Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Bilim Dalı

NEUTRAL DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yılmaz Ekinci

Yüksek Lisans Tezi

Van, 2017

NEUTRAL DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yılmaz Ekinci

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Erkan Çimen

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Van, 2017

KABUL VE ONAY

Yılmaz Ekinci tarafından hazırlanan "Neutral Delay Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri" başlıklı bu çalışma, 21/06/2017 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Musa Çakır (Başkan)

Yrd. Doç. Dr. Muaz Seydaoğlu

Yrd. Doç. Dr. Erkan Çimen (Danışman)

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Fuat Tanhan

Enstitü Müdürü

BİLDİRİM

Hazırladığım tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım:

☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☐ Tezim sadece Yüzüncü Yıl Üniversitesi yerleşkesinden erişime açılabilir.

☒ Tezimin 3 Yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

21/06/2017

Yılmaz Ekinci

ÖZET

EKİNCİ, Yılmaz. *Neutral Delay Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Van, 2017.

Bu çalışmada birinci mertebeden lineer neutral delay diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi ele alınmaktadır. Bu problemin çözümü için hem analitik hem de nümerik yöntemler sunulmuştur. Kesin çözüm için Bellman'ın adımlar metodu ve Laplace dönüşümü, yaklaşık çözüm içinse sonlu fark metodu incelenmektedir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar bir örnek üzerinde tablolanmıştır.

Anahtar Sözcükler

Neutral delay diferansiyel denklem, Adım metodu, Sonlu fark metodu

ABSTRACT

EKİNCİ, Yılmaz. *Numerical Solutions of Neutral Delay Differential Equations*, MSc Thesis, Van, 2017.

This study deals with the initial value problem for a linear first order neutral delay differential equation. To solve this problem both analytically and numerically, some methods is presented. We analyze Bellman's steps method and Laplace transformation method for exact solution of the problem and finite difference method for approximate solution. Furthermore, computational results obtained by using the methods are shown with a numerical example which is displayed in Tables.

Key Words

Neutral delay differential equation, Step method, Finite difference method.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	**Anlamı**
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
C	Şebeke adımından bağımsız genel sabit
r	Gecikme parametresi
x	Problemin kesin çözümü
y	Problemin yaklaşık çözümü
$e(t_i)$	t_i düğüm noktasındaki mutlak hata
ω	Şebeke
N	Şebeke elemanlarının sayısı
$\{\psi_i(t)\}_{i=1}^N$	Sonlu üstel baz fonksiyonları

TABLOLAR DİZİNİ

1. BÖLÜM

GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Delay diferansiyel denklemler tıp, biyoloji, fizik, kimya, mühendislik, ekonomi gibi bilimsel ve teknik alandaki uygulamalarda model denklemler olarak ortaya çıkmaktadır (Driver, 1977; Gopalsamy, 1992; Villasana ve Radunskaya, 2003; Foley ve Mackey, 2009; Liz ve Röst, 2013; Martina ve Veronika, 2015; Getto ve Waurick, 2016; Guo ve Ma, 2016). Buna ilave olarak enzim kinetiği, enfeksiyon hastalıkları ve immünolojideki matematiksel modellerde de karşımıza çıkmaktadır (Hairer ve ark., 2008).

Neutral tip delay denklemler daha çok popülasyon ekolojisi, hücre gelişim modeli, yarıiletkenli aygıtlardaki elektron dağılım modeli, kontrol teorisi gibi alanlardaki uygulamalarda göze çarpmaktadır (Kuang, 1993; Kolmanovskii ve Myshkis, 1999; Baker ve ark., 2008; Hadeler, 2008; Erneux, 2009; Rihan, 2010; Zeng ve ark., 2016). Bellman ve Cooke, (1963); El'sgolts ve Norkin, (1973); Jackiewicz, (1987); Kuang ve Feldstein, (1991); Kuang, (1993); Palaniswami, (1995); Zhang ve ark., (2005); Liu ve ark., (2010) neutral delay diferansiyel denklemlerin çözümünün varlık, teklik ve çözümlerin kararlılık sonuçları üzerine çalışmalar yapmışlardır. Bellen ve Zennaro, (2003), delay diferansiyel denklemlerin ağırlıklı olduğu kitabında klasik nümerik yöntemler kullanarak çözüm önerileri sunmuşlardır. Son yıllarda neutral tip denklemlerin çözümleri için farklı yöntemlerle ele alınmaktadır. (Bellen ve Guglielmi, 2009; Gan, 2009; Halas ve Anguelova, 2013; Su ve ark., 2013; Wang, 2015; Sedaghat ve ark., 2015; Guglielmi ve Hairer, 2016).

Yapılan literatür taramasında, delay diferansiyel denklemlerin çözümleri için çok sayıda asimtotik ve nümerik çalışma olduğu görülmüştür. Fakat, neutral tip denklemlerin çözümleri için kararlılık analizi üzerinde durulmakta veya asimtotik yaklaşımlar verilmekte, nümerik çalışmalara pek rastlanmamaktadır.

Bellman ve Cooke (1963) tarafından birinci mertebeden denklem için aşağıdaki tanımı verilerek bir sınıflandırma yapılmıştır.

$$a_0(t)u'(t) + a_1(t)u'(t-\tau) + b_0(t)u(t) + b_1(t)u(t-\tau) = f(t), \ \ \tau > 0$$

denklemi verilsin. Bu denklem; eğer $a_0(t) \neq 0$ ve $a_1(t) = 0$ ise gecikmeli (retarded) tip diferansiyel denklem, $a_0(t) \neq 0$ ve $a_1(t) \neq 0$ ise nötral (neutral) tip diferansiyel denklem, $a_0(t) = 0$ ve $a_1(t) \neq 0$ ise advanced tip diferansiyel denklem olarak adlandırılır. $a_0(t) = 0$ ve $a_1(t) = 0$ ise bu kez denklem fark denklemi halini alır. $b_0(t) = 0$ ve $b_1(t) = 0$ ise denklem bir dönüşümle fark denkleme indirgenebilir. Son olarak $a_0(t) = b_0(t) = 0$ veya $a_1(t) = b_1(t) = 0$ ise denklem adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu tanım göz önünde bulundurulursa aşağıdaki denklemler, gecikme parametresi içeren diferansiyel denklemlere örnek olarak verilebilir (El'sgolts, 1966)

$$x'(t) = f\Big(t, x(t), x\big(t-\tau(t)\big)\Big); \ \tau(t) > 0,$$

$$x'(t) = f\Big(t, x(t), x'\big(t-\tau(t)\big), x\big(t-\tau(t)\big)\Big); \ \tau(t) > 0,$$

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), x(t-\tau_2)); \ \tau_1, \tau_2 > 0,$$

$$x''(t) = f\Big(t, x(t), x'(t), x\big(t-\tau(t)\big)\Big); \ \tau(t) > 0,$$

$$x''(t) = f\Big(t, x(t), x'(t), x''\big(t-\tau(t)\big), x\big(t-\tau(t)\big)\Big); \ \tau(t) > 0,$$

$$x''(t) = f\left(t, x\left(\frac{t}{2}\right), x'\left(\frac{t}{2}\right) \ x(t), x'(t)\right); t > 0.$$

Bu çalışmada aşağıda verilen birinci mertebeden neutral delay diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi ele alınmıştır.

$$x'(t) + a(t)x'(t-r) + b(t)x(t) + c(t)x(t-r) = f(t), t > 0 \tag{1.1}$$

$$x(t) = \varphi(t), -r \leq t \leq 0, \tag{1.2}$$

burada $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ ve $\varphi(t)$ verilmiş yeterince düzgün fonksiyonlar ve $r > 0$ gecikme sabitidir.

Yapılan literatür taramasında, gecikmeli diferansiyel denklemlerle alakalı çalışmalar çok fazla olmasına rağmen neutral tip delay diferansiyel denklemlere çok az rastlanmaktadır. Bu tür problemlerin kesin çözümünü bulmak her zaman mümkün olmamaktadır. Bu nedenle nümerik yaklaşımlarla çözümler sunmak önem kazanmaktadır.

Bu çalışmanın amacı lineer birinci mertebeden neutral tip delay diferansiyel denklemin çözümlerini araştırmaktır. (1.1)-(1.2) probleminin nümerik çözümleri, sonlu fark metodu kullanılarak elde edilecektir. Bunun için düzgün şebekede fark şeması kurulacak ve fark şemasının kararlılığı, yakınsama şartları ve yaklaşım hatası gibi matematiksel özellikleri incelenecektir. Ayrıca elde edilecek sonuçların doğruluğu çeşitli örneklerle desteklenecektir.

2. BÖLÜM

NEUTRAL DELAY DENKLEMLER İÇİN BAZI MODELLER

Bu bölümde neutral delay diferansiyel denklemlerle ifade edilen bazı model denklemler ele alınacaktır.

2.1. Hücre Çoğalması Modeli

Baker ve ark., (1998) yılında yaptıkları bir çalışmada aşağıdaki hücre çoğalması modelini önermişlerdir.

$$\frac{dN}{dt} = \rho_0 N(t) + \rho_1 N(t - \tau_{cell}) + \rho_2 N'(t - \tau_{cell}), (t \geq 0),$$

$$N(t) = \Psi(t)(-\tau_{cell} \leq t < 0),$$

bu modeldeki parametreler ayrıntılı olarak aşağıda verilmiştir.

$\tau_{cell} > 0$: ortalama hücre bölünme zamanı,

$\rho_0 \geq 0$: eş zamanlı olmayan ani hücre büyümesinin oranı,

$\rho_1 \geq 0$: eş zamanlı olmayan gecikmeli hücre büyümesinin oranı,

$0 \leq \rho_2 \leq 2$: hücre büyümesinin gecikme oranıdır.

$0 \leq \beta \leq 1$: ilk adımda bölünen hücrelerin parçasıdır.

Bu modele, ρ_0, ρ_1, ρ_2 ve τ_{cell} parametrelerini içeren bir lineer neutral delay diferansiyel denklem olarak bakılabilir. Bunun yanı sıra β değeri,bölünmüş hücre modelinin ilk adımında ortaya çıkmaktadır, öyle ki $N(t) = \beta\Psi(t)$, $t \in [-\tau_{cell}, 0)$ dir. Anlık' hücre büyümesi, mevcut hücre popülasyonunun büyüme oranına bağlı olduğu anlamına gelir ve benzer şekilde, 'geciktirilmiş' hücre büyümesi, önceki bazı hücre popülasyonunun büyüme oranına bağlı olduğu anlamına gelir.

Eş zamanlı büyümenin ideal durumu $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = 0$ ve $\rho_2 = 2$, olması ile mümkündür. Bu durumda popülasyonda hücre senkronizasyon derecesi sabit kalır, fakat hücre kültürünün senkronize etkileri genellikle geçici olduğu not edilmelidir. Ayrıca hücrelerin senkronize bir yöntemle hücrenin yetişmesine zarar verebileceği unutulmamalıdır ve sonuç olarak hücre büyümesi tahmin edilenden daha az olmaktadır.

2.2. Popülasyon Dinamiği Modeli

Aşağıdaki lineer olmayan neutral delay lojistik denklem birçok yazar tarafından tanımlanmış ve geniş bir şekilde tartışılmıştır.

$$\dot{x}(t) = rx(t)\big(1 - \big(x(t-\tau) + c\dot{x}(t-\tau)\big)/K\big), \tag{2.1}$$

burada r, τ, c, K pozitif sabitlerdir. Bu denklem tek türün nüfus büyümesi ile ifade edilen,

$$\dot{x}(t) = rx(t)(1 - x(t)/K), \tag{2.2}$$

modelin doğal bir genellemesi olarak bilinmektedir, burada r, x türünün içsel bir büyüme oranıdır. K, x türünün çevre kapasitesi olarak yorumlanır. F. E. Smith, Daphnia magna (su piresi) popülasyonları üzerinde yaptığı araştırmaya dayalı olarak, kişi başı büyüme oranı olan (2.2) denkleminin içindeki $r(1 - x(t)/K)$ değerinin $r\big(1 - \big(x(t) + c\dot{x}(t)\big)/K\big)$ ile değiştirilmesi gerektiğini savunmuştur (Kuang ve Feldstein, 1991).

2.3. İki Durumlu Devre Ağı

Genellikle elektronik devrelerde karşımıza çıkan

$$C_1 \frac{d}{dt}[u(t) - qu(t-h)] = -\frac{1}{2}u(t) - \frac{q}{2}u(t-h) - g\big(u(t)\big)$$
$$-qu(t-h) - i(t) + e_1(t),$$

$$\frac{d}{dt}[Li(t)] = -R_1 i(t) + u(t) - qu(t-h) + e_2(t)$$

modelini inceleyelim. Bu model literatürde Flip-Flop devre olarak bilinmekte, elektronik cihazların hafıza ve sayıcılarına temel teşkil etmektedir.

Burada C_1, kapasitans, L, indüktans, R_1, direnç, u, $x = L$ deki voltaj, g, voltaj fonksiyonudur. $e = (e_1, e_2)$ ve $i(t)$ sırasıyla kontrol ve akım fonksiyonlarıdır (Chukwu, 1992).

3. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER

Bu bölümde bundan sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanımlar, notasyonlar ve formüller verilmektedir.

Tanım 3.1. Laplace Dönüşümü

F, t gerçel değişkeninin $t > 0$ için tanımlı bir fonksiyonu olsun. s bir gerçel değişken ve f de

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt \tag{3.1}$$

integralinin mevcut olduğu bütün s değerleri için tanımlı olsun. (3.1) integrali ile tanımlı f fonksiyonuna, F'nin Laplace dönüşümü denir. F'nin f Laplace dönüşümünü $L\{F\}$, $f(s)$'yi de $L\{F(t)\}$ ile gösteririz (Ross, 1984).

Teorem 3.2.

$F(t)$ aşağıdaki özelliklere sahip bir fonksiyon olsun:

$F(t)$, $\alpha \leq t \leq b$ $(b > 0)$ gibi her sonlu kapalı aralıkta parçalı süreklidir.

$F(t)$, üstel mertebedendir. Yani; α, M, t_0 pozitif sayıları her $t > t_0$ için

$$e^{-\alpha t}|F(t)| < M$$

olacak şekilde bulunabilir. Sonuç olarak

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt,$$

Laplace dönüşümü mevcuttur (Ross, 1984).

Tanım 3.3. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

a) $\bar{I} = [0, T]$ aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına bir şebeke denir.

b) Eğer düğümler eşit aralıklı iseler

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_i | t_i = i\tau, i = 0,1, \dots, N; \tau = T/N\}$$

ifadesine $\bar{I}$ aralığındaki düzgün şebeke denir. τ sabitine şebeke adımı denir. Bu şebekede tanımlanmış $g_i \equiv g(t_i)$ fonksiyonuna ise t_i noktasındaki şebeke fonksiyonu denir. (Amirali ve Duru, 2002).

Tanım 3.4. Fark Türevleri

$\bar{I}$ aralığındaki fonksiyonunun düzgün şebeke için fark türevleri aşağıdaki gibidir (Amirali ve Duru, 2002).

a) $g_{t,i} = \frac{g_{i+1}-g_i}{\tau}$ ifadesine birinci mertebeden ileri fark türevi denir.

b) $g_{\bar{t},i} = \frac{g_i-g_{i-1}}{\tau}$ ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi denir.

Tanım 3.5. Şebeke Normu

Şimdide fark problemi için kullanacağımız normunu tanıtalım.
$\|g\|_{\infty,\bar{\omega}_\tau} = \max_{0\le i\le N}|g_i|$ ifadesine düzgün şebekede maksimum normun fark benzeri denir (Amirali ve Duru, 2002).

Tanım 3.6. Kararlılık

Lineer

$$Lu = f(t), \;\; t \in G \tag{3.2}$$

denkleminin

$$lu = \mu(t), \;\; t \in \Gamma \tag{3.3}$$

şartını (sınır şartı veya başlangıç şart olabilir) sağlayan çözümünün bulunması istensin, burada $f(t)$, $\mu(t)$ belirli fonksiyonlar (veri fonksiyonları), l belirli bir lineer diferansiyel operatördür. $\bar{G} = G \cup \Gamma$ bölgesinde herhangi bir $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup l_h$ şebekesinin kurulduğunu varsayalım, burada ω_h -iç şebeke, l_h -sınır şebeke (şebeke sınır noktaları kümesi), h ise şebeke düğümlerinin yoğunluğunu ifade eden parametredir (şebeke adımı). (3.2)-(3.3) problemine karşılık

$$L_h y = \varphi_h, \ \ t \in \omega_h, \tag{3.4}$$

$$l_h y = X_h, \ \ t \in l_h \tag{3.5}$$

fark problemi olsun. Burada, L_h, l_h-$\bar{\omega}_h$'da tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, φ_h, X_h belli şebeke fonksiyonlarıdır.

Kararlılık, fark problemleri veya genellikle yaklaşık algoritmalar için, bunların pratik uygulanabilmesinin gerektirdiği önemli bir özelliktir.

(3.4)-(3.5) fark problemi, belli sınıflardan olan her bir φ_h, X_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \le h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu varsayalım. (3.4)-(3.5) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h$, $\tilde{X}_h$ olan çözümünü $\tilde{y}$ ile belirleyelim.

Eğer öyle, h'a bağlı olmayan C_1, C_2 sabitleri varsa, yeteri kadar küçük $h \le h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \le C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \left\|\tilde{X}_h - X_h\right\|_3 \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlanmış olsun, bu durumda (3.4)-(3.5) fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre kararlıdır denir. Burada $\| \ \ \|_1, \| \ \ \|_2, \| \ \ \|_3$ herhangi şebeke normlarıdır.

(3.4)-(3.5) problemi lineer olduğundan, kararlılığı ifade eden (3.6) eşitsizliği

$$\|y\|_1 \le C_1 \|\varphi_h\|_2 + C_2 \|X_h\|_3$$

eşitsizliğine denktir.

Böylece kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli bağlı olduğuna, hem de bu bağlılığın h'a göre düzgün biçimli olduğunu ifade eder (Amirali ve Duru, 2002).

Tanım 3.7. Yakınsaklık

u, (3.2)-(3.3) probleminin kesin çözümü ve y'de herhangi bir şebekedeki bu probleme uygun fark problemin çözümü olsun. $z = y - u$ farkı hata fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

Eğer $h \to 0$ olduğunda $\|z\|_0 = \|y - u\|_1 \to 0$ ise ($\| \quad \|_1$ söz konusu şebekedeki herhangi bir norm), bu durumda y fark problemin çözümü u probleminin çözümüne yakınsıyor denir. Ayrıca, yeteri kadar küçük h sabitleri için

$$\|y - u\|_1 \leq Ch^k, k > 0$$

ise (C, h'a bağlı olmayan sabittir) bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme h'ın k'ıncı derecesiyle yakınsar veya yaklaşık çözüm $O(h^k)$ kesinliğine sahiptir denir (Amirali ve Duru, 2002).

Tanım 3.8.

$f(t)$, $\bar{I}$'de tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyon olsun.

a) $C^{(n)}(\bar{I})$ ifadesine $\bar{I}$ aralığında t'ye göre n. mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi denir.

b) $\|f\|_{C(\bar{I})} = \max_{t\in\bar{I}}|f(t)|$ ifadesine $\bar{I}$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar için maksimum norm denir (Amirali ve Duru, 2002).

Not 3.9. Bazı Formüller

Sonraki bölümlerde, fark şemasının kurulması ve incelenmesinde aşağıdaki kuadratur formülleri kullanılacaktır (Amirali ve Duru, 2002).

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx\right]\{\sigma f(b) + (1-\sigma)f(a)\} +$$

$$+f[a,b]\int_a^b \left(x - x^{(\sigma)}\right)p(x)dx + R(f) \tag{3.7}$$

burada σ-reel parametre, $p(x) \in C[a,b]$ ağırlık fonksiyonudur. Kalan terim

$$R(f) = \int_a^b dxp(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(x,\xi)d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1,2,$$

biçimindedir.

$$K_s(x,\xi) = T_s(x-\xi) - (b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s, \ \ s = 0,1,$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a, \quad f[a,b] = \frac{(f(a) - f(b))}{(b-a)}.$$

$$T_s(\lambda) = \frac{\lambda^s}{s!}, \ \ \lambda \geq 0; \quad T_s(\lambda) = 0, \ \ \lambda < 0.$$

olarak verilmiştir. Diğer formül ve kalan terimi

$$\int_a^b p(x)f'(x)dx = f[a,b]\int_a^b p(x)dx + \bar{R}(f) \tag{3.8}$$

$$\bar{R}(f) = -\int_a^b dxp'(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(x,\xi)d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1,2.$$

biçimindedir.

Teorem 3.10.

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \ \ n \geq n_0 \geq 0 \tag{3.9}$$

fark denklemi ve

$$y_{n_0} = y_0 \tag{3.10}$$

başlangıç koşulundan meydana gelen problemini ele alalım. Burada $a(n)$ ve $g(n)$ $n \geq n_0$-da tanımlı reel değerli fonksiyonlar olup her $n \geq n_0$ için $a(n) \neq 0$ olsun.

Bu durumda (3.9) ve (3.10) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y_n = y_0 \prod_{k=n_0}^{n-1} a(k) + \sum_{m=n_0}^{n-1} \left(\prod_{k=m+1}^{n-1} a(k) \right) g(m)$$

biçimindedir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

4. BÖLÜM

ANALİTİK YÖNTEMLER

Bu bölümde sabit gecikmeli neutral diferansiyel denklemler için bazı analitik yöntemler verilecektir.

4.1. Adım Metodu

Bu metot literatürde ilk kez R. E. Bellman tarafından kullanıldığından, Bellman'ın adım metodu olarak da bilinir.

Bir sabit gecikmeli olan neutral tip

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)) \tag{4.1}$$

denkleminin

$$x(t) = \varphi_0(t),\ t \in E_{t_0} = [t_0 - \tau, t_0] \tag{4.2}$$

şartını sağlayan çözümünün bulunması problemine adım metodunu uygulayalım. Burada $f(t, x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonu $G = \{t_0 \leq t < +\infty,\ -\infty < x_i < +\infty, i = 1,2,3\}$ kümesinde süreklidir, $\varphi_0(t)$ fonksiyonunun ise E_{t_0} kümesinde sürekli türevi vardır. Böylece (4.1)-(4.2) probleminin $I_1 = [t_0, t_0 + \tau]$ aralığında

$$x'(t) = f\big(t, x(t), \varphi_0(t-\tau), \varphi_0{}'(t-\tau)\big) \tag{4.3}$$

adi diferansiyel denkleminin

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0) \tag{4.4}$$

şartını sağlayan çözümünün bulunmasına dönüşür. Varsayalım ki $x = \varphi_1(t)$ fonksiyonu (4.1)-(4.2) probleminin I_1 aralığındaki çözümüdür. Şimdi de $I_2 = [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığındaki çözümü bulalım. Bunun için

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t - \tau), \varphi_1{}'(t - \tau)$$

denkleminin $x(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau)$ şartını sağlayan çözümünü bulmak yeterli olacaktır. Verilen şartlardan (4.1)-(4.2)'nin çözümünün $(t_0 - \tau, t_0)$, $(t_0, t_0 + \tau)$, $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau)$, ... aralıklarında sürekli türevleri, t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ... noktalarında ise sol ve sağ türevlerinin var olduğunu söyleyebiliriz. Fakat çözümün, t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ... noktalarında türevi olmayabilir.

Doğrudan da, t_0 noktasında çözümün sol türevi $\varphi_0'(t_0 - 0)$'a, sağ türevi ise

$$\varphi_0'(t_0 - 0) = f\big(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \tau), \varphi_0{}'(t_0 - \tau)\big) \tag{4.5}$$

şartı sağlanırsa t_0 noktasında çözümün türevi vardır.

Açıktır ki, $t_0 + \tau$ noktasında çözümün sol türevi

$$f\big(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi_0(t_0), \varphi_0{}'(t_0 - 0)\big)$$

$$= f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi_0(t_0), \varphi_1{}'(t_0 + 0))$$

olur ve $t_0 + \tau$ noktasında çözümün sürekli türevi var olur.

Bu şart ile gösterilebilir ki, (4.5) şartı sağlandıkça çözüm $t_0 + 2\tau$, $t_0 + 3\tau$, ... noktalarında sürekli türevleri vardır. Fakat, genellikle (4.3), (4.4) probleminin çözümü aralıktan aralığa geçtikçe düzgünleşir. Bundan dolayı neutral tip denklemler, geciken argümentli denklemlerden farklıdır (Ahmedov ve ark., 1978).

Şimdi de aşağıdaki örneği bu metodu kullanarak çözelim.

Örnek 4.1.

$$x'(t) + 2x(t) + x'(t - 1) = 3,\ t > 0,$$

$$x(t) = t,\ -1 \le t \le 0$$

probleminin $[0,2]$ aralığındaki çözümünü bulalım.

Çözüm.

Öncelikle $t \in I_1 = [0,1]$ alırsak

$$x_1'(t) + 2x_1(t) + \varphi'(t-1) = 3,$$

$$x_1(0) = \varphi(0),$$

problemini yazabiliriz. $\varphi(t) = t$ başlangıç fonksiyonunu dikkate alırsak,

$$x_1'(t) + 2x_1(t) = 2,$$

$$x_1(0) = 0,$$

lineer problemini elde ederiz. Buradan

$$x_1(t) = 1 - e^{-2t}$$

çözümüne ulaşırız. İkinci olarak $t \in I_2 = [1,2]$ aralığındaki çözümünü bulalım:

$$x_2'(t) + 2x_2(t) + {x_1}'(t-1) = 3,$$

$$x_2(1) = x_1(1),$$

ilk adımda ($t \in I_1$) bulduğumuz $x_1(t)$'yi problemde dikkate alırsak

$$x_2'(t) + 2x_2(t) = 3 - 2e^{-2t+2},$$

$$x_2(1) = 1 - e^{-2}$$

problemini elde ederiz. Bu problemin çözümü ise

$$x_2(t) = e^{2-2t}\left(-2t + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

olarak buluruz. Böylece verilen problemin çözümü

$$x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & 0 \le t \le 1 \\ \frac{3}{2} + e^{2-2t}\left(\frac{3}{2} - 2t\right), & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

olacaktır.

4.2. Laplace Dönüşümü ile Çözüm

Burada

$$x'(t) + ax'(t-\tau) + bx(t) + cx(t-\tau) = f(t), \quad t > 0 \tag{4.6}$$

denkleminin

$$x(t) = \varphi_0(t), t \in E_0 = [-\tau, 0] \tag{4.7}$$

şartını sağlayan çözümünü Laplace dönüşümü yardımı ile bulalım. Burada $\tau > 0, a, b, c$ reel sabitlerdir. Ayrıca, $\varphi_0(t)$, E_0 aralığında, $f(t)$ ise $I = [0, \infty)$ aralığında süreklidir ve $|f(t)| \leq M_1 e^{c_1 t}$, $M_1 > 0$, $c_1 > 0$.

İlk olarak (4.6) denklemini $[0, t]$ aralığında integre edelim:

$$\int_0^t [x'(s) + ax'(s-\tau) + bx(s) + cx(s-\tau)]ds = \int_0^t f(s)ds$$

buradan, (4.7) başlangıç şartı dikkate alırsak

$$x(t) - \varphi_0(0) + a \int_{-\tau}^0 \varphi_0'(s)ds + a[x(t-\tau) - \varphi_0(0)] +$$

$$+b \int_0^t x(s)ds + c \int_0^t x(s-\tau)ds = \int_0^t f(s)ds$$

olur ve

$$x(t) + ax(t-\tau) = \varphi_0(0) + a\varphi_0(-\tau) - c \int_{-\tau}^0 \varphi_0(s)ds$$

$$-b \int_0^t x(s)ds - c \int_0^{t-\tau} x(s)ds + \int_0^t f(s)ds$$

bulunur. Daha sonra $m = \varphi_0(0) + a\varphi_0(-\tau) - c \int_{-\tau}^0 \varphi_0(s)ds$ ile gösterir ve

$$\int_0^t |f(s)|ds \le \frac{M_1}{c_1} e^{c_1 t}, \left| \int_0^{t-\tau} x(s)ds \right| \le \int_0^t |x(s)|ds, \ \ t > \tau,$$

$$|x(t)| - |a||x(t-\tau)| \le |x(t) + ax(t-\tau)|$$

eşitsizliklerini dikkate alırsak

$$|x(t)| \le |a||x(t-\tau)| + |m| + \frac{M_1}{c_1} e^{c_1 t} + (|b| + |c|) \int_0^t |x(s)|ds$$

yazabiliriz. Gronwall eşitsizliğini (Amirali ve Duru, 2002) kullanırsak,

$$|x(t)| \le |a||x(t-\tau)| + |m| + \frac{M_1}{c_1} e^{c_1 t} +$$

$$+ \int_0^t \left[|a||x(s-\tau)| + |m| + \frac{M_1}{c_1} e^{c_1 s} \right] (|b| + |c|) e^{\int_s^t (|b|+|c|)d\eta} \, ds$$

$$\le |a||x(t-\tau)| + |m| + \frac{M_1}{c_1} e^{c_1 t} +$$

$$+ \int_0^t \left[|a||x(s-\tau)| + |m| + \frac{M_1}{c_1} e^{c_1 s} \right] (|b| + |c|) e^{(|b|+|c|)(t-s)} \, ds$$

elde ederiz. Buradan $M_2 = \frac{M_1}{c_1 - |b| - |c|}$, $M_3 = |m| - \frac{M_2}{c_1}(|b| + |c|)$ olarak alırsak

$$|x(t)| \le |a||x(t-\tau)| + M_2 e^{c_1 t} + M_3 e^{(|b|+|c|)t} + |a| \int_0^t |x(s-\tau)| \, e^{(|b|+|c|)(t-s)} ds$$

bulunur. Sonra da adım metodu kullanılarak $x(t)$'nin sınırlı olduğu kolaylıkla görülebilir. Yine (4.6) denkleminden $x'(t)$ için benzer sonuçlar gösterilebilir. Sonuç olarak (4.6) denkleminin $x(t)$ çözümünün ve $x'(t)$ türevinin Laplace dönüşümünün var olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi de (4.6)-(4.7) probleminin çözümünü arayalım. İlk olarak (4.6) denkleminin her iki tarafını e^{-pt} fonksiyonu ile çarpıp $[0, \infty)$ aralığında integral alırsak

$$\int_0^\infty x'(t)e^{-pt}dt + c\int_0^\infty x'(t-\tau)e^{-pt}dt + a\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt +$$

$$+b\int_0^\infty x(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{4.9}$$

elde ederiz. Birinci integrale kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_0^\infty x'(t)e^{-pt}dt = x'(t)e^{-pt}|_0^\infty + p\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

$$= -\varphi_0(0) + p\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

ikinci integrale önce değişken değiştirme, sonrada kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_0^\infty x'(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_{-\tau}^\infty x'(t)e^{-p(t+\tau)}dt$$

$$= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi_0{}'(t)\, e^{-pt}dt + e^{-p\tau}\int_0^\infty x'(t)\, e^{-pt}dt$$

$$= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi_0{}'(t)\, e^{-pt}dt - \varphi_0(0)e^{-p\tau} + pe^{-p\tau}\int_0^\infty x(t)\, e^{-pt}dt$$

ve dördüncü integrale değişken değiştirme uygulayarak

$$\int_0^\infty x(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_{-\tau}^\infty x(t)e^{-p(t+\tau)}dt$$

$$= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi_0(t)\, e^{-pt}dt + e^{-p\tau}\int_0^\infty x(t)\, e^{-pt}dt$$

yazabiliriz. (4.9) denkleminden

$$(p+pc+a+be^{-p\tau})\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt=\varphi_0(0)+c\varphi_0(0)e^{-p\tau}$$

$$-ce^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0}\varphi_0{}'(t)\,e^{-pt}dt-be^{-pt}\int_{-\tau}^{0}\varphi_0(t)e^{-pt}dt+\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

buluruz. Buradan gerekli düzenlemeleri yapar

$$h(p)=p+pc+a+be^{-p\tau},$$

$$P(p)=\varphi_0(0)+c\varphi_0(0)e^{-p\tau}-ce^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0}\varphi_0{}'(t)\,e^{-pt}dt-be^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0}\varphi_0\,(t)e^{-pt}dt,$$

ve

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

olarak gösterirsek

$$\int_0^\infty x(t)\,e^{-pt}dt=\frac{P(p)+F(p)}{h(p)}$$

elde ederiz. Daha sonra ters Laplace dönüşümünü kullanarak (4.6)-(4.7) probleminin çözümünü bulabiliriz. Şimdi elde ettiğimiz bu sonuçları bir örnekle pekiştirelim.

Örnek 4.2.

$$x'(t)+2x'(t-1)-x(t)-2x(t-1)=0,\ t>0,$$

$$x(t)=e^t,\ -1\le t\le 0$$

problemini Laplace dönüşümü yardımıyla çözelim.

Çözüm.

Öncelikle denklemin her iki tarafını e^{-pt} ile çarpıp $[0,\infty)$ aralığında integral alalım:

$$\int_0^\infty x'(t)e^{-pt}dt + 2\int_0^\infty x'(t-1)e^{-pt}dt - \int_0^\infty x(t)\,e^{-pt} - 2\int_0^\infty x(t-1)e^{-pt}dt = 0$$

Daha sonra kısmi integrasyon ve değişken değiştirme yöntemlerini uygularsak,

$$\int_0^\infty x'(t)e^{-pt}dt = x(t)e^{-pt}|_0^\infty + p\int_0^\infty x(t)\,e^{-pt}dt$$

$$= -1 + p\int_0^\infty x(t)\,e^{-pt}dt,$$

$$\int_0^\infty x'(t-1)e^{-pt}dt = \int_{-1}^\infty x'(t)e^{-p(t+1)}dt$$

$$= \left[e^{-p}\int_{-1}^0 x'(t)e^{-pt}dt + e^{-p}\int_0^\infty x'(t)e^{-pt}dt\right]$$

$$= e^{-p}\left[\int_{-1}^0 e^{(-p+1)t}dt - 1 + p\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt\right]$$

$$= e^{-p}\left[\frac{1}{-p+1} - \frac{e^{p-1}}{-p+1} - 1 + p\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt\right]$$

$$= \frac{e^{-p} - e^{-1}}{-p+1} - e^{-p} + pe^{-p}\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt,$$

$$\int_0^\infty x(t-1)e^{-pt}dt = \int_{-1}^\infty x(t)e^{-p(t+1)}dt = \int_{-1}^\infty e^t e^{-p(t+1)}dt$$

$$= e^{-p}\left[\int_{-1}^{0} e^{t}e^{-pt}dt + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt\right] = e^{-p}\left[\frac{e^{(-p+1)t}}{-p+1}\bigg|_{-1}^{0} + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt\right]$$

$$= e^{-p}\left[\frac{1}{-p+1} - \frac{e^{p-1}}{-p+1} + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt\right] = e^{-p}\left[\frac{1-e^{p-1}}{-p+1} + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt\right]$$

$$= \frac{e^{-p}-2e^{-1}}{-p+1} + e^{-p}\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

olarak buluruz. Bu eşitlikleri denklemde yerlerine yazar ve düzenlersek;

$$-1 + p\int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-pt}dt + \frac{2e^{-p}-2e^{-1}}{-p+1} - 2e^{-p} + 2pe^{-p}\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

$$-\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt - \frac{2e^{-p}-2e^{-1}}{-p+1} - 2e^{-p}\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt = 0,$$

$$(p + 2pe^{-p} - 1 - 2e^{-p})\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt = 1 + 2e^{-p}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt = \frac{(1+2e^{-p})}{(p-1)(1+2e^{-p})} = \frac{1}{p-1}$$

olur. Bu ifadenin ters Laplace dönüşümü alındığında

$$x(t) = e^{t}$$

sonucuna ulaşırız.

5. BÖLÜM

NÜMERİK YÖNTEMLER

Bu bölümde,

$$x'(t) + a(t)x'(t-r) + b(t)x(t) + c(t)x(t-r) = f(t), \;\; 0 < t \leq T \tag{5.1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \;\; -r \leq t \leq 0 \tag{5.2}$$

problemi için sonlu fark metodu kullanılarak bazı çözümler ele alınacaktır.

Özel olarak bu bölümde aşağıdaki şebeke tanımını kullanacağız.

$$\omega_{N_0} = \{t_i = i\tau, i = 1,2,\dots,N_0;\; \tau = T/N_0 = r/N\},$$

$$\omega_{N,p} = \left\{t_i : t_i = r_{p-1} + [i-(p-1)N]\tau\right\}, (p-1)N + 1 \leq i \leq pN,$$

$$\omega_{N_0} = \cup_{p=1}^{m} \omega_{N,p},$$

$$\overline{\omega}_{N_0} = \omega_{N_0} \cup \{0\}, \overline{\omega}_{-N} = \{t_i : t_i = -i\tau, i = -N, -N+1, \dots, 0\}.$$

5.1. Euler Metodu

İlk olarak (5.1)-(5.2) probleminin t_i düğüm noktasındaki denklemini ele alalım.

$$x'(t_i) + a(t_i)x'(t_i - r) + b(t_i)x(t_i) + c(t_i)x(t_i - r) = f(t_i), \;\; 0 < t_i \leq T \tag{5.3}$$

$$x(t_i) = \varphi(t_i), \;\; -r \leq t_i \leq 0 \tag{5.4}$$

Daha sonra $x'(t_i)$ ve $x'(t_i - r)$ ifadelerinin Taylor açılımından faydalanarak ileri fark türevlerini yazalım:

$$x(t_i + \tau) = x(t_i) + \tau x'(t_i) + \frac{\tau^2}{2} x''\left(\xi_i^{(1)}\right), \xi_i^{(1)} \in (t_i, t_i + \tau)$$

$$x'(t_i) = \frac{x(t_i+\tau)-x(t_i)}{\tau} - \frac{\tau}{2}x''\left(\xi_i^{(1)}\right)$$

benzer biçimde,

$$x'(t_i - r) = \frac{x(t_i+\tau-r)-x(t_i-r)}{\tau} - \frac{\tau}{2}x''\left(\xi_i^{(2)}\right), \xi_i^{(2)} \in (t_i - r, t_{i+1} - r) \tag{5.5}$$

yazabiliriz. (5.5) eşitliğindeki hata terimini ihmal edersek,

$$x'(t_i - r) \approx \frac{x(t_{i+1}-r)-x(t_i-r)}{\tau} = \frac{x_{i-N+1}-x_{i-N}}{\tau}$$

olarak alabiliriz. Bu fark türevlerini (5.3) denkleminde dikkate alırsak, (5.1)-(5.2) problemi için

$$y_{i+1} = A_i y_i + B_i, 0 \le i \le N_0 - 1,$$

$$y_i = \varphi_i, -N \le i \le 0,$$

fark yaklaşımını önerebiliriz. Burada

$$A_i = 1 - \tau b_i, B_i = (a_i - \tau c_i)y_{i-N} - a_i y_{i-N+1} + \tau f_i$$

biçimindedir. Şimdi bu fark probleminin çözümünü bulalım. Adım metodu dikkate alındığında, bu problemin çözümü

$$y_i = \begin{cases} y_i^{(1)}, & 0 \le i \le N, \\ y_i^{(2)}, & N \le i \le 2N, \\ \vdots & \\ y_i^{(m)}, & (m-1)N \le i \le mN \end{cases}$$

olacaktır. Birinci adımdaki çözüm için

$${y_i}^{(1)}: \begin{cases} y_{i+1} = A_i y_i + B_i, 0 \le i \le N-1, \\ y_0 = \varphi_0, \end{cases}$$

problemini elde ederiz, Teorem 3.10.'dan

$${y_i}^{(1)} = \varphi_0 \prod_{k=0}^{i-1} A_k + \sum_{m=0}^{i-1}\left(\prod_{k=m+1}^{i-1} A_k\right) B_m^{(1)}$$

olur. Burada

$$B_i^{(1)} = (a_i - \tau c_i)\varphi_{i-N} - a_i\varphi_{i-N+1} + \tau f_i$$

biçimindedir. İkinci adımdaki çözüm de benzer yaklaşımla

$$y_i^{(2)}: \begin{cases} y_{i+1} = A_i y_i + (a_i - \tau c_i) y_{i-N}^{(1)} - a_i y_{i-N+1}^{(1)} + \tau f_i, & N \le i \le 2N-1 \\ y_N = y_N^{(1)}, \end{cases}$$

probleminin çözümü ile bulunabilir. Öyle ki,

$$y_i^{(2)} = y_N^{(1)} \prod_{k=N}^{i-1} A_k + \sum_{m=N}^{i-1} \left(\prod_{k=m+1}^{i-1} A_k \right) B_m^{(2)},$$

$$B_i^{(2)} = (a_i - \tau c_i) y_{i-N}^{(1)} - a_i y_{i-N+1}^{(1)} + \tau f_i$$

olur. Böyle devam edilirse, diğer çözümler de benzer biçimde bulunabilir.

5.2. Runge-Kutta Metodu

İlk olarak (1.1) denklemini

$$x'(t) = F(t, x)$$

biçiminde düzenleyelim. Sonra da

$$F(t, x) = -a(t)x'(t-r) - b(t)x(t) - c(t)x(t-r) + f(t)$$

fonksiyonu için t_i düğüm noktasındaki değerlerini ve fark türevlerini dikkate alırsak

$$F(t_i, y_i) = -a_i y_{t,i-N} - b_i y_i - c_i y_{i-N} + f_i$$

yazabiliriz. Buradan adi diferansiyel denklemler için 2. mertebeden Runge-Kutta metodu kullanılırsa,

$$y_{t,i} = \frac{1}{2}\left[F(t_i, y_i) + F\big(t_i + \tau, y_i + \tau F(t_i, y_i)\big)\right], \; 0 \le i \le N_0 - 1$$

fark denklemi elde edilir. Böylece (1.1)-(1.2) problemi için

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\tau}{2}\left[F(t_i, y_i) + F\big(t_i + \tau, y_i + \tau F(t_i, y_i)\big)\right], 0 \le i \le N_0 - 1,$$

$$y_i = \varphi_i, -N \le i \le 0,$$

fark yaklaşımını önerebiliriz. Şimdi de bu fark problemine adım metodunu uygulayalım. İlk olarak $0 \le i \le N-1$ için

$$y_i^{(1)}: \begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{\tau}{2}\left(K_{1,i}^{(1)} + K_{2,i}^{(1)}\right), 0 \le i \le N-1, \\ y_i = \varphi_i, -N \le i \le 0 \end{cases}$$

problemini yazabiliriz. Burada

$$K_{1,i}^{(1)} = -a_i \frac{\varphi_{i-N+1} - \varphi_{i-N}}{\tau} - b_i y_i - c_i \varphi_{i-N} + f_i,$$

$$K_{2,i}^{(1)} = -a_{i+1} \frac{\varphi_{i-N+1} - \varphi_{i-N}}{\tau} - b_{i+1}\left(y_i + \tau K_{1,i}^{(1)}\right) - c_{i+1}\varphi_{i-N} + f_{i+1}$$

biçimindedir. İkinci adım da ise

$$y_i^{(2)}: \begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{\tau}{2}\left(K_{1,i}^{(2)} + K_{2,i}^{(2)}\right), N \le i \le 2N-1, \\ y_N = y_N^{(1)}, \end{cases}$$

$$K_{1,i}^{(2)} = -a_i y_{t,i-N}^{(1)} - b_i y_i - c_i y_{i-N}^{(1)} + f_i,$$

$$K_{2,i}^{(2)} = -a_{i+1} y_{t,i-N}^{(1)} - b_{i+1}\left(y_i + \tau K_{1,i}^{(2)}\right) - c_{i+1} y_{i-N}^{(1)} + f_{i+1},$$

problemini elde ederiz. Böylece elde edilen fark denklemlerin çözümleri ile yaklaşık sonuçlar elde edilir. Yani ilk iki adımın çözümünü

$$y_i = \begin{cases} y_i^{(1)}, 0 \le i \le N, \\ y_i^{(2)}, N \le i \le 2N, \end{cases}$$

olarak ifade edebiliriz. Diğer adımlar için çözümler benzer biçimde bulunabilir.

5.3. Üstel Katsayılı Fark Metodu

(1.1)-(1.2) problemini $\bar{I} = [0, T]$ aralığında tekrar ele alalım.

$$Lx \coloneqq x'(t) + a(t)x'(t-r) + b(t)x(t) + c(t)x(t-r) = f(t), \ \ 0 < t \le T, \qquad (5.6)$$

$$x(t) = \varphi(t), -r \le t \le 0, \qquad (5.7)$$

burada $a(t)$, $b(t) \ge \beta > 0$, $c(t)$, $f(t)$ ve $\varphi(t)$ yeterince düzgün fonksiyonlar ve $r > 0$ gecikme sabitidir. Ayrıca $I = (0, T] = \cup_{p=1}^{m} I_p$, $I_p = \{t: r_{p-1} < t \le r_p\}$, $1 \le p \le m$ ve $r_s = sr$, $0 \le s \le m$ ve $I_0 = [-r, 0]$, genelliği bozmadan T/r nin tamsayı olduğunu varsayalım. Yani $T = mr$ dir.

Daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı lemmaları verelim.

Lemma 5.1. (Cimen ve Ekinci, 2017) $a, b, c, \ f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^1(I_0)$ olsun. (5.6)-(5.7) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$\|u\|_{\infty, I_p} \le C_p, 1 \le p \le m, \qquad (5.8)$$

$$\|u'\|_{\infty, I_p} \le D_p, 1 \le p \le m, \qquad (5.9)$$

burada

$$C_1 \equiv |\varphi(0)| + \beta^{-1}\left[\|f\|_{\infty,I_1} + \|a\|_{\infty,I_1}\|\varphi'\|_{\infty,I_0} + \|c\|_{\infty,I_1}\|\varphi\|_{\infty,I_0}\right],$$

$$D_1 \equiv \|f\|_{\infty,I_1} + \|a\|_{\infty,I_1}\|\varphi'\|_{\infty,I_0} + \|b\|_{\infty,I_1}C_1 + \|c\|_{\infty,I_1}\|\varphi\|_{\infty,I_0},$$

$$C_p \equiv |\varphi(0)| + \beta^{-1}\left[\|f\|_{\infty,I_p} + \|a\|_{\infty,I_p}D_{p-1} + \|c\|_{\infty,I_p}C_{p-1}\right],$$

$$D_p \equiv \|f\|_{\infty,I_p} + \|a\|_{\infty,I_p}D_{p-1} + \|b\|_{\infty,I_p}C_p + \|c\|_{\infty,I_p}C_{p-1}, p = 2,3,\dots,m$$

biçimindedir.

İspat. İspat p ye göre tümevarım yöntemiyle verilecektir. İlk olarak (5.6) denkleminden

$$x(t)=\varphi(0)e^{-\int_0^t b(s)ds}+\int_0^t F(\xi)e^{-\int_\xi^t b(s)ds}d\xi,$$

$$F(t)=f(t)-a(t)x'(t-r)-c(t)x(t-r)$$

yazabiliriz. Böylece

$$|x(t)|\le|\varphi(0)|e^{-\int_0^t b(s)ds}$$
$$+\int_0^t[|f(\xi)|+|a(\xi)||x'(\xi-r)|+|c(\xi)||x(\xi-r)|]e^{-\int_\xi^t b(s)ds}d\xi$$

$$|x(t)|\le|\varphi(0)|e^{-\beta t}$$
$$+\int_0^t[|f(\xi)|+|a(\xi)||x'(\xi-r)|+|c(\xi)||x(\xi-r)|]e^{-\beta(t-\xi)}d\xi \qquad (5.10)$$

olur. $t\in I_1$ için (5.10) denkleminden

$$|x(t)|\le|\varphi(0)|+\left[\|f\|_{\infty,I_1}+\|a\|_{\infty,I_1}\|\varphi'\|_{\infty,I_0}+\|c\|_{\infty,I_1}\|\varphi\|_{\infty,I_0}\right]\beta^{-1}\left(1-e^{-\beta t}\right)$$
$$\le|\varphi(0)|+\beta^{-1}\left[\|f\|_{\infty,I_1}+\|a\|_{\infty,I_1}\|\varphi'\|_{\infty,I_0}+\|c\|_{\infty,I_1}\|\varphi\|_{\infty,I_0}\right]\equiv C_1.$$

Şimdi (5.6) denkleminden

$$|x'(t)|\le|f(t)|+|a(t)||x'(t-r)|+|b(t)||x(t)|+|c(t)||x(t-r)| \qquad (5.11)$$

yazabiliriz. Lemmanın şartlarını ve bir önceki eşitsizliği dikkate alırsak

$$|x'(t)|\le\|f\|_{\infty,I_1}+\|a\|_{\infty,I_1}\|\varphi'\|_{\infty,I_0}+\|b\|_{\infty,I_1}C_1+\|c\|_{\infty,I_1}\|\varphi\|_{\infty,I_0}\equiv D_1$$

sonucuna ulaşırız. Bu ise $p=1$ için (5.8) ve (5.9) eşitsizliklerini doğrular. İkinci olarak $p=k$ için (5.8) ve (5.9) eşitsizlikleri doğru olsun. Yani

$$C_k\equiv|\varphi(0)|+\beta^{-1}\left[\|f\|_{\infty,I_k}+\|a\|_{\infty,I_k}D_{k-1}+\|c\|_{\infty,I_k}C_{k-1}\right]$$

$$D_k\equiv\|f\|_{\infty,I_k}+\|a\|_{\infty,I_k}D_{k-1}+\|b\|_{\infty,I_k}C_k+\|c\|_{\infty,I_k}C_{k-1}\,.$$

$t\in I_{k+1}$için (5.10) dan

$$|x(t)| \leq |\varphi(0)| + \beta^{-1}\left[\|f\|_{\infty,I_{k+1}} + \|a\|_{\infty,I_{k+1}} D_k + \|c\|_{\infty,I_{k+1}} C_k\right]$$

ve (5.11) den

$$|x'(t)| \leq \|f\|_{\infty,I_{k+1}} + \|a\|_{\infty,I_{k+1}} D_k + \|b\|_{\infty,I_{k+1}} C_{k+1} + \|c\|_{\infty,I_{k+1}} C_k$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur (Cimen ve Ekinci, 2017).

5.3.1. Fark şemasının kurulması

(5.6)-(5.7) probleminin fark yaklaşımı için

$$\tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lx(t)\psi_i(t)dt = \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\psi_i(t)dt\,, 1 \leq i \leq N_0 \tag{5.12}$$

özdeşliğini kullanacağız. Burada $\psi_i(t)$;

$$\psi_i(t) = e^{-\int_t^{t_i} b(s)ds},\ t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

olarak belirlenmiş üstel katsayılı baz fonksiyonudur. Dahası bu fonksiyon

$$-\psi_i{}'(t) + b(t)\psi_i(t) = 0,\ t_{i-1} < t \leq t_i,\ \psi_i(t_i) = 1 \tag{5.13}$$

probleminin çözümüdür.

(5.12) ifadesini yeniden düzenlersek

$$\tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t)\psi_i(t)dt + \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)x'(t-r)\psi_i(t)dt + \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)x(t)\psi_i(t)dt$$

$$+\tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} c(t)x(t-r)\psi_i(t)dt = \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\psi_i(t)dt$$

elde ederiz. Daha sonra (5.13) ü dikkate alıp, ilk iki integrale (3.8) formülünü sırasıyla $n = 1$, $p(t) = \psi_i(t)$ ve $n = 1$, $p(t) = a(t)\psi_i(t)$ alarak kullanırsak;

$$\tau^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t)\psi_i(t)dt = \tau^{-1}\frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_i(t)dt + R^{(1)},$$

$$R^{(1)} = -\tau^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\psi_i{}'(t)\int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(\xi)K_0\,(t,\xi)d\xi,$$

$$\tau^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)x'(t-r)\psi_i(t)dt = \tau^{-1}\frac{x(t_i-r)-x(t_{i-1}-r)}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)\psi_i(t)dt + R^{(2)},$$

$$R^{(2)} = -\tau^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt[a(t)\psi_i(t)]'\int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(\xi-r)K_0\,(t,\xi)d\xi$$

elde ederiz. Son iki integrale (3.7) formülünü sırasıyla $\sigma = 1, n = 1, p(t) = b(t)\psi_i(t)$, ve $\sigma = 1, n = 1, p(t) = c(t)\psi_i(t)$ alırsak

$$\tau^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)x(t)\psi_i(t)dt = \tau^{-1}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)\psi_i(t)dt\right]x(t_i) +$$

$$+\tau^{-1}\frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t-t_i)b(t)\psi_i(t)dt + R^{(3)},$$

$$R^{(3)} = \tau^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} dtb(t)\psi_i(t)\int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(\xi)K_0\,(t,\xi)d\xi.$$

$$\tau^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} c(t)x(t-r)\psi_i(t)dt = \tau^{-1}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} c(t)\psi_i(t)dt\right]x(t_i-r) +$$

$$+\tau^{-1}\frac{x(t_i-r)-x(t_{i-1}-r)}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t-t_i)c(t)\psi_i(t)dt + R^{(4)},$$

$$R^{(4)} = \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dtc(t)\psi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(\xi - r)K_0\,(t,\xi)d\xi$$

elde ederiz. Burada

$$K_0(t,\xi) = T_0(t-\xi) - (t - t_{i-1})\tau^{-1},$$

$$T_s(\lambda) = \frac{\lambda^s}{s!},\ \lambda > 0;\ T_s(\lambda) = 0,\ \lambda \leq 0$$

biçimindedir. Bazı düzenlemeler yaparak

$$\ell x_i \equiv A_i x_{\bar{t},i} + B_i x_{\bar{t},i-N} + C_i x_i + D_i x_{i-N} = F_i + R_i, \quad 1 \leq i \leq N_0,$$

fark denklemini elde ederiz. Burada

$$A_i = \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t)dt + \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i)b(t)\psi_i(t)dt,$$

$$B_i = \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)\psi_i(t)dt + \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i)c(t)\psi_i(t)dt,$$

$$C_i = \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)\psi_i(t)dt, \qquad D_i = \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} c(t)\psi_i(t)dt,$$

$$F_i = \tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\psi_i(t)dt, \qquad R_i = R_i^{(2)} + R_i^{(4)}$$

biçimindedir. Sonuç olarak, (5.6)-(5.7) probleminin çözümü için

$$\ell y_i \equiv A_i y_{\bar{t},i} + B_i y_{\bar{t},i-N} + C_i y_i + D_i y_{i-N} = F_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \tag{5.12}$$

$$y_i = \varphi_i\,, \quad -N \leq i \leq 0 \tag{5.13}$$

fark yaklaşımını önerebiliriz.

5.3.2. Hata analizi

Bu metodun yakınsaklığını incelemek için $z_i = u_i - y_i$, $1 \leq i \leq N_0$ hata fonksiyonundan faydalanacağız. Bunun için öncelikle

$$\ell z_i = R_i,\ 1 \le i \le N_0, \tag{5.16}$$

$$z_i = 0,\ -N \le i \le 0 \tag{5.17}$$

fark problemini inceleyeceğiz.

Lemma 5.2. (Cimen ve Ekinci, 2017) $a \in C^1(\bar{I})$,$b,c,f \in C(\bar{I})$ ve $\varphi \in C^1(I_0)$ olsun. Bu durumda R_i hatası için

$$\|R\|_{\infty,N,p} \le CN^{-1},\ \ 1 \le p \le m$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat.

$$R_i = -\tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\,[a'(t) + a(t)b(t) - c(t)]\psi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi - r)K_0(t,\xi)d\xi$$

hata terimini göz önüne alınırsa,

$$|R_i| \le -\tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\,[|a'(t)| + |a(t)||b(t)| + |c(t)|]\psi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(\xi - r)|d\xi$$

$$\le C\tau^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\,\psi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(\xi - r)|d\xi.$$

Buradan (5.9) ve $0 < \psi_i(t) \le 1$ dikkate alındığında

$$|R_i| \le C\tau$$

olduğu kolayca görülebilir (Cimen ve Ekinci, 2017).

Lemma 5.3. z_i (5.16)-(5.17) probleminin çözümü olsun. O zaman

$$\|z\|_{\infty,N,p} \le C \sum_{k=1}^{p} \|R\|_{\infty,\omega_{N,k}}$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. (5.16)-(5.17) probleminin çözümünden

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_{N,p}} \le \beta^{-1} \sum_{k=1}^{p} \|R\|_{\infty,\omega_{N,k}} Q_{p-k}\,, \quad 1 \le p \le m$$

yazabiliriz. Buradan

$$Q_{p-k} = \begin{cases} 1, \quad k = p, \\ \prod_{s=k+1}^{p} \left(1 + \beta^{-1}\left(\|a\|_{\infty,I_s} + \|c\|_{\infty,I_s}\right)\right), 0 \le k \le p-1 \end{cases}$$

olduğu dikkate alınırsa lemmanın ispatı kolaylıkla görülebilir (Cimen ve Ekinci, 2017). Son olarak problemin yakınsaklık sonucunu aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

Teorem 5.4. x, (5.6)-(5.7) probleminin çözümü ve y, (5.14)-(5.15) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\|x - y\|_{\infty,\omega_{N_p}} \le CN^{-1}$$

ifadesi doğrudur (Cimen ve Ekinci, 2017).

İspat. Lemma 5.2. ve Lemma 5.3. ün sonuçları dikkate alındığında teoremin doğruluğu hemen çıkar (Cimen ve Ekinci, 2017).

6. BÖLÜM

ÖRNEK VE TABLOLAR

Bu bölümde Euler (EM), Runge Kutta (RKM) yöntemleri ve üstel katsayılı fark metodu (ÜKM) kullanılarak bir örnek üzerindeki çözümler incelenmiştir.

Örnek6.1.

$$x'(t) + 2x'(t-1) + 2x(t) + x(t-1) = 0,\ 0 < t \leq 2 \tag{6.1}$$

$$x(t) = e^{-t},\ -1 \leq t \leq 0 \tag{6.2}$$

problemini ele alalım. (6.2) probleminin kesin çözümü Bölüm 4.1 de verilen adım metodu kullanılarak

$$x(t) = \begin{cases} (1-e)e^{-2t} + e^{-(t-1)}, & 0 \leq t \leq 1, \\ (1-e)(1+e^2)e^{-2t} + \\ 3(1-e)(t-1)e^{-2(t-1)} + e^{-(t-2)}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

bulunabilir.

(6.2) probleminin yaklaşık çözümünü Bölüm 5.1'de verilen Euler metodu yardımıyla bulacak olursak ilk iki adımının çözümü,

$$y_i^{(1)} = \frac{(1-2\tau)^i - 1}{2},$$

$$y_i^{(2)} = [\tau(2\tau + i) - 1](1-2\tau)^{i-1}$$

olur. Böylece (6.1)-(6.2) probleminin çözümü

$$y_i = \begin{cases} \dfrac{(1-2\tau)^i - 1}{2}, & 0 \leq i \leq N, \\ [\tau(2\tau + i) - 1](1-2\tau)^{i-1}, & N+1 \leq i \leq 2N \end{cases}$$

biçiminde olur. Bölüm 5.2'de verilen Runge-Kutta metoduyla Euler metoduna benzer şekilde çözüm bulunabilir. Son olarak Bölüm 5.3'te verilen üstel katsayılı fark metodunu kullanacak olursak,

$$\psi_i(t) = e^{-2(t_i - t)}, t_{i-1} \leq t \leq t_{i,}$$

baz fonksiyonu ve

$$A_i = e^{-2\tau}, \;\; B_i = \frac{3}{4}\tau^{-1}(1 - e^{-2\tau}) + \frac{1}{2}e^{-2\tau},$$

$$C_i = \tau^{-1}(1 - e^{-2\tau}), \;\; D_i = \frac{1}{2}\tau^{-1}(1 - e^{-2\tau}), \;\; F_i = 0$$

katsayılarını kullanarak çözüme kolaylıkla ulaşabiliriz.

Kullandığımız bu metotlarla elde ettiğimiz sonuçlar ayrıntılı olarak aşağıdaki tablolarda bulunabilir. Bu tablolardaki $x(t_i)$, $y(t_i)$ ve $e(t_i)$ sırasıyla, t_i düğüm noktalarındaki kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve kesin hatayı ifade etmektedir.

Tablo 1. $N = 64$ için nümerik sonuçlar (EM)

t_i	$x(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.000	1.0	1.0	0.0
0.125	1.0606761	1.0592878	0.0013883
0.250	1.0748094	1.0719548	0.0028546
0.375	1.0565871	1.0523737	0.0042134
0.500	1.0166007	1.0112331	0.0053676
0.625	0.9626954	0.9564181	0.0062773
0.750	0.9006249	0.8936871	0.0069378
0.875	0.8345558	0.8271904	0.0073654
1.000	0.7674558	0.7598685	0.0075873
1.125	0.3777458	0.3693908	0.0083550
1.250	0.1521213	0.1454377	0.0066836
1.375	0.0336248	0.0294750	0.0041498
1.500	-0.0171283	-0.0187425	0.0016142
1.625	-0.0269846	-0.0264787	0.0005059
1.750	-0.0139138	-0.0118568	0.0020570
1.875	0.0103401	0.0133738	0.0030337
2.000	0.0383519	0.0418578	0.0035059

Tablo 2. $N = 128$ için nümerik sonuçlar (EM)

t_i	$x(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.000	1.0	1.0	0.0
0.125	1.0606761	1.0599842	0.0006918
0.250	1.0748094	1.0733875	0.0014219
0.375	1.0565871	1.0544885	0.0020986
0.500	1.0166007	1.0139270	0.0026737
0.625	0.9626954	0.9595679	0.0031275
0.750	0.9006249	0.8971673	0.0034576
0.875	0.8345558	0.8308839	0.0036719
1.000	0.7674558	0.7636720	0.0037839
1.125	0.3777458	0.3735892	0.0041565
1.250	0.1521213	0.1487948	0.0033265
1.375	0.0336248	0.0315548	0.0020700
1.500	-0.0171283	-0.0179397	0.0008114
1.625	-0.0269846	-0.0267420	0.0002426
1.750	-0.0139138	-0.0128982	0.0010156
1.875	0.0103401	0.0118444	0.0015042
2.000	0.0383519	0.0400945	0.0017426

Tablo 3. Maksimum hata değerleri (EM)

N	$e(t_i)$	N	$e(t_i)$
32	0.0171169	256	0.0021043
64	0.0084742	512	0.0010509
128	0.0042185	1024	0.0005252

Tablo 4. $N = 64$ için nümerik sonuçlar (RKM)

t_i	$x(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.000	1.0	1.0	0.0
0.125	1.0606761	1.0584711	0.0022050
0.250	1.0748094	1.0711520	0.0036574
0.375	1.0565871	1.0520310	0.0045561
0.500	1.0166007	1.0115488	0.0050519
0.625	0.9626954	0.9574367	0.0052587
0.750	0.9006249	0.8953629	0.0052620
0.875	0.8345558	0.8294300	0.0051259
1.000	0.7674558	0.7625580	0.0048978
1.125	0.3777458	0.3783676	0.0006219
1.250	0.1521213	0.1555844	0.0034631
1.375	0.0336248	0.0382249	0.0046001
1.500	-0.0171283	-0.0124291	0.0046993
1.625	-0.0269846	-0.0227754	0.0042091
1.750	-0.0139138	-0.0104891	0.0034247
1.875	0.0103401	0.0128746	0.0025345
2.000	0.0383519	0.0400055	0.0016535

Tablo 5. $N = 128$ için nümerik sonuçlar (RKM)

t_i	$x(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.000	1.0	1.0	0.0
0.125	1.0606761	1.0595743	0.0011018
0.250	1.0748094	1.0729804	0.0018290
0.375	1.0565871	1.0543070	0.0022801
0.500	1.0166007	1.0140707	0.0025301
0.625	0.9626954	0.9600600	0.0026354
0.750	0.9006249	0.8979861	0.0026388
0.875	0.8345558	0.8319837	0.0025721
1.000	0.7674558	0.7649967	0.0024591
1.125	0.3777458	0.3780424	0.0002967
1.250	0.1521213	0.1538417	0.0017204
1.375	0.0336248	0.0359196	0.0022948
1.500	-0.017128	-0.0147777	0.0023507
1.625	-0.0269846	-0.0248736	0.0021110
1.750	-0.0139138	-0.012191	0.0017228
1.875	0.0103401	0.0116203	0.0012802
2.000	0.0383519	0.0391929	0.0008409

Tablo 6. Maksimum hata değerleri (RKM)

N	$e(t_i)$	N	$e(t_i)$
32	1.05056E-2	256	1.32556E-3
64	5.28133E-3	512	6.63212E-4
128	2.64763E-3	1024	3.31714E-4

Tablo 7. $N = 64$ için nümerik sonuçlar (ÜKM)

t_i	$x(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.000	1.0	1.0	0.0
0.125	1.0606761	1.0606932	1.72045E-5
0.250	1.0748094	1.0748380	2.85818E-5
0.375	1.0565871	1.0566228	3.56584E-5
0.500	1.0166007	1.0166403	3.95953E-5
0.625	0.9626954	0.9627367	4.12719E-5
0.750	0.9006249	0.9006663	4.13515E-5
0.875	0.8345558	0.8345961	4.03314E-5
1.000	0.7674558	0.7674944	3.85820E-5
1.125	0.3777458	0.3777209	2.48409E-5
1.250	0.1521213	0.1520628	5.85253E-5
1.375	0.0336248	0.0335518	7.29434E-5
1.500	-0.0171283	-0.0172037	7.53404E-5
1.625	-0.0269846	-0.0270552	7.06556E-5
1.750	-0.0139138	-0.0139760	6.21928E-5
1.875	0.0103401	0.0102880	5.21069E-5
2.000	0.0383519	0.0383102	4.17544E-5

Tablo 8. $N = 128$ için nümerik sonuçlar (ÜKM)

t_i	$x(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.000	1.0	1.0	0.0
0.125	1.0606761	1.0606804	4.30109E-6
0.250	1.0748094	1.0748166	7.14539E-6
0.375	1.0565871	1.0565960	8.91453E-6
0.500	1.0166007	1.0166106	9.89873E-6
0.625	0.9626954	0.9627057	1.03179E-5
0.750	0.9006249	0.9006353	1.03378E-5
0.875	0.8345558	0.8345659	1.00828E-5
1.000	0.7674558	0.7674655	9.64542E-6
1.125	0.3777458	0.3777396	6.20948E-6
1.250	0.1521213	0.1521067	1.46301E-5
1.375	0.0336248	0.0336066	1.82345E-5
1.500	-0.0171283	-0.0171472	1.88337E-5
1.625	-0.0269846	-0.0270022	1.76626E-5
1.750	-0.0139138	-0.0139294	1.55470E-5
1.875	0.0103401	0.0103271	1.30257E-5
2.000	0.0383519	0.0383415	1.04377E-5

Tablo 9. Maksimum hata değerleri (ÜKM)

N	$e(t_i)$	N	$e(t_i)$
32	3.0235E-4	256	4.7224E-6
64	7.5566E-5	512	1.1806E-6
128	1.8890E-5	1024	2.9515E-7

Tablo 10. Metotlar için maksimum hata karşılaştırması

N	$e(t_i)$ (EM)	$e(t_i)$ (RKM)	$e(t_i)$ (ÜKM)
32	0.0171169	0.0105056	3.024E-4
64	0.0084742	0.0052813	7.557E-5
128	0.0042185	0.0026476	1.889E-5
256	0.0021043	0.0013256	4.722E-6
512	0.0010509	0.0006632	1.181E-6
1024	0.0005252	0.0003317	2.952E-7

7. BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada birçok bilimsel alanda göze çarpan birinci mertebeden neutral delay diferansiyel denklemin kesin ve yaklaşık çözümleri incelendi. Euler ve Runge-Kutta yöntemlerinin yanı sıra üstel katsayılı fark şeması kullanılarak nümerik çözümler geliştirildi. Metotlar bir örnek üzerinde test edildi. Buna göre, her bir metot için $N = 64$ ve $N = 128$ kullanılarak çeşitli düğüm noktalarındaki kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve kesin hata değerlerinin yanı sıra, $N = 64, 128, \ldots, 1024$ kullanılarak kesin hata değerleri ayrıca listelendi. Tablolardaki bu sonuçlar yöntemlerin doğruluğunu ve tutarlılığını göstermektedir. Son olarak Tablo 10.'da problemin çözümünde kullanılan metotlar karşılaştırıldı. Buradan üstel katsayılı metodun sonuçları, Euler ve Runge-Kutta metotlarına göre çok daha iyi olduğu söylenebilir.

Elde edilen teorik ve nümerik sonuçlar lineer olmayan delay ve neutral delay problemlerin çözümü için yol gösterici niteliktedir.

KAYNAKÇA

Ahmedov, Q., Hasanov, K., Yakubov, M. (1978). *Adi diferansiyel denklemler*. Bakü: Maarif.

Amirali, G. & Duru, H. (2002). *Nümerik analiz*. Pegema Yayıncılık, Ankara.

Baker, C. T. H., Bocharov, G. A., Paul, C. A. H., Rihan, F. A. (1998). Modelling and analysis of time-lags in some basic patterns of cell proliferation, *J. Math. Biol.*, 37, 341-371.

Baker, C. T. H., Bocharov, G. A., Rihan, F. A. (2008). Neutral delay differential equations in the modelling of cell growth, *Applied Math. Group Research Reports, University of Chester.* 1, 1-29.

Bellen, A. & Guglielmi, N. (2009). Solving neutral delay differential equations with state-dependent delays, *J. Comput. Appl. Math*, 229, 350-362.

Bellen, A. & Zennaro, M. (2003). *Numerical methods for delay differential equations*. Oxford University Press, Oxford.

Bellman, R. E. & Cooke, K. L. (1963). *Differential-difference equations.* New York: Academic Press.

Bereketoğlu, H. & Kutay, V. (2012). *Fark denklemleri.* Ankara: Gazi Kitabevi.

Chukwu, E. N. (1992). *Stability and time-optimal control of hereditary systems.* New York: AcademicPress.

Cimen, E. & Ekinci, Y. (2017). Numerical method for a neutral delay differential problem, *Int. J. Math. Comput. Science,* 1, 1-11.

Driver, R. D. (1977). *Ordinary and delay differential equations.* New York: Springer-Verlag.

El’sgolts, L. E. (1966). *Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments.* San Francisco: Holden-Day Inc.

El'sgolts, L. E. & Norkin, S. B. (1973). *Introduction to the theory and application of differential equations, with deviating arguments*. Academic Press, New York.

Erneux, T. (2009). *Applied delay differential equations.* New York: Springer.

Foley, C. & Mackey, M. C. (2009). Dynamic hematological disease: a review, *J. Math. Biol.*, 58, 285-322.

Gan, S. (2009). Dissipativity of θ-methods for nonlinear delay differential equations of neutral type, *Appl. Numer. Math*., 59, 1354-1365.

Getto, P. & Waurick, M. (2016). A differential equation with state-dependent delay from cell population biology. *J. Differential Equations*, 260, 6176-6200.

Gopalsamy, K. (1992). *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Guo, S. & Ma, W. (2016). Global behavior of delay differential equations model of HIV infection with apoptosis. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B,* 21, 103-119.

Guglielmi, M. & Hairer, E. (2016). Path-regularization of linear neutral delay differential equations with several delays, *J. Comput. Appl. Math.*, 292, 785-794.

Hadeler, K. P. (2008). Neutral delay equations from and for population dynamics, *EJQTDE*, 11, 1-18.

Hairer, E., Norsett, S. P., Wanner, G. (2008). *Solving ordinary differential equations I,* New York: Springer.

Halas, M. & Anguelova, M. (2013). When retarded nonlinear time-delay systems admit an input-output representation of neutral type. *Automatica*, 49, 561-567.

Jackiewicz, Z. (1987). Existence and uniqueness of solutions of neutral delay-differential equations with state dependent delays, *Funkcial. Ekvac.*, 30, 9-17.

Kolmanovskii, V. & Myshkis, A. (1999). *Introduction to the theory and applications of functional differential equations.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kuang, Y. (1993). *Delay differential equations with applications in population dynamics.* New York: Academic Press.

Kuang, Y. & Feldstein, A. (1991). Boundedness of solutions of a nonlinear nonautonomous neutral delay equation, *J. Math. Anal. Appl,* 156, 293-304.

Liu, Z., Kang, S. M., Ume, J. S. (2010). Existence of bounded nonoscillatory solutions of first-order nonlinear neutral delay differential equations, *Comput.Math.Appl*, 59, 3535-3547.

Liz, E. & Röst, G. (2013). Global dynamics in a commodity market model. *J. Math. Anal. Appl,* 398, 707-714

Martina, B. & Veronika, N. (2015). The use of functional differential equations in the model of the meat market with supply delay. *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* 213, 74-79.

Palaniswami, S. C. (1995). Existence of asymptotic solutions of second order neutral differential equations with multiple delays, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 8, 77-83.

Rihan, F. A. (2010). Adjoint sensitivity analysis of neutral delay differential models, *J. Numer. Anal. Industrial Appl. Math.*, 5, 95-101.

Ross, S. L. (1984). *Differential equations 3rd ed.* Canada: John Wiley & Sons.

Villasana, M. & Radunskaya, A. (2003). A delay differential equation model for tumor growth. *J. Math. Biol.*, 47, 270-294.

Sedaghat, S., Nemati, S., Ordokhani, Y. (2015). Application of the hybrid functions to solve neutral delay functional differential equations, *Int. J. Comput. Math*., 1-12.

Su, H., Li, W., Ding, X. (2013). Preservation of Hopf bifurcation for neutral delay-differential equations by θ-methods, *J. Comput. Appl. Math.*, 248, 76-87.

Wang, Q. (2015). Numerical oscillation of neutral logistic delay differential equation, *Appl. Math. Comput.*, 258,49-59.

Zeng, X., Xiong, Z., Wang, C. (2016). Hopf bifurcation for neutral-type neural network model with two delays, *Appl. Math. Comput.*, 282,17-31.

Zhang, W., Feng, W., Yan, J., Song, J. (2005). Existence of nonoscillatory solutions of first-order linear neutral delay differential equations, *Comput. Math. Appl.*, 49, 1021-1027.

ÖZ GEÇMİŞ

1989 yılında Bitlis'in Hizan ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bitlis'te tamamladı. Yükseköğrenimine, 2009 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde başladı ve 2014 yılında mezun oldu.Yine 2014 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Van İpekyolu-Pakistan Türkiye Dostluğu Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'ne matematik öğretmeni olarak atandı. Halen bu okulda görevine devam etmektedir.