzerinde integral alınır ise

$$\int_0^{2\pi}\big[u(t) - Bu(t-\tau) - s\big(u(t-\tau)\big)\big]^T g\big(u(t-\tau)\big)dt = -\int_0^{2\pi}[u(t) - Bu(t-\tau)$$

$$-s\big(u(t-\tau)\big)\big]^T dt \tag{5.12}$$

denklemi elde edilir.

Şimdi de $\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt$ integral değeri için bir üst sınır belirleyelim. Öncelikle (5.12) denklemi kullanılır ise

$$2\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt = 4\int_0^{2\pi}(|u_1(t)|^4 + |u_1(t)|^4)dt = \int_0^{2\pi} u^T(t)B^T g\big(u(t)\big)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} u^T(t-\tau)B^T g\big(u(t-\tau)\big)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\big[u^T(t) - s^T\big(u(t-\tau)\big)\big]g\big(u(t-\tau)\big)dt$$

$$+\int_0^{2\pi}\big[u(t) - Bu(t-\tau) - s\big(u(t-\tau)\big)\big]^{\mathrm{T}}e(t)dt$$

olur. Daha sonra verilen s ve g fonksiyonlarının değeri yerine yazılır ve düzenlenirse

$$2\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt = \int_0^{2\pi}\Big[\big(u_1(t), u_2(t)\big) - \tfrac{1}{5\sqrt{2}}(\,|u_1(t-\tau)| + |u_2(t-\tau)|\,, |u_1(t-\tau)|$$

$$-|u_2(t-\tau)|\,)\Big]\begin{bmatrix} \tfrac{1}{4}u_1^3(t-\tau) \\ -\tfrac{1}{4}\big(u_1^3(t-\tau)+u_2^3(t-\tau)\big)\end{bmatrix} + \int_0^{2\pi}[\,u(t) - Bu(t-\tau)$$

$$-s\big(u(t-\tau)\big)\big]^T e(t)dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\Big(\tfrac{1}{4}\{u_1(t)u_1^3(t-\tau) - u_2(t)u_1^3(t-\tau) - u_2(t)u_2^3(t-\tau)\}$$

$$-\tfrac{1}{20\sqrt{2}}\{2|u_2(t-\tau)|u_1^3(t-\tau) - |u_1(t-\tau)|u_2^3(t-\tau)$$

$$+|u_2(t-\tau)|u_2^3(t-\tau)\}\Big)dt + \int_0^{2\pi}|u(t) - Bu(t-\tau)$$

$$-s\big(u(t-\tau)\big)\big||e(t)|dt$$

bulunur. İkinci integral ifadesi için Hölder eşitsizliği kullanılır ise

$$2\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt \leq \int_0^{2\pi}\Big(\tfrac{1}{4}\{|u_1(t)||u_1(t-\tau)|^3 + |u_2(t)||u_1(t-\tau)|^3$$

$$+|u_2(t)||u_2(t-\tau)|^3\} + \tfrac{1}{20\sqrt{2}}\{2|u_2(t-\tau)||u_1(t-\tau)|^3$$

$$+|u_1(t-\tau)||u_2(t-\tau)|^3 + |u_2(t-\tau)||u_2(t-\tau)|^3\}\Big)dt$$

$$+\Big(\int_0^{2\pi}\big|u(t) - Bu(t-\tau) - s\big(u(t-\tau)\big)\big|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^{2\pi}|e(t)|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Şimdi de $x, y \geq 0$ için $xy^3 \leq x^4 + y^4$ eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$2\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt \le \int_0^{2\pi}\Big(\tfrac{1}{4}\{|u_1(t)|^4 + |u_1(t-\tau)|^4 + |u_2(t)|^4 + |u_1(t-\tau)|^4$$

$$+|u_2(t)|^4 + |u_2(t-\tau)|^4\} + \tfrac{1}{20\sqrt{2}}\{2(|u_2(t-\tau)|^4 + |u_1(t-\tau)|^4)$$

$$+|u_1(t-\tau)|^4 + |u_2(t-\tau)|^4 + |u_2(t-\tau)|^4 + |u_2(t-\tau)|^4\}\Big)dt$$

$$+\left(\int_0^{2\pi}\left|u(t) - Bu(t-\tau) - s\big(u(t-\tau)\big)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{2\pi}|e(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Son olarak ikinci integral ifadesine Minkowski eşitsizliği kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt \le \int_0^{2\pi}\Big(\tfrac{1}{4}\{|u_1(t)|^4 + |u_1(t)|^4 + |u_2(t)|^4 + |u_1(t)|^4 + |u_2(t)|^4$$

$$+|u_2(t)|^4\} + \tfrac{1}{20\sqrt{2}}\{2(|u_2(t)|^4 + |u_1(t)|^4) + |u_1(t)|^4 + |u_2(t)|^4$$

$$+|u_2(t)|^4 + |u_2(t)|^4\}\Big)dt + \sqrt{2\pi}\left[\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. +|B|\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{2\pi}\left|s\big(u(t)\big)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\le \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{3}{4}\{|u_1(t)|^4 + |u_2(t)|^4\} + \tfrac{1}{20\sqrt{2}}\{3|u_1(t)|^4 + 5|u_2(t)|^4\}\right)dt$$

$$+\sqrt{2\pi}\left[\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} + |B|\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{2\pi}\left|s\big(u(t)\big)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\le \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{3}{4}\{|u_1(t)|^4 + |u_2(t)|^4\} + \tfrac{1}{4}\{|u_1(t)|^4 + |u_2(t)|^4\}\right)dt$$

$$+\sqrt{2\pi}\left[29\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} + l\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\le \int_0^{2\pi}(|u_1(t)|^4 + |u_2(t)|^4)dt + \left[\sqrt{2\pi}(29+l)\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\le \int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt + \sqrt{2\pi}(29+l)\sqrt[4]{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt\right)^{\frac{1}{4}}$$

olur. Yani

$$2\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt \leq \int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt + \sqrt{2\pi}(29+l)\sqrt[4]{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt\right)^{\frac{1}{4}}$$

son eşitsizlikte düzenlenirse

$$\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt \leq 2\pi(29+l)^{\frac{4}{3}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|[\Gamma u](t)|\,dt &= \int_0^{2\pi}\left|u(t) - Bu(t-\tau) - s\big(u(t-\tau)\big)\right|dt \\ &\leq (29+l)\int_0^{2\pi}|u(t)|dt \\ &\leq (29+l)(2\pi)^{\frac{3}{4}}\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq 2\pi\left(29+\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

bulunur ki ve böylece $|[\Gamma u](\mathrm{t}_0)| < 2\pi\left(29+\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}}$ olacak şekilde $t_0 \in [0,2\pi]$ noktası mevcuttur. Şimdi de $\int_0^{2\pi}\left|g\big(u(t)\big)\right|$ ifadesini ele alalım. Şöyle ki,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|g\big(u(t)\big)\right| &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{16}|u_1^3(t)|^2 + \frac{1}{16}|u_1^3(t) + u_2^3(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}dt \\ &\leq \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{16}|u_1^3(t)|^2 + \frac{2}{16}|u_2^3(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}dt \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{2\pi}(|u_1^3(t)|^2 + |u_2^3(t)|^2)^{\frac{1}{2}}dt \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{2\pi}(|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2)^{\frac{3}{2}}dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{2\pi}|u(t)|^3dt \qquad (5.13)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer yandan $\int_0^{2\pi}\left|[\Gamma u]'(t)\right|dt$ ifadesi için öncelikle (5.11) denklemi ve sonrasında (5.13) eşitsizliği kullanılır ise

$$\int_0^{2\pi}\left|[\Gamma u]'(t)\right|dt = |\lambda|\int_0^{2\pi}\left|g\big(u(t-\tau)\big)+e(t)\right|dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\left|g\big(u(t)\big)\right|dt + 2\pi$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{2\pi}|u(t)|^3dt + 2\pi$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{4}(2\pi)^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^4dt\right)^{\frac{3}{4}} + 2\pi$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2\pi)^{\frac{1}{4}}(2\pi)^{\frac{3}{4}}(29+l) + 2\pi$$

$$= \left(\frac{73\sqrt{3}}{5}+2\right)\pi$$

yani

$$\int_0^{2\pi}\left|[\Gamma u]'(t)\right|dt \leq \left(\frac{73\sqrt{3}}{5}+2\right)\pi \tag{5.14}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\|\Gamma u\|_{C_\pi} \leq |[\Gamma u](\mathrm{t}_0)| + \int_0^{2\pi}\left|[\Gamma u]'(t)\right|dt$$

$$\leq 2\pi\left(29+\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{73\sqrt{3}}{5}+2\right)\pi := M_0$$

eşitsizliği ve Teorem 3.5 birlikte düşünüldüğünde

$$\|u\|_{C_\pi} = |\Gamma^{-1}\Gamma u|_{C_\pi}$$

$$\leq \frac{|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{\mathrm{l}}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{\mathrm{j}}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}{1-\rho|U^{-1}||U|\sum_{i=1}^{\mathrm{l}}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{\mathrm{j}}\frac{1}{\left|1-|\lambda_i|\right|^k}}\|\Gamma u\|_{C_\pi}$$

$$< \frac{15}{47}M_0$$

elde edilir. Böylece Ω_ρ kümesi, $\Omega_\rho = \left\{u \in C_\omega : \|u\|_{C_{2\pi}} < \frac{15}{47}M_0\right\}$ olarak belirlenir ise Sonuç 5.1`in 1. şartı sağlanmış olur.

Kabul edelim ki $\alpha \in \mathbb{R}^n$ için $\Delta(\alpha) = 0$ sağlansın. Yani

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[g(\Gamma^{-1}\alpha) + e(s)]ds = g(\Gamma^{-1}\alpha) = 0$$

dır. g fonksiyonunun tanımından $\Gamma^{-1}\alpha = 0$ dır. Böylece $\alpha = 0$ elde edilir ki $0 \notin \partial B_\rho$ yani sıfır değeri B_ρ için bir sınır görüntüsü değildir Sonuç olarak sonuç 5.1`in 2. koşulu da sağlanmış olur.

Diğer yandan

$$H: \Gamma^{-1}(B_\rho) \times [0,1]$$

$$H(x,\mu) = \mu x + (1-\mu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} g(x)$$

tanımlansın. Bu taktirde Her $(x,\mu) \in \Gamma^{-1}(B_\rho) \times [0,1]$ için $x^T H(x,\mu) > 0$ dır.

Gerçekten

$$x^T H(x,\mu) = (x_1, x_2)\left[\mu\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1-\mu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_1^3 \\ -\frac{1}{4}(x_1^3 + x_2^3) \end{pmatrix}\right]$$

$$= \mu(x_1^2 + x_2^2) + (1-\mu)(x_1 - x_2, -x_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_1^3 \\ -\frac{1}{4}(x_1^3 + x_2^3) \end{pmatrix}$$

$$= \mu(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4}(1-\mu)(x_1^4 + x_2^4) > 0$$

bulunur. Böylece

$$d_B\{\Delta_1, \Gamma^{-1}(B_\rho), 0\} = d_B\{\mathrm{g}, \Gamma^{-1}(B_\rho), 0\} = -d_B\{H(.,0), \Gamma^{-1}(B_\rho), 0\}$$

$$= -d_B\{H(.,1), \Gamma^{-1}(B_\rho), 0\} = -1 \neq 0$$

elde edilmiş olur ki sonuç olarak Sonuç 5.1`in son şartı da sağlanmış olur. Böylece 5.8 denkleminin 2π-periyotlu bir $u(t)$ çözümü vardır. ■

6. SONUÇ

D operatörünün kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda_i| < 1$ olmasıdır. Ayrıca D kararlı ise $\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t)$denklemi için herhangi bir ω-periyodik çözümü sürekli birinci türeve sahiptir. Ancak elde edildi ki; $|\lambda_i| > 1$ olması durumunda da $\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t)$ denklemi için herhangi $x(t)$ ω-periyodik çözümü $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilirdir.

$h(\varphi)$ fonksiyonunun aranan koşullarına bakıldığında $\forall\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ için sadece sürekli olması şartı aranmaktadır. Böylece $\frac{d}{dt}D_1(x_t) = f(t, x_t)$ denkleminin herhangi bir ω-periyodik çözümünün birinci türevi olmayabilir. Bundan başka $h \equiv 0$ ise D_1 operatörünün kararlı olması gerekmemektedir.

$m|\lambda_i| < 1$ olduğunda $D(x_t) = x(t) - B\sum_{k=1}^{m} x(t - \tau_k)$ şeklinde tanımlanan çoklu sapma argümanlı D operatörü kararlıdır. Yani D operatörü kararlı olması halinde çoklu sapma argümanlı $\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t)$ neutral fonksiyonel diferansiyel denklemi için herhangi bir $x(t)$ ω-periyodik çözümü $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğu gösterildi. Böylece Lu ve ark. (2011)`de yaptığı çalışmanın $D$ operatörünün kararlı olması durumunda çoklu sapma argümanlı neutral fonksiyonel diferansiyel denkleme genellemesi yapılmıştır. Fakat bu yöntemle $m|\lambda_i| > 1$ olduğunda Lu ve ark. (2011)`de yaptığı çalışmanın çoklu sapma argümanlı neutral fonksiyonel diferansiyel denkleme genellemesi yapılamamıştır. Fakat Fourier serileri kullanılarak $m|\lambda_i| > 1$ olduğunda, yani çoklu sapma argümanlı D operatörü kararsız olduğunda $\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t)$ neutral fonksiyonel diferansiyel denklemi için herhangi bir $x(t)$ ω-periyodik çözümü $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğu gösterildi.

Bunun yanında lineer, lineer olmayan ve çoklu sapma argümanlı D operatörleri için Mawhin`nin süreklilik teoremi kullanılarak çeşitli örnekler üzerinde $\frac{d}{dt}D(x_t) = f(t, x_t)$ neutral fonksiyonel diferansiyel denkleminin periyodik çözümünün varlığı gösterildi.

KAYNAKLAR

Akhmerov, R. R., Kamenskii, M. I., Potapov, A. S., Rodkina, A.E., Sadovskii, B.N., 1982. Theory of equations of neutral type**.** ***Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.,*** 19(1): 55-126.

Arino, O., Hbid, M.L., Dads, E.A., 2002. ***Delay Differential Equations and Applications***. Springer, Marrakech-Morocco. 594.

Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., Rakhmatullina, L.F., 2007. ***Introduction to the Theory of Functional Differential Equations :Methods and Applications***. Hindawi Publishing Corparation, Egypt. 314.

Bellen, A., Zennaro, M., 2003. ***Numerical Methods for Delay Differential Equations***. Clarendon Press-Oxford, 413.

Bellman, R., Cooke, K.L., 1963. ***Differantial-Difference Equations***. Academic Press, London. 480.

Burton, T.A., 1985. ***Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Funtional Differential Equations***. Academic Press, 331.

Degla, G., 1997. ***Degree Theory for Compact Displacements of The Identity and Applications***. International Center for Theoretical Physics P. O. Box 586, Trieste, Italy.

Deimling, K. 2010. ***Nonlinear Functional Analysis***. Dover Publication, Inc, 450.

Diekmann, O., Van Gils, S.A., Lunel, S.M.V., Walther, H.O., 1995. ***Delay Equations Fonctional-, Complex-, and Nonlinear Analysis***. Springer Verlag, New York, 546.

Driver, R.D., 1977. ***Ordinary and delay differantial equations***. Springer Verlag, 501.

Èl’sgol’ts, L. È., Norkin, S. B., 1973. ***Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments***. Translated from the Russian by John L. Casti. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 105.

Erneux, T., 2009. ***Applied Delay Differential Equations***. Springer, Belgium, 212.

Fan, M., Wang, K., 2000. Periodic solutions of convex neutral functional differential equation. ***Tohoku Math. J.***, **52**: 47-59.

Fan, M., Wang, K., Agarwal, R.P., 2005. Periodic solutions of neutral functional differential equations with infinite delay. ***Math. Anal.***, **12**: 129-137.

Gaines, R.E., Mawhin, J.L., 1977. ***Lecture Notes in Mathematics***. Springer-Verlag, Berlin, 262.

Hale, J., 1977. ***Theory of Functional Differential Equations***. Springer-Verlag, New York, 376.

Hale, J., Lunel, Y.H., 1993. ***Introduction to Functional Differential Equations***. Springer, New York, 446.

Hale, J., 1963. ***Linear Functional Differential Equations with Constant Coefficients***. Research Institute for Advanced Studies, 46.

Hino, Y., Murakami, S., Naito, T., 1991. ***Functional Differential Equations with Infinite Delay***. Springer Verlag, 392.

Islam, M.N., Raffoul, Y.N., 2007. Periodic solutions of neutral nonlinear system of differential equations with functional delay. ***J. Math. Anal. Appl.***, **331** (2): 1175-1186.

Kolmanovskii, V., Myshkis, A., 1999. ***Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations***. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London. 666.

Krasovskii, N. N., Brenner, J. L., 1963. ***Stability Of Motion: Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay***. Stanford University Press, Stanford, California. 197.

Kuang, Y., 1993. ***Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics***. Academic Press, 412.

Liu, B., Huang, L., 2006. Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of first order neutral functional differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.***, **322** (1): 121-132.

Liu, B., Huang, L., 2007. Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of second order neutral functional differential equations. ***Nonlinear Anal. Real World Appl.***, **8** (1): 222-229.

Lu, S., Ge, W., 2003. On the existence of periodic solutions for neutral functional differential equation. ***Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl.***, **54** (7): 1285-1306.

Lu, S., Ge, W., Zheng, Z., 2004. Periodic solutions to neutral differential equation with deviating arguments. ***Appl. Comput. Math.***, **152** (1):17-27.

Lu, S., Ge, W., 2004. Existence of periodic solutions for a kind of second-order neutral functional differential equation. ***Appl. Comput. Math.***, **157** (2): 433-448.

Lu, S., Ge, W., 2004. Periodic solutions for a kind of second-order neutral differential systems with deviating argument. ***Appl. Comput. Math.***, **156** (3): 719-732.

Lu, S., 2008. Periodic solutions to a second order p-Laplacian neutral functional differential system. ***Nonlinear Anal.***, ***69*** (11): 4215-4229.

Lu, S., Xu, Y., Xia, D., 2011. New properties of the D-operator and its applications on the problem of periodic solutions to neutral functional differential system. ***Nonlinear Anal***., **74** (9): 3011–3021.

Lu, S., Chen, L., 2012. The problem of existence of periodic solutions for neutral functional differential system with nonlinear difference operator. ***J. Math. Anal. Appl.***, **387 (**2**)**: 1127-1136.

Mawhin, J., 2008. Reduction and continuation theorems for Brouwer degree and applications to nonlinear difference equations. ***Opuscula Math.***, **28** (4): 541-560.

Musayev, B., Alp, M., 2000. ***Fonksiyonel Analiz***. Balcı yayınları, Kütahya, 470.

Rahimov, A., 2006. ***Topolojik Uzaylar***. Seçkin Yayıncılık, 328.

Ren, J., Cheng, Z., 2009. Periodic solutions for generalized high-order neutral differential eqaution in the critic case. ***Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl.***, **71** (12): 6182-6193.

Schröder, B.S.W., 2007. ***Mathematical Analysis a Concise Introduction***. Wiley-Interscience, USA, 579.

Soykan, Y., 2008. ***Fonksiyonel Analiz***. Nobel Yayın Dağıtım, 504.

Vasy, A., 2009. Partial Differential Equations of Applied Mathematics Lecture Notes Convergence of the Fourier series. ***http://math.stanford.edu/~andras/220.html*** Stanford University, Department of Mathematics, California. Erişim tarihi: 01.06.2014.

Wang, K., Lu, S., 2007. On the existence of periodic solutions for a kind of high-order neutral functional differential equation. ***J. Math. Anal. Appl.***, **326** (2):1161-1173.

EKLER

EK 1. Bu bölümde Lemma 4.2`nin ikinci şartının belirtilen yerin ispatı verildi.

$$\left(\int_0^{\omega}\left|\sum_{j=0}^{\infty}[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_0^{\omega}\left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sonlu değerler için Minkowski eşitsizliğinden

$$\left(\int_0^{\omega}\left|\sum_{j=0}^{n}[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=0}^{n}\left(\int_0^{\omega}\left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca T operatörü $[Tf](t) = \lambda_i \sum_{k=1}^{m} f(t-\tau_k)$ ve $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_0^{\omega}\left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ fonksiyon serisinin kısmi toplamları $S_n = \sum_{j=0}^{n}\left(\int_0^{\omega}\left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ şeklindedir. Şimdi kısmi toplamlar dizisinin düzgün yakınsaklığını inceleyelim. $S_n(t)$ fonksiyon serisinin kısmi toplamları olmak üzere

$$S_n(t) = \sum_{j=0}^{n}\left(\int_0^{\omega}\left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\omega}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{\omega}|[Tf](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\left(\int_0^{\omega}|[T^2 f](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left(\int_0^{\omega}|[T^n f](t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^{\omega}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{\omega}\left|\lambda_i \sum_{k_1=1}^{m} f(t-\tau_{k_1})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\left(\int_0^{\omega}\left|\lambda_i{}^2 \sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{m} f(t-\tau_{k_1}-\tau_{k_2})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots +$$

$$\left(\int_0^{\omega}\left|\lambda_i{}^n \sum_{k_1}^{m}\sum_{k_2=1}^{m} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} f(t-\tau_{k_1}-\tau_{k_2}-\cdots-\tau_{k_n})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^{\omega}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda_i|\left(\int_0^{\omega}\left|\sum_{k_1=1}^{m} f(t-\tau_{k_1})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$|\lambda_i|^2\left(\int_0^{\omega}\left|\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{m} f(t-\tau_{k_1}-\tau_{k_2})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots +$$

$$|\lambda_i|^n\left(\int_0^{\omega}\left|\sum_{k_1}^{m}\sum_{k_2=1}^{m} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} f(t-\tau_{k_1}-\tau_{k_2}-\cdots-\tau_{k_n})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_0^{\omega} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda_i| \sum_{k_1=1}^{m} \left(\int_0^{\omega} \left|f\left(t-\tau_{k_1}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$|\lambda_i|^2 \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \left(\int_0^{\omega} \left|f\left(t-\tau_{k_1}-\tau_{k_2}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots +$$

$$|\lambda_i|^n \sum_{k_1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \dots \sum_{k_n=1}^{m} \left(\int_0^{\omega} \left|f\left(t-\tau_{k_1}-\tau_{k_2}-\cdots-\tau_{k_n}\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Şimdi ise 2. ifade için; $s = t - \tau_{k_1}$, 3. ifade için; $s = t - \tau_{k_1} - \tau_{k_2}$,..., n. ifade için de; $s = t - \tau_{k_1} - \tau_{k_2} - \cdots - \tau_{k_n}$ değişken dönüşümleri yapılır ve düzenlenir ise

$$= \left(\int_0^{\omega} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda_i| \sum_{k_1=1}^{m} \left(\int_{-\tau_{k_1}}^{\omega-\tau_{k_1}} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$|\lambda_i|^2 \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \left(\int_{-\tau_{k_1}-\tau_{k_2}}^{\omega-\tau_{k_1}-\tau_{k_2}} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots +$$

$$|\lambda_i|^n \sum_{k_1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \dots \sum_{k_n=1}^{m} \left(\int_{-\tau_{k_1}-\tau_{k_2}-\cdots-\tau_{k_n}}^{\omega-\tau_{k_1}-\tau_{k_2}-\cdots-\tau_{k_n}} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^{\omega} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda_i| \sum_{k_1=1}^{m} \left(\int_0^{\omega} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$|\lambda_i|^2 \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \left(\int_0^{\omega} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + |\lambda_i|^n \sum_{k_1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \dots \sum_{k_n=1}^{m} \left(\int_0^{\omega} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^{\omega} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + m|\lambda_i| \left(\int_0^{\omega} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + (m|\lambda_i|)^2 \left(\int_0^{\omega} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots +$$

$$(m|\lambda_i|)^n \left(\int_0^{\omega} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

yani kısmi toplamlar

$$S_n = [1 + m|\lambda_i| + (m|\lambda_i|)^2 + \cdots + (m|\lambda_i|)^n] \left(\int_0^{\omega} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$S_n = \frac{1-(m|\lambda_i|)^{n+1}}{1-m|\lambda_i|} \left(\int_0^{\omega} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde elde edilir.

$m|\lambda_i| < 1$ olmak üzere $n \to \infty$ için limit alınır ise

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-m|\lambda_i|}\left(\int_0^{\omega}|f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Sonuç olarak

$\left(\int_0^{\omega}\left|\sum_{j=0}^{n}[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=0}^{n}\left(\int_0^{\omega}\left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ ifadesinde $n \to \infty$ için

$$\left(\int_0^{\omega}\left|\sum_{j=0}^{\infty}[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_0^{\omega}\left|[T^j f](t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

elde edilir. ■

EK 2. Teorem 4.2`de belirtilen yerin ispatı verildi.

$\sum_{j=0}^{\infty}\left[T^j g_{i,n_i}\right]'(t)$ serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Serinin kısmi toplamlar dizisi

$$S_m(t) = g'_{i,n_i}(t) + \left[Tg_{i,n_i}\right]'(t) + \left[T^2 g_{i,n_i}\right]'(t) + \cdots + \left[T^{m-1} g_{i,n_i}\right]'(t)$$

şeklinde olsun. T dönüşümü $[Tx](t) = \lambda_i \sum_{k=1}^{n} x(t-\tau_k)$ ve $g_{i,n_i} \in P_\omega^1$ olduğundan

$$\left[Tg_{i,n_i}\right]'(t) = \left[\lambda_i \sum_{k=1}^{n} g_{i,n_i}(t-\tau_k)\right]' = \lambda_i \sum_{k=1}^{n} g'_{i,n_i}(t-\tau_k) = \left[Tg'_{i,n_i}\right](t)$$

elde edilir. Benzer şekilde T^2 dönüşümü için de yapılırsa

$$\left[T^2 g_{i,n_i}\right]'(t) = \left[T\left(Tg_{i,n_i}\right)\right]'(t) = \left[T\left(\lambda_i \sum_{k=1}^{n} g_{i,n_i}(t-\tau_k)\right)\right]'$$

$$= \lambda_i \left[\left[Tg_{i,n_i}\right](t-\tau_1) + \left[Tg_{i,n_i}\right](t-\tau_2) + \cdots + \left[Tg_{i,n_i}\right](t-\tau_n)\right]'$$

$$= \lambda_i^2 \left[\sum_{k=1}^{n} g_{i,n_i}(t-\tau_1-\tau_k) + \sum_{k=1}^{n} g_{i,n_i}(t-\tau_2-\tau_k) + \cdots + \sum_{k=1}^{n} g_{i,n_i}(t-\tau_n-\tau_k)\right]'$$

$$= \lambda_i^2 \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} g_{i,n_i}(t-\tau_i-\tau_k)\right)\right]'$$

bulunur ki toplam sonlu ve $g_{i,n_i} \in P_\omega^1$ olduğu da kullanılırsa

$$= \lambda_i^2 \left[\sum_{k=1}^{n} g'_{i,n_i}(t-\tau_1-\tau_k) + \sum_{k=1}^{n} g'_{i,n_i}(t-\tau_2-\tau_k) + \cdots + \sum_{k=1}^{n} g'_{i,n_i}(t-\tau_n-\tau_k)\right]$$

$$= \lambda_i \left[\left[Tg'_{i,n_i}\right](t-\tau_1) + \left[Tg'_{i,n_i}\right](t-\tau_2) + \cdots + \left[Tg'_{i,n_i}\right](t-\tau_n)\right]$$

$$= T\left(\lambda_i \sum_{k=1}^{n} g'_{i,n_i}(t-\tau_k)\right) = T\left(\left[Tg'_{i,n_i}\right](t)\right) = \left[T^2 g'_{i,n_i}\right](t)$$

elde edilir. Yani

$$\left[Tg_{i,n_i}\right]'(t) = \left[Tg'_{i,n_i}\right](t),\ \left[T^2 g_{i,n_i}\right]'(t) = \left[T^2 g'_{i,n_i}\right](t),$$

$$\left[T^3 g_{i,n_i}\right]'(t) = \left[T^3 g'_{i,n_i}\right](t), \ldots, \left[T^j g_{i,n_i}\right]'(t) = \left[T^j g'_{i,n_i}\right](t)$$

şeklindedir. Böylece kısmi toplamlar dizimiz

$$S_m(t) = g'_{i,n_i}(t) + \left[Tg_{i,n_i}\right]'(t) + \left[T^2 g_{i,n_i}\right]'(t) + \cdots + \left[T^{m-1} g_{i,n_i}\right]'(t)$$

$$= g'_{i,n_i}(t) + \left[Tg'_{i,n_i}\right](t) + \left[T^2 g'_{i,n_i}\right](t) + \cdots + \left[T^{m-1} g'_{i,n_i}\right](t)$$

$$= \left[(I + T + T^2 + \cdots + T^{m-1}) g'_{i,n_i}\right](t)$$

$= \left[\frac{\mathrm{I} - T^m}{\mathrm{I} - T} g'_{i,n_i}\right](t)$ $\|\mathrm{T}\| < 1$ olduğundan $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{m\to\infty} S_m(t) = S(t) = \left[\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}-T} g'_{i,n_i}\right](t) = \left[(I - T)^{-1} g'_{i,n_i}\right](t) = \left[A_i^{-1} g'_{i,n_i}\right](t)$$

elde edilir.

$$c_m = max_{t\in[0,\omega]} |S_m(t) - S(t)| = max_{t\in[0,\omega]} \left| \left[\frac{I-T^m}{I-T} g'_{i,n_i}\right](t) - \left[\frac{I}{I-T} g'_{i,n_i}\right](t) \right|$$

$= max_{t\in[0,\omega]} \left| \left[\frac{-T^m}{\mathrm{I}-T} g'_{i,n_i}\right](t) \right| \leq \frac{\|T^m\|}{\|\mathrm{I}-T\|} \left| g'_{i,n_i} \right|_\infty$ $m \to \infty$ için $c_m \to 0$ dır

Böylece $S_m(t)$ kısmi toplamlar dizisi düzgün yakınsak elde edilir. Dolayısıyla

$\sum_{j=0}^{\infty} \left[T^j g_{i,n_i}\right]'(t)$ serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Yani

$$y'_{i,n_i}(t) = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left[T^j g_{i,n_i}\right](t)\right]' = \sum_{j=0}^{\infty} \left[T^j g_{i,n_i}\right]'(t)$$

Benzer şekilde $y_{i,n_i-1}, y_{i,n_i-2}, \ldots, y_{i,1} \in P_\omega^1$ olduğu gösterilebilir. ■

EK 3. Bu bölümde $\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j g'_{i,n_i}(t - j\tau)$ ile $-\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} g'_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)$ serilerinin düzgün yakınsaklığı gösterildi. Gerçekten

$\forall t \in [0, \omega]$ için $\left|\lambda_i{}^j g'_{i,n_i}(t - j\tau)\right| \leq |\lambda_i|^j \left|g'_{i,n_i}\right|_\infty$ ve

$$\left|\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j g'_{i,n_i}(t - j\tau)\right| \leq \sum_{j\geq 0} |\lambda_i|^j \left|g'_{i,n_i}(t - j\tau)\right| \leq \left|g'_{i,n_i}\right|_\infty \sum_{j\geq 0} |\lambda_i|^j$$

sağlanır. Diğer yandan $\sum_{j\geq 0} |\lambda_i|^j$ serisi $|\lambda_i| < 1$ için yakınsak olduğundan Weierstrass M-testinden $\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j g'_{i,n_i}(t - j\tau)$ serisi düzgün yakınsaktır. $g_{i,n_i} \in P_\omega^1$ olduğundan

$$y'_{i,n_i}(t) = \left[\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j g_{i,n_i}(t - j\tau)\right]' = \sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^j g'_{i,n_i}(t - j\tau)$$

terim-terime türetme gerçeklenir.

Benzer şekilde

$\forall t \in [0, \omega]$ için $\left|\lambda_i{}^{-j-1} g'_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)\right| \leq |\lambda_i|^{-j-1} \left|g'_{i,n_i}\right|_\infty$ ve

$$\left|-\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} g'_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)\right| \leq \sum_{j\geq 0} |\lambda_i|^{-j-1} \left|g'_{i,n_i}(t - j\tau)\right|$$
$$\leq \left|g'_{i,n_i}\right|_\infty \sum_{j\geq 0} |\lambda_i|^{-j-1}$$

elde edilir. $\sum_{j\geq 0} |\lambda_i|^{-j-1}$ serisi $|\lambda_i| > 1$ için yakınsak olduğundan Weierstrass M-testinden $\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} g'_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)$ serisi düzgün yakınsaktır. Ayrıca $g_{i,n_i} \in P_\omega^1$ olduğundan

$$y'_{i,n_i}(t) = \left[-\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} g'_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)\right]' = -\sum_{j\geq 0} \lambda_i{}^{-j-1} g'_{i,n_i}(t + (j+1)\tau)$$

terim-terime türetme gerçeklenir. Sonuç olarak yakınsamalar düzgündür ve $y_{i,n_i} \in P_\omega^1$ dir. Benzer şekilde $y_{i,n_i-1}, y_{i,n_i-2}, \ldots, y_{i,1} \in P_\omega^1$ olduğu gösterilebilir. ■

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Çankırı`da doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Şehit Kubilay ilköğretim okulunda lise öğrenimini ise Kalaba Anadolu Lisesinde Ankara`da tamamladı. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü`nden 2009 yılında Matematikçi ünvanıyla mezun oldu. 2012 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü`ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen aynı bölümde bu görevi devam etmektedir.