T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARK DENKLEMLERİ VE FARK DENKLEMLERİNDE KARARLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: HARUN BİÇER
DANIŞMAN : PROF. DR. CEMİL TUNÇ

VAN-2014

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARK DENKLEMLERİ VE FARK DENKLEMLERİNDE KARARLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: HARUN BİÇER

VAN-2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, Harun BİÇER tarafından sunulan "Fark Denklemleri ve Fark Denklemlerinde Kararlılık" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 10/10/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Cemil TUNÇ İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Süleyman EDİZ İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./..../…... tarih ve .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Harun BİÇER

ÖZET

FARK DENKLEMLERİ VE FARK DENKLEMLERİNDE KARARLILIK

BİÇER, Harun
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Ekim 2014, 68 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde fark denklemlerinin kararlılığı ve Lyapunov kararlılığı ile ilgili olarak literatürde yapılmış olan çalışmalar özetlendi. İkinci bölümde fark denklemleri ve çözümleri ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi. Üçüncü bölümde iki farklı fark denklem sistemi için kararlılık tanım ve teoremleri örneklerle verildi. Dördüncü bölümde lineer ve lineer olmayan fark denklemlerinin çözümlerinin Lyapunov kararlılığı incelendi.

Anahtar kelimeler: Fark denklemi, Kararlılık, Lyapunov fonksiyonu.

ABSTRACT

DIFFERENCE EQUATIONS AND STABILITY OF THE DIFFERENCE EQUATIONS

BİÇER, Harun
Msc. Thesis, Mathematics Science
Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
October 2014, 68 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some scientific works done in the literature with respect to the stability of difference equations and Lyapunov's stability are summarized. In the second chapter, some basic definitions and theorems with respect to differences equations and their solutions are stated. In the third chapter, the stability definitions and theorems with examples are given for two different difference equations system. In the fourth chapter, the Lyapunov stability of solutions of lineer and nonlinear difference equations are examined.

Key words: Difference equation, stability, Lyapunov function.

ÖN SÖZ

Bilindiği gibi Fizik, Mühendislik gibi bir çok bilim alanında ortaya çıkan problemlerin matematiksel modeli karşımıza fark denklemleri olarak çıkar. Bu tez çalışmasında bu denklem türlerinden biri olarak fark denklemleri ele alındı. Bu denklemlerin kararlılığı ve Lyapunov kararlılığı ile ilgili olarak literatürde yapılmış olan çalışmalardan bazıları incelendi.

Bu tez çalışmasını bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını benden esirgemeyen hocam, Prof. Dr. Cemil TUNÇ' a çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu zorlu süreçte her türlü desteğiyle yanımda olan değerli eşime çok teşekkür ederim.

2014
Harun BİÇER

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Fark denklemleri sadece diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde değil, aynı zamanda biyoloji, mühendislik, ekonomi gibi alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde ya doğrudan ya da dolaylı olarak yer alırlar. Bu denklemlerde bağımsız değişken tamsayılar üzerinde tanımlanır. Dolayısıyla fark denklemlerinde türev terimleri yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur. Bu bakımdan, fark denklemleri daha çok sürekli olmayan problemleri karakterize eder. Örneğin, genetik alanda, kuşaklar arasındaki genetik başkalaşım ile ekonomide fiyat değişim problemleri açıkça sürekli olmayan problemlerdir. Çünkü bağımsız değişkenler birinde kuşak; diğerinde duruma göre gün, hafta, ay veya yıldır ve ikisi de doğal olarak ayrık cümleler üzerinde tanımlıdır. En bilinen fark denklemlerinden birisi Fibonacci' nin biyolojideki ilk matematiksel modeli olan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ F_1 = F_2 = 1,\ n = 1, 2, 3, ...$ fark denklemidir. Fibonacci'nin modeline göre, yeni doğmuş biri dişi biri erkek olan bir çift tavşanı ele alalım. Tavşanlar ilk ayın sonunda çoğalmaya hazır oluyorlar. Tavşanların hiç ölmediğini ve yeni tavşan çiftinin birinin dişi diğerinin de erkek olduğunu varsayalım. Buna göre tavşan çifti sayısı 1-1-2-3-5-… şeklinde olur (Elaydi, 1999).

Fark denklemleri, sabit nokta teorisi, dinamik sistemler, popülasyon dinamiği, model teorisi başta olmak üzere fizik, mühendislik, iktisat gibi birçok bilim dallarında çok yaygın ve kullanışlı uygulaması olan matematiğin çok önemli denklem türlerindendir. Bu tezde, klasik ve vektörel fark denklemleri içinde çok önemli bir yeri olan ve uygulanabilirliği ve çözümlerinin neredeyse bütün özelliklerinin tartışılabilir olmasından dolayı bilim adamlarının karşılarına çıkan olayları ifade etmede kullandığı fark denklemlerinin niteliksel davranışlarından biri olan çözümlerin kararlılığının incelenmesi ile ilgili bir derleme çalışması yapılacaktır.

Birçok yazar bu tür denklemlerin sistemlerini değişik parametreleri de göz önünde bulundurarak enine boyuna incelediler. Aşağıda belirtilen literatür bildirişlerine bakıldığında ilgili literatürde ilgili sistemlerin ne kadar geniş yer aldığı ve yapılan çalışmaların önemi rahatlıkla görülecektir. Bütün bu çalışmaları ayrıntılı bir şekilde sınıflandırmak çok daha geniş ve kapsamlı bir çalışma gerektirecektir.

Klasik fark denkleminde herhangi bir x_0 noktasından başlayarak bir $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))),...$ dizisi oluşturulabilir. Ayrıca burada $f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))),...$ olur. Yine burada $f(x_0)$, x_0 noktasında f nin (birinci) iterasyonunu; $f^2(x_0)$, x_0 noktasında f nin ikinci iterasyonunu ve böyle devam edilerek $f^n(x_0)$, x_0 noktasında f nin n. iterasyonunu gösterir. $f^0(x_0) = x_0$ olmak üzere tüm pozitif $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ iterasyonların kümesi, x_0 noktasında pozitif yörünge olarak adlandırılır ve $O(x_0)$ ile gösterilir. İşte bu iterasyon süreci, ayrık dinamik sistemlere bir örnek teşkil etmektedir.

Örneğin, $f(x) = x^2$, $x_0 = 0.6$ için $\{f^n(x_0)\}$ iterasyon dizisi bulunurken x yerine 0.6 konularak tekrarlı (iterasyonel) biçimde 0.6, 0.36, 0.1296, 0.01679616,… sayı dizisi elde edilebilir. Böylece $f^n(0.6)$ nın iterasyonunun sıfıra yakınsadığı görülebilir. Yani, mesela her $x_0 \in (0,1)$ için $n \to \infty$ iken $f^n(x_0)$ sıfıra gider ve $x_0 \notin [-1,1]$ ise $f^n(x_0)$ sonsuza gider. Ayrıca burada $f^n(0) = 0$, $f^n(1) = 1$ ve bütün pozitif tam sayılar için $f^n(-1) = 1$ dir.

Fark denklemleri son 30 yıl içerisinde pek çok bilim adamının ilgisini çekmiştir ve bu durum zengin bir literatürün ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bununla ilgili olarak Miller 1968, Goldberg 1986, Bereketoğlu 2012, Lakshmikantham ve Trigiante 1988, Mickens 1990, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Agarwal 2000, Kelley ve Peterson 2001 kitaplarından ve Sugiyama 1969, 1971, Gordon 1971, LaSalle 1977, Peterson 1987, Elaydi vePeterson 1988 gibi makalelerden sözedilebilir.

Konuyla ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalara baktığımızda Birkhoff (1911), lineer fark denklemlerin genel teorisini verdi. Adams (1928), lineer adi fark denklemlerin regüler olmayan durumlarını inceledi. Levinson (1946), lineer fark denklem sistemlerinin asimptotik davranışlarını ele aldı. Evgrafov (1958), fark denklemlerinin asimptotik çözüm davranışlarını araştırdı. Milne-Thomson (1960), sonlu fark hesabını yaptı. Coffman (1964), adi fark denklemlerinin asimptotik davranışlarını inceledi. Hurt (1967), adi fark denklemlerinin bazı kararlılık teoremlerini ispatladı. Miller (1968), lineer fark denklemlerini ele aldı. Williams (1970), dinamik sistemlerde kararlılığı inceledi. Cadzow (1973), ayrık zaman sistemlerini araştırdı. Schinas (1974), tam normlu uzaylarda zaman fark denklemlerinin kararlılığını inceledi. Murray (1974), asimptotik analizi ifade etti. Beddington ve ark. (1975), fark denklemlerinin dinamik kompleks durumlarını analiz etti. Clark (1976), nüfus poülasyon dinamiğini inceledi. Luenberger (1979), dinamik sistemlerin teorisini uygulamalarıyla ifade etti. Kailath (1980), lineer sistemleri inceledi. Miller ve Michael (1982), adi fark denklemlerini ele aldı. Ludyk (1985), zaman değişkenli ayrık zaman sistemlerinin kararlığını araştırdı. Goldberg (1986), fark denklemlerini inceledi. Benzaid ve Lutz (1987),pertürbe lineer fark denklemlerinin asimptotik çözüm gösterimlerini belirtti. Lakshmikantham ve Trigiante (1988), fark denklemlerinin nümerik metot ve uygulamalarını ifade etti. Carlson (1989), sonlu fark denklemlerinin kararlılığını inceledi. Eastham (1989), lineer denklem sistemlerinin asimptotik özelliklerini inceledi. Mickens (1990), fark denklemlerini ele aldı. Agarwal (2000), fark denklemleri ile eşitsizlik konusuna değindi. Sharkovsky ve ark. (1993), fark denklemlerinin uygulamalarını inceledi. Elaydi ve Zhang (1994), sonlu gecikmeli fark denklemlerinin kararlılığı ve periyodikliğini ele aldı. Elaydi (1995), asimptotik Jordan fark denklemlerinin bir genişlemesini verdi. Cooke ve Ladeira (1996), fark denklemlerinin periyodik çözümlerini bulmada bir metot ortaya koydu. Elaydi ve Murakami (1996), özel tipten bir fark denkleminin üstel kararlılığını inceledi. Sedaghat (1997), sürekli dönüşümler için kararlı olmayan global çeken sabit noktaların var olmadığını belirtti. Carvalho (1998), fark denklemlerinin periyodik çözümlerini dallanma şeklini inceledi. Cushing (1999), yapısal popülasyon dinamiğini ele aldı. Elaydi (1999), lineer fark denklemlerinin asimptotikliğini genişletti. Horn ve Johnson (1999), matris analizini yaptı. Brauer Castillo-Chavez (2001), popülasyon modelini inceledi. Cushing ve Henson (2001), bazı periyodik güçte monoton fark denklemlerinin asimptotik kararlılığını ele aldı. Abu-Saris ve ark. (2002), fark denklem sistemlerinin bir tipi için çözüm getirdi. Elaydi (2002), lineer fark denklemlerinin asimptotikliğini araştırdı. Grove ve Ladas (2002), nonlineer fark denklemlerinin periyodikliğini ele aldı. Dannan ve Elaydi (2004), ileri tip lineer fark denklemlerinin asimptotik kararlılığını inceledi. Elaydi (2005), fark denklemlerini izah etti. Sun ve Xi (2005), fark denklem ailesinin global asimptotik kararlılığını inceledi. Talpalaru (2005), fark denklemlerinin kararlılık problemlerini araştırdı. Peng (2006), nonlineer fark denklemlerinin global asimptotik kararlılığını gösterdi. Hu ve Li (2007), rasyonel fark denklemlerinin global kararlılığını izah etti. Sun ve ark. (2008), nonlineer fark denklemleri ailesinin kararlılık çözümlerini verdi. Muroya ve ark. (2009), fark denklemler sınıfının yeni global kararlılık koşullarını inceledi. Al-Dosary (2010), fark denklemlerinin dönüşümü ve periyodikliğini ele aldı. Dubickas (2010), pozitif denge noktasına sahip rasyonel fark denklemlerini inceledi. Jankowski (2010), birinci mertebe ileri fark denklemlerini araştırdı. Jia ve Hu (2010), yüksek mertebe nonlineer fark denklemlerinin global çekenliğini inceledi. Karatas (2010), yüksek mertebe fark denklemlerinin global davranışını araştırdı. Migda

(2010), yüksek mertebe fark denklemlerinin asimptotik çözüm özelliklerini verdi. Wang ve ark. (2010), nonlineer fark denklemlerinin bir sınıfı için asimptotik kararlılığı inceledi.

A. O. Ignatyev ve O. Ignatyev (2011) çalışmalarında fark denklemlerinin kararlılık ve asimptotik kararlılığını incelerken Lyapunov fonksiyonları olarak kuadratik formlardan faydalandı. Bu tez çalışmasında Ignatyev'in bu çalışması ayrıca ele alınacaktır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.1.

Bir $x: N \to R$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya x'in birinci basamaktan farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $N = \{0,1,2,3,\dots\}$ doğal sayılar cümlesi ve R reel sayılar cümlesidir. Buna göre x'in ikinci basamaktan farkı $\Delta^2 x$

$$\Delta^2 x(n) = \Delta\big(\Delta x(n)\big)$$

$$= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)$$

ve böyle devam ederek x'in k yıncı basamaktan farkı $\Delta^k x$

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j)$$

şeklinde hesaplanır (Bereketoğlu, 2012)

Bazen fark operatörü iki ya da daha çok değişkenli fonksiyonlara uygulanabilir. Böyle bir durumda Δ operatörünün sağ alt köşesine konulan bir indis yardımıyla hangi değişkenin bir birim ötelendiği gösterilmiş olur. Örneğin;

$$\Delta_x x^2 y = (x+1)^2 y - x^2 y = (2x+1)y,$$

$$\Delta_y x^2 y = x^2 (y+1) - x^2 y = x^2$$

olur.

Teorem 2.1.1.

a ve b sabitleri için;

$$\Delta\big(ax(n) + by(n)\big) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n)$$

dir. Yani Δ fark operatörü lineerdir (Bereketoğlu, 2012).

Tanım 2.1.2.

E öteleme operatörü,

$$Ex(n) = x(n+1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre

$$E^k x(n) = x(n+k)$$

dır (Bereketoğlu, 2012).

Teorem 2.1.2.

a. $\Delta^k\left(\Delta^l x(n)\right) = \Delta^{k+l} x(n), \;\; \forall\, k, l \in Z^+ = \{1,2,3, \dots\}$

b. $\Delta\big(x(n)y(n)\big) = y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n)$

c. $\Delta(\frac{x(n)}{y(n)}) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)}$

dir (Bereketoğlu, 2012).

Teorem 2.1.3.

k yıncı dereceden

$$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k$$

polinomu için

$$\Delta^k p(n) = a_0 k!$$

ve

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0\,, \quad i \geq 1,$$

dir. Burada $a_0 \neq 0,\;\; a_1, a_2, \dots, a_k$ katsayıları reel sabitlerdir (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 2.1.1.

$$p(n) = n^3 + 12\mathrm{n} + 16$$

polinomunun dördüncü basamağa kadar farklarını hesaplayalım:

$$\Delta p(n) = 3n^2 + 3n + 13$$

$$\Delta^2 p(n) = 6n + 6$$

$$\Delta^3 p(n) = 6$$

$$\Delta^4 p(n) = 0$$

olur.

Teorem 2.1.4.

E öteleme operatörü cinsinden k yıncı dereceden

$$p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_k I$$

polinomu verilsin. Burada $a_0 \neq 0,\ a_1, a_2, \dots, a_k$ katsayıları reel sabitler ve I birim operatörüdür. Bu durumda

$$p(E) b^n = b^n p(b)$$

ve

$$p(E)(b^n g(n)) = b^n p(bE) g(n)$$

dir; burada b bir sabit $g(n)$ herhangi bir fonksiyondur (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 2.1.2.

$$(2E^2 - E + 5I)2^n$$

işlemini yapalım.

$$p(E) = 2E^2 - E + 5I$$

ve

$$b^n = 2^n$$

alınırsa, Teorem 2.1.4' den,

$$(2E^2 - E + 5I)2^n = 2^n(2.2^2 - 2 + 5)$$

$$= 11.2^n$$

olur.

Tanım 2.1.3.

$n \geq n_0$ için $\Delta F(n) = f(n)$ olsun. Bu durumda,

$$\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c, \ \ (c, \text{keyfi sabit}),$$

şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü denir (Bereketoğlu, 2012).

Özel olarak $\Delta^{-1}(0) = c$ dir.

Şimdi bir $f(n)$ fonksiyonunun ters farkını hesaplamak üzere bir lemmadan söz edelim.

Lemma 2.1.1.

Δ fark operatörü için,

$$\boldsymbol{i}. \ \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0), \qquad (n \geq n_0 \ için)$$

$$\boldsymbol{ii}. \ \Delta_n \left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k) \right) = x(n)$$

dir (Bereketoğlu, 2012).

Bu lemmanın bir sonucu olarak

$$\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c \tag{2.1.1}$$

elde edilir. Buradan da Δ^{-1} in lineerlik özelliği ispatlanabilir.

Teorem 2.1.5.

$\boldsymbol{\Delta^{-1}}$ operatörü lineerdir.

İspat.

a ve b reel sayıları için

$$\Delta^{-1}\big(ax(n)+by(n)\big)=a\Delta^{-1}x(n)+b\Delta^{-1}y(n)$$

olduğu gösterilmelidir. (2.1.1) formülünden,

$$\Delta^{-1}\big(ax(n)+by(n)\big)=\sum_{i=0}^{n-1}\big(ax(i)+by(i)\big)+c$$

$$=a\sum_{i=0}^{n-1}x(i)+b\sum_{i=0}^{n-1}y(i)+c$$

$$=\ a\Delta^{-1}x(n)+b\Delta^{-1}y(n)$$

dir.

Örnek 2.1.4.

$$4.5^{n}+e^{3n}$$

fonksiyonun ters farkı tanım yardımıyla hesaplanırsa:

$$\Delta^{-1}(4.5^{n}+e^{3n})=\sum_{i=0}^{n-1}\left(4.5^{i}+e^{3i}\right)+c_1$$

$$=4\sum_{i=0}^{n-1}5^{i}+\sum_{i=0}^{n-1}(e^{3})^{i}+c_1$$

$$=\ 4(\frac{1-5^{n}}{1-5})+\frac{1-(e^{3})^{n}}{1-e^{3}}+c_1$$

$$=5^{n}-1+\frac{e^{3n}}{e^{3}-1}-\frac{1}{e^{3}-1}+c_1$$

$$=5^{n}+\frac{e^{3n}}{e^{3}-1}+c$$

elde edilir.

Tanım 2.1.4.

Bir $S \subseteq N = \{0,1,2,\dots\}$ sayı cümlesi üzerinde tanımlı olan bir x fonksiyonun değerini ve onun $\Delta x, \Delta^2 x, \dots$ gibi farklarını içeren bir denkleme S cümlesi üzerinde tanımlı olan bir fark denklemi denir (Bereketoğlu, 2012).

Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin basamağı denir.

Örneğin; $x(n+3)-4x(n+2)+5x(n+1)=0$ ve $x(n+4)+x(n)-x(n+2)=1$ denklemlerinin basamakları sırasıyla 2 ve 4'dür.

Tanım 2.1.5.

$a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları ve $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \cdots + a_k(n)x(n) = g(n) \qquad (2.1.2)$$

biçimindeki bir denkleme k. basamaktan lineer fark denklemi denir. Bu denklem, $g(n) \equiv 0$ olduğu zaman homojen denklem, aksi durumda homojen olmayan denklem olarak adlandırılır. Buna göre k. basamaktan bir lineer homojen fark denklemi

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \cdots + a_k(n)x(n) = 0 \qquad (2.1.3)$$

dır. Ayrıca, bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabitse, (2.1.2) denklemine sabit katsayılı, aksi halde değişken katsayılı fark denklemi denir (Bereketoğlu,2012).

Teorem 2.1.6.

a_i, $i = 1,2,\dots,k$, katsayıları reel sabitler ve $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $a_k \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \cdots + a_k x(n) = g(n), \qquad (2.1.4)$$

$$x(n_0) = \alpha_0, x(n_0+1) = \alpha_1, \dots, x(n_0+k-1) = \alpha_{k-1}, \qquad (2.1.5)$$

başlangıç değer problemi $n \geq n_0$ için tanımlı olan bir tek $x(n)$ çözümüne sahiptir (Bereketoğlu, 2012).

İspat.

(2.1.5) in koşulları yardımı ile (2.1.4) den önce $n = n_0$ için

$$x(n_0 + k),$$

ardından $n = n_0 + 1$ için

$$x(n_0 + k + 1)$$

ve bu işleme benzer şekilde devam edilerek $x(n_0 + k + 2\ )$, $x(n_0 + k + 3)$, … değerleri hesaplanır. Buradan (2.1.4)-(2.1.5) probleminin bir çözümü

$x(n_0), x(n_0 + 1), \dots, x(n_0 + k - 1), x(n_0 + k), x(n_0 + k + 1), x(n_0 + k + 2), \dots$ şeklinde bulunur. Böylece çözümün varlığı kanıtlanmış olur.

Çözümün tekliği için $x(n)$ den farklı bir $\overline{x}(n)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Bu $\overline{x}(n)$ çözümü benzer şekilde (2.1.4) ve (2.1.5) yardımı ile hesaplandığı zaman her $n \geq n_0$ için $x(n)$ çözümüne özdeş olduğu görülür. O halde çözüm tektir.

Tanım 2.1.6.

Her $n \geq n_0$ için,

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0 \qquad (2.1.6)$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_r$ sabitleri var ise, bu durumda

$f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonlarına $n \geq n_0$ için lineer bağımlıdır denir.

Eğer (2.1.6) eşitliği her $n \geq n_0$ için sadece ve sadece $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonlarına $n \geq n_0$ için lineer bağımsızdır, denir (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 2.1.5.

$3^{\boldsymbol{n}}, \mathrm{n}3^n, n^2 3^n$ fonksiyonları $n \geq 1$ üzerinde lineer bağımsızdırlar. Bunu görmek için

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0, \qquad \forall\, n \geq 1,$$

eşitliği 3^n ile bölünürse

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad \forall\, n \geq 1,$$

elde edilir. Bu ise en fazla iki $n \geq 1$ için doğrudur. Her $n \geq 1$ için eşitliğinin sağlanması ancak ve ancak $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olması halinde mümkündür.

Tanım 2.1.7.

(2.1.3) denkleminin k tane lineer bağımsız çözümünün cümlesine, bir temel çözümler cümlesi denir (Bereketoğlu, 2012).

Teorem 2.1.7 (Temel teorem).

Her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ ise, bu durumda (2.1.3) ile verilen lineer homojen fark denklemi $[n_0, \infty]$ üzerinde bir temel çözümler cümlesine sahiptir (Bereketoğlu, 2012).

Teorem 2.1.8.

(2.1.3) homojen denkleminin k tane lineer bağımsız çözümü $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ olsun. Bu durumda (2.1.3) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + \cdots + c_kx_k(n)$$

şeklindedir, burada $c_1, c_2, \dots, c_k$ keyfi sabitlerdir (Bereketoğlu, 2012).

Tanım 2.1.8.

$x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ çözümlerinin $W(n)$ Casoratyanı

$$W(n) = det\begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_r(n+1) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \dots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Bereketoğlu, 2012).

Lemma 2.1.2 (Abel Lemması).

$x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$, (3) homojen denkleminin çözümleri ve $W(n)$ onların Casoratyanı olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için,

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_k\,(i)\right)W(n_0)$$

dir (Bereketoğlu, 2012).

Sonuç. $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$, (3) homojen denkleminin çözümleri ve her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ olsun. Bu durumda her $n \geq n_0$ sayısına karşılık $W(n) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $W(n_0) \neq 0$ olmasıdır.

Teorem 2.1.9.

(2.1.3) homojen denkleminin $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ çözümlerinin bir temel çözümler cümlesi oluşturması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $n_0 \in N$ sayısına karşılık

$$W(n_0) \neq 0$$

olmasıdır (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 2.1.6.

Üçüncü basamaktan homojen

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0$$

fark denkleminin $2^n, (-2)^n\ ve\ (-3)^n$ çözümleri bir temel çözümler cümlesi oluştururlar. Çünkü onların Casoratyanı

$$W(n) = det\begin{pmatrix} 2^n & (-2)^n & (-3)^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-3)^{n+1} \\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-3)^{n+2} \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $n = 0$ noktasında

$$W(0) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -20 \neq 0$$

dır.

2.2. Birinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri

Burada birinci basamaktan lineer homojen olmayan

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n), \qquad n \geq n_0 \geq 0\,, \tag{2.2.1}$$

fark denklemi ve

$$x(n_0) = x_0 \tag{2.2.2}$$

başlangıç koşulundan meydana gelen başlangıç değer problemi üzerinde durulmaktadır. $a(n)$ katsayısı ve $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar olup $a(n) \neq 0$ dır.

(2.2.1)' e ilişkin homojen denklem

$$x(n+1) = a(n)x(n)\,, \qquad n \geq n_0 \geq 0\,, \qquad (2.2.3)$$

dir.

Teorem 2.2.1.

(2.2.3) homojen fark denklemi ve (2.2.2) başlangıç koşulundan oluşan problemin tek çözümü

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) x_0 \qquad (2.2.4)$$

olup (2.2.1)-(2.2.2) başlangıç değer probleminin tek çözümü,

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right) g(r) \qquad (2.2.5)$$

dir (Bereketoğlu, 2012).

Uyarı. Birinci basamaktan sabit katsayılı

$$x(n+1) = ax(n) + g(n) \qquad (2.2.6)$$

denklemi ve

$$x(0) = x_0 \qquad (2.2.7)$$

koşulu için (2.2.5) çözüm formülü

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r-1}\, g(r) \qquad (2.2.8)$$

şeklini alır. Ayrıca g bir sabit olmak üzere $g(n) = g$ olduğu zaman (2.2.8) den,

$$x(n)=\begin{cases} a^n x_0+\left(\dfrac{a^n-1}{a-1}\right)g\,, & a\neq 1\\ x_0+gn\,, & a=1\end{cases}$$

bulunur.

Örnek 2.2.1.

$n>0$ için,

$$x(n+1)=(n+1)x(n)+2^n(n+1)!\,,\qquad x(0)=1$$

probleminin çözümü, (2.2.5) den,

$$x(n)=\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)+\sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right)2^r\,(r+1)!$$

$$=n!+\sum_{r=0}^{n-1}n!\,2^r$$

$$=2^n n!$$

elde edilir.

Örnek 2.2.2.

$$x(n+1)=2x(n)+3^n\,,\qquad x(1)=0.5\,,$$

probleminin çözümü, (2.2.8) den,

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)2^{n-1}+\sum_{r=1}^{n-1}2^{n-r-1}3^r$$

$$=2^{n-2}+2^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^r$$

$$=3^n-5(2)^{n-2}$$

dir.

2.3. İkinci Basamaktan Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemleri

a_1, a_2 katsayıları reel sabitler ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer homojen

$$x(n+2) + a_1 x(n+1) + a_2 x(n) = 0 \qquad (2.3.1)$$

fark denklemini ele alalım. Bu denklem için λ^n şeklinde bir çözüm aranırsa,

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (2.3.2)$$

bulunur. Bu denkleme (2.3.1) fark denkleminin karakteristik denklemi denir. (2.3.2) denkleminin λ_1, λ_2 köklerine karakteristik kökler adı verilir. (2.3.1) homojen fark denkleminin genel çözümü λ_1, λ_2 köklerine bağlı olarak üç farklı durumda hesaplanır.

Durum 1. λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve farklı ise, bu durumda $\{{\lambda_1}^n, {\lambda_2}^n\}$ cümlesi (2.3.1) denkleminin bir temel çözümler cümlesidir. Buradan (2.3.1) in genel çözümü,

$$x(n) = c_1{\lambda_1}^n + c_2{\lambda_2}^n \qquad (2.3.3)$$

şeklindedir; burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Durum 2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olsun. Bu durumda (2.3.1) denkleminin bir temel çözümler cümlesi $\{\lambda^n, n\lambda^n\}$ olup genel çözüm,

$$x(n) = (c_1 + c_2 n)\lambda^n \qquad (2.3.4)$$

dir.

Durum 3. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olsun; burada $\alpha, \beta \in R$ ve $\beta \neq 0$ dır. Bu durumda (2.3.1)' in bir temel çözümler cümlesi $\{r^n cosn\theta, r^n sinn\theta\}$ dır; burada

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

şeklindedir. Buradan (2.3.1)' in genel çözümü,

$$x(n) = r^n(c_1 cosn\theta + c_2\, sinn\theta) \qquad (2.3.5)$$

veya

$$x(n) = Ar^n\cos(n\theta - B)$$

olup, burada c_1,c_2, A ve B keyfi sabitlerdir.

2.4. İkinci Basamaktan Değişken Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemleri

Bu kesimde $a_0(n), a_1(n), a_2(n)$ katsayıları $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $n \geq n_0$ üzerinde $a_0(n) \neq 0$, $a_2(n) \neq 0$ olmak üzere ikinci basamaktan değişken katsayılı lineer homojen

$$a_0(n)x(n+2) + a_1(n)x(n+1) + a_2(n)x(n) = 0 \quad , \quad n \geq n_0 \tag{2.4.1}$$

fark denkleminin genel çözümü hesaplanmaktadır. Bunun için iki yöntemden söz edilecektir: Bu yöntemler operatörlerin çarpanlara ayrılması ve bir çözümün bilinmesi durumlarıdır (Kelley ve Peterson 1991).

Operatörlerin Çarpanlara Ayrılması

(2.4.1) denklemi E öteleme operatörü yardımı ile,

$$a_0(n)E^2x(n) + a_1(n)Ex(n) + a_2(n)x(n) = 0$$

$$[a_0(n)E^2 + a_1(n)E + a_2(n)]x(n) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$a_0(n)E^2 + a_1(n)E + a_2(n)$$

operatörü E ye göre çarpanlara ayrılabilirse, o zaman verilen denklemin genel çözümü hemen bulunabilir (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 2.4.1.

İkinci basamaktan değişken katsayılı

$$x(n+2) - (n+1)x(n+1) - (n+1)x(n) = 0 \tag{2.4.2}$$

fark denklemi verilsin. Bu denklem öteleme operatörü cinsinden,

$$(E^2 - (n+1)E - (n+1))x(n) = 0 \tag{2.4.3}$$

biçiminde olup

$$(E+1)\big(E-(n+1)\big)x(n)=0 \tag{2.4.4}$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilir. Şimdi

$$\big(E-(n+1)\big)x(n)=z(n) \tag{2.4.5}$$

olsun. Buradan (2.4.4)

$$(E+1)z(n)=0$$

denklemine indirgenir. Bu ise,

$$z(n)=(-1)^n c_1 \tag{2.4.6}$$

genel çözümüne sahiptir; burada $c_1$keyfi sabittir. (2.4.6), (2.4.5) te yerine konulursa,

$$\big(E-(n+1)\big)x(n)=(-1)^n c_1$$

veya

$$x(n+1)=(n+1)x(n)+(-1)^n c_1 \tag{2.4.7}$$

elde edilir. (2.4.7) denklemi birinci basamaktan homojen olmayan bir denklem olup genel çözümü

$$x(n)=\left(\prod_{i=n_0}^{n-1}(i+1)\right)c_2+\sum_{r=n_0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right)(-1)^r c_1$$

$$=c_2 n!+\sum_{r=n_0}^{n-1} n(n-1)\ldots(r+2)(-1)^r c_1$$

$$=c_2 n!+c_1\sum_{r=n_0}^{n-1}\frac{(-1)^r n!}{(r+1)!}$$

dir. Böylece verilen (2.4.2) denkleminin genel çözümü yukarıdaki biçimde hesaplanmış oldu.

Bir Çözümün Bilinmesi Durumu

(2.4.1) homojen denkleminin aşikâr olmayan bir çözümü bilindiği takdirde bununla bağımsız olabilecek ikinci bir çözüm bulunabilir:

Lemma 2.4.1.

$x_1(n)$ ve $x_2(n)$, (2.4.1) fark denkleminin iki çözümü ve $W(n)$ onların Casoratyanı olsun. Bu durumda

$$W(n+1) = \left(\frac{a_2(n)}{a_0(n)}\right) W(n) \tag{2.4.8}$$

dir.

$x_1(n)$, (2.4.1) denkleminin aşikâr olmayan bir çözümü ve $x_2(n)$ de aynı denklemin diğer bir çözümü olsun. Açık bir durum olarak

$$\Delta \frac{x_2(n)}{x_1(n)} = \frac{x_1(n)\Delta x_2(n) - x_2(n)\Delta x_1(n)}{x_1(n)x_1(n+1)}$$

$$= \frac{W(n)}{x_1(n)x_1(n+1)}$$

dir. Buradan her iki yana Δ^{-1} uygulanırsa,

$$x_2(n) = x_1(n) \sum_{r=0}^{n-1} \frac{W(r)}{x_1(r)x_1(r+1)} \tag{2.4.9}$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir (Bereketoğlu, 2012).

Teorem 2.4.1.

$x_1(n)$, (2.4.1) denkleminin sıfır olmayan bir çözümü olsun. $a_0(n)$ ve $a_2(n)$ katsayıları $n \geq n_0$ üzerinde sıfırdan farklı iseler, o zaman (2.4.9) ifadesi (2.4.1) denkleminin diğer bağımsız çözümünü gösterir; burada $W(r)$, (2.4.8) nin aşikar olmayan bir çözümüdür. Bu teorem ikinci basamaktan (2.4.1) denklemi için basamağın indirgenmesi olarak bilinir (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 2.4.2.

$$x(n+2) - x(n+1) - \frac{1}{n+1}x(n) = 0$$

denklemi verilsin. Bu denklemin bir çözümü $x_1(n) = n + 1$ dir. Lemma 3' den,

$$W(n+1) = -\frac{1}{n+1}W(n)$$

olur. Bu ise

$$W(n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. (2.4.9) dan,

$$x_2(n) = (n+1)\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{(r+1)(r+2)r!}$$

$$= (n+1)\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{(r+2)!}$$

elde edilir. Böylece verilen denklemin genel çözümü

$$x(n) = c_1(n+1) + c_2(n+1)\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{(r+2)!}$$

dir; burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

2.5. k. Basamaktan Lineer Sabit Katsayılı Homojen Fark Denklemleri

k. basamaktan lineer sabit katsayılı homojen,

$$x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \cdots + a_k x(n) = 0 \qquad (2.5.1)$$

fark denklemini ele alalım; burada a_i ler reel sabitler olup $a_k \neq 0$ dır. İkinci basamaktan lineer sabit katsayılı homojen denkleminde olduğu gibi (2.5.1) denkleminin λ^n şeklinde bir çözümü aranırsa,

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \qquad (2.5.2)$$

denklemi bulunur. (2.5.1) fark denkleminin çözümleri karakteristik köklere bağlı olarak hesaplandıkları için aşağıdaki durumların incelenmesi yeterlidir.

Durum 1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ kökleri reel ve birbirinden farklı ise, bu durumda $\{\lambda_1{}^n, \lambda_2{}^n, \ldots, \lambda_k{}^n\}$ cümlesi (2.5.1) denkleminin bir temel cümlesi olup, (2.5.1)' in genel çözümü

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i {\lambda_i}^n \tag{2.5.3}$$

şeklindedir; burada $c_1, c_2, \dots, c_k$ keyfi sabitlerdir.

Durum 2. (2.5.2) karakteristik denkleminin λ_1, $\lambda_2, \dots$, λ_r kökleri reel ve sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_r$ katlı olsunlar; burada $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$ dır. Bu durumda (2.5.1) denklemi E operatörü cinsinden

$$(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2} \dots (E-\lambda_r)^{m_r} x(n) = 0 \tag{2.5.4}$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi bir $i \in [1, r]$ için $(E-\lambda_i)^{m_i} x(n) = 0$ denkleminin bir temel cümlesi

$$G_i = \{{\lambda_i}^n, n{\lambda_i}^n, \dots, n^{m_i-1}{\lambda_i}^n\}$$

dir. Dolayısıyla (2.5.4)' ün bir temel cümlesi $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ olup genel çözümü

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} {\lambda_i}^n (c_{i0} + c_{i1}n + c_{i2}n^2 + \dots + c_{im_i-1}n^{m_i-1}) \tag{2.5.5}$$

olur.

Durum 3. (2.5.2) karakteristik denkleminin bir $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleks kökü q_1 katlı olsun $(2q_1 \le k)$. Bu durumda (2.5.1) denkleminin $2q_1$ tane gerçel değerli bağımsız çözümü

$$r^n cosn\theta, r^n sinn\theta; nr^n cosn\theta, nr^n sinn\theta; \dots; n^{q_1-1}r^n cosn\theta, n^{q_1-1}r^n sinn\theta$$

şeklindedir (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 2.5.1.

$$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0\,,$$

$$x(0) = 0\,,\quad x(1) = 1\,,\quad x(2) = 1$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Bu problemin çözümü için önce denklemin genel çözümü bulunur. Karakteristik denklem,

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

olup karakteristik kökler $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$, $\lambda_3 = 3$. Buradan genel çözüm

$$x(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 3^n$$

olur. Başlangıç koşulları uygulanırsa,

$$x(0) = c_1 + c_3 = 0,$$

$$x(1) = 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 1,$$

$$x(2) = 4c_1 + 8c_2 + 9c_3 = 1$$

sistemi bulunur. Buradan

$$c_1 = 3, \qquad c_2 = 2, \qquad c_3 = -3$$

olup istenen çözüm

$$x(n) = 3(2^n) + 2n(2^n) - 3^{n+1}$$

biçimindedir.

Örnek 2.5.2.

$$x(n+4) - 81x(n) = 0\ ,$$

denklemini çözelim.

Bu denklem dördüncü basamaktan bir denklemdir. Karşılık gelen karakteristik denklem

$$\lambda^4 - 81 = 0$$

şeklinde olup karakteristik kökler $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_{3,4} = \pm 3i$ dir. Böylece genel çözüm c_1, c_2, c_3 ve c_4 keyfi sabitler olmak üzere;

$$x(n) = c_1(-3)^n + c_2 3^n + 3^n (c_3 \cos(\frac{n\pi}{2}) + c_4 \sin(\frac{n\pi}{2}))$$

şeklindedir.

3. FARK DENKLEMLERİNDE KARARLILIK

Bu bölümde k boyutlu

$$x(n+1) = f\big(n, x(n)\big), \qquad x(n_0) = x_0$$

vektör fark denklemi ele alınarak bu denklem için kararlılık, sınırlılık tanımları ve bazı teoremler incelenecektir. Ayrıca birinci basamaktan k boyutlu değişken katsayılı lineer

$$x(n+1) = A(n)x(n), \; n \geq n_0 \geq 0$$

sisteminin kararlılığı incelenecektir. Burada $A(n)$, $k \times k$ tipinde her $n \geq n_0$ için singüler olmayan reel değerli bir matristir. Ayrıca özel olarak sabit katsayılı

$$x(n+1) = Ax(n)$$

sistemi ele alınacaktır (Hunt 1967, Lakshmikantham ve Trigiante 1988).

3.1. Vektör Fark Denklemlerinde Kararlılık

k boyutlu

$$x(n+1) = f\big(n, x(n)\big), \qquad x(n_0) = x_0 \tag{3.1.1}$$

vektör fark denklemini ele alalım; burada $x(n) \in R^k$ ve $f: Z^+ \times R^k \to R^k$ olmak üzere $f(n,x)$ fonksiyonu x'e göre süreklidir. Denklemin ikinci yanında n değişkeni açık olarak gözükmüyor ise yani $f\big(n, x(n)\big) = f\big(x(n)\big)$ ise, (3.1.1) denklemi otonom denklem adını alır.

Her $n \geq n_0$ için

$$f(n, x^*) = x^*$$

eşitliğini sağlayan $x^* \in R^k$ noktasına (3.1.1) denkleminin bir denge noktası veya sabit çözümü denir. Özel olarak, $x^* = 0$ denge noktası sıfır çözümü adını alır; yani $x(n) = 0$ dır. $x^* \neq 0$ ise, daima

$$y(n) = x(n) - x^*$$

dönüşümü yardımı ile, (3.1.1) denklemi

$$y(n+1) = f(n, y(n) + x^*) - x^* \equiv g\big(n.y(n)\big) \tag{3.1.2}$$

denklemine indirgenir ki bu denklem $y(n) = 0$ çözümüne sahiptir, yani (3.1.1)' in sıfırdan farklı $x = x^*$ sabit çözümü (3.1.2)' in sıfır çözümüne karşılık gelir.

$x(n, n_0, x_0)$, (3.1.1) denkleminin $x(n_0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümü olsun. Şimdi (3.1.1) denkleminin x^* denge noktasının kararlılık tanımlarını verelim:

Tanım 3.1.1.

$n = 0,1,2,...$ diskrit zaman, $x(n) = (x_1(n), x_2(n), ...x_k(n))^T \in \Re^k$ ve $f = (f_1, f_2, ..., f_k)^T \in \Re^k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x(n+1) &= f(n, x(n)) \\ f(n,0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

fark denklemi sistemini düşünelim. f fonksiyonunun sürekli olduğunu ve x üzerinde Lipschitz şartını sağladığını varsayalım. (3.1.3) sistemi

$$x(n) = 0 \tag{3.1.4}$$

sıfır çözümüne sahiptir. $n = n_0$ için $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0)^T$ a karşılık gelen (3.1.3) ün çözümünü $x(n, n_0, x^0)$ ile gösterelim. Ayrıca $\mathbb{Z}_+$ ile negatif olmayan reel tamsayıların kümesini gösterelim.

$$\mathbb{N}_{n_0} = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \geq n_0\},\ \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \geq 1\},\ B_r = \{x \in \Re^k : \|x\| \leq r\}$$

olsun (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

Tanım 3.1.2.

Eğer herhangi $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ için $\|x^0\| < \delta$ iken $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ için $\|x(n, n_0, x^0)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$ varsa (3.1.3) sisteminin sıfır çözümü kararlıdır, denir. Aksi halde (3.1.3) sisteminin sıfır çözümü kararsızdır, denir. Eğer bu tanımda δ, n_0 dan bağımsız seçilirse bu durumda (3.1.3) sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır, denir (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

Tanım 3.1.3.

Eğer herhangi $\varepsilon > 0$ ve $x^0 \in B_\eta$ için her $n \in \mathbb{N}_{n_0+N}$

$$\left\| x(n, n_0, x^0) \right\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon, n_0, x^0) \in \mathbb{N}$ vardır şartını sağlayan herhangi $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ için bir $\eta = \eta(n_0) > 0$ varsa (3.1.3) sisteminin (3.1.4) çözümüne çekici denir. Başka bir deyişle

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x(n, n_0, x^0) \right\| = 0 \tag{3.1.5}$$

oluyorsa (3.1.3) sisteminin (3.1.4) çözümü çekicidir (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

Tanım 3.1.4.

Eğer bazı $\eta > 0$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki; her $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $x^0 \in B_\eta$ ve $n \geq n_0 + N$ için $\left\| x\left(n, n_0, x^0\right) \right\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1.3) denkleminin sıfır çözümü düzgün attracting(çekici) denir (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

Tanım 3.1.5.

(3.1.3) sisteminin sıfır çözümü

kararlı ve çekici (attracting) ise asimptotik kararlıdır,
düzgün kararlı ve düzgün çekici (uniformly attracting) ise düzgün asimptotik kararlıdır, denir. (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

Tanım 3.1.6.

Eğer $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ için $\left\| x\left(n, n_0, x^0\right) \right\| < M \left\| x^0 \right\| \eta^{n-n_0}$ olacak şekilde $M > 0$ ve $\eta \in \left(0,1\right)$ varsa (3.1.3) sisteminin sıfır çözümü üstel kararlıdır, denir (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

Tanım 3.1.7.

Verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \geq 0$ için,

$$\|x_0 - x^*\| < \delta$$

olduğu zaman $n \geq n_0$ üzerinde

$$\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$ sayısı varsa, x^* denge noktasına kararlıdır, denir (Ortega, 1973).

Tanım 3.1.2.

Kararlı olmayan bir x^* denge noktasına kararsızdır, denir (Bereketoğlu, 2012).

Tanım 3.1.3.

Bir $x(n, n_0, x_0)$ çözümüne, her $n \geq n_0$ için

$$\|x(n, n_0, x_0)\| \leq M$$

olacak şekilde pozitif bir M sabiti varsa sınırlıdır, denir (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 3.1.1.

$$x(n+1) = x(n)$$

skaler denkleminin $x(n_0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümü $x(n, n_0, x_0) = x_0$ olup sıfır çözümü kararlıdır ama asimptotik kararlı değildir.

Örnek 3.1.2.

Skaler

$$x(n+1) = a(n)x(n) \tag{3.1.6}$$

denkleminin $x(n_0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümü

$$x(n, n_0, x_0) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 \tag{3.1.7}$$

dir. Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i. Sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M(n_0) \equiv M \tag{3.1.8}$$

dir; burada M, n_0 a bağlı pozitif bir sabittir.

ii. Sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n\to\infty}\left|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right| = 0 \tag{3.1.9}$$

olmasıdır. Açık olarak $a(n) = \frac{(n+1)}{(n+2)}$ için (3.1.8) ve (3.1.9) denklemi sağlanır (Bereketoğlu, 2012).

3.2. k . Basamaktan Skaler Lineer Homojen Denklemler

$k.$ basamaktan skaler lineer sabit katsayılı homojen

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2 x(n+k-2) + \cdots + p_k x(n) = 0 \tag{3.2.1}$$

fark denklemini ele alalım; burada p_i ler reel sabitlerdir. Buna ilişkin karakteristik polinom,

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_k \tag{3.2.2}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.1.

(3.2.1) fark denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul (3.2.2) polinomunun her λ karakteristik kökü için $|\lambda| < 1$ olmasıdır. Ayrıca (3.2.1) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul, $|\lambda| = 1$ eşitliğini sağlayan λ lar katlı olmamak (basit) olmak üzere, $|\lambda| \leq 1$ dir. Öte yandan, $|\lambda| = 1$ olacak biçimde katlı karakteristik kökler varsa, bu durumda (3.2.1) denkleminin sıfır çözümü kararsızdır (Bereketoğlu, 2012).

Bir $B = (b_{ij})$ matrisinin iç matrisleri o matrisin kendisi, ilk ve son satırları ile ilk ve son kolonlarının atılması ile ardışık olarak bulunan matrislerin tümüdür. Bütün iç matrislerin determinantları pozitif olan bir B matrisine pozitif iç matrislidir, denir. Örneğin aşağıdaki matrislerin iç matrisleri üzerlerinde gösterilmiştir.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}_{4\times 4},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & \boxed{b_{33}} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}_{5\times 5}.$$

Teorem 3.2.2 (Schur-Cohn Kriteri).

(3.2.2) karakteristik polinomunun bütün sıfırlarının birim çember içinde kalması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

i. $p(1) > 0$,

ii. $(-1)^k p(-1) > 0$,

iii. $(k-1) \times (k-1)$ türündeki

$$B_{k-1}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ p_{k-3} & p_{k-4} & & 1 & 0 \\ p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k \\ 0 & 0 & & p_k & p_{k-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & p_k & & p_4 & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}$$

matrisleri pozitif iç matrislerdir. Bu kriter aynı zamanda asimptotik kararlılık için de bir kriterdir (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 3.2.1.

$$x(n+2) + p_1 x(n+1) + p_2 x(n) = 0 \tag{3.2.3}$$

denklemini ele alalım. Bunun karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$$

dir. Schur-Cohn kriterine göre (3.2.3) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşullar,

$$0 < 1 + p_1 + p_2\,, \qquad 0 < 1 - p_1 + p_2, \qquad 0 < 1 + p_2 < 2$$

şeklinde bulunur. Bu koşullar da

$$|p_1| < 1 + p_2 < 2$$

şeklinde özetlenebilir.

Örnek 3.2.2.

Üçüncü basamaktan homojen

$$x(n+3) + p_1 x(n+2) + p_2 x(n+1) + p_3 x(n) = 0 \tag{3.2.4}$$

fark denklemini ele alalım. Bu denklemin karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$$

dür. Teorem 3.2.2 den, (3.2.4) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşullar,

$$p(1) = 1 + p_1 + p_2 + p_3 > 0\,;$$

$$(-1)^3\, p(-1) = -(-1 + p_1 - p_2 + p_3) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 > 0\,;$$

$$|B_2^+| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & p_3 \\ p_1 + p_3 & 1 + p_2 \end{vmatrix} > 0$$

ve

$$|B_2^-| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -p_3 \\ p_1 - p_3 & 1 - p_2 \end{vmatrix} > 0$$

dır. Bu koşullar düzenlenirse,

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2 \text{ ve } |p_2 - p_1 p_3| < 1 - {p_3}^2$$

elde edilir.

Örnek 3.2.3.

$$x(n+3) + \frac{1}{4}x(n+2) + \frac{1}{2}x(n+1) + \frac{1}{2}x(n) = 0$$

denkleminin bütün karakteristik köklerinin birim çember içinde yer aldığını Schur-Cohn kriteri yardımıyla gösterelim.

Yukarıda verilen denklemin karakteristik polinomu,

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$$

dir. Teorem 3.2.2 den,

i.

$$p(1) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} > 0$$

ii.

$$(-1)^3 p(-1) = -\left(-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0$$

iii.

$$|B_2^+| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{9}{8} > 0$$

ve

$$|B_2^-| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{8} > 0$$

elde edilir. Bu takdirde Teorem 3.2.2 den verilen denklem asimptotik kararlıdır.

3.3. Lineer Fark Denklem Sistemlerinde Kararlılık

Birinci basamaktan k boyutlu değişken katsayılı lineer

$$x(n+1) = A(n)x(n), \ n \geq n_0 \geq 0 \tag{3.3.1}$$

sistemi verilsin. Burada $A(n)$, $k \times k$ tipinde her $n \geq n_0$ için singüler olmayan reel değerli bir matristir.

Teorem 3.3.1.

$\Phi(n)$, (3.3.1) in bir temel matrisi olsun. Bu durumda (3.3.1) in sıfır çözümünün

i. Kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\|\Phi(n)\| \leq M, \ n \geq n_0 \geq 0 \tag{3.3.2}$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısının var olmasıdır.

ii. Düzgün kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\|\Phi(n,m)\| \leq M, \ n_0 \leq m \leq n < \infty \tag{3.3.3}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin bulunmasıdır.

iii. Asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \to \infty} \|\Phi(n)\| = 0 \tag{3.3.4}$$

olmasıdır.

iv. Düzgün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\|\Phi(n,m)\| \leq M\eta^{n-m}, \ n_0 \leq m \leq n < \infty \tag{3.3.5}$$

olacak biçimde $M > 0$ ve $\eta \in (0,1)$ sayılarının var olmasıdır (Bereketoğlu, 2012).

İspat.

$\Phi(n_0) = I$ olsun. Buradan (3.3.1) sisteminin herhangi bir çözümü $x(n, n_0, x_0) = \Phi(n)x_0$ biçimindedir.

i. (3.3.2) şartı sağlansın. Bu durumda

$$\|x(n,n_0,x_0\| \le M\,\|x_0\|$$

dır. Dolayısıyla verilen $\varepsilon > 0$ için bir δ sayısı $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ şeklinde seçilirse $\|x_0\| < \delta$ halinde $\|x(n,n_0,x_0\| < \varepsilon$ olur. O halde sıfır çözüm kararlıdır.

Tersine sıfır çözüm kararlı olsun. Yani verilen $\varepsilon > 0$ için $\|x_0\| < \delta$ iken $\|x(n,n_0,x_0\| = \|\Phi(n)x_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $\dfrac{1}{\delta}\|x_0\| < 1$ olduğundan

$$\|\Phi(n)\| = \sup_{\|\xi\|\le 1}\|\Phi(n)\xi\| = \frac{1}{\delta}\sup_{\|x_0\|\le\delta}\|\Phi(n)x_0\| \le \frac{\varepsilon}{\delta} = M$$

bulunur. Bu da (3.3.2) eşitsizliğidir.

ii. $x(n,n_0,x_0),$ (3.3.1) sisteminin bir çözümü olsun. $m \ge n_0$ için

$$x(n,n_0,x_0) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)x(m) = \Phi(n,m)x(m)$$

yazılabilir. Burada $x(m) = \Phi(m)x_0$ dir. (3.3.3) sağlansın. Bu durumda

$$\|x(n,n_0,x_0\| \le \left\|\Phi(n)\Phi^{-1}(m)\right\|\|x(m)\| = \|\Phi(n,m)\|\|x(m)\|$$

$$\le M\,\|x(m)\|,\ n_0 \le m \le n < \infty$$

olur. Bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m \ge n_0$ ve $\|x(m)\| < \dfrac{\varepsilon}{2M} = \delta(\varepsilon) > 0$ alınırsa

$$\|x(n)\| < \varepsilon,\ n \ge m$$

bulunur. O halde sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

Tersine (3.3.1) düzgün kararlı olsun. O zaman verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır öyle ki $m \ge n_0$ ve $\|x(m)\| < \delta$ iken $n \ge m$ için $\|x(n)\| < \varepsilon$ dur. Böylece

$$\|\Phi(n,m)x(m)\| < \varepsilon,\ n \ge m$$

elde edilir. $x(m)$, i. elemanı $\frac{\delta}{2}$ ve diğer elemanları sıfır olan bir vektör olarak alınırsa

$$\left\|\phi_i \frac{\delta}{2}\right\| < \varepsilon \text{ veya } \|\phi_i\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$$

olur. Burada ϕ_i, $\Phi(n,m)$ nin i yinci kolonudur. Bu durum $\Phi(n,m)$ nin k tane kolonu için göz önüne alınırsa;

$$\|\Phi(n,m)\| < \frac{2k\varepsilon}{\delta} = M,\ n_0 \le m \le n < \infty$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

iii. (3.3.4) den

$$\|\Phi(n)\| \le M$$

olacak biçimde bir pozitif M sabiti vardır. Böylece sıfır çözüm kararlıdır. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi(n)\| = 0$$

olduğundan sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

iv. (3.3.5) sağlansın. Bu durumda ***ii.*** nedeniyle sıfır çözümü düzgün kararlıdır. Tanım 3.1.3 den her $\varepsilon \in (0,1)$ için μ=1 ve N sayısı $\eta^N < \frac{\varepsilon}{M}$ biçiminde alınabilir. Bu durumda $\|x_0\| < 1$ olduğu zaman $n \ge n_0 + N$ için

$$\begin{aligned} \|x(n,n_0,x_0\| &= \|\Phi(n,n_0)x_0\| \\ &\le M\eta^{n-n_0} < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Böylece sıfır çözüm düzgün asimptotik kararlıdır.

Tersine sıfır çözüm düzgün asimptotik kararlı olsun. O zaman sıfır çözümü düzgün kararlıdır. Dolayısıyla ***ii***. den

$$\|\Phi(n,m)\| \le M,\ 0 \le n_0 \le m \le n < \infty$$

olur. Düzgün atraktiflikten $0<\varepsilon<1$ şeklinde bir ε için $\|x_0\|<\mu$ olduğu zaman $n \geq n_0 + N$ üzerinde

$$\|\Phi(n,n_0\|<\varepsilon$$

şartını sağlayan $N>0$ ve $\mu>0$ sayıları vardır. Buradan $n \geq n_0$ için $\|\Phi(n,n_0\| \leq M$ yazılabilir. $n \in [n_0+mN, n_0+(m+1)N]$ sayısı için

$$\|\Phi(n,n_0\| \leq \|\Phi(n,n_0+mN)\|\|\Phi(n_0+mN,n_0+(m-1)N\|\ldots\|\Phi(n_0+N,n_0\|$$

$$\leq M\varepsilon^m \leq \frac{M}{\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{1}{N}})^{(m+1)N} = M\eta^{(m+1)N}$$

$$\leq \bar{M}\eta^{(n-n_0)},\ mN \leq n-n_0 \leq (m+1)N$$

bulunur. Burada $\bar{M}=\dfrac{M}{\varepsilon}$ ve $\eta=\varepsilon^{\frac{1}{N}}$ dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar çıkar:

Sonuç 3.3.1.

(3.3.1) lineer sisteminin sıfır çözümünün

i. Kararlı olması için gerek ve yeter koşul tüm çözümlerin sınırlı olmasıdır.

ii. Üstel kararlı olması için gerek ve yeter koşul sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olmasıdır (Bereketoğlu, 2012).

Sonuç 3.3.2.

(3.3.1) lineer sisteminin sıfır çözümü için gerçeklenen bütün kararlılık sonuçları genel (global) anlamda sonuçlardır (Bereketoğlu, 2012).

Şimdi düzgün kararlılık ve düzgün asimptotik kararlılık ile ilgili aşağıdaki teoremi inceleyelim:

Teorem 3.3.2.

i. $\sum_{i=1}^{k}|a_{ij}(n)| \leq 1,\ 1 \leq j \leq k,\ n \geq n_0$

ise bu durumda (3.3.1) sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

ii. $\sum_{i=1}^{k} \left| a_{ij}(n) \right| \le 1 - v, \ 1 \le j \le k, \ n \ge n_0, \ v \in (0,1)$

ise bu durumda sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Bereketoğlu, 2012).

İspat.

Bir $B = (b_{ij}), \ 1 \le i, j \le k$ matrisinin normu

$$\left\| B \right\|_1 = \max_{1 \le j \le k} \sum_{i=1}^{k} \left| b_{ij} \right|$$

şeklinde olsun.

i. $\sum_{i=1}^{k} \left| a_{ij}(n) \right| \le 1$ den her $n \ge n_0$ için $\left\| A(n) \right\|_1 \le 1$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \Phi(n,m) \right\|_1 &= \left\| \prod_{i=m}^{n-1} A(i) \right\|_1 \\ &\le \left\| A(n-1) \right\|_1 \left\| A(n-2) \right\|_1 \ldots \left\| A(m) \right\|_1 \le 1 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde Teorem 3.3.1- ***ii***. den dolayı sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

ii. $\sum_{i=1}^{k} \left| a_{ij}(n) \right| \le 1 - v$ den

$$\begin{aligned} \left\| \Phi(n,m) \right\|_1 &= \left\| \prod_{i=m}^{n-1} A(i) \right\|_1 \\ &\le \left\| A(n-1) \right\|_1 \left\| A(n-2) \right\|_1 \ldots \left\| A(m) \right\|_1 \\ &\le (1-v)^{n-m} \end{aligned}$$

bulunur. $M = 1$ ve η=1-$v \in (0,1)$ olduğundan Teorem 3.3.1-***iv***. gereğince sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı olur.

Şimdi lineer sabit katsayılı

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{3.3.6}$$

sistemi için aşağıdaki temel kararlılık sonuçları verilebilir:

Teorem 3.3.3.

(3.3.6) sisteminin sıfır çözümünün

i. Kararlı olması için gerek ve yeter koşul $\rho(A) \le 1$ ve birim modüllü özdeğerlerin yarı basit olmasıdır (yani karşılık gelen Jordan bloğu bir köşegen matristir).

ii. Asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul $\rho(A) < 1$ olmasıdır. Burada $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda,\ A$ nın bir özdeğeridir$\}$, A nın spektral yarıçapıdır.

İspat.

i. $A = PJP^{-1}$ olsun. Burada $J = diag(J_1, J_2, ..., J_r)$ matrisi A nın Jordan formu olup $1 \le i \le r$ için

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

dir. Teorem 3.3.1-***i.*** den 3.3.6 nın sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\|A^n\| = \|PJP^{-1}\| \le M$$

veya

$$\|J^n\| \le \bar{M}$$

olmasıdır. Burada $\bar{M} = \dfrac{M}{(\|P\|\|P^{-1}\|)}$ dir. Öte yandan $J^n = diag(J_1^n, J_2^n, ..., J_r^n)$ dir. Burada

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \dots & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \dots & \binom{n}{s_i-3}\lambda_i^{n-s_i+3} & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i^n \end{pmatrix}$$

dir. $|\lambda_i| > 1$ veya $|\lambda_i| = 1$ ve 1×1 tipinde değilse o zaman J_i^n sınırsızdır. $|\lambda_i| < 1$ ise $n \to \infty$ iken $J_i^n \to 0$ dır. Bunu ispatlamak için l pozitif bir tamsayı olmak üzere $n \to \infty$ halinde $|\lambda_i|^n n^l \to 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu da L' Hospital kuralından çıkar. Çünkü $|\lambda_i|^n n^l = n^l e^{n \ln|\lambda_i|}$ dir.

ii. Asimptotik kararlılık için $\|A^n\| \to 0$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için de $|\lambda_i| < 1$ olmalıdır. Bu da *i* deki adımlardan görülmektedir.

Teorem 3.3.4.

A, 2×2 tipinde bir matris olmak üzere 3.3.6. nın sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$|trA| < 1 + \det A < 2$$

olmasıdır. Burada *trA, A* nın izidir (Bereketoğlu, 2012).

4. FARK DENKLEMLERİNDE LYAPUNOV KARARLILIK

Bu bölümde Lyapunov'un ikinci metodunun bazı türden fark denklemlerine uygulanışı verilecektir. n-boyutlu lineer olmayan

$$u(t+1) = f\big(u(t)\big) \qquad\qquad (t = 0,1,2,\dots)$$

otonom fark denklem sistemi incelenecektir.

4.1. Lineer Olmayan Otonom Sistemler

n-boyutlu lineer olmayan

$$u(t+1) = f\big(u(t)\big) \qquad\qquad (t = 0,1,2,\dots) \qquad\qquad (4.1.1)$$

otonom fark denklem sistemi ele alınmaktadır. Burada $f: A \subset R^n \to R^n$ sürekli vektör değerli bir fonksiyon ve v de f nin sabit bir noktası; yani, $f(v) = v$ olsun.

$V: R^n \to R$ reel değerli bir fonksiyon olsun. V nin her $u \in R^n$ için, (4.1.1) sistemine göre değişimi

$$\Delta_t V(u) = V\big(f(u)\big) - V(u)$$

veya

$$\Delta_t V\big(u(t)\big) = V\Big(f\big(u(t)\big)\Big) - V\big(u(t)\big)$$

$$= V(u(t+1)) - V\big(u(t)\big)$$

biçiminde hesaplanır. Buna göre $\Delta_t V(u) \le 0$ ise, V fonksiyonu (4.1.1) denkleminin çözümleri boyunca artmayandır (Elaydi, 1999).

Tanım 4.1.1.

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $V: A \subset R^n \to R$ fonksiyonuna A bölgesinde bir Lyapunov fonksiyonu denir:

i. V, A üzerinde süreklidir.

ii. u ve $f(u) \in A$ için $\Delta_t V(u) \leq 0$ dır (Elaydi, 1999).

$B(u, \gamma)$, R^n de u merkezli γ-yarıçaplı açık bir yuvar olsun; yani

$$B(u, \gamma) = \{x \in R^n : \|x - u\| < \gamma\}$$

olsun. Orjin merkezli $B(0, \gamma)$ yuvarı yerine kısaca $B(\gamma)$ kullanılacaktır.

Tanım 4.1.2.

Bir reel değerli V fonksiyonuna, aşağıdaki koşulların sağlanması halinde, v noktasında pozitif tanımlı denir:

i. $V(v) = 0$,

ii. $\forall\, u \in B(v, \gamma)$, $u \neq v$ için $V(u) > 0$ (Elaydi, 1999).

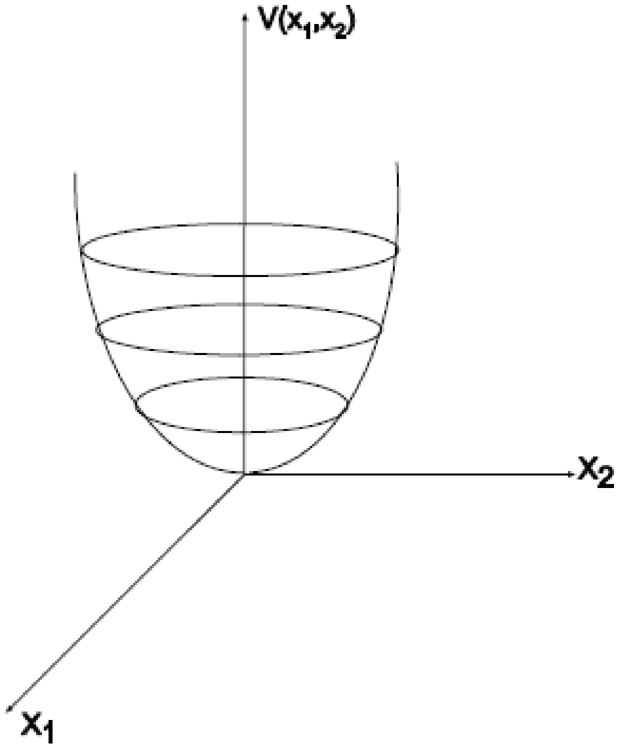
Şimdi Lyapunov kararlılık teoremlerini ifade edelim.

Teorem 4.1.1.

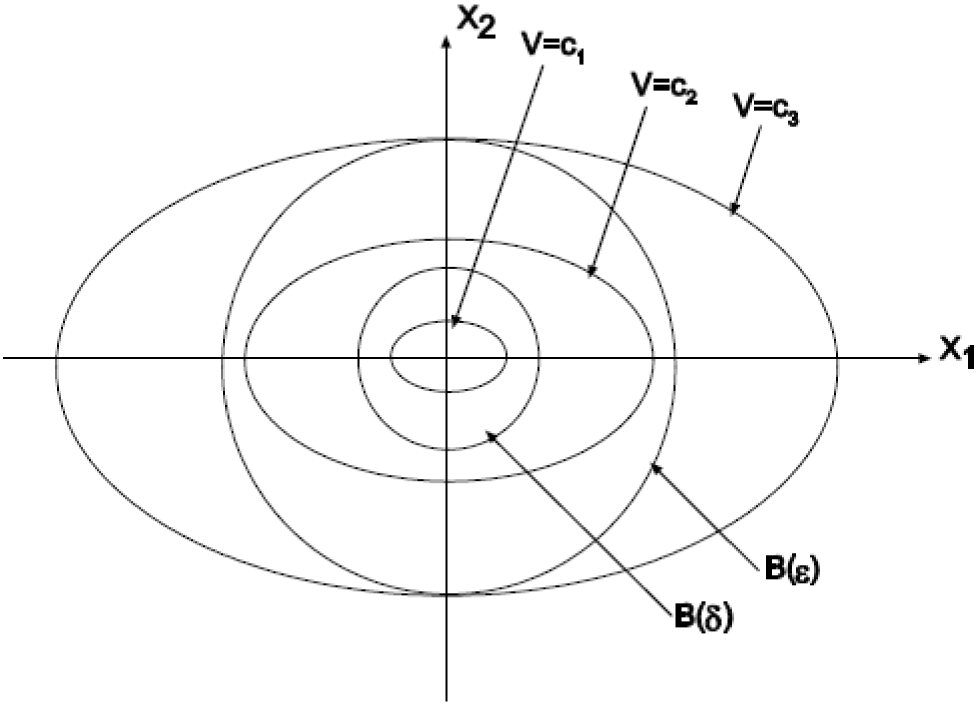
v sabit noktasının bir A komşuluğunda (4.1.1) denklemi için bir V Lyapunov fonksiyonu varsa ve bu fonksiyon v noktasında pozitif tanımlı ise, o zaman v sabit noktası kararlıdır (Bereketoğlu, 2012).

Bu teoremin ispatını vermeden önce iki boyutlu sistem hakkında geometriksel bir açıklama yapmak konunun anlaşılması bakımından yararlı olacaktır.

(4.1.1) sisteminin v sabit noktası $x_1 x_2$-düzleminin orijinini göstersin, yani $v = 0$ dır. Ayrıca, bu sistem $A = B(\gamma)$ yuvarında pozitif tanımlı bir V Lyapunov fonksiyonuna sahip olsun. Buna göre V nin grafiği 3-boyutlu dik koordinat sisteminde bir paraboloid yüzeyine benzer (Şekil 1) ve $V(x_1, x_2) = c$, $x_1 x_2$-düzleminde V nin seviye eğrilerini ifade eder (Şekil 2). Belli bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $B(\varepsilon)$ yuvarı V nin seviye eğrilerinden birini kesinlikle kapsar. Böyle bir seviye eğrisi $V(x) = c_2$ olsun. Bu seviye eğrisi de bir $\delta \in (0, \varepsilon)$ sayısı için $B(\delta)$ yuvarını kapsar. Eğer bir $x(n, 0, x_0)$ yolu $B(\delta)$ yuvarında harekete başlıyorsa; yani $x_0 \in B(\delta)$ ise, o zaman $V(x_0) < c_2$ dir. $\Delta V \leq 0$ olduğundan, V fonksiyonu (4.1.1)' ün çözümleri boyunca artmayandır. Dolayısıyla her $n \geq 0$ için $V(x_n) \leq V(x_0) < c_2$ dir. Buradan $x(n, 0, x_0)$ yolu daima $B(\varepsilon)$ yuvarı içinde kalır. Bu da sıfır çözümünün kararlı olması demektir (Bereketoğlu, 2012).



Şekil 1.



Şekil 2. Seviye eğrileri

İspat (Teorem 4.1.1).

$B(v, \alpha_1) \subset G \cap A$ olacak biçimde bir $\alpha_1 > 0$ sayısı seçelim. f sürekli olduğundan, $x \in B(v, \alpha_2)$ halinde $f(x) \in B(v, \alpha_1)$ olacak şekilde bir $0 < \alpha_2 < \alpha_1$ seçilebilir. Bir $\varepsilon \in (0, \alpha_2]$ sayısı için

$$\psi(\varepsilon) = min\,\{V(x) : \varepsilon \leq \|x - v\| \leq \alpha_1\}$$

olsun. Ara değer teoreminden,

$$\|x - v\| \leq \delta \text{ iken } V(x) < \psi(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0, \varepsilon)$ sayısı vardır. Buradan $x_0 \in B(v, \delta)$ olduğu zaman her $n \geq 0$ için $x(n) \in B(v, \varepsilon)$ iddia edilebilir. Bu iddia gerçekten doğrudur. Eğer değilse, bu takdirde $1 \leq r \leq m$ için $x(r) \in B(v, \varepsilon)$ ve $x(m+1) \notin B(v, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $x_0 \in B(v, \delta)$ ve bir $m > 0$ sayısı var demektir. $x(m) \in B(v, \varepsilon) \subset B(v, \alpha_2)$ olduğundan, $x(m+1) \in B(v, \alpha_1)$ olur. Buradan $V(x(m+1)) \geq \psi(\varepsilon)$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir, çünkü $V\big(x(m+1)\big) \leq \cdots \leq V(x_0) < \psi(\varepsilon)$ dur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2.

f fonksiyonunun bir v sabit noktasını içeren bazı açık aralıklarda sürekli birinci türevine sahip olduğunu varsayalım.

(i) $|f'(v)|<1$ ise bu durumda v asimptotik kararlıdır.

(ii) $|f'(v)|>1$ ise bu durumda v kararsızdır (Kelley- Peterson, 1991).

İspat.

(i) $|f'(v)|<1$ olduğunu varsayalım. f' nün sürekliliğinden $\delta>0,$ bazı $I=(v-\delta, v+\delta)$ aralığı üzerinde $|f'(u)|\leq \alpha<1$ olacak şekilde bir α vardır. Ortalama değer teoreminden eğer $u, w \in I$ ise

$$|f(u)-f(w)|=|f'(c)||u-w|$$

$$\leq \alpha|u-w|$$

elde edilir. Her bir $u \in I$ için

$$|f(u)-v|\leq \alpha|u-w|<\delta$$

yazılır. Böylece $f(u)\in I$ olur ve böylece v nin kararlı olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Ayrıca her bir $t\geq 0$ ve $u\in I$ için

$$\left|f^{t+1}(u)-v\right|\leq \alpha\left|f^{t}(u-v)\right|$$

olur. Böylece tümevarımdan $t\geq 0$ ve $u\in I$ için

$$\left|f^{t}(u)-v\right|\leq \alpha^{t}|u-v|$$

elde edilir.

$\lim\limits_{t\to\infty}\alpha^{t}=0$ olduğundan (4.1.1) denkleminin her bir çözümü $t\to\infty$ için v ye yakınsar ve v asimptotik kararlıdır.

(ii) $|f'(v)|>1$ olduğunu varsayalım. Bazı $\varepsilon>0$ ve her $u, w\in I$ için

$$|f(u)-f(w)|=|f'(c)||u-w|$$

$$\geq \lambda |u-w|$$

olacak şekilde $I=(v-\delta, v+\delta)$ ve $\lambda>1$ seçelim. Tümevarımdan $f^t(u)$, I da olduğu sürece

$$|f^t(u)-v| \geq \lambda^t |u-v|$$

elde edilir. $\lambda>1$ olduğundan (4.1.1) denkleminin $u(t)=v$ çözümü hariç tüm çözümleri I dadır. Bu nedenle v kararsızdır.

Örnek 4.1.1.

a. $$f(u)=2u(1-u)$$

olsun. Bu durumda $f'(u)=2-4u$ olur. Buradan $f'(0)=2,$ ve $f'(\frac{1}{2})=0$ elde edilir. Buradan 0 noktasının kararsız ve $\frac{1}{2}$ nin asimptotik kararlı olduğu bulunur.

b. Eğer $f(u)=\cos u$ olarak alınırsa bu durumda $f'(u)=-\sin u$ elde edilir. Buradan eğer $u \neq \frac{\pi}{2}+2n\pi$ ise $|f'(u)|<1$ olur. $v \simeq 0,739$ sabit noktası asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.1.3.

v, f fonksiyonunun bir sabit noktası olsun ve f, v civarındaki bazı diskler üzerinde sürekli olsun. Eğer v de f fonksiyonu için bir tam Lyapunov fonksiyonu varsa bu durumda v asimptotik kararlıdır (Bereketoğlu, 2012).

Teorem 4.1.4.

Teorem 4.1.1' in hipotezlerine ek olarak $x \neq v$ olmak üzere $x, f(x) \in A$ için $\Delta V(x) < 0$ ise, bu takdirde v sabit noktası asimptotik kararlıdır (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 4.1.2.

$$u(t+1)=\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} u(t)$$

sistemi için orijinin kararlılık durumunu inceleyelim (Kelley- Peterson, 2001).

V fonksiyonunu R^2 de tanımlayalım.

$$V\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right) = [u_1 u_2]\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = {u_1}^2 + {u_2}^2$$

olsun. Bu takdirde $V\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = 0,\quad V(u) > 0$ ve öte yandan,

$$u(t+1) = \begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta\\-sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}u(t) = \begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta\\-sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}u_1 cos\theta + u_2 sin\theta\\-u_1 sin\theta + u_2 cos\theta\end{bmatrix} = f\big(u(t)\big)$$

olur. Ayrıca

$$\Delta_t V(u) = V\big(f(u)\big) - V(u)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\Delta_t V(u) &= V\big(f(u)\big) - V(u)\\&= V\left(\begin{bmatrix}u_1 cos\theta + u_2 sin\theta\\-u_1 sin\theta + u_2 cos\theta\end{bmatrix}\right) - V\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right)\\&= (u_1 cos\theta + u_2 sin\theta)^2 + (-u_1 sin\theta + u_2 cos\theta)^2 - {u_1}^2 - {u_2}^2\\&= 0\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, V bir Lyapunov fonksiyonudur ve orijin kararlıdır.

Örnek 4.1.3.

$$u(t+1) = \begin{bmatrix}u_2(t) - u_2(t)\big({u_1}^2(t) + {u_2}^2(t)\big)\\u_1(t) - u_1(t)\big({u_1}^2(t) + {u_2}^2(t)\big)\end{bmatrix}$$

sistemi için orijinin kararlılık durumunu inceleyelim.

V fonksiyonu R^2 de tanımlansın ve yine $V(u) = {u_1}^2 + {u_2}^2$ olarak alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\Delta_t V(u) &= V\big(f(u)\big) - V(u)\\&= [u_2(1 - ({u_1}^2 + {u_2}^2))]^2 + [u_1(1 - ({u_1}^2 + {u_2}^2))]^2 - {u_1}^2 - {u_2}^2\end{aligned}$$

$$= (u_1{}^2 + u_2{}^2)(1 - 2(u_1{}^2 + u_2{}^2) + (u_1{}^2 + u_2{}^2)^2) - u_1{}^2 - u_2{}^2$$

$$= (u_1{}^2 + u_2{}^2)^2\left(-2 + (u_1{}^2 + u_2{}^2)\right) \qquad (u \neq 0 \; ve \; u \in B\left(0, \sqrt{2}\right) \; için)$$

$$< 0$$

bulunur. Sonuç olarak, V bir Lyapunov fonksiyonu ve orijin asimptotik kararlıdır.

Örnek 4.1.4.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}(t+1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha u_2(t)}{1+u_1^2(t)} \\ \dfrac{\beta u_1(t)}{1+u_2^2(t)} \end{bmatrix}$$

fonksiyonun $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ noktasında asimptotik kararlı olduğunu gösterelim.

Bunun için Lyapunov fonksiyonunu

$$V\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\Delta_t V(u) = V\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha u_2(t)}{1+u_1^2(t)} \\ \dfrac{\beta u_1(t)}{1+u_2^2(t)} \end{pmatrix} - V\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\alpha^2 u_2^2(t)}{\left(1+u_1^2(t)\right)^2} + \frac{\beta^2 u_1^2(t)}{\left(1+u_2^2(t)\right)^2} - u_1^2 - u_2^2$$

$$= \frac{u_2^2(t)(1+u_2^2(\mathrm{t}))^2(\alpha^2 - (1+u_1^2(t))^2) + u_1^2(t)(1+u_1^2(t))^2(\beta^2 - (1+u_2^2(\mathrm{t}))^2)}{(1+u_1^2(t))^2(1+u_2^2(t))^2}$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ noktasında asimptotik kararlı olması için $\Delta_t V(u) < 0$ olması gerekir. Bunun için $\left(\beta^2 - \left(1 + u_2{}^2(t)\right)^2\right) < 0$ ve $\left(\alpha^2 - \left(1 + u_1{}^2(t)\right)^2\right) < 0$ olmalıdır. Bunun için $\beta^2 - 1 < 0$ ve $\alpha^2 - 1 < 0$ olması gerekir.

4.2. Lineer Otonom Sistemler

Üçüncü bölümde $A(n)$, $k \times k$ tipinde her $n \geq n_0$ için singüler olmayan reel değerli bir matris olmak üzere

$$x(n+1) = A(n)x(n), \; n \geq n_0 \geq 0 \tag{4.2.1}$$

birinci basamaktan k boyutlu değişken katsayılı lineer sisteminin kararlılık durumu incelenilmişti. Bu fark sisteminin asimptotik kararlı olması için $\rho(A) < 1$ olması gerektiği görülmüştü. Bu şart için A nın özdeğerleri hesaplanmalıdır. Fakat bu bölümde Lyapunov'un ikinci metodunun kullanılmasıyla böyle bir hesaplamaya gerek kalmaz (Carvalho 1996).

Tanım 4.2.1.

$k \times k$ tipinde reel simetrik bir $B = (b_{ij})$ matrisine

$$V(x) = x^T B x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j$$

fonksiyonu pozitif tanımlı ise *pozitif tanımlı matris* denir (Bereketoğlu, 2012).

Teorem 4.2.1 (Sylvester kriteri).

Reel simetrik bir B matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul onun bütün esas asli minörlerinin determinantlarının pozitif olmasıdır (Bereketoğlu, 2012).

Örnek 4.2.1.

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ile verilen reel simetrik B matrisi pozitif definittir. Gerçekten, onun esas asli minörlerinin

$$\det(3)=3,\ \det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=11,\ \det(B)=8$$

dir ve pozitif olduğu görülmektedir. Ayrıca bu matrise karşılık gelen kuadratik

$$V(x)=x^T Bx=3x_1^2+5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3$$

fonksiyonu pozitif definittir. Çünkü $V(0)=0$ ve her $x\neq 0$ için $V(x)>0$ dır. Burada $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ şeklindedir.

Uyarı 4.2.1.

Verilen bir kuadratik

$$V(x)=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+dx_1x_2+ex_1x_3+fx_2x_3$$

fonksiyonu daima

$$V(x)=x^T Bx$$

şeklinde yazılabilir. Burada $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ dir ve

$$B=\begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2}\\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c\end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla $V(x)$ in pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul B nin pozitif tanımlı olmasıdır. Bu durum genel kuadratik $V(x)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}x_i x_j$ formu için de geçerlidir.

Teorem 4.2.2.

Reel simetrik bir B matrisi pozitif tanımlı ise bu durumda B nin bütün özdeğerleri pozitiftir. Ayrıca $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ değerleri B nin özdeğerleri ise

$$\lambda_{\min}\|x\|^2\leq V(x)\leq \lambda_{\max}\|x\|^2,\ \forall x\in\Re^k$$

dir. Burada

$$\lambda_{\min} = \min\{|\lambda_i| : 1 \le i \le k\}$$

$$\lambda_{\max} = \rho(A) = \max\{|\lambda_i| : 1 \le i \le k\}$$

dir. Ayrıca $V(x) = x^T Bx$ ve $\|\,.\,\|$ Öklid normudur (Bereketoğlu, 2012).

Böylece B pozitif tanımlı simetrik bir matris olduğu sürece bir aday Lyapunov fonksiyonu olarak

$$V(x) = x^T Bx$$

seçilebilir. Sonra bu fonksiyonun (4.2.1) sistemine göre $\Delta V(x)$ değişimi hesaplanırsa

$$\Delta V(x(n)) = x^T(n+1)Bx(n+1) - x^T(n)Bx(n)$$

$$= x^T(n)A^T BAx(n) - x^T(n)Bx(n)$$

$$= x^T(n)(A^T BA - B)x(n)$$

elde edilir. Buna göre $\Delta V(x)<0$ olması için gerek ve yeter şart

$$A^T BA - B = -C \tag{4.2.2}$$

olmasıdır. Burada C, pozitif tanımlı bir simetrik matristir. (4.2.2) denklemi (4.2.1) sistemi için *Lyapunov denklemi* olarak bilinir (Bereketoğlu, 2012).

Teorem 4.2.3.

(4.2.1) sisteminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart bir pozitif tanımlı simetrik C, matrisine karşılık (4.2.2) denkleminin bir tek pozitif tanımlı simetrik B matrisine sahip olmasıdır (Bereketoğlu, 2012).

İspat.

(4.2.1) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlı olsun. C, pozitif tanımlı simetrik bir matris olsun. (4.2.2) Lyapunov denkleminin bir tek B çözümüne sahip olduğu gösterilmelidir. (4.2.2) denklemi soldan $(A^T)^r$ ve sağdan A^r ile çarpılırsa;

$$(A^T)^{r+1}BA^{r+1}-(A^T)^r BA^r=-(A^T)^r CA^r$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}[(A^T)^{r+1}BA^{r+1}-(A^T)^r BA^r]=-\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}(A^T)^r CA^r$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}[B-(A^T)^{n+1}BA^{n+1}]=\sum_{r=0}^{\infty}(A^T)^r CA^r \tag{4.2.3}$$

yazılabilir. Böylece Teorem 3.3.3 *ii. den* $\rho(A)<1$ ve dolayısıyla $\rho(A^T)<1$ olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}(A^T)^{n+1}BA^{n+1}=0$$

sıfır matrisi elde edilir. Böylece (4.2.3) den

$$B=\sum_{r=0}^{\infty}(A^T)^r CA^r \tag{4.2.4}$$

serisi elde edilir.

$$\left\|A^T\right\|<1 \text{ ve } \left\|A\right\|<1$$

olacak şekilde bir norm var olduğundan bu seri yakınsaktır. Ayrıca (4.2.4) formunda verilen B matrisi simetrik ve pozitif tanımlıdır.

Uyarı 4.2.2.

Teorem 4.2.3 deki C matrisi yerine I birim matrisi alınabilir. O zaman (4.2.2) nın bir çözümü (4.2.4) den

$$B=\sum_{r=0}^{\infty}(A^T)^r A^r$$

biçimindedir.

4.3. Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Kararlılığının Araştırılmasında Lyapunov Fonksiyonu Olarak Kuadratik Formlar

Bu kesimde alınan bilgiler A. Ignatyev ve O. Ignatyev (2011) çalışmasından derlenmiştir.

$n=0,1,2,...$ diskrit zaman, $x(n)=(x_1(n),x_2(n),...x_k(n))^T\in\Re^k$ ve $f=(f_1,f_2,...,f_k)^T\in\Re^k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x(n+1) &= f(n,x(n)) \\ f(n,0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

fark denklemi sistemini düşünelim. f fonksiyonunun sürekli olduğunu ve x üzerinde Lipschitz şartını sağladığını varsayalım. (4.3.1) sistemi

$$x(n)=0 \tag{4.3.2}$$

sıfır çözümüne sahiptir. $n=n_0$ için $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_k^0)^T$ a karşılık gelen (4.3.1) in çözümünü $x(n,n_0,x^0)$ ile gösterelim.

Şimdi (4.3.1) fark denkleminin özel bir durumu olan aşağıdaki otonom fark denklemini düşünelim.

$X,F\in\mathbb{R}^n$, F bir sürekli fonksiyon; $F(0)=0$ olmak üzere

$$x(n+1)=F(x(n)) \tag{4.3.3}$$

otonom fark denkleminin sıfır çözümünün kararlılığına ilişkin olarak A. Ignatyev ve O. Ignatyev (2011) aşağıdaki teoremleri vermektedir:

Teorem 4.3.1.

$\Delta V(x)$, (4.3.3)'e göre negatif yarı tanımlı fonksiyon veya sıfıra aynı şekilde eşit olacak şekilde bir pozitif tanımlı sürekli $V(x)$ fonksiyonu varsa, (4.3.3) sisteminin sıfır çözümü kararlıdır (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

Teorem 4.3.2.

$\Delta V(x)$, (4.3.3)'e göre negatif tanımlı olacak şekilde bir pozitif tanımlı sürekli $V(x)$ fonksiyonu varsa, (4.3.3) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

Teorem 4.3.3.

$\Delta V(x)$, (4.3.3)'e göre negatif tanımlı ve V fonksiyonu pozitif yarı tanımlı olmayacak şekilde bir sürekli $V(x)$ fonksiyonu varsa (4.3.3) sisteminin sıfır çözümü kararsızdır (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

A, bir singüler olmayan $k \times k$ tipinde matris olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n) + X\left(x(n)\right) \tag{4.3.4}$$

otonom sistemini düşünelim. Burada X ,

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|X(x)\|}{\|x\|} = 0 \tag{4.3.5}$$

şartını sağlayan bir fonksiyondur.

Bir reel $k \times k$ tipinde $A = (a_{ij})$ matrisi için A nın bir öz değeri

$$\det(A - \lambda I_k) = 0 \tag{4.3.6}$$

olacak şekilde bir reel veya kompleks sayıdır. Burada I_k, birim $k \times k$ tipinde matristir. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ lar A nın özdeğerleri olsun.

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le k} |\lambda_i|$$

olmak üzere Elaydi (1999) aşağıdaki teoremleri ispatlamıştır.

Teorem 4.3.4.

$\rho(A) \le 1$ ise, (4.3.4) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. (Ayrıca bu durumda üstel kararlıdır) (Elaydi, 1999).

Teorem 4.3.5.

$\rho(A) \le 1$ ve A nın bazı özdeğerlerinin modülü 1'e eşit olsun. Bu durumda (4.3.4) sisteminin sıfır çözümü kararlı veya kararsız olacak şekilde (4.3.4) sisteminde bir $X(x)$ fonksiyonu seçilebilir (Elaydi, 1999).

(4.3.1) fark denklemi sistemini düşünelim ve $V(n,0)=0$ eşitliğini sağlayan ve B_H da sürekli bir $V:\mathbb{Z}_+\times B_H\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu düşünelim. (4.3.1) deki f fonksiyonunun x de Lipschitzian olduğunu hatırlatalım. Dolayısıyla $\|f(n,x)-f(n,y)\|\le L\|x-y\|$ olacak şekilde bir L sabiti vardır. V 'nin , n anındaki m. değişimini

$$\Delta_m V(n,x(n))=V(n+m,x(n+m))-V(n,x(n))$$

ile gösterelim. Burada $m\in\mathbb{N}$ dir.

Tanım 4.3.1.

$r:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu sürekli, artan ve $r(0)=0$ ise Hahn fonksiyonu olarak adlandırılır. Hahn fonksiyonlarının sınıfı K ile gösterilecek.

Teorem 4.3.6.

Eğer $m\in\mathbb{N}$, bir $a\in K$ fonksiyonu var ve $V(n,0)=0$,

$$V(n,x)\ge a(\|x\|) \tag{4.3.7}$$

ve

$$\Delta_m V\le 0 \tag{4.3.8}$$

olacak şekilde bir $V:\mathbb{Z}_+\times B_H\to\mathbb{R}$ fonksiyonu var olacak şekilde (4.3.1) sisteminin sıfır çözümü kararlıdır (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

İspat.

$n_0\in\mathbb{Z}_+$ ve $\varepsilon\in(0,H)$ olsun. $n\in\mathbb{N}_{n_0}$ için $x^0\in B_\delta$ olduğunda $\|x(n,n_0,x^0)\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon,n_0)>0$ var olduğunu gösterilmelidir. İlk önce $s\in\mathbb{Z}_+$ olmak üzere bu eşitsizliğin $n=n_0+sm$ için doğru olduğunu göstereceğiz.

V sürekli ve $V(n_0,0)=0$ olduğundan her $x^0\in B_\delta$ için

$$V(n_0,x^0)<a\left(\frac{\varepsilon}{1+L+L^2+\cdots+L^{m-1}}\right) \tag{4.3.9}$$

olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon,n_0)>0$ vardır. (4.3.7), (4.3.8) ve (4.3.9) şartlarından

$$a\left(\left\|x(n_0+sm,n_0,x^0)\right\|\right)\le V\left(n_0+sm,x(n_0+sm,n_0,x^0)\right)$$

$$\leq V\left(n_0,x^0\right)<a\left(\frac{\varepsilon}{1+L+L^2+\cdots+L^{m-1}}\right)$$

yazılır. Bu yüzden

$$\left\|x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right\|<\frac{\varepsilon}{1+L+L^2+\cdots+L^{m-1}}$$

olur. $\left\|x\left(n_0+sm+1,n_0,x^0\right)\right\|$ değerini hesaplayalım:

$$\left\|x\left(n_0+sm+1,n_0,x^0\right)\right\|=\left\|f\left(n_0+sm,x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right)\right\|$$

$$\leq L\left\|x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right\|$$

$$<\frac{L\varepsilon}{1+L+L^2+\cdots+L^{m-1}}<\varepsilon$$

Benzer şekilde

$$\left\|x\left(n_0+sm+2,n_0,x^0\right)\right\|<\frac{L^2\varepsilon}{1+L+L^2+\cdots+L^{m-1}}<\varepsilon,...,$$

$$\left\|x\left(n_0+sm+m-1,n_0,x^0\right)\right\|<\frac{L^{m-1}\varepsilon}{1+L+L^2+\cdots+L^{m-1}}<\varepsilon.$$

elde edilir. Bu yüzden (4.3.1) sisteminin sıfır çözümü kararlıdır.

Teorem 4.3.7.

Eğer önceki teoremin koşulları sağlanır ve

$$V\left(n,x\right)\leq b\left(\|x\|\right) \tag{4.3.10}$$

olacak şekilde $b\in K$ varsa (4.3.1) sistemini sıfır çözümü düzgün kararlıdır (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

İspat.

(4.3.10) koşulları altında δ değeri n_0'dan bağımsız olarak seçilebilir. b^{-1}, b'nin ters fonksiyonu olmak üzere $\delta=b^{-1}\left(a\left(\varepsilon\right)\right)$ olsun. Bu durumda

$$a\left(\left\|x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right\|\right)\leq V\left(n_0+sm,x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right)\leq V\left(n_0,x^0\right)$$

$$\leq b\left(\left\|x^0\right\|\right)<b\left(a\left(\frac{\varepsilon}{1+L+L^2+\cdots+L^{m-1}}\right)\right)$$

$$= a\left(\frac{\varepsilon}{1+L+L^2+\cdots+L^{m-1}}\right)$$

elde edilir. $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ için $\left\|x\left(n,n_0,x^0\right)\right\| < \varepsilon$ olduğunda. Bu teoremi ispatlar.

Teorem 4.3.8.

Eğer (4.3.7), (4.3.10) eşitsizlikleri ve

$$\Delta_m V(n,x) \le -c\left(\|x\|\right) \tag{4.3.11}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir sürekli $V:\mathbb{Z}_+\times B_H \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var ve $a,b,c \in K$ fonksiyonları ve $m\in\mathbb{N}$ var olacak şekilde bir (4.3.1) sistemi varsa bu durumda (4.3.1) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

İspat.

$h\in(0,H)$ olsun. $x^0 \in B\eta,\ n_0\in\mathbb{Z}_+,\ n\in\mathbb{N}_{n_0}$ olduğu zaman $\left\|x\left(n,n_0,x^0\right)\right\| < h$ olacak şekilde $\eta>0$ var olsun. Böyle bir η'nün $\varepsilon\in(0,\eta)$ yeterince küçük olsun ve $\delta=\delta(\varepsilon)$; düzgün kararlılığın tanımına uygun olarak seçilen bir sayı olsun. (Yani $\left\|x^0\right\|<\delta$ olduğunda $n_0\in\mathbb{Z}_+,\ n\ge n_0$ için $\left\|x\left(n,n_0,x^0\right)\right\|<\varepsilon$ olacak şekilde) Keyfi $x^0\in B_\eta$ ve $n_0\in\mathbb{Z}_+$ alalım. Diskrit zaman aralığını tahmin edelim, bu süre boyunca $x\left(n,n_0,x^0\right)$ yörüngesi $B_h\setminus\delta(\varepsilon)$ kümesinde olabilir. (4.3.11)'e göre $x\in B_h\setminus\delta(\varepsilon)$ için $\Delta_m V(n,x)\le -c\left(\delta\|\varepsilon\|\right)$ dur. Bu nedenle

$$V\left(n_0+sm, x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right)-V\left(n_0,x^0\right)\le -sc\left(\delta(\varepsilon)\right)$$

elde edilir. Böylece

$$s \le \frac{V\left(n_0,x^0\right)-V\left(n_0+sm,x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right)}{c\left(\delta(\varepsilon)\right)} < \frac{b(h)}{c\left(\delta(\varepsilon)\right)} \text{ olur.}$$

$\mathbb{N}=\mathbb{N}(\varepsilon)=\left[\dfrac{b(h)}{c\left(\delta(\varepsilon)\right)}\right]+1$ seçilmesiyle; $s_0 m\le\mathbb{N}(\varepsilon)$ ve $x\left(n_0+s_0m,n_0,\mathrm{x}^0\right)\in B_{\delta(\varepsilon)}$ olacak şekilde s_0'ın var olduğunu elde ederiz. Bu yüzden sıfır çözümünün düzgün kararlılığından $n\ge n_0+\mathbb{N}$ için $x\left(n,n_0,x^0\right)\in B_\varepsilon$ elde ederiz. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.9.

V negatif yarı tanımlı olmayacak $\Delta_m V$ pozitif tanımlı olacak şekilde bir sürekli sınırlı $V:\mathbb{Z}_+ \times B_H \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var ve $m\in\mathbb{N}$ var olacak şekilde (4.3.1) sistemi varsa bu durumda (4.3.1) sisteminin sıfır çözümü kararsızdır (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

İspat.

$\Delta_m V$ pozitif tanımlı olduğundan

$$\Delta_m V(n,x) \geq c(\|x\|) \tag{4.3.12}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $c\in K$ vardır. Her bir $\delta>0$ için $x^0\in B_\delta$ nın var olduğunu ve $\left\|x\left(n,n_0,x^0\right)\right\|\geq\varepsilon$ olacak şekilde $n\geq n_0$'ın var olduğunu göstereceğiz. δ, istenildiği kadar küçük bir pozitif sayı olsun. Bir başlangıç değeri olarak $0<\left\|x^0\right\|<\delta$ ve $V\left(n_0,x^0\right)=V_0>0$ olacak şekilde x^0 alalım. $\left\|x\left(n,n_0,x^0\right)\right\|\geq\varepsilon$ sağlanacak şekilde bir $n\in\mathbb{N}_{n_0}$ ın var olduğunu gösterelim. Tersini varsayalım. Yani her $n\in\mathbb{N}_{n_0}$ için

$$\left\|x\left(n,n_0,x^0\right)\right\|<\varepsilon \tag{4.3.13}$$

eşitsizliği sağlansın. (4.3.12) den $V\left(n_0+m,x\left(n_0+m,n_0,x^0\right)\right)\geq V_0+c\left(\|x_0\|\right)$, $V\left(n_0+2m,x\left(n_0+2m,n_0,x^0\right)\right)\geq V_0+2c\left(\|x_0\|\right)$,…,

$$V\left(n_0+sm,x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right)\geq V_0+sc\left(\|x_0\|\right) \tag{4.3.14}$$

yazılır. (4.3.14) eşitsizliği V nin $\mathbb{Z}_+\times B_H$ da sınırlılığıyla çelişir. Bu yüzden (4.3.13) ün geçerliliğinin varsayılmasıyla çelişki elde ederiz. Elde edilen çelişkiyle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.10.

Eğer $m\in\mathbb{N},\alpha_1,\alpha_2$ pozitif sabitleri var ve $\Delta_m V$,

$$\Delta_m V=\alpha_1 V(n,x)+\alpha_2 W(n,x) \tag{4.3.15}$$

formunda olacak şekilde $\mathbb{Z}_+\times B_H$ de sınırlı bir $V(n,x)$ fonksiyonu var olacak şekilde (4.3.1) sistemi varsa (burada W pozitif yarı tanımlı ve V negatif yarı tanımlı değil) bu durumda (4.3.1) sisteminin sıfır çözümü kararsızdır (Ignatyev ve Ignatyev, 2011).

İspat.

(4.3.15) den

$$\Delta_m V \geq \alpha_1 V(n,x) \tag{4.3.16}$$

yazılır. $0<\varepsilon<H$ ve $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ olsun. δ, istenildiği kadar küçük bir pozitif sayı olmak üzere $\|x^0\|<\delta$ ve $V(n_0,x^0)=V_0>0$ olacak şekilde x^0 başlangıç değerini seçelim. $\|x(n,n_0,x^0)\|\geq\varepsilon$ olacak şekilde $n>n_0$ sayısının var olduğunu götselim. Tersini varsayalım. Yani her $n\in\mathbb{N}_{n_0}$ için

$$\|x(n,n_0,x^0)\|<\varepsilon \tag{4.3.17}$$

eşitsizliği sağlansın. (4.3.16) eşitsizliği her $n\in\mathbb{N}_{n_0}$ için doğrudur ve $V(n_0,x^0)>0$ olduğundan $\Delta_m V$ değeri her $m\in\mathbb{N}$ için pozitiftir. Bu yüzden $\left\{V\left(n_0+sm,x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right)\right\}_{s=0}^{\infty}$ dizisi artandır. (4.3.16) dan $\Delta_m V\left(n_0+sm,x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right)\geq\alpha_1 V\left(n_0+sm,x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right)\geq\alpha_1 v_0$ bulunur. Bu yüzden $V\left(n_0+sm,x\left(n_0+sm,n_0,x^0\right)\right)\geq\alpha_1 v_0 s$ olur. Fakat V fonksiyonu B_ε da sınırlı olduğundan bu durum imkansızdır. Elde edilen çelişki (4.3.17) kabulünün yanlış olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

4.4. Lineer Otonom Sistemler İçin Lyapunov Fonksiyonları

Bu kesimde verilen bilgiler Ignatyev (2011) den alınmıştır.

(4.3.4) sistemi ile beraber

$$x(n+1)=Ax(n) \tag{4.4.1}$$

lineer fark denklem sistemini düşünelim. Böylece

$$x(n+m)=A^m x(n) \tag{4.4.2}$$

elde edilir. (4.4.1) sisteminin sıfır çözümlerinin kararlılık özelliklerini çalışmak için Elaydi, Lyapunov fonksiyonları olarak

$$V(x)=\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=2,\\ i_j\geq 0\ (j=1,\ldots,k)}} b_{i_1,i_2,\ldots,i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2}\ldots x_k^{i_k} \tag{4.4.3}$$

kuadratik formların kullanılmasını önerdi.

$$W(x)=\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=2,\\ i_j\geq 0\ (j=1,\ldots,k)}} q_{i_1,i_2,\ldots,i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_k^{i_k} \tag{4.4.4}$$

bir keyfi reel kuadratik form olsun.

$$\Delta_m V(x)=V\left(A^m x\right)-V(x)=W(x) \tag{4.4.5}$$

olmak üzere bir (4.4.3) kuadratik formunun varlığını koşullar altında açıklayalım.

Teorem 4.4.1.

$$\mu_i\mu_j \neq 1 \ \left(i=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,k\right) \tag{4.4.7}$$

olmak üzere

$$\det\left(A^m-\mu I_k\right)=0 \tag{4.4.6}$$

polinomunun $\mu_1,\ldots,\mu_k$ kökleri varsa bu durumda herhangi (4.4.4) kuadratik formu için (4.4.5) eşitliği sağlanacak şekilde bir tek (4.4.3) kuadratik formu vardır (Ignatyev A.O. ve Ignatyev, O. 2011).

İspat.

N $x_1,x_2,\ldots,x_k$ daki bir kuadratik formun terimlerinin sayısını göstersin. Bu sayının $i_1+i_2+\cdots+i_k=2$ şartı ile kısıtlanan $i_1,i_2,\ldots,i_k$ negatif olmayan tamsayıların fark sistemlerinin sayısına eşittir. Bu sayı

$$N=\frac{k(k+1)}{2}$$

ye eşittir. $V(x)$ ve $\mathrm{W}(x)$ formlarının katsayılarını hesaplayalım ve onları $b_1,b_2,\ldots,b_N$ ve $q_1,q_2,\ldots,q_N$ ile gösterelim:

$$b_{2,0,\ldots,0}=b_1,\quad b_{1,1,\ldots,0}=b_2,\quad b_{1,0,\ldots,1}=b_k,$$

$$b_{0,2,\ldots,0}=b_{k+1},\quad b_{0,1,1,\ldots,0}=b_{k+2},\ldots,b_{0,1,\ldots,1}=b_{2k-1},\ldots,$$

$$b_{0,0,\ldots,2,0}=b_{N-2},\quad b_{0,0,\ldots,1,1}=b_{N-1},\quad b_{0,0,\ldots,0,2}=b_N,$$

$$q_{2,0,\ldots,0}=q_1,\quad q_{1,1,\ldots,0}=q_2,\quad q_{1,0,\ldots,1}=q_k,$$

$$q_{0,2,\ldots,0}=q_{k+1},\quad q_{0,1,1,\ldots,0}=q_{k+2},\ldots,q_{0,1,\ldots,1}=q_{2k-1},\ldots,$$

$$q_{0,0,\ldots,2,0}=q_{N-2},\quad q_{0,0,,\ldots,1,1}=q_{N-1},\quad q_{0,0,\ldots,0,2}=q_N.$$

$b=(b_1,b_2,\ldots,b_N)^T$, $q=(q_1,q_2,\ldots,q_N)^T$ ile gösterelim. (4.4.5) eşitliğinin sol ve sağ yanı $x_1,x_2,\ldots,x_k$ 'a göre kuadratik formları temsil eder.

$x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_k^{i_k}$ çarpımına ait katsayıların eşitlenmesi ile $b_1,b_2,\ldots,b_N$ lere ait lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu sistem

$$Rb=q \tag{4.4.8}$$

formundadır. Burada $R=(r_{ij})_{i,j=1}^{N}$ dir. R matrisinin r_{ij} elemanları A matrisinin elemanları yoluyla ifade edilebilir. (4.4.8) sisteminin herhangi q vektörü için bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\det R\neq 0 \tag{4.4.9}$$

olmasıdır. (4.4.7) eşitsizliği geçerli olduğunda (4.4.9) koşulunun sağlandığını gösterelim. Bunu yapmak için, singüler olmayan bir G matrisi ile birlikte $x=Gz$ lineer dönüşümüyle (4.4.2) sistemi yeni değişkenlerde ,

$$z(n+m)=Pz(n) \tag{4.4.10}$$

formuna sahip olacak şekilde yeni $z=(z_1,z_2,\ldots,z_k)^T$ değişkenini tanımlayalım. Burada $P=(p_{ij})_{i,j=1}^{k}$ dir. p_{ii}, A^m matrisinin özdeğerleridir, $p_{i,i+1}$, 0 veya 1'e eşittir, ve P matrisinin diğer elemanları sıfıra eşittir. Elaydi (1999)' ye göre böyle bir dönüşüm vardır. Genel durumda eğer A^m matrisi kompleks özdeğerlere sahipse $z_1,z_2,\ldots,z_k$ değerleri ve G matrisinin elemanları da komplekstir. (4.4.3) ve (4.4.4) polinomları $z_1,z_2,\ldots,z_k$ değişkenlerinde aşağıdaki formlara sahiptir:

$$V(x)=\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=2,\\ i_j\geq 0\ (j=1,\ldots,k)}} c_{i_1,i_2,\ldots,i_k} z_1^{i_1}z_2^{i_2}\ldots z_k^{i_k} \tag{4.4.11}$$

$$W(x)=\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_k=2,\\ i_j\geq 0\ (j=1,\ldots,k)}} d_{i_1,i_2,\ldots,i_k} z_1^{i_1}z_2^{i_2}\ldots z_k^{i_k} \tag{4.4.12}$$

$W(z)$ kuadratik formu reeldir. Bu yüzden (4.4.12) bağıntısında $d_{i_1,i_2,\ldots,i_k} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_k^{i_k}$ herhangi reel olmayan yan yana toplamlar $d_{i_1^*,i_2^*,\ldots,i_k^*} z_1^{i_1^*} z_2^{i_2^*} \ldots z_k^{i_k^*} = \bar{d}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \bar{z}_1^{i_1} \bar{z}_2^{i_2} \ldots \bar{z}_k^{i_k}$ olur. Burada üst çizgi kompleks eşlenik anlamına gelir.

$d_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ ve $c_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ nın aşağıdaki gibi sayılmasıyla

$$d_{2,0,\ldots,0} = d_1, \quad d_{1,1,\ldots,0} = d_2, \quad d_{1,0,\ldots,1} = d_k,$$

$$d_{0,2,\ldots,0} = d_{k+1}, \quad d_{0,1,1,\ldots,0} = d_{k+2}, \ldots, d_{0,1,\ldots,1} = d_{2k-1}, \ldots,$$

$$d_{0,0,\ldots,2,0} = d_{N-2}, \quad d_{0,0,,\ldots,1,1} = d_{N-1}, \quad d_{0,0,\ldots,0,2} = d_N,$$

$$c_{2,0,\ldots,0} = c_1, \quad c_{1,1,\ldots,0} = c_2, \quad c_{1,0,\ldots,1} = c_k,$$

$$c_{0,2,\ldots,0} = c_{k+1}, \quad c_{0,1,1,\ldots,0} = c_{k+2}, \ldots, c_{0,1,\ldots,1} = c_{2k-1}, \ldots,$$

$$c_{0,0,\ldots,2,0} = c_{N-2}, \quad c_{0,0,,\ldots,1,1} = c_{N-1}, \quad c_{0,0,\ldots,0,2} = c_N.$$

ve $c = (c_1, c_2, \ldots, c_N)^T$, $d = (d_1, d_2, \ldots, d_N)^T$ ile gösterilmesiyle (4.4.5) eşitliğini $z_1, z_2, \ldots, z_k$ değişkenlerinde tekrar yazalım:

$$V(Pz) - V(z) = W(z) \tag{4.4.13}$$

(4.4.13) eşitliğinin sol ve sağ yanı $z_1, z_2, \ldots, z_k$ 'ya göre kuadratik formu temsil eder. $z_1^2, z_1 z_2, \ldots, z_1 z_k,\ z_2^2, \ldots, z_{k-1} z_k, z_k^2$ çarpımına ilişkin katsayıların eşitlenmesi ile

$$Uc = d \tag{4.4.14}$$

matris formunda yazacağımız $c_1, c_2, \ldots, c_N$ 'e göre lineer cebir denklem sistemini elde ederiz. Burada $U = (u_{ij})_{i,j=1}^{N}$ dır. U matrisi üçgensel forma sahiptir.

$$U = \begin{pmatrix} p_{11}^2-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2p_{11}p_{12} & p_{11}p_{22}-1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{11}p_{kk}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_{12}^2 & p_{12}p_{22} & \cdots & 0 & p_{22}^2-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_{k-1,k-1}p_{kk}-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_{k-1,k}p_{kk} & p_{kk}^2-1 \end{pmatrix}$$

(4.4.14) sisteminin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $\det U \neq 0$ olmasıdır. $j > i$ için $u_{ij} = 0$ olduğunu dikkate alınmasıyla $\det U$'nun U matrisinin köşegen üzerindeki elemanlarının çarpımına eşit olduğunu elde ederiz.

$$\det U = \prod_{i=1,2,\ldots,k;\, j=i,i+1,\ldots,k} \left(p_{ii}p_{ij}-1\right)$$

$p_{ii} = \mu_i$ olduğunun hatırlanması ve (4.4.13)'e dönülmesiyle $z_1, z_2, \ldots, z_k$ değişkenlerinden $x_1, x_2, \ldots, x_k$ değişkenlerine kadar $z = G^{-1}x$ dönüşümüyle (4.4.5) sağlayan bir V kuadratik formunun var olduğunu elde ederiz ve V'nin tek olması için gerek ve yeter şart $\mu_i\mu_j \neq 1$ $\left(i, j = 1,\ldots,k\right)$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

$m = 1$ durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.4.1.

Eğer

$$\lambda_i\lambda_j \neq 1 \qquad \left(i = 1,\ldots,\mathrm{k};\ \mathrm{j} = 1,\ldots,\mathrm{k}\right) \tag{4.4.15}$$

olacak şekilde A matrisinin $\lambda_1,\ldots\lambda_k$ özdeğerleri varsa bu durumda herhangi (4.4.4) kuadratik formu için

$$\Delta V = V\left(Ax\right) - V\left(x\right) = W\left(x\right) \tag{4.4.16}$$

olacak şekilde bir tek (4.4.3) kuadratik formu vardır.

Teorem 4.4.3.

Eğer bazı $m \in \mathbb{N}$'ler için (4.4.6) karakteristik denkleminin $\mu_1,\ldots,\mu_k$ kökleri

$$|\mu_i| < 1 \qquad (i = 1, \dots, \mathrm{k}) \tag{4.4.17}$$

sartını sağlarsa herhangi pozitif tanımlı kuadratik $W(x)$ formu için

$$\Delta_m V(x) = W(x)$$

olacak şekilde tek negatif tanımlı $V(x)$ kuadratik formu vardır (Ignatyev, A. O. ve Ignatyev O. 2011).

İspat.

$\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ ve $\{\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_k^m\}$ kümeleri özdeştir. Bu yüzden (4.4.17) den

$$|\lambda_i| < 1 \qquad (i = 1, \dots, \mathrm{k}) \tag{4.4.18}$$

olur. $W(x)$ keyfi pozitif tanımlı kuadratik form olsun. (4.4.17) sağlanırsa (4.4.7) geçerlidir. Bu yüzden (4.4.5) sağlanacak şekilde bir tek $V(x)$ kuadratik formu vardır. $V(x)$ negatif tanımlı olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım; Yani $V(x^0) \geq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir x^0 var olsun. Bu durumda $V(x^1) = V(A^m x^0) = V(x^0) + W(x^0) > 0$ olur ve Teorem 4.3.5'e göre (4.3.1) sisteminin çözümü kararsızdır. Fakat öte yandan (4.4.18) sisteminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğunu gösterir. Elde edilen çelişkiyle ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında fark denklemleri hakkında genel bilgiler verilmiştir. Ayrıca fark denklemlerinin çözümlerinin kararlılığı ve Lyapunov kararlılığıı ile ilgili tanım ve teoremler örneklerle incelenmiştir. Bir fark denkleminin çözümlerinin Lyapunov kararlılığının araştırılmasında Lyapunov fonksiyonları olarak kuadratik formların kullanılması konusu üzerinde durulmuştur.

KAYNAKLAR

Abu-Saris, R., Elaydi, S., Jang, S., 2002. Poincare type solutions of systems of difference equations, ***J. Math. Anal. Appl.***, **275**: 69-83.

Adams, C. R., 1928. On the irregular cases of linear ordinary difference equations,***Trans. Amer. Math. Soc.***, **30**: 507-541.

Agarwal, R. P., 2000. Difference Equations and Inequalities**.** Marcel Dekker, 970, New York.

Akın, Ö., Bulgak, H., 1998**.** Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi**. *Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi, 180***, Konya.

Al-Dosary, K. I. T., 2010. Periodicity and transformation of difference equations. ***Int. J. Math. Anal. (Ruse)***, **4**(9-12): 565-576.

Beddington, J. R., Free, C. A., Lawton, J. H., 1975. Dynamic complexity in predator-prey models framed in difference equations, ***Nature***, **255**: 58-60.

Benzaid, Z., Lutz, D. A., 1987. Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations, ***Stud. Appl. Math.***, **77**: 195-221.

Bereketoğlu, H., Kutay, V., 2012. Fark Denklemleri. ***Gazi Kitabevi,*** 300, Ankara.

Birkhoff, G. D., 1911. General theory of linear difference equations, ***Trans. Amer. Math. Soc.***, **12**: 243-284.

Brauer, F., Castillo-Chavez, C., 2001. ***Mathematical Models in Population Biology and Eqidemiology (English summary), Texts in Applied Mathematics 40***, Springer-Verlag, New York, 416.

Cadzow, J. A., 1973. ***Discrete Time Systems***, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Carlson, D. C., 1989. ***The Stability of Finite Difference Equations***, Master's thesis, University of Colorado, Colorado Springs.

Carvalho, L. A. V., 1998. On a method to investigate bifurcation of periodic solutions in retarded differential equations, ***J. Difference Equ. Appl.***, **4**(1): 17-27.

Cermak, J., Jansky, J., 2012. On Necessary and Sufficient Conditions for the Asymptotic Stability of Higher Order Linear Difference Equations. ***J. Difference Equ. Appl***., 11; 1781-1800.

Clark, C. W., 1976. A delay recruitement model of population dynamics with an application to baleen whale population, ***J. Math. Biol.***, **3**: 381-391.

Coffman, C. V., 1964. Asymptotic behavior of solutions of ordinary difference equations, ***Trans. Amer. Math. Soc.***, **110**: 22-51.

Cooke, K. L., Ladeira, L. A., 1996. Applying Carvalho's method to find periodic solutions of difference equations (English summary), Difference equations: theory and applications (San Francisco, CA, 1995), ***J. Difference Equ. Appl.***, **2**: 105-115.

Cushing, J., 1999. ***An Introduction to Structural Population Dynamics***, SIAM, Philadelphia.

Cushing, J., Henson, S., 2001. Global dynamics of some periodically forced, monotone difference equations, ***J. Difference Equ. Appl.***, **7**(6): 859-872.

Dannan, F., Elaydi, S., 2004. Asymptotic stability of linear difference equations of advanced type, ***J. Comput. Anal. Appl.***, **6**(2): 173-187.Eastham, M. S. P., 1989. ***The Asymptotic Solutions of Linear Differential Systems***, Clarendon Press, Oxford.

Dubickas, A., 2010. Rational difference equations with positive equilibrium point. ***Bull. Korean Math. Soc.***, **47**(3): 645-651.

Elaydi, S., Zhang, S., 1994. Stability and periodicity of difference equations with finite delay, ***Funkcial. Ekvac.***, **37**: 401-413.

Elaydi, S., 1995. An extension of Levinson's theorem to asymptotically Jordan difference equations, ***J. Difference Equ. Appl.***, **1**: 369-390.

Elaydi, S., Murakami, S., 1996. Asymptotic stability versus exponential stability in linear Volterra difference equations of convolution type, ***J. Difference Equ. Appl.***, **2**: 401-410.

Elaydi, S. 1999. An Introduction to Difference Equations. ***Springer-Verlag, 428***, New York.

Elaydi, S., Peterson, A., 1988. Stability of Difference Equations. Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Differential Equations, ***Edited by Aftabizadeh R.*** ; 417-422.

Elaydi, S., 2002. Asymptotics for linear difference equations II: Applications, In: ***New Trends in Difference Equations, Proceedings of the Fifth International Conference on Difference Equations, Temuco, Chile, 2000, S. Elaydi, J. Lopez***

Fenner, G. Ladas, and M. Pinto (Eds.), Taylor and Francis, London and New York, 111-133s.

Elaydi, S., 2005. ***An Introduction to Difference Equations: Third Edition. Undergraduate Texts in Mathematics***, Springer, New York, 539s.

Evgrafov, M., 1958. The asymptotic behavior of solutions of difference equations, ***Dokl. Akad. Nauk SSSR (Russian)***, **121**: 26-29.

Goldberg, S., 1986. Introdiction toDifference Equations with Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology***. Dover, 260***, New York.

Gordon, S. 1971. Stability and Summability of Solutions of Difference Equations. ***Math. Syst. Theory, 5;*** 56-75.

Graef, J.R., Qian C., Spikes P.W., 1998. Stability in a Population Model. ***Appl. Math. Comput., 89:*** 119-132.

Grove, E. A., Ladas, G., 2002. Periodicity in nonlinear difference equations. Cubo Mat. Educ., **4**(1): 195-230.

Hankerson, D., 1989. An Existence and Uniqueness Theorem for Difference Equations**.** ***SIAM J. Math, 20***; 1208-1217.

Horn, R. A., Johnson, C. R., 1999. ***Matrix Analysis***, Cambridge University Press, Cambridge.

Hu, L.-X., Li, W.-T., 2007. Global stability of a rational difference equation. ***Appl. Math. Comput.***, **190**(2): 1322-1327.

Hurt, J., 1967. Some stability theorems for ordinary difference equations, ***SIAM J. Numer. Anal.***, **4**: 582-596.

Jankowski, T., 2010. First-order advanced difference equations. ***Appl. Math. Comput.***, **216**(4): 1242-1249.

Jia, X.-M., Hu, L.-X., 2010. Global attractivity of a higher-order nonlinear difference equation. ***Appl. Math. Comput.***, **216**(3): 857-861.

Ignatyev, A. O., Ignatyev, O., 2011. Quadratic Forms As Lyapunov Functions in the Study of Stability of Solutions to Difference Equations. ***Elec. J. Differ. Equ., 19:*** 1-21.

Kailath, T., 1980. ***Linear Systems***, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ.

Karatas, R., 2010. Global behavior of a higher order difference equation. ***Ars Combin.***, **96**: 145-160.

Kelley, W.G., Peterson, A.C., 1991. Difference Equations***, Int. with Appl.*** Academic, 403, New York.

Kutay, V., 2010. Fark Denklemleri. ***Ankara Üniv. Fen Bil. Enst.*** Yüksek Lisans Tezi., 138, Ankara.

La Salle J. P., Lefschetz, S., 1961. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. Academic Press, New York.

La Salle J. P., 1977. Stability Theory for Difference Equations. MAA Studies in Mathematics, 14; 1-31.

Lakshmikantham, V., Trigiante, D., 1988. Theory of Difference Equations**.** ***Numer. Met. and Appl.*** Academic, 242, New York.

Levinson, N., 1946. The asymptotic behavior of a system of linear differential equations, Amer. J. Math., **68**: 1-6.

Ludyk, G., 1985. ***Stability of Time-Variant Discrete-Time Systems***, Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Luenberger, D. G., 1979. ***Introduction to Dynamic Systems, Theory, Models and Applications***, Wiley, New York.

Mickens, R., 1990. Difference Equations. Van Nostrand, Reinhold, 448, New York.

Migda, J., 2010. Asymptotic properties of solutions of higher order difference equations. ***Math. Bohem.***, **135**(1): 29-39.

Miller, K. S., 1968. Linear Difference Equations. W. A Benjamin, New York.

Miller, R. K., Michael, A. N., 1982. ***Ordinary Differential Equations***, Academic Press, New York.

Milne-Thomson, L. M., 1960. ***The Calculus of Finite Differences***, Macmillan, London.

Muroya, Y., Ishiwata, E., Guglielmi, N., 2009. New global stability conditions for a class of difference equations. ***Front. Math. China***, **4**(1): 131-154.

Murray, J. D., 1974. ***Asymptotic Analysis***, Clarendon Press, Oxford.

Ortega, J. M., 1973. Stability of Difference Equations and Convergence of Iterative Process. SIAM***. J. Numer. Anal. , 10 (2):*** 268-282.

Peng, Y., 2006. Global asymptotic stability for nonlinear difference equations. ***Appl. Math. Comput.***, **182**(1): 67-72.

Peterson, A., 1987. Existence and Uniqueness Theorems for Nonlinear Difference Equations. ***J. Math. Anal. Appl. 125:*** 185-191

Peterson, A., 1989. Stability of Diference Equations via Liapunov functions. ***Proceedings of the International Conference on Differential Equations***, 235-238.

Schinas, J., 1974. Stability and conditional stability of time-difference equations in Banach spaces, ***J. Inst. Math. Appl.***, **14**: 335-346.

Sedaghat, H., 1997. The impossibility of unstable globally attracting fixed points for continuous mappings of the line, ***Amer. Math. Monthly***, **104**: 356-358.

Sharkovsky, A. N., Maistrenko, Yu.L., Romanenko, E.Yu., 1993. ***Difference Equations and Their Applications***, Kluwer Academic, Dordrecht.

Sugiyama, S., 1969. On the Stability Problems on Difference Equations. ***Bull. Sci. Eng Research Lab. Wasenda Univ. 45:*** 140-144.

Sugiyama, S., 1971. On Periodic Solutions of Difference Equations. ***Bull. Sci. Eng***. Research Lab. WasendaÜniv., 52: 87-94.

Sun, T., Xi, H., 2005. Global asymptotic stability of a family of difference equations. ***J. Math. Anal. Appl.***, **309**(2): 724-728.

Sun, T., Xi, H., Han, C., 2008. Stability of solutions for a family of nonlinear difference equations. ***Adv. Difference Equ.***, Art. ID: 238068, 1-6.

Talpalaru, P., 2005. Stability problems for difference equations. ***An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)***, **51**(2): 231-244.

Wang, C.-Y., Wang, S., Wang, Z.-W., Gong, F., Wang, R.-F., 2010. Asymptotic stability for a class of nonlinear difference equations. ***Discrete Dyn. Nat. Soc.***, Art. ID: 791610, 1-10.

Williams, J. L., 1970. ***Stability Theory of Dynamical Systems***, Nelson, London.

ÖZ GEÇMİŞ

Elazığ ilinin Palu ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Elazığ'da tamamladı. 2000 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı ve 2005 yılında mezun oldu. 2012 yılında Bingöl Üniversitesi'nde Öğretim görevlisi olarak başladığı görevine halen devam etmektedir.