



Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Matematik Eğitimi Bilim Dalı

**PARAMETREYE BAĞLI DELAY DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

Murat Bayram Güven

Yüksek Lisans Tezi

Van, 2017

PARAMETREYE BAĞLI DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Murat Bayram Güven

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Erkan Çimen

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi Bilim Dalı

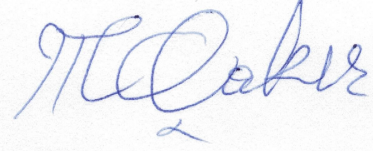
Yüksek Lisans Tezi

Van, 2017

KABUL VE ONAY

Murat Bayram Güven tarafından hazırlanan "Parametreye Bağlı Delay Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri" başlıklı bu çalışma, 21/06/2017 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

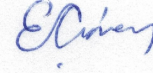
Prof. Dr. Musa Çakır (Başkan)



Yrd. Doç. Dr. Muaz Seydaoğlu



Yrd. Doç. Dr. Erkan Çimen (Danışman)



Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Fuat Tanhan

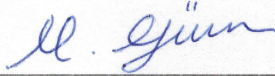
Enstitü Müdürü

BİLDİRİM

Hazırladığım tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım:

- Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- Tezim sadece Yüzüncü Yıl Üniversitesi yerleşkesinden erişime açılabilir.
- Tezimin 3 Yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir.

21/06/2017



Murat Bayram Güven

TEŞEKKÜR

Tezin her aşamasında yanımda olan, desteğini esirgemeyerek en iyi şekilde rehberlik eden saygıdeğer danıőmanım Yrd.Doç. Dr. Erkan imen'e,

Tüm zorlukları benimle göğüsleyen, hayatımın her evresinde bana destek olan kıymetli babam Yılmaz Güven'e, değerli annem Gülenem Güven'e, birbirinden çok sevdiğim ablalarım Müzeyyen Ünal'a, Mübeyye Güven Tav'a ve Kafiye Güven'e,

Çalıőmalarım boyunca beni yalnız bırakmayan arkadaşım Barıő etinkaya'ya sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Murat Bayram Güven

ÖZET

GÜVEN, Murat Bayram. *Parametreye Bağlı Delay Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Van, 2017.

Bu çalışmada parametreye bağlı birinci mertebeden delay diferansiyel denklem için sınır değer problemi ele alınmaktadır. Bu problemin çözümü için hem analitik hem de nümerik yöntemler sunulmuştur. Lineer problemin kesin çözümü için Bellman'ın adımlar metodu, lineer ve lineer olmayan problemin yaklaşık çözüm için ise sonlu fark metodu incelenmektedir. Ayrıca, örneklerle elde edilen sonuçlar tablolarda gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler

Delay diferansiyel denklem, Kontrol parametresi, Adımlar metodu, Sonlu fark metodu

ABSTRACT

GÜVEN, Murat Bayram. *Approximate Solutions of Delay Differential Equations with Parameter*, MSc Thesis, Van, 2017.

This study deals with the boundary value problem for a first order delay differential equation with parameter. To solve this problem both analytically and numerically, some methods is presented. We analyze Bellman's steps method for exact solution of the linear problem and finite difference method for approximate solution of the linear and nonlinear problem. Furthermore, computational results obtained by using the methods are shown with numerical examples which is displayed in Tables.

Key Words

Delay differential equation, Control parameter, Steps method, Finite difference method.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
BİLDİRİM	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
KISALTMALAR DİZİNİ	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
1. BÖLÜM : GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ	1
2. BÖLÜM : BAZI MODELLER	4
2.1. Popülasyon Dinamiği Modeli	4
2.2. Epidemiyolojik Model	4
2.3. Elektrik Devre Modeli	5
2.4. Rüzgar Tünel Modeli	5
3. BÖLÜM : TEMEL TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER	7
4. BÖLÜM : DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLER	9
4.1. Adımlar Metodu	9
5. BÖLÜM : PARAMETREYE BAĞLI DELAY DENKLEMLER	13
6. BÖLÜM : YAKLAŞIK YÖNTEMLER	19
6.1. Lineer Problem	19
6.2. Euler Metodu	19
6.3. Runge-Kutta Metodu	24

6.4. Lineer Olmayan Problem	26
7. BÖLÜM : ÖRNEKLER VE TABLOLAR	29
8. BÖLÜM : TARTIŞMA VE SONUÇ	37
KAYNAKÇA	38
ÖZGEÇMİŞ	41



KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	Anlamı
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
r	Gecikme parametresi
λ	Kontrol parametresi
u	Problemin kesin çözümü
y	Problemin yaklaşık çözümü
$e(t_i)$	t_i düğüm noktasındaki mutlak hata
ω	Şebeke
N	Şebeke elemanlarının sayısı

TABLULAR DİZİNİ

Tablo 1. $N = 32$ için nümerik sonuçlar (EM)

Tablo 2. $N = 64$ için nümerik sonuçlar (EM)

Tablo 3. Maksimum hata değerleri (EM)

Tablo 4. $N = 32$ için nümerik sonuçlar (RKM)

Tablo 5. $N = 64$ için nümerik sonuçlar (RKM)

Tablo 6. Maksimum hata değerleri (RKM)

Tablo 7. Maksimum hata değerleri (EM) ve (RKM)

Tablo 8. $N = 32$ için nümerik sonuçlar (Örnek 6.2.)

Tablo 9. $N = 64$ için nümerik sonuçlar (Örnek 6.2.)

Tablo 10. Maksimum hata değerleri (Örnek 6.2.)

1. BÖLÜM

GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Delay diferansiyel denklemler tıp, biyoloji, fizik, kimya, mühendislik, ekonomi gibi bilimsel ve teknik alandaki uygulamalarda model denklemler olarak ortaya çıkmaktadır (Foley ve Mackey, 2009; Liz ve Röst, 2013; Martina ve Veronika, 2015; Getto ve Waurick, 2016; Guo ve Ma, 2016). Özellikle enzim kinetiği, enfeksiyon hastalıkları ve immünoloji alanlarındaki matematiksel modellerde karşımıza çıkmaktadır (Hairer ve ark., 2008).

Bellman ve Cooke (1963) tarafından birinci mertebeden denklem için aşağıdaki tanımı verilerek bir sınıflama yapılmıştır.

$$a_0(t)u'(t) + a_1(t)u'(t - \tau) + b_0(t)u(t) + b_1(t)u(t - \tau) = f(t), \tau > 0$$

denklemleri verilsin. Bu denklem; eğer $a_0(t) \neq 0$ ve $a_1(t) = 0$ ise gecikmeli (retarded) tip diferansiyel denklem, $a_0(t) \neq 0$ ve $a_1(t) \neq 0$ ise nötral (neutral) tip diferansiyel denklem, $a_0(t) = 0$ ve $a_1(t) \neq 0$ ise advanced tip diferansiyel denklem olarak adlandırılır. $a_0(t) = 0$ ve $a_1(t) = 0$ ise bu kez denklem fark denklemi halini alır. $b_0(t) = 0$ ve $b_1(t) = 0$ ise denklem bir dönüşümle fark denkleme indirgenebilir. Son olarak $a_0(t) = b_0(t) = 0$ veya $a_1(t) = b_1(t) = 0$ ise denklem, adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu tanımı göz önünde bulundurulursa aşağıdaki denklemler, delay parametresi içeren diferansiyel denklemlere örnek olarak verilebilir (El'sgolts, 1966).

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)); \tau > 0,$$

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)); \tau_1, \tau_2 > 0,$$

$$x''(t) = f\left(t, x(t), x'(t), x(t - \tau(t))\right); \tau(t) > 0,$$

$$x''(t) = f\left(t, x\left(\frac{t}{2}\right), x'\left(\frac{t}{2}\right), x(t), x'(t)\right); t > 0.$$

Yukarıdaki denklemde $a_0(t) \neq 0$, $a_1(t) = 0$, $b_0(t) \neq 0$, $b_1(t) \neq 0$ ve $f(t) = g(t, \lambda)$ olarak alındığında, delay diferansiyel denklemin özel bir hali olan parametreye bağlı delay diferansiyel denkleme dönüşür.

Parametreye bağlı delay diferansiyel denklemler daha çok kontrol teorisi, popülasyon dinamiği, epidemiyoloji, kimyasal kinetik gibi alanlardaki uygulamalarda göze çarpmaktadır (Baker ve Rihan, 1999; Kolmanovskii ve Myshkis, 1999; Nagy ve ark., 2001; Erneux, 2009; Brauer ve Chavez, 2012). Jankowski, (1990); Liu ve Li, (2004); Hartung ve ark., (2006) parametreye bağlı delay diferansiyel denklemlerin çözümünün varlık, teklik ve çözümlerin kararlılığı üzerine çalışmalar yapmışlardır. Banks ve Daniel, (1983), Hartung, (2001), Ahmed ve ark., (2006), Mehrkanoon ve ark., (2014), parametre içeren delay diferansiyel denklemler için bazı klasik yaklaşık yöntemler kullanarak çözüm önerileri sunmuşlardır.

Dahası parametreye bağlı delay diferansiyel denklemler epidemiyoloji teorisindeki bir çok model problemde yer almaktadır. Epidemiyoloji teorisinde geçen bu denklemlere göz atılırsa popülasyonun durumunu yorumlamak için λ parametresine bakılır. λ , popülasyonun kontrol parametresi olarak iş görmektedir. $\lambda < 0$ olduğunda küçülen bir popülasyon olduğu, $\lambda > 0$ olduğunda ise büyüyen bir popülasyon olduğu yorumu yapılabilir (Brauer ve Chavez, 2012).

Yapılan literatür taramasında, parametreye bağlı delay diferansiyel denklemlerin çözümleri için az sayıda çalışma olduğu görülmüştür. Bu tip denklemlerin çözümleri için daha çok kararlılık analizi üzerinde durulmakta veya asimptotik yaklaşımlar verilmekte, nümerik çalışmalara pek rastlanmamaktadır.

Bu çalışmada fen ve mühendislik bilimlerinde sık rastlanan denklemlerden biri olan,

$$u'(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t - r) = f(t, \lambda), \quad 0 < t < T \quad (1.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0; \quad u(T) = A \quad (1.2)$$

parametreye bağlı delay diferansiyel denkleminin çözümleri incelenecektir. Burada $a(t)$, $b(t) \in C[0, T]$, $\varphi(t) \in C[-r, 0]$, $f(t, \lambda) \in C^1[0, T] \times \mathbb{R}$, A reel sabit, λ reel parametre ve $r > 0$ gecikme sabitidir.

Yapılan araştırmalarda, gecikmeli diferansiyel denklemlerle alakalı çalışmalar çok fazla olmasına rağmen parametreye bağlı delay diferansiyel denklemlere çok az rastlanmaktadır. Bu tür problemlerin kesin çözümünü bulmak her zaman mümkün olmamaktadır. Bu nedenle nümerik yaklaşımlarla çözümler sunmak önem kazanmaktadır.

Bu çalışmada birinci mertebeden parametreye bağlı delay diferansiyel denklemin çözümlerini araştıracaağız. (1.1)-(1.2) problemi λ parametresine göre lineer ve nonlinear olarak inceleyeceğiz. Lineer problemin çözümü için kesin ve yaklaşık yöntemler verirken, nonlinear problemin sadece yaklaşık çözümünü araştıracaağız. Kesin özm için Bellman'ın adım metodunu, yaklaşık çözümler için ise sonlu fark metodunu kullanacağız. Lineer problem için düzgün şebekede Euler ve Runge-Kutta metotlarını, nonlinear problem için yine düzgün şebekede fark denklemler için quasilineerizasyon metodunu kullanarak çözümler bulacağız. Daha sonra kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve yaklaşım hatalarını inceleyeceğiz. Ayrıca elde edilecek sonuçların doğruluğu çeşitli örneklerle desteklenecektir.

2. BÖLÜM

BAZI MODELLER

Bu bölümde parametreye bağlı delay diferansiyel denklemlerle ifade edilen bazı model denklemler incelenecektir.

2.1. Popülasyon Dinamiği Modeli

Besin için mücadele eden popülasyon türleri için Fridman (2014)

$$x'(t) = \gamma[1 - K^{-1}x(t-h)]x(t), \quad \gamma > 0, K > 0, h \geq 0,$$

lojistik modelini önermektedir. Burada $x(t)$ popülasyon miktarını ve h besin kaynaklarının üretim zamanını ifade etmektedir. γ sabiti üreme ile ilgili olup doğum ve ölüm oranları arasındaki farkı temsil eder, K ise ortalama popülasyon sayısıdır.

2.2. Epidemiyolojik Model

Biyolojik süreçlerin ve salgın hastalıkların altında yatan mekanizmaları anlamak, klinik açıdan ilgili tedavi stratejileri tasarlayan sağlık çalışanları için bir zorluk teşkil etmektedir. Bu mekanizmalar salgın hastalıklar ve hastalıkları dinamik süreçler olarak göz önüne alarak açığa çıkarılabilir.

Dolaşımdaki hücre popülasyonunun hematoloji dinamik modeli

$$x'(t) = -\lambda x(t) + G[x(t-\tau)],$$

ile ifade edilebilir. Burada x dolaşımdaki hücre popülasyonunu, λ hücre kaybı oranını ve G monoton fonksiyonunu önceki bölmeden gelen hücrelerin akışını ifade etmektedir (Fridman, 2014).

2.3. Elektrik Devre Modeli

Bir elektrik devre modeli olarak

$$x'(t) = y(t) + u_1(t)$$

$$y'(t) = -\frac{R}{L}y(t) - \frac{q}{L}g(y(t-h)) - \frac{1}{cL}x(t) + u_2(t)$$

verilebilir. Burada $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ fonksiyonları devrenin akım dalgalarını dengeleyen konumundaki kontrol aygıtlarını ifade etmektedir. $x(t)$ ve $y(t)$, t anındaki akımları, q kapasitans yükünü ifade etmektedir. c, L, R sabitleri sırasıyla devrenin t anındaki kapasitansını, indüktansını ve direncini ifade etmektedir (Chukwu, 1992).

2.4. Rüzgar Tünel Modeli

Bir hava aracının kontrol tasarımı gecikmeli denklemlerle anlamlandırılmaktadır. Örneğin şu anda NASA Langley Araştırma Merkezinde geliştirilmekte olan National Transonic Facility (NTF) olarak bilinen yüksek hızlı kapalı hava rüzgar tünelinin kontrolünde

$$x'_1(t) = -ax_1(t) + akx_2(t-h) + k_1u_1(t),$$

$$x'_2(t) = x_3(t) + k_2u_2(t),$$

$$x'_3(t) = -w^2x_2(t) - 2\xi wx_3 + w^2u_3(t),$$

modeli önerilmektedir. Burada u_1, u_2, u_3 , $a = 1/1.964$, $k = 0.117$, $w = 6$, $\xi = 1.6$ ve $K > 0$, k_1, k_2 , sabitlerdir. x_1, x_2, x_3 seçilen bir çalışma noktasındaki sapmaları temsil etmektedir, öyle ki x_1 Mach sayısı, x_2 sürücü fanındaki hareket konum açısı, x_3 hareket hızıdır. u_1, u_2, u_3 ise kontrol aygıtlarıdır (Chukwu, 1992).



3. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER

Burada, bundan sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı notasyonlar, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$\bar{\Omega} = [0, T]$ aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına bir şebeke denir. Bu şebeke tanımlanmış fonksiyona ise şebeke fonksiyonu denir.

Düğümler eşit aralıkta iseler

$$\bar{\omega}_h = \{t_i | t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; h = T/N\}$$

ifadesine $\bar{\Omega}$ aralığındaki düzgün şebeke denir. h sabitine şebeke adımı denir.

Bu şebekede tanımlanmış $u_i \equiv u(t_i)$ fonksiyonuna t_i düğüm noktasındaki şebeke fonksiyonu denir (Amirali, Duru, 2002).

Tanım 3.2. Fark Türevleri

a) $\bar{\Omega}$ aralığındaki $u(t)$ fonksiyonunun düzgün şebeke için fark türevlerinden birisi aşağıdaki gibidir (Amirali, Duru, 2002).

$$u_{t,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

ifadesine birinci mertebeden ileri fark türevi denir.

b) $\bar{\Omega}$ aralığındaki $u(t)$ fonksiyonunun düzgün şebeke için fark türevlerinden birisi aşağıdaki gibidir (Amirali, Duru, 2002).

$$u_{\bar{t},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi denir.

Teorem 3.3.

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (3.3)$$

fark denklemi ve

$$y_n = y_0 \quad (3.4)$$

başlangıç koşulundan meydana gelen problemi ele alalım. Burada $a(n)$ ve $g(n)$ $n \geq n_0$ -da tanımlı reel değerli fonksiyonlar olup her $n \geq n_0$ için $a(n) \neq 0$ olsun.

Bu durumda (3.3) ve (3.4) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y_n = y_0 \prod_{k=n_0}^{n-1} a(k) + \sum_{m=n_0}^{n-1} \left(\prod_{k=m+1}^{n-1} a(k) \right) g(m)$$

biçimindedir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

4. BÖLÜM

DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanacağımız delay diferansiyel denklemler için adımlar metodunu inceleyeceğiz.

4.1. Adımlar Metodu

Bellman'ın adıyla özdeşleşen yöntem şu şekildedir:

Varsayalım ki,

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad t \geq t_0 \quad (4.1)$$

denkleminin

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} = [t_0 - \tau, t_0] \quad (4.2)$$

şartını sağlayan çözümünü bulmamız istensin; burada $\tau > 0$ sabit gecikmedir, $\varphi_0(t)$ fonksiyonu E_{t_0} parçasında, $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonu ise $G = \{t \geq t_0, -\infty < u_i < +\infty, i = 1, 2\}$ kümesinde süreklidir.

Öncelikle (4.1)-(4.2) probleminin $I_1 = [t_0, t_0 + \tau]$ parçasında çözümünü bulalım. Açık ki, $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ olduğunda, $t_0 - \tau \leq t - \tau \leq t_0$. Ona göre $t \in I_1$ için $u(t - \tau) = \varphi_0(t - \tau)$ olur ve alınan problem

$$u'(t) = f(t, u, \varphi_0(t - \tau)) \quad (4.3)$$

adi diferansiyel denkleminin

$$u(t_0) = \varphi_0(t_0) \quad (4.4)$$

şartını sağlayan çözümünü bulma problemine dönüşür. Burada $g_0(t, u) = f(t, u, \varphi_0(t - \tau))$ fonksiyonu $G_0 = \{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau; -\infty < u < +\infty\}$ kümesinde sürekli olduğundan, (4.3)-(4.4) probleminin belirli $[t_0, t_0 + \alpha]$, ($0 < \alpha \leq \tau$) parçasında belirlenmiş olan hiç olmazsa bir çözümü vardır.

Varsayalım ki, $\alpha < \tau$ olduğunda çözüm I_1 parçasına devam ettirilendir. Devam ettirilen çözüm $\varphi_1(t)$ ile gösterelim ve (4.1)-(4.2) probleminin $I_2 = [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ parçasında çözümü bulunur. Bu parçada $x(t - \tau) = \varphi_1(t - \tau)$ olduğundan, aranan problem

$$u'(t) = f(t, u, \varphi_1(t - \tau)) \quad (4.5)$$

adi diferansiyel denkleminin

$$u(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau) \quad (4.6)$$

şartını sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür. Burada $g(t, u) = f(t, u, \varphi_1(t - \tau))$ fonksiyonu $G_1 = \{t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau; -\infty < x < +\infty\}$ bölgesinde sürekli olduğundan, (4.5)-(4.6) probleminin çözümü vardır.

Varsayalım ki, (4.5)-(4.6) probleminin $\varphi_2(t)$ çözümü I_2 'de belirlenmiştir. Orda $I_3 = [t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$ parçasında $x(t - \tau) = \varphi_2(t - \tau)$ olur ve bu parçada aranan problemin çözümü

$$u'(t) = f(t, u, \varphi_2(t - \tau)) \quad (4.7)$$

adi diferansiyel denkleminin

$$u(t_0 + 2\tau) = \varphi_2(t_0 + 2\tau) \quad (4.8)$$

şartını sağlayan çözümünün bulunması problemine dönüşür. Süreci bu şart ile ardışık devam ettirilerek belirlenen

$$u = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in E_{t_0}, \\ \varphi_1(t), & t \in I_1, \\ \varphi_2(t), & t \in I_2, \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (4.9)$$

fonksiyonu (4.1)-(4.2) probleminin çözümü olur.

Başlangıç probleminin çözümünde gösterilen şart ile bulunması metoduna, adım metodu veya ardışık integralleme metodu denir.

Adımlar metoduna bir örnek verelim.

Örnek 4.1.

$$u'(t) + 2u(t) + 3u(t - 1) = 5, t > 0$$

$$u(t) = t, -1 \leq t \leq 0$$

probleminin $[0,2]$ aralığındaki çözümünü bulalım.

Çözüm.

Problemin çözümünü

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -1 \leq t \leq 0 \\ u_1(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ u_2(t), & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

olarak arayalım. Problemin $[0,1]$ aralığındaki çözümü için başlangıç fonksiyonunu kullanırsak

$$u'(t) + 2u(t) + 3(t - 1) = 5,$$

$$u(0) = \varphi(0)$$

yazabiliriz. Buradan

$$u'(t) + 2u(t) = 8 - 3t,$$

$$u(0) = 0$$

başlangıç değer problemini elde ederiz. Bu problemin çözümü

$$u(t) = \frac{19}{4}(1 - e^{-2t}) - \frac{3t}{2}$$

olur.

Şimdi de problemin $[1,2]$ aralığındaki çözümü için önceki adıma benzer olarak

$$u'(t) + 2u(t) + 3u_1(t-1) = 5$$

$$u(1) = u_1(1)$$

yazılabilir. Buradan

$$u'(t) + 2u(t) = \frac{57}{4}(e^{-2t+2} - 1) + \frac{3t+7}{2}$$

$$u(1) = \frac{19}{4}(1 - e^{-2}) - \frac{3}{2}$$

başlangıç değer problemini elde ederiz. Bu problemin çözümünü,

$$u(t) = \left[\frac{19}{4}(1 - e^{-2}) - \frac{3}{2} \right] e^{2-2t} + \frac{27}{2} \left[e^{2-2t} \left(t - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{6t+11}{8} e^{-2t} - \frac{7}{8} e^{2-2t}$$

olarak buluruz. Böylece problemin çözümü

$$u(t) = \begin{cases} \frac{19}{4}(1 - e^{-2t}) - \frac{3t}{2}, & 0 \leq t \leq 1, \\ \left[\frac{19}{4}(1 - e^{-2}) - \frac{19}{8} \right] e^{2-2t} + \\ \frac{27}{2} \left[e^{2-2t} \left(t - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{6t+11}{8} e^{-2t}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

olacaktır.

5. BÖLÜM

PARAMETREYE BAĞLI DELAY DENKLEMLER

Bu bölümde λ parametresine göre lineer olan

$$u'(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t-r) = \lambda f(t) + g(t), \quad 0 < t \leq T \quad (5.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0; u(T) = A \quad (5.2)$$

probleminin kesin çözümünü bulmaya çalışacağız. Burada $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ ve $g(t) \in C[0, T]$, $\varphi(t) \in C[-r, 0]$ ve A reel sayıdır. Bu problemin çözümü için 4. Bölümdeki adımlar metodundan faydalanacağız. İlk olarak (5.1)-(5.2) probleminin $t \in I_1 = [0, r]$ aralığındaki çözümünü inceleyelim. Buradan

$$\begin{aligned} u'(t) + a(t)u(t) &= \lambda f(t) + g(t) - b(t)\varphi(t-r), \\ u(0) &= \varphi(0) \end{aligned}$$

başlangıç değer problemini elde ederiz. Bu problemin çözümü

$$u_1(t) = \varphi(0)e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} + \int_0^t [\lambda f(s) + g(s) - b(s)\varphi(s-r)]e^{-\int_s^t a(\tau)d\tau} ds$$

biçiminde olacaktır. Daha sonra $t \in I_2 = [r, 2r]$ aralığı için

$$\begin{aligned} u'(t) + a(t)u(t) &= \lambda f(t) + g(t) - b(t)u_1(t-r), \\ u(r) &= u_1(r) \end{aligned}$$

problemini elde ederiz. Bu problemin çözümü

$$u_2(t) = u_1(r)e^{-\int_r^t a(\tau)d\tau} + \int_r^t [\lambda f(s) + g(s) - b(s)u_1(s-r)]e^{-\int_s^t a(\tau)d\tau} ds$$

olacaktır. Bu şekilde devam edersek $t \in I_n = [(n-1)r, nr] = [T-r, T]$ aralığında

$$u'(t) + a(t)u(t) = \lambda f(t) + g(t) - b(t)u_{n-1}(t-r),$$

$$u((n-1)r) = u_{n-1}((n-1)r)$$

problemini elde ederiz. Bunun çözümü ise

$$u_n(t) = u_{n-1}((n-1)r)e^{-\int_{(n-1)r}^t a(\tau)d\tau} + \int_{(n-1)r}^t [\lambda f(s) + g(s) - b(s)u_{n-1}(s-r)]e^{-\int_s^t a(\tau)d\tau} ds$$

olur. $u(T) = A$ sınır şartını $u_n(t)$ çözümünde dikkate alırsak, yani $u_n(T) = A$,

$$A = u_{n-1}((n-1)r)e^{-\int_{(n-1)r}^T a(\tau)d\tau} + \int_{(n-1)r}^T [\lambda f(s) + g(s) - b(s)u_{n-1}(s-r)]e^{-\int_s^T a(\tau)d\tau} ds$$

olur ve burada

$$\lambda = \frac{A - u_{n-1}((n-1)r)e^{-\int_{(n-1)r}^T a(\tau)d\tau}}{\int_{(n-1)r}^T f(s)e^{-\int_s^T a(\tau)d\tau} ds} - \frac{\int_{(n-1)r}^T [g(s) - b(s)u_{n-1}(s-r)]e^{-\int_s^T a(\tau)d\tau} ds}{\int_{(n-1)r}^T f(s)e^{-\int_s^T a(\tau)d\tau} ds}$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$u(t, \lambda) = \begin{cases} \varphi(t), & -r \leq t \leq 0, \\ u_1(t), & 0 \leq t \leq r, \\ u_2(t), & r \leq t \leq 2r, \\ \vdots \\ u_n(t), & T-r \leq t \leq T, \\ \lambda & \end{cases}$$

çözümüne ulaşırız. Şimdi de buna bir örnek verelim.

Örnek 5.1.

$$u'(t) + u(t) + u(t-1) = \lambda + t - 1, 0 < t < 2,$$

$$u(t) = t, -1 \leq t \leq 0; u(2) = 2.$$

Çözüm.

İlk olarak problemin $[0,1]$ aralığındaki çözümünü bulalım.

$$u'(t) + u(t) + \varphi(t-1) = \lambda + t - 1,$$

$$u(0) = 0$$

probleminde başlangıç fonksiyonunu kullanırsak,

$$u'(t) + u(t) = \lambda,$$

$$u(0) = 0$$

başlangıç değer problemini elde ederiz. Buradan

$$u_1(t) = \lambda(1 - e^{-t})$$

çözümü elde edilir. Daha sonra problemin $[1,2]$ aralığındaki çözümü için önceki adıma benzer olarak,

$$u'(t) + u(t) + u_1(t-1) = \lambda + t - 1,$$

$$u(1) = \lambda(1 - e^{-1})$$

yazılabilir. Buradan $u_1(t)$ çözümü dikkate alındığında

$$u'(t) + u(t) + \lambda(1 - e^{-(t-1)}) = \lambda + t - 1$$

olur ve

$$u'(t) + u(t) = t - 1 + \lambda e^{-(t-1)},$$

$$u(1) = \lambda(1 - e^{-1})$$

başlangıç değer problemini elde ederiz. Bu problemin çözümü ise

$$u_2(t) = t - 2 + \lambda t e^{-(t-1)} + (e - \lambda)e^{-t}$$

biçimindedir. Bu u_1 ve u_2 yi incelediğimizde çözümlerin λ parametresine bağlı olduğunu söyleyebiliriz. Bu parametreyi belirlemek için $u(2) = 2$ sınır şartından

yararlanacağız. $[1,2]$ aralığındaki çözüm u_2 olduğundan sınır şartını bu çözümde dikkate almamız gerekmektedir. Yani $u_2(2) = 2$ den

$$2 = 2\lambda e^{-1} + (e - \lambda)e^{-2}, \lambda = e$$

bulunur. Böylece problemin çözümü

$$u(t, \lambda) = \begin{cases} \lambda(1 - e^{-t}), & 0 \leq t \leq 1, \\ t - 2 + \lambda t e^{-(t-1)} + (e - \lambda)e^{-t}, & 1 \leq t \leq 2, \\ \lambda = e \end{cases}$$

olur. $\lambda = e$ değeri yerine yazılıp düzenlenirse, problemin çözümü

$$u(t) = \begin{cases} e(1 - e^{-t}), & 0 \leq t \leq 1 \\ t - 2 + te^{2-t}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

biçiminde de yazılabilir.

Örnek 5.2.

$$\begin{aligned} u'(t) + u(t) + u(t-1) &= t + \lambda^2, \quad 0 < t < 2, \\ u(t) &= t + 1, \quad -1 \leq t \leq 0; \quad u(2) = 1 \end{aligned}$$

problemini çözelim.

Çözüm.

İlk olarak problemin $[0,1]$ aralığındaki çözümünü bulalım.

$$u'(t) + u(t) + \varphi(t-1) = t + \lambda^2,$$

$$u(0) = 1$$

probleminde başlangıç fonksiyonunu kullanırsak,

$$u'(t) + u(t) = \lambda^2,$$

$$u(0) = 1$$

başlangıç değer problemini elde ederiz. Buradan

$$u_1(t) = \lambda^2 + (1 - \lambda^2)e^{-t}$$

çözümü elde edilir. Daha sonra problemin $[1,2]$ aralığındaki çözümü için önceki adıma benzer olarak,

$$u'(t) + u(t) + u_1(t-1) = t + \lambda^2,$$

$$u(1) = \lambda^2 + (1 - \lambda^2)e^{-1}$$

yazılabilir. Buradan $[0,1]$ aralığındaki çözüm dikkate alındığında

$$u'(t) + u(t) = t - (1 - \lambda^2)e^{-(t-1)}$$

bulunur ve

$$u'(t) + u(t) = t - (1 - \lambda^2)e^{-(t-1)},$$

$$u(1) = \lambda^2 + (1 - \lambda^2)e^{-1}$$

başlangıç değer problemini elde ederiz. Bu problemin çözümü ise

$$u_2(t) = 1 - (1 - \lambda^2)e^{-1} + [\lambda^2 + (1 - \lambda^2)e^{-1}]e^{-1}$$

biçimindedir. Bir önceki örnekteki gibi λ parametresini belirlemek için $u(2) = 1$ sınır şartından yararlanacağız. $[1,2]$ aralığındaki çözüm u_2 olduğundan sınır şartını bu çözümde dikkate almamız gerekmektedir. Yani $u_2(2) = 1$ 'dan

$$0 = \lambda^2 e^{-1} + (1 - \lambda^2)(e^{-2} - e^{-1}),$$

$$\lambda^2 = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{2e^{-1} - e^{-2}}$$

denkleminde ulaşırız. Bu denklemin çözümünden

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{e-1}{2e-1}} \text{ ve } \lambda_2 = -\sqrt{\frac{e-1}{2e-1}}$$

iki farklı λ değeri bulunur. Böylece problemin çözümü

$$u(t, \lambda) = \begin{cases} \lambda^2 + (1 - \lambda^2)e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - (1 - \lambda^2)e^{-1} + [\lambda^2 + (1 - \lambda^2)e^{-1}]e^{-t}, & 1 \leq t \leq 2, \\ \lambda_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{e-1}{2e-1}} \end{cases}$$

olur. $\lambda^2 = (e^{-1} - e^{-2})(2e^{-1} - e^{-2})^{-1}$ değeri yerine yazılıp düzenlenirse, çözüm

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t} + \frac{e-1}{2e-1}(1 - e^{-t}), & 0 \leq t \leq 1 \\ t - 1 - (t-2) \frac{e^{-(t-2)}}{2e-1}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

biçiminde de yazılabilir. Buradan Örnek 5.2'nin çözümünün iki farklı parametreye bağlı olduğunu söylenebilir. Böylece, (1.1)-(1.2) probleminin birden fazla parametreye bağlı olarak, birden fazla çözümünün olabileceği sonucu çıkarabilir.

6. BÖLÜM

YAKLAŞIK YÖNTEMLER

Bu bölümde (1.1)-(1.2) probleminin λ parametresine göre lineer ve lineer olmayan durumları için nümerik çözümler verilecektir. Burada özel olarak aşağıdaki şebeke tanımını kullanacağız.

$$\omega_{N_0} = \{t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N_0, h = T/N_0 = r/N\},$$

$$\omega_{N,p} = \{t_i: t_i = r_{p-1} + [i - (p-1)N]h, (p-1)N + 1 \leq i \leq pN\},$$

$$r_s = sr, s = 0, 1, \dots, m; mr = T,$$

$$\omega_{N_0} = \bigcup_{p=1}^m \omega_{N,p}, \bar{\omega}_{N_0} = \omega_{N_0} \cup \{0\},$$

$$\bar{\omega}_{-N} = \{t_i: t_i = -ih, i = -N, -N+1, \dots, 0\}.$$

6.1. Linear Problem

Bu bölümde (5.1)-(5.2) probleminin t_i düğüm noktasındaki

$$u'(t_i) + a(t_i)u(t_i) + b(t_i)u(t_i - r) = \lambda f(t_i) + g(t_i), 0 < t_i < T, \quad (6.1)$$

$$u(t_i) = \varphi(t), -r \leq t_i \leq 0; u(T) = A \quad (6.2)$$

problemi için sonlu fark metodu kullanılarak bazı çözümler ele alınacaktır.

6.2. Euler Metodu

İlk olarak (6.1) denkleminde, $u'(t_i)$ ifadesine ileri fark türevini

$$u'(t_i) = u_{t,i} - \frac{h}{2}u''(\xi_i), t_i < \xi_i < t_{i+1}$$

fark türevini ve

$$u(t_i - r) = u(t_{i-N})$$

ifadelerini dikkate alırsak,

$$u_{t,i} + a(t_i)u(t_i) + b(t_i)u(t_{i-N}) = \lambda f(t_i) + g(t_i) + R_i$$

yazabiliriz. Buradan R_i hata terimi ihmal edilirse,

$$y_{t,i} + a_i y_i + b_i y_{i-N} = \lambda f_i + g_i, 0 < i < N_0, \quad (6.3)$$

$$y_i = \varphi_i, -N \leq i \leq 0; y_{N_0} = A \quad (6.4)$$

fark problemini (6.1)-(6.2) probleminin yaklaşımı olarak verebiliriz. Burada $R_i = \frac{h}{2}u''(\xi_i), t_i < \xi_i < t_{i+1}$ biçimindedir.

Şimdi (6.3)-(6.4) probleminin çözümünü arayalım. Bunun için öncelikle (6.3) denklemini

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + a_i y_i + b_i y_{i-N} = \lambda f_i + g_i,$$

$$y_{i+1} = (1 - a_i h)y_i - h b_i y_{i-N} + h(\lambda f_i + g_i)$$

biçiminde düzenleyelim. Buradan $0 \leq i \leq N - 1$ için

$$y_{i+1} = (1 - a_i h)y_i - h(b_i \varphi_{i-N} - \lambda f_i - g_i)$$

$$y_0 = \varphi_0$$

problemini elde ederiz. Buradan

$$A_i = 1 - a_i h \text{ ve } B_i^{(1)} = -h(b_i \varphi_{i-N} - \lambda f_i + g_i)$$

ifadelerini Teorem 3.3'de dikkate alırsak problemin çözümü

$$y_i^{(1)} = \varphi_0 \prod_{k=0}^{i-1} A_k + \sum_{j=0}^{i-1} \left(\prod_{k=j+1}^{i-1} A_k \right) B_j^{(1)}, 0 \leq i \leq N$$

olarak bulunur. Yine $N \leq i \leq 2N - 1$ için

$$y_{i+1} = A_i y_i - h(b_i y_{i-N}^{(1)} - \lambda f_i - g_i)$$

$$y_N = y_N^{(1)}$$

fark probleminin çözümü önceki adıma benzer biçimde

$$y_i^{(2)} = y_N^{(1)} \prod_{k=N}^{i-1} A_k + \sum_{j=N}^{i-1} \left(\prod_{k=j+1}^{i-1} A_k \right) B_j^{(2)}, N \leq i \leq 2N$$

olarak bulunur. Bu şekilde devam edilirse $(m-1)N + 1 \leq i \leq mN - 1$ için

$$y_{i+1} = A_i y_i - h(b_i y_{i-N}^{(m-1)} - \lambda f_i - g_i),$$

$$y_{(m-1)N} = y_{(m-1)N}^{(m-1)}$$

fark problemini elde ederiz. Bunun çözümü ise

$$y_i^{(m)} = y_{(m-1)N}^{(m-1)} \prod_{k=(m-1)N}^{i-1} A_k + \sum_{j=(m-1)N}^{i-1} \left(\prod_{k=j+1}^{i-1} A_k \right) B_j^{(m)}, (m-1)N \leq i \leq N_0 - 1$$

olur. Bütün fark problemlerin çözümleri incelendiğinde λ parametresine bağlı olduğu görülecektir. Bu parametreyi belirlemek için $y_{N_0} = A$ şartından yararlanacağız. Bunun için öncelikle (6.3) denkleminde $i = N_0 - 1$ yazıp düzenlersek

$$y_{N_0} = A_{N_0-1} y_{N_0-1}^{(m)} - h(b_{N_0-1} y_{(m-1)N-1}^{(m-1)} - f_{N_0-1} \lambda + g_{N_0-1})$$

elde ederiz. $y_{N_0} = A$ şartını dikkate alırsak

$$A = A_{N_0-1}y_{N_0-1}^{(m)} - h(b_{N_0-1}y_{(m-1)N-1}^{(m-1)} - f_{N_0-1}\lambda + g_{N_0-1})$$

olur. Buradan da

$$\lambda = \frac{A - A_{N_0-1}y_{N_0-1}^{(m)} + h(b_{N_0-1}y_{(m-1)N-1}^{(m-1)} + g_{N_0-1})}{hf_{N_0-1}}$$

bulunur. Bulunan bu λ değeri diğer çözümlerde dikkate alınarak (6.3)-(6.4) fark probleminin çözümü bulunmuş olur. Yani

$$y_i = \begin{cases} y_i^{(1)}, & 0 \leq i \leq N, \\ y_i^{(2)}, & N \leq i \leq 2N, \\ \vdots \\ y_i^{(m)}, & (m-1)N \leq i \leq mN. \end{cases}$$

Örnek 6.1.

Euler metodunu kullanarak

$$u'(t) + u(t) + u(t-1) = t - 1 + \lambda, \quad 0 < t < 2$$

$$u(t) = t, \quad -1 \leq t \leq 0; \quad u(2) = 2$$

probleminin yaklaşık çözümünü bulalım.

Çözüm.

(6.3)-(6.4)'den faydalanarak,

$$y_{t,i} + y_i + y_{i-N} = t_i - 1 + \lambda, \quad 0 < i < 2N,$$

$$y_i = t_i, \quad -1 \leq t_i \leq 0; \quad y_{2N} = 2$$

fark problemini yazabiliriz. İlk olarak $0 \leq i \leq N - 1$ için bu problemi çözelim. $y_{t,i}$ fark türevini dikkate alır,

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + y_i + y_{i-N} = t_i - 1 + \lambda$$

ve gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$y_{i+1} = (1-h)y_i - hy_{i-N} + h(t_i - 1 + \lambda),$$

$$y_0 = 0$$

lineer fark problemini elde ederiz. Bunun çözümü

$$\begin{aligned} y_i^{(1)} &= y_0 \prod_{k=0}^{i-1} (1-h) + \sum_{j=0}^{i-1} \left(\prod_{k=j+1}^{i-1} (1-h) \right) h(t_i - 1 + \lambda - y_{i-N}), \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \left(\prod_{k=j+1}^{i-1} (1-h) \right) h(t_i - 1 + \lambda - t_{i-N}), \\ &= (1 - (1-h)^i)(2t_i - 2 + \lambda) \end{aligned}$$

olur ve böylece birinci adımdaki çözümü bulmuş oluruz. İkinci adım için ise

$$y_{i+1} = (1-h)y_i - hy_{i-N}^{(1)} + h(t_i - 1 + \lambda),$$

$$y_N = (1 - (1-h)^N)\lambda$$

fark problemini düşünebiliriz. Bu problemin çözümünü

$$\begin{aligned} y_i^{(2)} &= (1 - (1-h)^N)\lambda \prod_{k=N}^{i-1} (1-h) \\ &\quad + \sum_{j=N}^{i-1} \left(\prod_{k=j+1}^{i-1} (1-h) \right) h(t_i - 1 + \lambda - y_{i-N}^{(1)}), N \leq i \leq 2N \\ &= (1 - (1-h)^N)\lambda \prod_{k=N}^{i-1} (1-h) \\ &\quad + \sum_{j=N}^{i-1} \left(\prod_{k=j+1}^{i-1} (1-h) \right) h(t_i - 1 + \lambda - (1 - (1-h)^{i-N})(2t_{i-N} - 2 + \lambda)) \\ &= 3 - t_i - (1-h)^i \lambda - (1-h)^{2(i-N)}(2t_i - 4 + \lambda) + (1-h)^{i-N}(3t_i - 7 + 2\lambda) \end{aligned}$$

olarak buluruz. Son olarak λ parametresini belirlemek için $y_{2N} = 2$ şartından yararlanacağız. Yani $y_{2N}^{(2)} = 2$ den

$$2 = 3 - t_{2N} - (1 - h)^{2N} \lambda - (1 - h)^{2N} (2t_{2N} - 4 + \lambda) + (1 - h)^N (3t_{2N} - 7 + 2\lambda)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 - h)^{-N} + \frac{1}{1 - (1 - h)^N}$$

olur. Böylece fark probleminin çözümü

$$y_i = \begin{cases} (1 - (1 - h)^i (2t_i - 2 + \lambda)), & 0 \leq i \leq N, \\ 3 - t_i - (1 - h)^i \lambda - (1 - h)^{2(i-N)} (2t_i - 4 + \lambda) + \\ + (1 - h)^{i-N} (3t_i - 7 + 2\lambda), & N \leq i \leq 2N, \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 - h)^{-N} + \frac{1}{1 - (1 - h)^N}$$

olarak bulunur.

6.3. Runge-Kutta Metodu

Şimdi de (6.3)-(6.4) probleminin çözümünü Runge-Kutta metodu ile bulalım. Bunun için öncelikle (5.1) denklemini

$$u' = F(t, u) \tag{6.5}$$

$$u(0) = \varphi(0) \tag{6.6}$$

biçiminde düzenleyelim. Burada

$$F(t, u) = -a(t)u(t) - b(t)u(t - r) + \lambda f(t) + g(t)$$

biçimindedir. (6.5)-(6.6) probleminin çözümü için ikinci mertebeden Runge-Kutta metodunu uygularsak

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [K_1 + K_2], i = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

$$y_i = \varphi_i, -N \leq i \leq 0; y_{N_0} = A,$$

$$K_1 = F(t_i, y_i), K_2 = F(t_i + h, y_i + hK_1)$$

fark problemini elde ederiz. Bu fark problemini çözmek için Euler metoduna benzer bir yol izleyeceğiz. İlk olarak $0 \leq i \leq N - 1$ için

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [K_1 + K_2],$$

$$y_0 = \varphi_0,$$

$$K_{1,i} = -a_i y_i - b_i \varphi_{i-N} + \lambda f_i + g_i,$$

$$K_{2,i} = -a_{i+1} (y_i + hK_{1,i}) - b_{i+1} \varphi_{i+1-N} + \lambda f_{i+1} + g_{i+1}$$

yazabiliriz. Bu problemin çözümü Euler yöntemine benzer şekilde bulunabilir. Daha sonra $N \leq i \leq 2N - 1$ için

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [K_1 + K_2],$$

$$y_N = y_N^{(1)},$$

$$K_{1,i} = -a_i y_i - b_i y_{i-N}^{(1)} + \lambda f_i + g_i,$$

$$K_{2,i} = -a_{i+1} (y_i + hK_{1,i}) - b_{i+1} y_{i+1-N}^{(1)} + \lambda f_{i+1} + g_{i+1}$$

fark problemi bir önceki adıma benzer şekilde çözülebilir. Bu şekilde devam ederek $(m-1)N \leq i \leq N_0 - 2$ için

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [K_1 + K_2],$$

$$y_{(m-1)N} = y_{(m-1)N}^{(m-1)},$$

$$K_{1,i} = -a_i y_i - b_i y_{i-N}^{(m-1)} + \lambda f_i + g_i,$$

$$K_{2,i} = -a_{i+1} (y_i + hK_{1,i}) - b_{i+1} y_{i+1-N}^{(m-1)} + \lambda f_{i+1} + g_{i+1}$$

problemini yazabiliriz. Bunun çözümü de diğer adımlardaki gibi yapılabilir. Son olarak $i = N_0 - 1$ alınırsa

$$y_{N_0} = y_{N_0-1}^{(m)} + \frac{h}{2}(K_1 + K_2),$$

$$K_{1,i} = -a_{N_0-1}y_{N_0-1}^{(m)} - b_{N_0-1}y_{(m-1)N-1}^{(m-1)} + \lambda f_{N_0-1} + g_{N_0-1},$$

$$K_{2,i} = -a_{N_0}(y_{N_0-1}^{(m)} + hK_{1,i}) - b_{N_0}y_{(m-1)N}^{(m)} + \lambda f_{N_0} + g_{N_0},$$

yazılabilir. Buradan $y_{N_0} = A$ şartı kullanılırsa λ parametresi kolaylıkla bulunabilir.

Böylece (5.1)-(5.2) probleminin yaklaşık çözümü

$$y_i = \begin{cases} y_i^{(1)}, & 0 \leq i \leq N, \\ y_i^{(2)}, & N \leq i \leq 2N, \\ \vdots \\ y_i^{(m)}, & (m-1)N \leq i \leq mN. \end{cases}$$

biçiminde olacaktır.

6.4. Lineer Olmayan Problem

Bu bölümde (1.1)-(1.2) probleminin yaklaşık çözümü incelenecektir. Bu problem incelendiğinde λ parametresine göre lineer olmadığı görülebilir. Bundan dolayı çoğu zaman problemin kesin çözümü bulunamamaktadır. Bu yüzden problemin yaklaşık çözümü incelenecektir. İlk olarak (1.1)-(1.2) problemine karşılık

$$y_{\bar{t},i}^{(n)} + a_i y_i^{(n)} + b_i y_{i-N}^{(n)} = f(t_i, \lambda^n); \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (6.7)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0; \quad y_{N_0} = A \quad (6.8)$$

fark problemini ele alalım.

(6.7)-(6.8) probleminin çözümü için quasilinerizasyon yöntemini uygulayacağız (Bellman ve Kalaba, 1965). Bunun için $i = N_0$ alırsak (6.7) denkleminde

$$y_{\bar{t},N_0}^{(n-1)} + a_{N_0} y_{N_0}^{(n-1)} + b_{N_0} y_{N_0-N}^{(n-1)} = f(T, \lambda^{(n-1)}) + (\lambda^n - \lambda^{n-1}) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(T, \lambda^{n-1})$$

yazabiliriz. Yine (6.7) denkleminde

$$y_i^{(n)} = \frac{y_{i-1}^{(n)} - hb_i y_{i-N}^{(n)} + hf(t_i, \lambda^n)}{1 + ha_i},$$

elde ederiz. (6.8)'den $y_{N_0} = A$ şartını dikkate alırsak,

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \frac{(a_{N_0} + h^{-1})y_{N_0}^{(n-1)} - h^{-1}y_{N_0-1}^{(n-1)} + b_{N_0}y_{N_0-N}^{(n-1)} - f(T, \lambda^{(n-1)})}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}(T, \lambda^{n-1})}, \quad (6.9)$$

$$y_i^{(n)} = \frac{y_{i-1}^{(n)} - hb_i y_{i-N}^{(n)} + hf(t_i, \lambda^n)}{1 + ha_i}, \quad (6.10)$$

$$y_i^{(n)} = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0; \quad y_{N_0}^{(n)} = A, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.11)$$

olacaktır. Buradan (6.9)-(6.11) sürecini (1.1)-(1.2) probleminin yaklaşık çözümü olarak önerebiliriz. Burada $\lambda^{(0)}$ ve $y_i^{(0)}$ bu sürecin önceden belirlenmiş başlangıç değerleridir.

Şimdi, elde ettiğimiz bu sonuçları bir örnek üzerinde test edelim.

Örnek 6.2.

$$u'(t) + 2u(t) + \frac{1}{2}u(t-1) + \lambda + \tanh(t + \lambda) = 0, \quad 0 < t < 2,$$

$$u(t) = t^2, \quad -1 \leq t \leq 0; \quad u(2) = 1.$$

Çözüm.

Problemin kesin çözümü bulunamamaktadır. Bundan dolayı hata değerlendirmesini Amiraliyev ve Duru, (2005) tarafından da önerilen çift kat şebeke (double mesh) yöntemini kullanarak değerlendireceğiz. Yani

$$e_i^{(N)} = |y_i^{(N)} - y_{2i}^{(2N)}|, \quad e_\lambda^{(N)} = |\lambda^{(N)} - \lambda^{(2N)}|$$

olarak inceleyeceğiz.

(6.9)-(6.11) sürecini göz önünde bulundurursak,

$$\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} - \frac{(1 + 2\tau)y_{N_0}^{(n-1)} - y_{N_0-1}^{(n-1)} + \frac{1}{2}\tau y_{N_0-N}^{(n-1)} + \tau(\lambda^{(n-1)} + \tanh(2 + \lambda^{(n-1)}))}{\tau(1 + \operatorname{sech}^2(2 + \lambda^{(n-1)}))},$$

$$y_i^{(n)} = \frac{2y_{i-1}^{(n)} - \tau y_{i-N}^{(n)} + 2\tau f(t_i, \lambda^{(n)})}{2 + 4\tau}, \quad n = 1, 2, \dots$$

olarak buluruz.

Buradan da

$$y_i^{(n)} = t_i^2, -N \leq i \leq 0; y_{2N}^{(n)} = 1,$$

$$y_i^{(0)} = (1 - t_i)^2, 1 \leq i \leq 2N - 1; \lambda^{(0)} = -4.02$$

ifadelerini kullanarak,

$$|\lambda^n - \lambda^{n-1}| \leq 10^{-5}, |y^{(n)} - y^{(n-1)}| \leq 10^{-5}$$

kesinliği sağlanana kadar hesaplamalar yapılmış, $N = 32$ ve $N = 64$ için elde edilen sonuçlar Tablo 8 ve Tablo 9'da listelenmiştir.



7. BÖLÜM

ÖRNEKLER VE TABLOLAR

Bu bölümde Örnek 6.1. için Euler (EM), Runge-Kutta (RKM) yöntemleri kullanılarak $N = 32$ ve $N = 64$ alınarak elde edilen sonuçlar Tablo 1, 2, 4, 5'te verilmiştir. Tablo 3, 6 da ise $N = 32, 64, \dots, 1024$ değerlerine göre maksimum hata değerleri verilmiştir. Tablo 7 de $N = 32, 64, \dots, 4096$ değerlerine göre elde edilen maksimum hata değerleri yöntemler dikkate alınarak karşılaştırılmıştır. Örnek 6.2. için (6.9)-(6.11) süreci kullanılarak, $N = 32$ ve $N = 64$ alınarak elde edilen sonuçlar Tablo 8, 9 da verilmiştir. Tablo 10 da ise $N = 32, 64, \dots, 1024$ değerlerine göre hata değerleri verilmiştir.

Bu tablolardaki $u(t_i)$, $y(t_i)$, $e(t_i)$ sırasıyla, t_i düğüm noktalarındaki kesin çözüm, yaklaşık çözüm, kesin hatayı ve $\bar{\lambda}$, e_λ ise sırasıyla, λ parametresinin yaklaşık değeri, yaklaşım hatasını ifade etmektedir.

Tablo 1. $N = 32$ için nümerik sonuçlar (EM)

t_i	$u(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.125	0.319407	0.323040	0.0036335
0.250	0.601282	0.607554	0.0062719
0.375	0.850036	0.858136	0.0080999
0.500	1.069560	1.078830	0.0092724
0.625	1.263290	1.273210	0.0099191
0.750	1.434260	1.444400	0.0101479
0.875	1.585130	1.595180	0.0100487
1.000	1.718280	1.727980	0.0096961
1.125	1.823730	1.835460	0.0117222
1.250	1.896250	1.908310	0.0120641
1.375	1.943840	1.955060	0.0112186
1.500	1.973080	1.982660	0.0095736
1.625	1.989360	1.996790	0.0074286
1.750	1.997040	2.002060	0.0050117
1.875	1.999650	2.002150	0.0024938

$$\bar{\lambda} = 2.70866, e_{\lambda} = |\lambda - \bar{\lambda}| = 0.0096178$$

Tablo 2. $N = 64$ için nümerik sonuçlar (EM)

t_i	$u(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.125	0.319407	0.321205	0.0017983
0.250	0.601282	0.604387	0.0031056
0.375	0.850036	0.854049	0.0040129
0.500	1.069560	1.074160	0.0045962
0.625	1.263290	1.268210	0.0049194
0.750	1.434260	1.439290	0.0050356
0.875	1.585130	1.590120	0.0049893
1.000	1.718280	1.723100	0.0048172
1.125	1.823730	1.829540	0.0058029
1.250	1.896250	1.902210	0.0059636
1.375	1.943840	1.949380	0.0055423
1.500	1.973080	1.977810	0.0047285
1.625	1.989360	1.993030	0.0036690
1.750	1.997040	1.999520	0.0024756
1.875	1.999650	2.000890	0.0012321

$$\bar{\lambda} = 2.71348, e_{\lambda} = |\lambda - \bar{\lambda}| = 0.00479766$$

Tablo 3. Maksimum hata değerleri (EM)

N	$e(t_i)$	e_{λ}
32	0.0121073	0.0096178
64	0.0059865	0.0047977
128	0.0029768	0.0023961
256	0.0014844	0.0011974
512	0.0007412	0.0005985
1024	0.0003703	0.0002992

Tablo 4. $N = 32$ için nümerik sonuçlar (RKM)

t_i	$u(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.125	0.319407	0.319353	0.53883E-4
0.250	0.601282	0.601186	0.95565E-4
0.375	0.850036	0.849909	1.27169E-4
0.500	1.069560	1.069410	1.50488E-4
0.625	1.263290	1.263120	1.67032E-4
0.750	1.434260	1.434080	1.78071E-4
0.875	1.585130	1.584950	1.84671E-4
1.000	1.718280	1.718090	1.87722E-4
1.125	1.823730	1.823550	1.88670E-4
1.250	1.896250	1.896070	1.75782E-4
1.375	1.943840	1.943680	1.53592E-4
1.500	1.973080	1.972960	1.25604E-4
1.625	1.989360	1.989270	0.94498E-4
1.750	1.997040	1.996980	0.62282E-4
1.875	1.999650	1.999620	0.30432E-4

$$\bar{\lambda} = 2.71825, e_{\lambda} = |\lambda - \bar{\lambda}| = 3.33602E - 5$$

Tablo 5. $N = 64$ için nümerik sonuçlar (RKM)

t_i	$u(t_i)$	$y(t_i)$	$e(t_i)$
0.125	0.319407	0.319393	1.33621E-5
0.250	0.601282	0.601258	2.37035E-5
0.375	0.850036	0.850004	3.15497E-5
0.500	1.069560	1.069520	3.73443E-5
0.625	1.263290	1.263250	4.14610E-5
0.750	1.434260	1.434210	4.42142E-5
0.875	1.585130	1.585090	4.58674E-5
1.000	1.718280	1.718240	4.66412E-5
1.125	1.823730	1.823690	4.68174E-5
1.250	1.896250	1.896210	4.35847E-5
1.375	1.943840	1.943800	3.80618E-5
1.500	1.973080	1.973050	3.11139E-5
1.625	1.989360	1.989340	2.34013E-5
1.750	1.997040	1.997030	1.54197E-5
1.875	1.999650	1.999650	7.53286E-6

$$\bar{\lambda} = 2.71827, e_{\lambda} = |\lambda - \bar{\lambda}| = 8.65428E - 6$$

Tablo 6. Maksimum hata değerleri (RKM)

N	$e(t_i)$	e_λ
32	1.90256E-4	3.33602E-5
64	4.72368E-5	8.65428E-6
128	1.17682E-5	2.20145E-6
256	2.93694E-6	5.55012E-7
512	7.33597E-7	1.39329E-7
1024	1.83319E-7	3.49039E-8

Tablo 7. Maksimum hata değerleri (EM) ve (RKM)

N	Euler		Runge-Kutta	
	$e(t_i)$	e_λ	$e(t_i)$	e_λ
32	0.0121073	0.0096178	1.90256E-4	3.33602E-5
64	0.0059865	0.0047977	4.72368E-5	8.65428E-6
128	0.0029768	0.0023961	1.17682E-5	2.20145E-6
256	0.0014844	0.0011974	2.93694E-6	5.55012E-7
512	0.0007412	0.0005985	7.33597E-7	1.39329E-7
1024	0.0003703	0.0002992	1.83319E-7	3.49039E-8
2048	0.0001850	0.0001496	4.58197E-8	8.73494E-9
4096	0.0000925	0.0000748	1.14536E-8	2.18476E-9

Tablo 8. $N = 32$ için nümerik sonuçlar (Örnek 6.2.)

t_i	$y_i^{(N)}$	$y_{2i}^{(2N)}$	$e_i^{(N)}$
0.000	0.133382	0.0686971	0.0646848
0.125	0.597805	0.5542680	0.0435368
0.250	0.973732	0.9456510	0.0280811
0.375	1.278530	1.2616900	0.0168429
0.500	1.525820	1.5171000	0.0087195
0.625	1.726300	1.7234100	0.0028877
0.750	1.888350	1.8896200	0.0012650
0.875	2.018540	2.0227400	0.0041939
1.000	2.120070	2.1277500	0.0076769
1.125	2.178060	2.1908100	0.0127531
1.250	2.201520	2.2165400	0.0150122
1.375	2.202000	2.2175500	0.0155438
1.500	2.187720	2.2028000	0.0150760
1.625	2.164500	2.1785800	0.0140857
1.750	2.136370	2.1492500	0.0128776
1.875	2.106100	2.1177400	0.0116397
2.000	2.075540	2.0860000	0.0104574

$$e_{\lambda}^{(N)} = 0.0146305$$

Tablo 9. $N = 64$ için nümerik sonuçlar (Örnek 6.2.)

t_i	$y_i^{(N)}$	$y_{2i}^{(2N)}$	$e_i^{(N)}$
0.000	0.0686971	0.0348732	0.0338239
0.125	0.5542680	0.5315770	0.0226908
0.250	0.9456510	0.9310620	0.0145886
0.375	1.2616900	1.2529600	0.0087234
0.500	1.5171000	1.5126000	0.0045039
0.625	1.7234100	1.7219200	0.0014901
0.750	1.8896200	1.8902600	0.0006440
0.875	2.0227400	2.0248800	0.0021398
1.000	2.1277500	2.1313100	0.0035615
1.125	2.1908100	2.1971500	0.0063415
1.250	2.2165400	2.2241200	0.0075883
1.375	2.2175500	2.2254400	0.0078981
1.500	2.2028000	2.2104700	0.0076676
1.625	2.1785800	2.1857400	0.0071556
1.750	2.1492500	2.1557800	0.0065265
1.875	2.1177400	2.1236200	0.0058812
2.000	2.0860000	2.0912800	0.0052749

$$e_{\lambda}^{(N)} = 0.0073152$$

Tablo 10. Maksimum hata değerleri (Örnek 6.2.)

N	$e_i^{(N)}$	$e_{\lambda}^{(N)}$
32	0.0646848	0.0146305
64	0.0338239	0.0073152
128	0.0173024	0.0036576
256	0.0087515	0.0018288
512	0.0044012	0.0009144
1024	0.0022070	0.0004572

8. BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada özellikle kontrol teorisi olmak üzere birçok bilimsel alanda ortaya çıkan birinci mertebeden parametreye bağlı delay diferansiyel denklemin kesin ve yaklaşık çözümleri incelendi. Lineer problem için Euler ve Runge-Kutta yöntemleri, lineer olmayan problem için sonlu fark metoduna quasilineerizasyon yöntemi uygulanarak nümerik çözümler geliştirildi. Metotlar örnekler üzerinde test edildi. Buna göre lineer durum için, her bir metot $N = 32$ ve $N = 64$ kullanılarak çeşitli düğüm noktalarındaki kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve kesin hata değerlerinin yanı sıra, $N = 32, 64, 128, \dots, 4096$ kullanılarak kesin hata değerleri ayrıca listelendi. Lineer olmayan durum için, fark probleminin iterasyon süreci çift kat şebeke (double mesh) yöntemi kullanılarak $N = 32$ ve $N = 64$ için çeşitli düğüm noktalarındaki yaklaşık çözüm ve hata değerleri listelendi. Tablolardaki bu sonuçlar yöntemlerin doğruluğunu ve tutarlılığını göstermektedir. Ayrıca Tablo 7'de lineer problemin çözümünde kullanılan metotlar karşılaştırıldı. Buradan lineer problem için Runge-Kutta metodunun sonuçlarının, Euler metoduna göre daha iyi olduğu söylenebilir. Son olarak Tablo 10'da lineer olmayan problem için maksimum hata değerleri karşılaştırıldığında, N arttıkça bu değerlerin düzgün olarak azaldığı görülebilir.

Elde edilen teorik ve nümerik sonuçlar, parametreye bağlı lineer olmayan delay ve lineer veya nonlinear neutral delay problemlerin çözümü için yol gösterici niteliktedir.

KAYNAKÇA

- Ahmed, S., Huang, B., Shah, S.L. (2006). Parameter and delay estimation of continuous-time models using a linear filter. *J. Process Control*, 16, 323-31.
- Ahmedov, Q., Hasanov, K., Yakobov, M. (1978). *Adi diferansiyel denklemler*. Bakü: Maarif.
- Amirali, G. & Duru, H., (2002). *Nümerik analiz*. Ankara: Pegema Yayıncılık.
- Amirali, G. & Duru, H. (2005). A note on a parameterized singular perturbation problem. *J. Comput. Math. Appl. Math*, 182, 233-242.
- Baker, C. T. H., & Rihan, F. A. (1999). Sensitivity analysis of parameters in modelling with delay-differential equations. Technical Report 349, University of Manchester, England.
- Banks, H. T., & Daniel, P. L. (1983). Estimation of delays with other parameters in nonlinear functional differential equations. *SIAM J. Control. Opt.*, 21, 895-915.
- Bellman, R. E., & Cooke, K. L. (1963). *Differential difference equations*. New York: Academic Press.
- Bellman, R. E., & Kalaba, R. E. (1965). *Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems*. New York: American Elsevier Pub.
- Bereketoğlu, H., & Kutay, V. (2012). *Fark denklemleri*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Brauer, F., & Chavez, C. C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology*. New York: Springer.
- Chukwu, E. N. (1992). *Stability and time-optimal control of hereditary systems*. London: Academic Press.
- Erneux, T. (2009). *Applied delay differential equations*. New York: Springer.

- Foley, C., & Mackey, M. C. (2009). Dynamic hematological disease: a review. *J. Math. Biol.*, 58, 285-322.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to time-delay systems*. Basel: Birkhauser.
- Getto, P., & Waurick, M. (2016). A differential equation with state-dependent delay from cell population biology. *J. Differ. Equat.*, 260, 6176-6200.
- Guo, S., & Ma, W. (2016). Global behavior of delay differential equations model of HIV infection with apoptosis. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.*, 21, 103-119.
- Hairer, E., Norsett, S. P., Wanner, G. (2008). *Solving ordinary differential equations I*. New York: Springer.
- Hartung, F. (2001). Parameter estimation by quasilinearization in functional differential equations with state-dependent delays: a numerical study. *Nonlinear Anal.*, 47, 4557-4566.
- Hartung, F., Krisztin, T., Walther, H. O., Wu, J. (2006). Functional differential equations with state-dependent delays. In A. Canada, P. Drabek, A. Fonda (Eds.). *Theory and applications, handbook of differential equations: ordinary differential equations, Volume 3*. 435-545.
- Jankowski, T. (1990). Convergence of multistep methods for retarded differential equations with parameters. *Appl. Anal.*, 37, 227-251.
- Kolmanovskii, V., & Myshkis, A. (1999). *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Liu, X. L., & Li, W. T. (2004). Existence and uniqueness of positive periodic solutions of functional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 293, 28-39.
- Liz, E., & Röst, G. (2013). Global dynamics in a commodity market model. *J. Math. Anal. Appl.*, 398, 707-714.

Martina, B., & Veronika, N. (2015). The use of functional differential equations in the model of the meat market with supply delay. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 213, 74-79.

Mehrkanoon, S., Mehrkanoon, S., Suykens, J. A. K. (2014). Parameter estimation of delay differential equations: An integration-free LS-SVM approach. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 19, 830-841.

Nagy, T. K., Stepan, G., Moon, F. C. (2001). Subcritical Hopf bifurcation in the delay equation model for machine tool vibrations. *Nonlinear Dyn.*, 26, 121-42.



ÖZ GEÇMİŞ

1991 yılında Nevşehir'in Kozaklı ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Nevşehir ve Kayseri'de tamamladı. Yükseköğrenimine, 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde başladı ve 2014 yılında mezun oldu. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Van ili Çaldıran ilçesinde bulunan Galatasaray Ortaokulu'na matematik öğretmeni olarak atandı. Halen bu okulda görevine devam etmektedir. 2015 yılında, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

