YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ DERECEDEN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN AZALMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Mehmet ŞENGÜN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Matematik Anabilim Dalı

Sunum Tarihi: 22.07.2014

Bornova-İZMİR
2014

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç.Dr. F.Serap TOPAL

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr.Şahlar MEHERREM

Prof. Dr. Behzat GÜRKAN
Director of the Graduate School

ABSTRACT

EXISTENCE OF NONDECREASING SOLUTIONS OF A QUADRATIC INTEGRAL EQUATION OF VOLTERRA TYPE

ŞENGÜN, Mehmet
MSc in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ahmet YANTIR
July 2014, 79 pages

Integral equations of Volterra type have applications in many applied sciences such as engineering and applied physics.

In this thesis we investigate the general theory of integral equations and prove the existence of nondecreasing solutions of the equation

$$x(t) = g\big(t, x(t)\big) + \left(h(t) + \int_0^t k(s,t) f\big(s, x(\lambda s)\big) \mathrm{d}s \right) \quad t \in I = [0,1]$$

by using measure of noncompactness and Darboaux fixed point theorem.

Keywords: Volterra İntegral equations, Fredholm İntegral Equations, Quadratic İntegral Equation, Nondecreasing Solutions, Darboaux Fixed Point Theorem, Measure of noncompactness

ÖZET

İKİNCİ DERECEDEN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN AZALMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Mehmet ŞENGÜN
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Temmuz 2014, 79 sayfa

Volterra tipi integral denklemlerinin mühendislik ve uygulamalı fizik gibi uygulamalı bilimlerde pek çok uygulaması vardır. Bu tezde integral denklemlerin genel teorisini inceledik ve

$$x(t) = g\big(t, x(t)\big) + \left(h(t) + \int_0^t k(s,t) f\big(s, x(\lambda s)\big) \mathrm{ds} \right) \quad t \in I = [0,1]$$

denkleminin azalmayan çözümlerinin varlığını kompakt olmama ölçümü ve Darbo sabit nokta teoremi yardımıyla gösterdik.

Anahtar sözcükler: Volterra İntegral Denklemleri, Fredholm İntegral Denklemleri, İkinci Dereceden İntegral Denklemler, Azalmayan çözümler, Darbo Sabit Nokta Teoremi, Kompakt Olmama Ölçümü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesinde ve yürütülmesinde yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR’a teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda bu çalışmamda beni daima destekleyen sevgili eşim Elvan ŞENGÜN ve oğlum Yağız ŞENGÜN'e teşekkür ederim.

Mehmet ŞENGÜN

İzmir, 2014

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "İkinci Dereceden Volerra İntegral Denklemlerinin Azalmayan Çözümlerinin Varlığı" adlı çalışmamın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım .

22.07.2014
Mehmet ŞENGÜN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

Sembol	Açıklama
$C(I)$	I aralığında sürekli fonksiyonların kümesi
R	Reel sayılar kümesi
R_+	$[0,\infty)$ aralığı
$\bar{X}$	X'in kapanışı
$Conv\ X$	X kümesinin konveks genişlemesi; X i içeren en küçük konveks küme
Z	Tam sayılar
N	Doğal sayılar
$\frac{d^n y}{dx^n}$	y'nin x'e göre n. mertebeden türevi
$\int \ldots (n) \ldots \int$	n katlı integral
Γ_E	E'nin sınırlı boş olmayan alt kümelerinin kümesi
γ_E	Γ_E nin bağıl kompakt alt kümelerinin ailesi
$(E, \|\ \ \|)$	Normlu Banach uzayı

1 GİRİŞ

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun bir veya birden fazla integral işareti altında bulunduğu denklemlerdir. Ancak, bu tanım yeterli bir tanım olarak kabul edilmemektedir. Böyle bir tanımdan yola çıkarak integral denklemlerin tamamını içine alacak bir teori kurulamamaktadır. İntegral denklemler çok geniş bir araştırma sahası ve ayrıntılı inceleme konusudur. Bu nedenle İntegral Denklemler niteliklerine göre ayrı ayrı incelenmişlerdir.

İntegral denklemler ile matematiksel fizik ve mekanikte sıkça karşılaşılabilmektedir. Ayrıca diferansiyel denklemlerin çözümünde de bir çözüm aracı olarak kullanılırlar. Bu nedenle diferansiyel denklemler ile integral denklemler arasında yakın bir ilişki vardır. İntegral denklemlerin, diferansiyel denklemler ile olan yakın ilişkisi ve diferansiyel denklemlerin mühendislikte çokça kullanılması integral denklemleri de önemli bir duruma getirmiştir.

Diferansiyel denklemlerin bir problemi tek başına tanımlamaya yetmediğini bilinmektedir. Bu yüzden sınır şartlarının da diferansiyel denkleme eklenmesi gerekmektedir. Ancak, İntegral denklemlerde ise ilave şartlara gerek duymadan problemlerin tam olarak tanımı verilebilmektedir. Ayrıca integral denklemler bütün uzay üzerinden integral alınmasını gerektirmektedirler. Bu yüzden de evrensel denklemlerdir. Aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir.

Doğa kanunları diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edilebilirler. Buradan, yakın çevre incelendiğinde evrenin tamamında geçerli doğa kanunlarının bulunabileceği sonucu çıkarılabilir. Belki de büyük düşünür Albert Einstein'in "Bu tabiatın en anlaşılmaz yönü, anlaşılabilir olmasıdır" sözünün altında yatan gerçeklerden bir tanesidir [24].

Bazen problemler, tek bir denklem ile ifade edilemeyebilirler. Bunun yerine problem, birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların doğrusal bileşimlerinden oluşabilir. Bu tür denklemlere *İntegrodiferansiyel denklemler* denir. Bu tür denklem sistemleri, bir çok fizik ve mühendislik alanında ortaya çıkmaktadır .

İntegral denklemler ile bilinen ilk çalışmalar 19. yüzyılın ilk yarısında yapılmıştır. Önceleri düzenli araştırmalar yapılmamıştır. Ancak bu yüzyılın sonlarına doğru daha düzenli araştırmalar yapılmış ve bazı sonuçlar alınmaya başlanmıştır. 1823 yılında Abel in bir mekanik problemi ile ilgilendiği sırada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Du Bois Reymond da 1888 yılında yayımlanan bir çalışmasında "İntegral denklem" terimini önermiştir (Bocher, 1913). 1822 yılında da Jean B. Joseph Fourier, trigonometrik seriler yardımıyla ısı problemlerini çözen,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xy)\, \varphi(y)\, dy$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xy)\, \varphi(y)\, dy$$

fonksiyonların sağladığı

$$\varphi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xy)\; f(x)\, dx \qquad \text{ve} \qquad \varphi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xy)\; f(x)\, dx$$

integral denklemlerini vermiştir. 1823 yılında Abel mekanik problemlerinin genel formülü ;

$$f(x) = \int_0^{\alpha} \frac{\varphi(y)}{(x-y)^2}\, dy \quad , \quad f(0) = 0 \quad \text{ve} \quad 0 < \alpha < 1$$

olan bu integral denklemini formüle edip 1826 yılında çözümünü vermiştir. Bu denklemin $\alpha = 0$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ hali Abel' in karşılaştığı orijinal denklem olup bununla ilgili ünlü eşit zamanlı problemi ise ilk olarak Huygens tarafından çözülmüştür [25].

İntegral sınırlarından biri x gibi bir değişken olan ve bilinmeyen φ fonksionunun integralin hem içinde hem de dışında bulunduğu

$$\varphi(y) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

integral denklemi ilk olarak Poisson tarafından elde edilmiştir. Burada φ çözümü λ ' nın kuvvetleri cinsinden verilmiştir. Ancak ilgili serinin yakınsaklığı Poisson tarafından gösterilmeyip 1830 yılında Liouville tarafından ispatlanmıştır. Bir S yüzeyi içerisinde $\Delta F = 0$ Laplace denklemini sağlayan ve S'nin sınırında belli bir değer alan F fonksiyonunun bulunması problemi olan Dirichlet probleminin bir integral denklem problemine eşdeğer olduğu 1870 yılında Liouville tarafından λ parametresinin bir açılımı olarak verilmiştir. Bu çözüm daha önceden Poisson ve Liouville' in kullandığı ardışık yaklaştırma yöntemine karşılık gelir. İntegral sınırlarından birinin değişken olan doğrusal integral denklemlerle ilgili çalışmalar İtalyan matematikçi Vito Volterra (1860-1940) tarafından yayımlanmıştır.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{\infty} K(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

integral denklemi 1900 yılında ilk kez Eric İvar Fredholm (1866-1927) tarafından incelenmiştir. Fredholm de Volterra' nın 1884 yılında sunduğu benzer yaklaşım problmelerini incelemiş ve 1903' te bu konuda makalesini yayınlamıştır. Ayrıca integral denklemlerle ilgili F.G. Tricomi (Tricomi, 1955), I. G. Petrovsky (Petrovsky, 1953) ve V. W. Lovitt (Lovitt, 1924) 'e ait kaynaklar bulunmaktadır [25].

2 ÖN BİLGİLER

2.1 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

2.1.1 Doğrusal Olan veya Doğrusal Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler, temel kavramlar bakımınan öncelikle, doğrusal integral denklemler ve doğrusal olmayan integral denklemler olarak iki büyük sınıfa ayrılırlar.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\ u(t)\,dt \qquad (2.1)$$

yapısında bir integral denklemde, $u(x)$ fonksiyonunun doğrusal olması halinde, İntegral denklem " *doğrusal integral denklem*" adını almaktadır.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\ u^n(t)\,dt \qquad (2.2)$$

integral denkleminde de $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun n. kuvveti bulunduğundan "*doğrusal olmayan integral denklem*" olmaktadır.

Daha genel olarak,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \emptyset[x,t,u(t)]\ dt \qquad (2.3)$$

integral denklemi de "doğrusal olmayan integral denklemi" olmaktadır.

Bunların dışında birden çok değişkeni bulunan;

$$u(x,y) = f(x,y) + \int_a^b \int_c^d K(x,y;t_1,t_2)\,u(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 \qquad (2.4)$$

biçimindeki kısmi integral denklemlerin de doğrusal olanı veya doğrusal olmayanı bulunmaktadır. [24]

2.1.2 Tekil Olan veya Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da $K(x,t)$ fonksiyonunun sürekli olup olmamasıyla ilgilidir. $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere, $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise, integral denklem *tekil (singüler) olmayan bir integral denklemdir*. $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değilse, integral denklem tekil (singüler) integral denklem olmaktadır.

Örneğin, $0 < \propto < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_{0}^{x} \frac{u(t)}{(x-t)^{\propto}} \, dt \qquad (2.5)$$

biçimindeki bir integral denklem bu sınıfa girmektedir. İntegral sınırlarının en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, *tekil integral denklem* sınıfına girmektedir.

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} cosx(t)\, u(t)\, dt \qquad (2.6)$$

$$\varphi(x) = k. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}.\varphi(t)\, dt \qquad (2.7)$$

2.1.3 İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemleri yapılarına göre üç sınıfa ayırılabilir. Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$, çekirdek fonksiyonu $K(x,t)$ olmak üzere,

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.8)$$

biçimindeki integral denklem "*I. cins integral denklemdir*" dir. $\varphi(x)$ fonksiyonu verilmiş bir fonksiyon olup, bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde bulunur.

Benzer şekilde;

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.9)$$

denklemi de "I. cins integral denklem" dir. $\varphi(x)$ ve $f(x)$ yine verilmiş fonksiyonlardır.

Bu denklemleri;

$\varphi(x) - f(x) = \psi(x)$ dönüşümü ile;

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt$$

biçimine getirerek, (2.8) denklemi tipinde yazabiliriz.

Örnek verecek olursak;

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)\, u(t)\, dt \quad \text{ve} \quad e^x = x - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 t\ u(t)\, dt$$

tipindeki denklemler de "I. cins integral denklemler" için birer örnektir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.10)$$

$$u(x) = f(x) + \int_{a}^{b} K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.11)$$

biçimindeki integral denklemler de "II. cins integral denklemler" dir. Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$, integralin hem içinde hem de dışındadır.

Benzer şekilde;

$$u(x) = \int_{0}^{x} e^{2x+t}\, u(t)\, dt$$

ve

$$u(x) = 1 + \frac{x}{2} + \int_{0}^{1} \sin(x+t)\; u(t)\, dt$$

denklemleri de "II. cins integral denklemleri" ne birer örnek olarak verilebilirler.

$\varphi(x)$, $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_{a}^{b} K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.12)$$

tipindeki integral denklemlerde "*III. cins integral denklemler*" sınıfını oluştururlar.

Benzer şekilde,

$$x\, u(x) = 1 - e^{-2x} + \int_{0}^{2} x^2 t^2\, u(t)\, dt$$

denklemi III. cins integral denklemlere örnek olarak verilebilir.

2.1.4 Homojen Olan veya Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemleri, bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmadıkları şeklinde sınıflandırabiliriz

II. cins integral denklemler için; (2.10) ile verilen;

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt$$

integral denklemini "*homojen integral denklemi*" olarak adlandıracağız.

(2.11) ile verilen homojenliği bozan $f(x)$ fonksiyonunun bulunduğu,

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt$$

biçimindeki denklemleri ise, "*homojen olmayan integral denklemler*" olarak adlandıracağız.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt$$

homojen denkleminin, $u(x) = 0$ olan bir çözümü bulunmaktadır. Bu çözüme "aşikar çözüm" ya da "trivial çözüm" denir. Fakat bunun dışında başka bir çözümünün var olup olmadığı ya da hangi koşullar altında çözümünün olabileceği araştırılabilir.

Homojen integral denklemler, daha genel olarak;

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt$$

şeklindeki bir integral denklemin $f(x) = 0$ olması durumuna uyan özel bir durumu olarak da düşünülebilirler[24].

2.2 Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemlerin diğer bir sınıflandırılması da, integral sınırlarının değişken veya sabitlerden oluşmasına göre yapılmaktadır. Doğrusal ve homojen olup olmadıklarına bakılmadan;

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.13)$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.14)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.15)$$

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.16)$$

biçimindeki denklemlere "*Volterra integral denklemleri*" denilmektedir. Bu tür denklemlerde, integralin üst sınırında veya sınırlarının birinde " x " değişkeni bulunmaktadır. x değişkeni, $x = b$ gibi sabit bir değere eşit olduğunda ise;

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.17)$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.18)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.19)$$

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.20)$$

biçimindeki denklemlere ise "*Fredholm integral denklemleri*" denilmektedir.

Fredholm ve Volterra integrral denklemleri arasındaki tek fark sınırların değişken ya da sabit olmasından kaynaklanmaktadır.

2.3 İntegro Diferansiyel Denklemler

İntegral denklemlerin diğer bir türü de "İntegro Diferansiyel Denklemler" dir. İntegral denklemlerde bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu, olduğu gibi düşünülmüştür. Ancak bu fonksiyonun türevlerinin de bulunduğu bir integral denklem de olabilir.

$$u'(x) = F\{x, u(x), \int_0^x K\big(x, t, u(t), u^1(t)\big)dt\} \qquad (2.21)$$

biçimindeki, $u(x)$ 'in sadece birinci mertebeden türevinin bulunduğu bir denklem, integro diferansiyel denklemlere genel olarak bir örnek olabilir. Bir başka şekli de; n. mertebeden türevin bulunduğu, aşağıdaki denklemi de örnek olarak verebiliriz;

$$u^{(n)}(x) = F\big\{x, u(x), u^1(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\ \big\} + \int_0^x K\{x, u(x), u^1(x), \dots, u^{(n)}(x)\}dt \qquad (2.22)$$

2.4 Parametreli İntegral Denklemler

Bu bölüme kadar verilen integral denklemlerde herhangi bir parametreden bahsedilmemektedir. Ancak, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ ve λ bir parametre olmak üzere, buraya kadar verilen integral denklemlere λ parametresinin dahil edilmesiyle integral denklem daha genel bir yapıya kavuşacaktır. Örneğin,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\, u(t)\, dt \qquad (2.23)$$

ve

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.24)$$

λ parametresi reel veya karmaşık sayı olabilir. Ancak genellikle reel sayı seçilir.

2.5 İntegral Denklemin Çözümü

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t) dt$$

denklemi yardımıyla konuyu inceleyelim. Bu denklemde bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ fonksiyonudur. Bu integral denklemini çözmek demek, $u(x)$ fonksiyonunu belirlemek demektir. Öyle bir $u(x)$ fonksiyonu bulunmalıdır ki, integral denklemde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra eşitlik sağlanmalıdır.

Örnek 2.1.

$$u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad ;$$

fonksiyonunun;

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2} u(t) dt$$

integral denkleminin çözümü olduğunu gösterelim.

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2} . \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} . \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$1 + t^2 = u \quad \text{dersek} \quad tdt = du \quad \text{olur.}$$

Buradan ,

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}\int_{1}^{1+x^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.\left(\frac{u^{\frac{-3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1}\Big|_1^{1+x^2}\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}\left(-2.\frac{1}{\sqrt{u}}\Big|_1^{1+x^2}\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.\left(-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2}{1}\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.(-)\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.2$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

Örnek 2.2.

$u(x) = sinx$ fonksiyonunun;

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x.t.u(t)dt$$

integral denkleminin çözümü olduğunu görelim.

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.t.sintdt$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.sintdt$$

Kısmi integrasyon kullanarak $t = u$ ve $sintdt = dv$ seçmeliyiz.

Buradan da $dt = du$, $-cost = v$ olur.

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.[\left(-t.cost - \int -costdt\right)]|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.[(-t.cost + sint)]|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.[\left(-\frac{\pi}{2}.cos\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} + 0.cos0 - sin0\right)]$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.[\left(-\frac{\pi}{2}.0 + 1 + 0.1 - 0\right)]$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.(1)$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{x}{4}$$

$$u(x) = sinx$$

elde edilir. O halde $u(x) = sinx$ verilen integral denklemin çözümüdür.

Örnek 2.3.

$u(x) = 1$ fonksiyonunun;

$$u(x) + \int_0^1 x.(e^{xt} - 1)\, u(t)\, dt = e^x - x$$

integral denkleminin çözümü olduğunu gösterelim.

$$1 + \int_0^1 x\,(e^{xt} - 1)\, 1\, dt = 1 + x \int_0^1 (e^{xt} - 1)\, dt$$

$$= 1 + x \int_0^1 (e^{xt} - 1) dt = 1 + x\, [\left(\frac{1}{x}.e^{xt} - t\right)|_0^1\,]$$

$$= 1 + x.[\ \frac{1}{x}.e^{x} - 1 - t - \frac{1}{x}.e^{0} - 0\quad]$$

$$= 1 + x.[\frac{e}{x} - 1 - \frac{1}{x}] = 1 + e^x - x - 1 = e^x - x$$

denklemini sağladığını göstermiş oluruz

2.6 Çözüm Çeşitleri

II. cins doğrusal integral denklemin çözümü, bilinen metodlar kullanılarak, üç ayrı şekilde elde edilmiştir.

I. Metod: C.Neumann, J.Lioville (1837) ve Volterra nın ortaya koydukları metoddur.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.25)$$

integral denklemi ile verilen $u(x)$ fonksiyonunun, λ nın bir integral serisi şeklinde ifade edilebileceğini göstermişlerdir. Bu seride λ nın çeşitli kuvvetlerinin katsayıları, x in fonksiyonlarıdır. Bu seri ise, λ nın her değeri için yakınsaktır. Çözümün elde edilmesi için kullanılan yol ise "ardışık yaklaştırma metodu" dur. Volterra bu metodu bir teorem olarak şu şekilde ifade etmiştir:

Eğer $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ise (2.25) integral denklemi bu aralıkta her λ değeri için, tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm ardışık yaklaştırma metodu ile belirlenir.

II. Metod: Fredholm un geliştirdiği metoddur. Fredholm e göre, verilen $u(x)$ fonksiyonu, λ nın iki integral serisinin oranı şeklinde ifade edilebilmektedir. Burada sözü edilen serilerin yakınsaklık yarıçapları sonlu değildir.

Fredholm un esas araştırması;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.26)$$

şeklindeki denklemler üzerinde olup, daha çok süreklilik koşulları ile ilgilenmiştir. Fredholm, (2.26) denkleminin bir tam çözümü için,

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_1^n K(x,t_i)\, u(t_i)\, \Delta t_i$$

yaklaşık bağıntısının yazılabileceğini göstermiştir. Burada x 'in ardarda $t_1, t_2, \dots, t_n$ değerleri verilirse, $u(t_i)$ için bir doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bunun çözüm koşulu da bilinmektedir. Bu λ nın bir polinomu şeklinde oluşacaktır. $D(\lambda)$ bu sistemin katsayılar determinantı olmak üzere, $u(x)$ fonksiyonunun bir yaklaşımı da

$$u(x) = f(x) + \lambda \frac{D(t_1, t_2, \dots, t_{n;}\lambda)}{D(\lambda)}$$

olarak ifade edilebilecektir. $D(\lambda) \neq 0$ olmalıdır. İfadeden $D(t_1, t_2, \dots, t_{n;}\ \lambda)$ ve $D(\lambda)$ nın, λ nın birer polinomu oldukları anlaşılmaktadır. λ nın paydayı sıfır yapması halinde, genel olarak çözümü yoktur. Fakat metod bu durumda dahi çözüm verebilmektedir. Bu çözüm, bir integral denklem için, n değişkenli n denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sisteminin, n nin sonsuza yaklaşması halindeki limit durumu olarak bulunur.

Fredholm kendi adıyla anılan integral denklem üzerinde yaptığı çalışmalarda, bu integral denklemler için, bilinen cebir kurallarının geçerli olduğunu göstermiştir. Ayrıca önemli bir teoremi de özdeğerlerin dağılımı üzerinedir. Özdeğerler, λ değerleri olup, Fredholm denkleminin çözümü olması koşulu da yoktur.

Fredholm, teorisini, integral denklemlerin sistemleri üzerine geliştirmiştir. Bunlardan başka, çekirdekleri sürekli olmayıp, kendi deyimiyle zayıf singüler denklemler üzerinde çalıştığı bilinmektedir. Lineer cebir kurallarının tamamen geçerli olduğu bir integral denklemde, çekirdeğin sürekli olması koşulunun gerekli olmadığını, ancak;

$$\int_0^x \int_0^x |K(x,t)|^2 \; dx \, dt \qquad (2.27)$$

iki katlı integralinin mevcut olması koşulunun bulunması yeterli olacağını göstermiştir. Örneğin,

$$u(x) - \int_0^1 ln|x-t| \, u(t)dt = f(x)$$

integral denkleminin, $x = t$ için sürekli olmayan bir çekirdeği bulunmasına rağmen, (2.27) gereğince,

$$\int_0^1 \int_0^1 ln^2|x-t| \, dxdt$$

iki katlı integralinin sonlu olması nedeniyle, denklem zayıf singüleriteli bir denklem olmaktadır.

Carleman bu koşul altında, Fredholm serisinin kurulmasının mümkün olduğunu ve bu fonksiyonların her zaman birer tam fonksiyon olduklarını göstermiştir. Bu tez aralığın sınırlı olmaması halinde de geçerlidir.

Bu konuda bir ispatı Michlin vermiştir. Fredholm teorilerini ve elde edilen serileri, başka integral denklem sınıflarında da kullanılmak üzere genişletmiştir. Fredholm teorisinin devamlı geliştirilmesinde karar adımını ise F.Riese atmıştır. Fredholm denklemleri üzerine, tam sürekli operatör teorisini kuran odur. Bu teori, J.S. Schauder tarafından tamamlanmıştır.

II. Üçüncü metdod: ortogonal geliştirme teorisi ile bağlantılıdır.

$$K(x,t) = \overline{K(x,t)} = K(t,x)$$

özelliğini taşıyan çekirdeğin (simetrik çekirdek) bulunduğu integral denklemler üzerine yapılan çalışmaları içermektedir. Bu konuda esas sonuçlar, bu yüzyılın ilk on yılında D.Hılbert ve E.Schmidt tarafından elde edilmiştir. Bu sonuçlar özetle şöyle ifade edilebilir:

Simetrik integral denklemler (simetrik çekirdekli integral denklemler), Fredholm integral denklemlerinin özel bir sınıfı da olsa, simetrik integral denklemler teorisini, bundan bağımsız olarak incelemek ve geliştirmek olanağı vardır. Bu tür denklemlerin özdeğerleri reeldir ve bunlara ait özfonksiyonlar ortogonaldir.

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t) dt$$

şeklindeki her fonksiyonda $u(x)$ ile, çekirdeğin özfonksiyonları bir dizi meydana getirirler. Burada, denklemin $u(x) = 0$ gibi bir çözümü vardır. Fakat özdeğerler dediğimiz

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sayılarının mevcut olması halinde, bu denklem, bunların herbiri için,

$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ gibi sonlu sayıda çözümler verir. Bunlara ise özfonksiyonlar denir. Çözüm ise C_n keyfi sabitleri göstermek üzere,

$u(x) = \sum C_n\, U_n(x)$ şeklinde ifade edilir. Denklemle birlikte n tane başlangıç koşulu verilmişse, C_n keyfi sabitlerini belirtmek olanağını bulacaktır[24].

2.7 İntegral Denklemler İle Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki

Başlangıç koşullarıyla verilmiş, bir diferansiyel denklem, Volterra tipinde bir integral denkleme dönüştürülebildiği gibi, bir integral denklem de bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir

2.7.1 Diferansiyel Denklemin İntegral Denkleme Dönüştürülmesi

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x).y=f(x) \quad (2.28)$$

doğrusal diferansiyel denklemini alalım. Burada ($i=1,2,3,\dots,n$) olmak üzere $a_i(x)$ fonksiyonları için bir başlangıç noktası, bir düzgün noktadır. Ayrıca n tane olan

$$y(0)=c_0 \quad , \quad y^{|}(0)=c_1 \ , \quad \dots \ , y^{(n-1)}(0)=c_{n-1} \qquad (2.29)$$

başlangıç koşullarının da verildiğini kabul edelim.

$$\frac{d^n y}{dx^n}=u(x) \qquad (2.30)$$

dönüşümünü uygulayalım. Bu ifade,

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=u(x)$$

$$\int_0^x d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\int_0^x u(x)dx$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int_0^x u(x)dx+c_{n-1}$$

biçiminde hesaplanırsa, türev mertebesi, bir mertebe düşürülmüş olur. Benzer şekilde devam edilerek,

$$\int_{o}^{x} d\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = \int_{0}^{x}\left[\int_{0}^{x} u(x)\ dx + c_{n-1}\right] dx$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{0}^{x}\int_{0}^{x} u(x)\,dx\,dx + c_{n-1}\int_{0}^{x} dx + c_{n-2}$$

ifadesi elde edilir. Daha da devam edildiğinde

$$\frac{dy}{dx} = \int_{0}^{x} \ldots (n-1) \ldots \int_{0}^{x} u(x)dx \ldots dx + \frac{1}{(n-2)!}.c_{n-1}.x^{n-2} + \frac{1}{(n-3)!}.c_{n-2}.x^{n-3} + \cdots + c_1$$

sonucuna ulaşılır. Bir kez daha integral alınarak,

$$y = \int_{0}^{x} \ldots (n) \ldots \int_{0}^{x} u(x)dx \ldots dx + \frac{1}{(n-1)!}.c_{n-1}.x^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}.c_{n-2}.x^{n-2} + \cdots + c_1.x + c_0$$

bulunur.

Burada da görüldüğü üzere sık sık çok katlı (n katlı) integrallerle işlem yapmak zorunda kalınmaktadır. Bunu göstermek üzere,

$$\int \ldots (\,n\,) \ldots \int$$

biçimindeki notasyonun kullanılması uygun bulunmuştur. İntegraller arasındaki (n), katlılık mertebesini belirtmektedir.

Yukarıda bulunulan ifadeler (2.28) diferansiyel denkleminde yerine yazıldığında ve gerekli işlemlerden sonra aşağıdaki bağıntı elde edilmektedir.

$$[\int_0^x \dots(n)\dots \int_0^x u(t)dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.u(t)dt\,] \qquad (2.31)$$

Tek katlı integral yardımıyla ifade edebiliriz. Buna göre,

$$u(x) + a_1(x).\int_0^x u(x)dx + \dots + a_n(x).\int_0^x \dots(n)\dots \int_0^x u(x)dx \dots dx = F(x) \qquad (2.32)$$

bağıntısı, (2.31) yardımıyla ,

$$u(x) + a_1(x).\int_0^x u(t)dt$$
$$+ a_2(x).\int_0^x (x-t)u(t)dt + \dots + a_n(x)\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt = F(x)$$

şeklinde ifade edilebilecektir. Bu ise, belirli integral özelliklerinden yararlanılarak,

$$u(x) + \int_0^x [\,a_1(x) + a_2(x)(x-t) + a_3(x).\frac{(x-t)^2}{2!} + \dots$$
$$+\ a_n(x).\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,].u(t)dt = F(x)$$

olarak yazılabilir. Burada köşeli parantez içindeki ifadeyi çekirdek fonksiyonu olarak göz önüne alalım:

$$K(x,t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t) + \dots +\ a_n(x).\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Bu çekirdek fonksiyonu yerine yazılarak,

$$u(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt = F(x)$$

Şeklindeki, 2. cins bir Volterra integral denklemine varılır. Böylece (2.28) ile verilen diferansiyel denklem, bir integral denkleme dönüşmüş olmaktadır[24].

Örnek 2.4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5.\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \;\; , \;\; y'(0) = 0 \qquad (2.33)$$

başlangıç koşullarıyla birlikte verilen diferansiyel denklemini, integral denkleme dönüştürelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)$$

alalım

$$y'(x)|_0^x = \int_0^x u(x)dx$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(x)dx \qquad , \qquad y'(x) = \int_0^x u(x)dx$$

$$\int_0^x y'(x)dx = \int_0^x \int_0^x u(x)\,dxdx \qquad , \qquad y(x)|_0^x = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

Bulunanları (2.33) de yerine yazalım;

$$u(x) - 5.\int_0^x u(x)\,dx - 4.\int_0^x (x-t)u(t)dt = 4$$

$$u(x) = 5.\int_0^x u(x)\,dx + 4.\int_0^x (x-t)u(t)dt + 4$$

$$u(x) = 4 + \int_0^x [\,5 + 4.(x-t)]u(t)dt$$

tipinde II. cins bir Volterra integral denklem elde edilmiş olur.

Örnek 2.5.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - sinx.\frac{dy}{dx} + e^x y = x \quad , \qquad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = -1$$

başlangıç koşullarıyla birlikte verilen diferansiyel denklemini, integral denkleme dönüştürelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)$$

alalım.

$$y'(x)|_0^x = \int_0^x u(x)dx$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(x)\,dx$$

$$y'(x) - (-1) = \int_0^x u(x)\,dx$$

$$y'(x) = \int_0^x u(x)\,dx - 1$$

$$\int_0^x y'(x)dx = \int_0^x \int_0^x u(x)\,dxdx - \int_0^x dx$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x (x-t)u(t)dt - x$$

$$y(x) = \int_0^x (x-t)u(t)dt - x + 1$$

$$u(x) - sinx.\left[\int_0^x u(x)dx - 1\right] + e^x.\left[\int_0^x (x-t)u(t)dt - x + 1\right] = x$$

$$u(x) - sinx.\int_0^x u(x)dx + sinx + e^x.\int_0^x (x-t)\,u(t)dt - x.e^x + e^x = x$$

$$u(x) = x - sinx + e^x.(x-1) + \int_0^x \{\,sinx - e^x.(x-t)\}\,u(t)dt$$

olarak integral denkleme dönüştürülebilir.

2.7.2 İntegral Denklemin Diferansiyel Denkleme Dönüştürülmesi

İntegral denklemin bir diferansiyel denkleme dönüştürülmesi de olanaklıdır. Bunun için Leibnitz Formülü'nü uygulamamız yeterlidir. Bu formül, integral işareti altında türev alma işlemini gerçekleştirmektedir .Leibnitz formülü;

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} F(x,t)dt = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt + F\{x,B(x)\}\frac{dB}{dx} - F\{x,A(x)\}\frac{dA}{dx} \quad (2.34)$$

biçimindedir. Burada $A(x)$ ve $B(x)$ in sabitler olması halinde,

$$\frac{dA}{dx} = 0, \quad \frac{dB}{dx} = 0$$

olacağından formül,

$$\frac{d}{dx}\int_{A}^{B} F(x,t)dt = \int_{A}^{B} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dt$$

olarak kullanılır.

Örnek 2.6.

$$u(x) - \int_{0}^{x} u(t)\, cot\, t\, dt = sinx \qquad (2.35)$$

integral denklemi verilmiştir. Başlangıç koşulu $x = 0$ için $u(x) = 0$ olduğuna göre, bu integral denklemi diferansiyel denkleme dönüştürelim.

integral denklemde her iki tarafın türevi alınırsa;

$$\frac{du(x)}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x} u(t) cot\, t\, dt\right) = \frac{d(sinx)}{dx}$$

$$u'(x) - \frac{d}{dx}\int_{0}^{x} u(t) \cot t\, dt = cosx$$

olur. Leibnitz formülüne göre;

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x} u(t) \cot t\, dt\right) = \int_{0}^{x} 0\, dt + u(x)\, cotx\, .1 = u(x)\, cotx$$

bulunacağından (2.35) integral denkleminin,

$$u'(x) - u(x)\cot x = cos\, x$$

şeklindeki, birinci mertebeden bir doğrusal diferansiyel denkleme dönüştürülmüş olur.

Örnek 2.7.

$$u(x) = x + \int_0^x xu(t)dt \qquad (2.36)$$

integral denklemini, diferansiyel denkleme dönüştürelim.

İki tarafın türevini alırsak,

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}x + \lambda\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt$$

$$u'(x) = 1 + \lambda\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt$$

olur, Leibnitz formülünü uygularsak;

$$\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt = \int_0^x u(t)dt + xu(x)$$

bulunur. Buradan

$$u'(x) = 1 + \lambda \left[\int_0^x u(t)dt + xu(x) \right]$$

elde edilir. İfadenin içinde halen integral bulunduğundan, tekrar türev alarak integralden kurtulmaya çalışalım

$$\frac{du'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(1) + \lambda \, \frac{d}{dx} \int_0^x u(t)dt + \lambda \frac{d}{dx} \{x \, u(x)\}$$

$$u''(x) = 0 + \lambda \, u(x) + \lambda \, \{u(x) + x \, u'(x)\}$$

ve elde edilir düzenlendiğinde, (2.36) denklemine uyan diferansiyel denklem,

$$u''(x) - \lambda \, x \, u'(x) - 2 \, \lambda \, u(x) = 0$$

olarak bulunur.

Örnek 2.8.

$$u(x) = arctanx - \int_0^x x.t.u(t)dt \tag{2.37}$$

integral denklemini, diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Yine her iki tarafın türevini alırsak;

$$u'(x) = \frac{1}{1+x^2} - [\int_0^x t.u(t)dt + x.x.u(x)]$$

$$u'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x t.u(t)dt - x^2.u(x)$$

$$u'(x) + x^2.u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x t.u(t)dt$$

elde etmiş oluruz. Denklemde halen integral bulunduğundan, bir kez daha türev alınmalıdır.

$$u''(x) + 2x.u(x) + u'(x).x^2 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} - x.u(x)$$

$$u''(x) + u'(x).x^2 + 3x.u(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

şeklinde bir diferansiyel denklemine dönüştürmüş oluruz.

2.8 İntegral Denklem Sistemleri

Uygulamalarda çoğu kez, integral denklem sistemleri ile karşılaşılabilir. Böyle bir denklem sistemi , i= 1,2,…,n olmak üzere

$$u_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b K_{ik}(x,t)u_k(t)dt \qquad (2.38)$$

yapısındadır.

Tek bir integral denklemi çözmek için kullanılan teori ve çözüm yöntemleri, integral denklem sistemleri için de aynen kullanabilmektedir. Gerçekten de,

$$\int_a^b |K_{ik}(x,t)|^2 dt$$

integrali var ise λ parametresi,

$$|\lambda| < \left[\underset{1 \leq i \leq n}{Max} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K_{ik}(x,t)|^2 dx\, dt} \right]^{-1}$$

eşitsizliği ile belirtilecek şekilde yeterince küçük seçilebiliyorsa, ardışık yaklaştırma ile yakınsak olacaktır.

Eğer $K_{ik}(x,t)$ çekirdeği dejenere tipinde ise (2.38) sistemi, bir doğrusal cebirsel denklem sistemine indirgenebilir. Genel olarak, (2.38) sistemi dejenere çekirdekli bir sisteme indirgenebildiği zaman bu çekirdek tipi için uygulanan yöntem, burada da kullanılabilmektedir.

Bir integral denklem sistemi, izlenen yöntem yardımıyla, tek bir denkleme dönüştürülebilmektedir. Göz önüne alınan x ve t değişkenleri, başlangıç aralığı $[a,b]$ nın, (b-a) olan uzunluğunun n katı uzunlukta olan bir aralıkta da bulunacaklardır. Bu aralığı $[a, nb-(n-1)a]$ olarak seçersek,

$$nb-(n-1)a-a = nb-na+a-a$$

$$= nb-na = n(b-a)$$

olarak, yukarıda sözü edilen uzunlukta bir aralık olduğu görülebilir. Bu yeni aralığa göre; $a+(i-1)(b-a) \leq x < a+i(b-a)$

$$a+(k-1)(b-a) \leq t < a+k(b-a)$$

olacak şekilde; $u_i(x), f_i(x)\ ve\ K_{ik}(x,t)$ fonksiyonları

$$\Phi(x) = u_i\{x-(i-1)(b-a)\}$$

$$F(x) = f_i\{x-(i-1)(b-a)\}$$

$$K(x,t) = K_{ik}\{x-(i-1)(b-a), t-(k-1)(b-a)\}$$

fonksiyonları yardımıyla tek türlü ifade edilebilirler. Bu tanımlamalara göre (2.38) sistemi de;

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_{a}^{nb-(n-1)a} K(x,t)\,\Phi(t)\,dt$$

integral denklemi yardımıyla, tek bir denklem olarak gösterilebilir.

2.9 Temel Tanım ve Teoremler

Aşağıda [23] de verilmiş olan kompakt olmama ölçümü tanımını kullanıyoruz. $(E, \|\ \ \|)$ bir Banach uzayı olsun. $\bar{X}$ ve $Conv\,X$ ile sırasıyla X in kapanışını ve konveks genişlemesini gösterelim. Γ_E, E'nin boştan farklı sınırlı alt kümelerinin ailesi ve γ_E de E'nin boştan farklı, bağıl kompakt alt kümelerinin ailelerini göstersin.

Tanım 2.9. [20] Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mu: \Gamma_E \to [0,\infty)$ fonksiyonuna E uzayında kompakt olmama ölçümü denir.

1. $ker\mu = \{X \in \Gamma_E\ , \mu(X) = 0\}$

2. $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$

3. $\mu(\bar{X}) = \mu(ConvX) = \mu(X)$

4. $\mu(\theta X + (1-\theta)Y) \leq \theta\mu(X) + (1-\theta)\mu(Y),\ \ \forall\theta \in [0,1]$

5. $\{X_n\}$ Γ_E nin kapalı alt kümelerini dizisi ise $X_{n+1} \subset X_n$, $n = 1,2,\ldots$ için ve $\lim_{n\to\infty}\mu(X_n) = 0$, $X_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$ boş olmayan kümeler.

Açıklama 2.10.

M; E Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T\colon M \to E$ operatörü de sürekli olsun. Öyle ki M'nin sınırlı kümelerini sınırlı kümelere dönüştürsün. Bu durumda X' in herhangi bir sınırlı M alt kümesi için

$$\mu(TX) \leq k\mu(X)$$

koşulu sağlanıyorsa "T'ye Darboaux koşulunu sağlıyor" denir. Eğer $k <1$ olmak üzere T Darboaux koşulunu sağlıyor ise T' ye bir "daraltan dönüşüm" denir.

Teorem 2.11. [22] Q; E Banach uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. μ , E de kompakt olmama ölçümü olsun. $T\colon Q \to Q$ bir daraltan dönüşüm ise T nin Q üzerinde bir sabit noktası vardır.

3 VOLTERRA İNTEGRAL DNEKLEMLERİ

3.1 Temel Kavramlar

λ bir parametre, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad 3.1$$

biçiminde verilen bağıntıya, *ikinci çeşit doğrusal Volterra integral denklemi* denir.

Eğer, $f(x) = 0$ ise

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad 3.2$$

biçimindeki denkleme ise *ikinci çeşit doğrusal homojen Volterra integral denklemi* denir.

$$\int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt = \varphi(x) \qquad 3.3$$

biçimindeki denklem ise, *birinci çeşit Volterra integral denklemidir.*

Volterra integral denklemler ile Fredholm integral denklemleri arasındaki tek fark, daha önce de değinildiği gibi, sınırlarından birinin değişken olmasıdır. Genel olarak sınırlar yukarıda verildiği gibi kullanılmaktadır.

$$\int_x^a K(x,t)\, u(t)\, dt = -\int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt$$

şeklinde yazılabileceği için, bu durumda da genel ifade aynı kalacaktır. (3.3) teki biçimde verilen denklemler, genelde bir diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözülür[24].

Örnek 3.1.

$$2x^3 = \int_0^x \{1 - 5(x-t) + 2(x-t)^2\}\, u(t)\, dt \qquad (3.4)$$

integral denklemini alalım. Bu denklem (3.3) biçiminde bir denklemdir. Denklemin çözümü için ardarda türev alındığında,

$$6x^2 = u(x) - 5\int_0^x u(t)\, dt + 4\int_0^x (x-t)\, u(t)\, dt$$

$$12x = u'(x) - 5\, u(x) + 4\int_0^x u(t)\, dt$$

$$12 = u''(x) - 5\, u'(x) + 4\, u(x)$$

biçiminde sabit katsayılı ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir.

Bu elde edilen diferansiyel denklemin çözümü, C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$u(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + 3$$

şeklinde elde edilir. C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere, başlangıç koşullarını (3.4) denkleminden elde edelim. $x = 0$ için, $u(0) = 0$; $u'(0) = 0$ olduğu görülür. Bu hesaplamalar yapıldığında ise, $C_1 = 1$, $C_2 = -4$ olarak elde edilirler. Bu durumda diferansiyel denklemin bu koşullara uyan çözümü ise;

$$u(x) = e^x - 4e^{4x} + 3$$

olur. Bu çözüm aynı zamanda (3.4) denkleminin de çözümüdür[24].

3.2 Doğrusal Diferansiyel Denklemler ile Volterra İntegral Denklemler Arasındaki İlişki

$a_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ katsayıları sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_i(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ \dots + a_n(x)y = F(x) \qquad (3.5)$$

doğrusal diferansiyel denkleminin

$$y(0) = C_0\,,\ \ y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \qquad (3.6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü ikinci çeşit Volterra integral denkleminin çözümüne indirgenebilir.

Bu durumu ikinci mertebeden bir doğrusal diferansiyel denklem üzerinde gösterirsek;

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x) = F(x) \qquad (3.7)$$

$$y(0) = C_0\ , \qquad y'(0) = C_1 \qquad (3.8)$$

alalım.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x) \qquad (3.9)$$

tanımlayalım. (3.8) başlangıç koşullarını düşünerek (3.9) denkleminin ardarda iki kez integralini aldığımızda;

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(x)\,dt + C_1\,, \qquad y = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + C_1 x + C_0 \qquad (3.10)$$

bağıntısını buluruz. Bu bağıntıyı elde edebilmek için yararlandığımız bağıntı;

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)\, dz$$

bağıntısıdır. (3.9) ve (3.10) u kullanarak (3.5) ile verilen diferansiyel denklemi

$$\varphi(x) + \int_{0}^{x} a_1(x)\, \varphi(t)\, dt + C_1 a_1(x)$$
$$+ \int_{0}^{x} a_2(x)\, (x-t)\, \varphi(t)\, dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x)$$

biçiminde veya,

$$\varphi(x) + \int_{0}^{x} [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\varphi(t)\, dt = F(x) - C_1 a_1(x)$$
$$- C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \qquad (3.11)$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer;

$$K(x,t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \qquad (3.12)$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \qquad (3.13)$$

tanımlanırsa (3.11) bağıntısı,

$$\varphi(x) = \int_{0}^{x} K(x,t)\, \varphi(t)\, dt + f(x) \qquad (3.14)$$

biçimine gelecektir. Bu da ikinci çeşit Volterra denklemidir.

(3.14) denkleminin varlığının ve tekliğinin kaynağını, katsayıları $x = 0$ da sürekli olan bir doğrusal diferansiyel denklem için, (3.7) ve (3.8) ile verilen Cauchy probleminin tek çözümünün var olması durumu oluşturmaktadır.

Aksi de doğrudur. Şöyle ki; K ve f i (3.12) ve (3.13) ile tanımladıktan sonra (3.14) integral denklemini çözüp, $\varphi(x)$ için elde edilen ifadeyi (3.10) un ikinci denkleminde yerine yazarsak, (3.7) denkleminin (3.8) başlangıç koşullarını sağlayan tek çözümünü buluruz[27].

Örnek 3.2.

Aşağıda başlangıç koşulları verilen diferansiyel denklemden bir integral denklem oluşturalım.

$$y'' + xy' + y = 0$$

$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

Önce

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x) \qquad (3.15)$$

yazalım. Bu durumda;

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\,dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)\,dt\,, \quad y = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + 1 \qquad (3.16)$$

elde edilir. (3.15) ve (3.16) verilen diferansiyel denklemde yerine yazıldığında da aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\varphi(x) + \int_0^x x\,\varphi(t)\,dt + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + 1 = 0$$

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

3.3 Volterra İntegral Denkleminin Çözücü Çekirdeği, İntegral Denklemlerin Çözücü Çekirdek Yardımıyla Çözülmesi

$0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$ için $K(x,t)$ ve $0 \leq x \leq a$ için $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olacak şekilde ikinci cins Volterra integral denklemi

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (3.17)$$

ile verilmiş olsun.

(3.17) integral denkleminin λ ya göre yazılmış

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\, \varphi_1(x) + \lambda^2\, \varphi_2(x) + \ \dots + \lambda^n\, \varphi_n(x) + \ \dots \qquad (3.18)$$

biçiminde bir kuvvet serisi cinsinden çözümünü arayacağız. Bu seri (3.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) + \lambda\, \varphi_1(x) + \lambda^2\, \varphi_2(x) + \ \dots + \lambda^n\, \varphi_n(x) + \cdots \\ &= f(x) \\ &+ \lambda \int_0^x K(x,t)[\varphi_0(x) + \lambda\, \varphi_1(x) + \ \dots + \lambda^n\, \varphi_n(x) + \ \dots]dt \qquad (3.19) \end{aligned}$$

bulunur. (3.19) denkleminin iki tarafında da aynı kuvvette bulunan λ ların katsayılarını eşitlersek,

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\, \varphi_0(t)\, dt = \int_0^x K(x,t)\, f(t) dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\, \varphi_1(t)\, dt = \int_0^x K(x,t) \int_0^t K(t,t_1)\, f(t_1)\, dt_1\, dt \qquad (3.20)$$

… ..

elde edilir. (3.20) de verilen eşitliklerde $\varphi_n(x)$ fonksiyonlarının ardışık olarak bulunabilmesini sağlayan bir yöntemin bulunmasını sağlar.

(3.18) ile yazılabilen serinin, $f(x)$ ve $K(x,t)$ nin yukarıda verilen özellikleri sağlaması durumunda her λ ve $[0,a]$ aralığında bulunan her x için λ ve x 'e göre düzgün yakınsak olduğu ve toplamının (3.17) nin tek çözümü olduğu gösterilebilir.

(3.20) den şu sonuçlar çıkarılabilir;

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\, f(t)\, dt \qquad (3.21)$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)\, f(t_1)\, dt_1\right] dt \\ &= \int_0^x f(t_1)\, dt_1 \int_{t_1}^x K(x,t)\, K(t,t_1)\, dt \\ &= \int_0^x K_2(x,t_1)\, f(t_1)\, dt_1 \qquad (3.22)\end{aligned}$$

Burada

$$K_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t)\, K(t,t_1)\, dt \qquad (3.23)$$

olur. Buradan devam edilirse;

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t)\, f(t)\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (3.24)$$

olduğu gösterilebilir. Burada $K_n(x,t)$ fonksiyonları *ardışık çekirdekler* olarak adlandırılır. Bunlar aşağıda verilen rekürans bağıntıları yardımıyla belirlenebilir;

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_n(z,t)\, dz \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

(3.23) ve (3.24) kullanılarak (3.18) eşitliği;

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v \int_0^x K_v(x,t)\, f(t)\, dt \qquad (3.25)$$

biçiminde yazılabilir.

$$R(x,t;\, \lambda) = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v\, K_{v+1}(x,t) \qquad (3.26)$$

eşitliği ile tanımlanan $R(x,t;\, \lambda)$ fonksiyonu (3.17) integral denkleminin çözücü çekirdeği olarak adlandırılır. $K(x,t)$ nin sürekli olması durumunda (3.26) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Hem ardışık çekirdekler, hem de çözücü çekirdekler, integral denklemin alt limitine bağlı değildirler.

$R(x,t;\, \lambda)$ çözücü çekirdeği, aşağıda verilen fonksiyonel denklemi gerçeklemektedir;

$$R(x,t;\, \lambda) = K(x,t) + \lambda \int_0^x K(x,s)\; R(s,t;\lambda)\, ds \qquad (3.27)$$

Çözücü çekirdek yardımıyla (3.17) integral denkleminin çözümü;

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x,t;\lambda)\, dt \qquad (3.28)$$

biçiminde yazılabilir[27].

Örnek 3.3.

$K(x,t) \equiv 1$ olacak şekilde Volterra integral denkleminin çözücü çekirdeğini bulalım.

$K_1(x,t) = K(x,t) = 1$ olur. Burada (3.24) bağıntısını kullanırsak,

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_1(z,t)\, dz = \int_t^x dz = x - t$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x 1\,(z-t)\, dz = \frac{(x-t)^2}{2}$$

$$K_4(x,t) = \int_t^x 1\ \frac{(z-t)^2}{2} dz = \frac{(x-t)^3}{3!}$$

… … … … … … … … … … … … … … … … ….

$$K_n(x,t) = \int_t^x 1\ K_{n-1}(z,t)\, dz = \int_t^x 1\ \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!} dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Buradan da, çözücü çekirdeğin tanımına göre

$$R(x,t;\,\lambda) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \lambda^n\ K_{n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}$$

bulunur.

$K(x,t)$ çekirdeğinin t cinsinden $(n-1)$ nci dereceden bir polinom olduğunu ve

$$K(x,t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + \cdots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \tag{3.29}$$

biçiminde yazılabildiğini ve $a_k(x)$ katsayılarının $[0, a]$ aralığında sürekli olduğunu kabul edelim. $g(x, t;\ \lambda)$ fonksiyonunun

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \ \dots + a_{n-1}(x)g\right] = 0 \qquad (3.30)$$

diferansiyel denkleminin

$$g|_{x=t} = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=t} = \cdots = \left.\frac{d^{n-2}g}{dx^n}\right|_{x=t} = 0\ ;\ \left.\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\right|_{x=t} = 1 \qquad (3.31)$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü olarak tanımlanması durumunda $R(x, t;\ \lambda)$ çözücü çekirdeği

$$R(x, t;\ \lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{d^m g(x, t; \lambda)}{dx^n} \qquad (3.32)$$

şeklinde tanımlanır.

$$K(x, t) = b_0(x) + b_1(x)(t - x) + \ \dots + \frac{b_{n-1}(x)}{(n-1)!}(t - x)^{n-1} \qquad (3.33)$$

olması durumunda da çözücü çekirdek

$$R(x, t;\ \lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d^m g(x, t; \lambda)}{dx^n} \qquad (3.34)$$

ile tanımlanacaktır. Burada $g(x, t;\ \lambda)$, (3.31) ile verilen koşulları sağlayan

$$\frac{d^n g}{dt^n} + \left[b_0(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} + b_1(t)\frac{d^{n-2}g}{dt^{n-2}} + \ \dots + b_{n-1}(t)g\right] = 0 \qquad (3.35)$$

denkleminin bir çözümüdür [26].

Örnek 3.4.

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

integral denkleminin çözücü çekirdeğini bulalım.

Denklemi için $K(x,t) = x - t$ ve $\lambda = 1$ olur. (3.29) numaralı bağıntıya göre $a_1(x) = 1$ ve diğer $a_k(x) = 0$ olur. Buna göre (3.30) numaralı bağıntı

$$\frac{d^2 g(x,t;1)}{dx^2} - g(x,t;1) = 0$$

olur. Buradan hareketle,

$$g(x,t;1) = g(x,t) = C_1(t)e^x + C_2(t)e^{-x}$$

olarak bulunur. (3.31) deki bağıntılardan

$$\begin{cases} C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t} = 0 \\ C_1(t)e^t - C_2(t)e^{-t} = 1 \end{cases} \qquad (3.36)$$

sistemi elde edilir. (3.36) sistemi çözüldüğünde ise

$$C_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\ , \ \ C_2(t) = -\frac{1}{2}e^{t}$$

olur. Buradan da

$$g(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{x-t} - e^{-(x-t)}\right) = sinh(x-t)$$

bulunur. (3.32) bağıntısını kullanarak

$$R(x,t;1) = \frac{\partial^2 \sinh(x-t)}{\partial x^2} = sinh(x-t)$$

elde edilir.

Uyarı 3.5.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\ \varphi(t)\ dt \qquad (3.37)$$

bağıntısıyla verilen ikinci çeşit Volterra integral denklemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları üzerine yüklenen sürekli olma koşulundan daha genel varsayımlar altında gerçeklenir.

Teorem 3.6. $K(x,t)$ çekirdeği $L_2(\Omega_0)$ uzayına, $f(x)$ fonksiyonu $L_2(0,a)$ uzayına ait olan ve (3.37) ile verilen ikinci çeşit volterra integral denkleminin $L_2(0,a)$ uzayında bir ve yalnız bir tek çözümü vardır. Bu çözüm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda)\, f(t)\ dt \qquad (3.38)$$

bağıntısıyla verilir ve $R(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeği

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v\, K_{v+1}(x,t) \qquad (3.39)$$

bağıntısıyla belirlenir. Ardışık çekirdekleri içeren bu seri her yerde yakınsaktır.

Not 3.7. İntegral denklemlerin çözümlerinin tekliği ile ilgili problemlerde, çözümün arandığı fonksiyonlar sınıfı (integre edilebilirlik sınıfı, kuadratik integre edilebilirlik sınıfı, süreklilik) önemi bir rol oynar.

Bir Volterra integral denkleminin $K(x,t)$ çekirdeği $x \in (a,b)$ için sınırlı ve M bir sabit olmak üzere

$$|K(x,t)| \leq M \quad , \quad x \in (a,b)$$

ve $f(x)$ in sabit terimi (a,b) aralığında integre edilebilir ise her λ değeri için (a,b) aralığında Volterra integral denkleminin $\varphi(x)$ gibi integre edilebilir bir tek çözümü vardır.

Çözümün integre edilebilir olması isteğini düşünmezsek, teklik teoremi, denklemin integre edilebilir çözümlerinin olmasının yanında, integre edilemez çözümlerinin olması nedeniyle geçerli olmaya devam edemez.

Örnek 3.8.

$$K(x,t) = \begin{cases} te^{\frac{1}{x^2}-1} & , \quad 0 \le t \le e^{1-\frac{1}{x^2}} \\ x & , \quad xe^{1-\frac{1}{x^2}} \le t \le x \\ 0 & , \quad t > x \end{cases} \qquad (3.40)$$

verilsin.

$0 \le K(x,t) \le x \le 1$ olup $K(x,t)$ çekirdeği $\Omega_0\{0 \le x\,, t \le 1\}$ karesi içinde sınırlıdır. Ayrıca $0 \le t \le x$ için süreklidir. Buna göre (3.40) denklemi integre edilebilir $\varphi(x) \equiv 0$ çözümüne sahiptir ve başka integre edilebilir çözümü yoktur.

Diğer taraftan, C keyfi bir sabit ve $x \ne 0$ olmak üzere (3.40) denkleminin $(0,1)$ aralığında

$$\varphi(x) = \frac{C}{x}$$

biçiminde integre edilemez sonsuz sayıda çözümünün var olduğu gösterilebilir. $K(x,t)$ çekirdeği için (3.40) bağıntısına göre,

$$\int_0^x K(x,t)\ \varphi(t)dt = \int_0^{xe^{1-\frac{1}{x^2}}} txe^{1-\frac{1}{x^2}}\ \frac{C}{t}\ dt + \int_{xe^{1-\frac{1}{x^2}}}^{x} x\ \frac{C}{t}\ dt = Cx + Cxlne^{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{C}{x}$$

ve buradan da

$$\frac{C}{x} \equiv \frac{C}{x} \qquad (x \neq 0)$$

olarak bulunur. Bu da

$$\varphi(x) = \frac{C}{x}$$

in (3.40) denkleminin integre edilemez bir çözümü olmasıdır. [26]

Örnek 3.9.

$$\varphi(x) = x + \int_0^x u(t)\, dt \tag{3.41}$$

integral denkleminin çözümünü bulalım.

Verilen integral denklemde $K(x,t) = 1$ olur. Buradan da resolvantın

$$R(x,t;\lambda) = e^{x-t}$$

olduğunu söyleyebiliriz. (3.38) bağıntısını kullanarak ta denklemin çözümü araştırılabilir.

$$\varphi(x) = x + \int_0^x e^{x-t}\, t \;\, dt$$

buradan da;

$$\varphi(x) = e^x - 1$$

olarak bulunur.

Örnek 3.10.

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2 - t^2} \qquad (3.42)$$

denkleminin çözümünü, resovant yardımıyla bulalım.

Bu integral denklemde

$$K(x,t) = e^{x^2-t^2}$$

olup $\lambda = 1$ dir . Şimdi de itere çekirdekleri hesaplayalım.

$$K_{(1)}(x,t) = K(x,t) = e^{x^2-t^2}$$

$$K_{(2)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_{(1)}(z,t)\,dz = \int_t^x e^{x^2-z^2}\; e^{z^2-t^2}\,dz$$

$$= \int_t^x e^{x^2-t^2}\,dz = e^{x^2-t^2}\int_t^x dz = (x-t)\,e^{x^2-t^2}$$

$$K_{(3)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\,K_{(2)}(z,t)\;\,dz = \int_0^x e^{x^2-z^2}\,(z-t)\,e^{z^2-t^2}\,dz$$

$$= e^{x^2-t^2}\int_0^x (z-t)\,dz = \frac{(x-t)^2}{2}\; e^{x^2-t^2}$$

$$K_{(4)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\,K_{(3)}(z,t)\;\,dz = \int_0^x e^{x^2-z^2}\;\frac{(z-t)^2}{2}\,e^{z^2-t^2}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2-t^2}\int_t^x (z-t)^2 dz = \frac{(x-t)^3}{2.3}$$

devam edersek,

$$K_{(n+1)}(x,t) = \frac{(x-t)^n}{n!} e^{x^2-t^2}$$

olarak elde edilir. (3.39) bağıntısına göre bu problem için resolvant

$$R(x,t;1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-t)^n}{n!} e^{x^2-t^2}$$

olur veya

$$R(x,t;1) = e^{x-t}\, e^{x^2-t^2}$$

biçiminde elde edilir. Resolvant bu şekilde bulunduğuna göre, (3.38) bağıntısı yardımıyla integral denklem,

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t} \;\; e^{x^2-t^2}\, e^{t^2}\, dt$$

$$\varphi(x) = e^{x^2} + e^{x^2+x} \int_0^x e^{-t}\, dt$$

biçiminde elde edilir. Hesaplamalar yapıldığında (3.42) denkleminin çözümü,

$$\varphi(x) = e^{x^2+x}$$

olarak bulunur.

3.4 Gama ve Beta Fonksiyonları

Gama ve *Beta* fonksiyonlarına *Euler integralleri* de denilmektedir. Beta fonksiyonlarına *1.cins Euler integralleri*, Gama fonksiyonlarına da *2.cins Euler integralleri* denir.

Gama fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \qquad (3.43)$$

biçimindeki bir improper integralle tanımlanmıştır. Burada $x,\ Re(x) > 0$ olan herhangi bir karmaşık sayıdır. Özel olarak $x = 1$ için,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1 \qquad (3.44)$$

olur. (3.43) fonksiyonuna kısmi integral uygularsak;

$$e^{-t} = u \quad , \quad t^{x-1}\ dt = dv$$

$$-e^{-t}\, dt = du \quad , \quad v = \frac{1}{x}\, t^x$$

olur. Buradan da elde edilenleri yerine yazarsak,

$$\Gamma(x) = \left|\frac{1}{x}\, t^x\, e^{-t}\right|_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}\, t^x\, dt$$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \qquad (3.45)$$

olarak bulunur. Buradan da Gama fonksiyonları için önemli bir bağıntı olan

$$x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \qquad (3.46)$$

bağıntısı yazılabilir. Bu bağıntı yardımıyla Gama fonksiyonları için bazı sayısal değerler bulunabilir. (3.44) bağıntısına göre,

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2.\Gamma(2) = 2.1 = 2 = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3.\Gamma(3) = 3.2 = 6 = 3!$$

olacak şekilde devam edildiğinde, pozitif n sayısı için, genel olarak;

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{3.47}$$

bağıntısı elde edilebilir. n tamsayı olduğunda yukarıdaki değerler hesaplanabilir. Gama fonksiyonu tam olmayan pozitif değerler için de hesaplanabilir.

Analizden

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Burada $x = \sqrt{t}$ değişken dönüşümünü uygularsak integral,

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\frac{1}{2}-1}\,dt = \sqrt{\pi}$$

biçimine dönüşecektir. Bu bağıntı (3.43) ile verilen Gama fonksiyonu ile karşılaştırıldığında, $x = 1/2$ olacaktır. Buradan da,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

olur. (3.46) daki bağıntıya göre,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1.3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{1.3.5}{2^3}\sqrt{\pi}$$

olacaktır, böyle devam edildiğinde de, genel olarak

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3.5\ \ldots\ldots(2n-1)}{2^{n}}\sqrt{\pi} \tag{3.48}$$

olarak bulunur. Burada n, pozitif bir tamsayıdır. Yukarıda elde edilen değerler karşılaştırıldığında da bunlar arasında, aşağıda verilen şekilde bağıntılar bulunabilir.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad , \qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

sonuçları karşılaştırıldığında,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$$

yazılabilir. Benzer şekilde;

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

olacaktır. Burada da negatif tam olmayan bazı sayılar için Gama fonksiyonu hesaplanmış olur. Diğer taraftan,

$$\Gamma(0)=\Gamma(-1)=\cdots=\Gamma(-n)=\infty$$

olduğu görülür. $Re(x)>0$ olmak üzere $\Gamma(x)$ fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu heap yöntemine göre, $\Gamma(x)$ fonksiyonu, sol yarı düzlemde uzatılabilir. Burada, n pozitif tam ve sıfır olabilen bir sayı olacak şekilde, $x = -n$ noktaları hariç $\Gamma(x)$ her yerde tanımlıdır.

Gauss ve Legendre'nin çarpım teoremi gereğince, genel olarak;

$$\Gamma(x).\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-nx}.\Gamma(nx)$$

olduğu bilinmektedir. Özel olarak $n = 2$ seçildiğinde,

$$\Gamma(x).\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$$

bağıntısı yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\Gamma(x).\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (3.49)$$

olduğunu biliyoruz. $\Gamma(x)$ de x yerine z yazılarak, $Re(z) > 0$ için,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\,.t^{z-1}\;dt$$

elde edilir. Burada,

$$e^{-t} = z$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$e^{-t}dt = dz$$

olur. Sınır değerler de,

$$t = 0 \quad \text{için} \quad z = 1 \qquad \text{ve} \qquad t = \infty \quad \text{için} \quad z = 0$$

olur, ayrıca

$$t^{z-1} = \left(ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}$$

olacağından

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(ln\frac{1}{x}\right)^{z-1} \; dx \qquad (3.50)$$

olarak bulunur.

Beta fonksiyonları da

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}.(1-x)^{n-1}\,dx \qquad (3.51)$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır. Burada $Re(m) > 0$, $Re(n) > 0$ olarak alınacaktır. Beta fonksiyonları 1. cins Euler integralleridir. Birinci ve ikinci cins Euler integralleri yani Beta ve Gama fonksiyonları arasındaki bağıntı;

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad (3.52)$$

biçiminde yazılabilmektedir. Bu bağıntının varlığını şu şekilde gösterebiliriz:

(3.43) bağıntısından,

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}.e^{-t}\,dt \quad ; \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}.e^{-t}\,dt$$

yazılabilir. Birinci integral için $t = x^2$, ikinci integral için de $t = y^2$ dönüşümlerini uyguladığımızda,

$$\Gamma(m) = 2\int_0^\infty x^{2m-1}\,e^{-x^2}\,dx \quad ; \quad \Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1}.e^{-y^2}\,dy$$

olur. Bu iki bağıntıyı taraf tarafa çarparsak,

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^\infty x^{2m-1}.e^{-x^2}\,dx\ .\int_0^\infty y^{2n-1}.e^{-y^2}\,dy$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}\ y^{2n-1}\ e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

elde edilir.

$$x = r\,cos\,\theta$$

$$x = r\,sin\,\theta$$

uygulanıp kutupsal koordinatlara dönüştürüldüğünde,

$$dy\,dx = r\,dr\,d\theta$$

olacağından,

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^\infty (r\,cos\,\theta)^{2m-1}\ \ (r\,sin\,\theta)^{2n-1}\ e^{-r^2}\ r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^\infty r^{2m+2n-1}\ \ cos^{2m-1}\theta\ \ sin^{2n-1}\theta\ \ e^{-r^2}\ \ dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^\infty r^{2m+2n-1}\ e^{-r^2}\ \ dr\ \int_0^\infty cos^{2m-1}\theta\ \ sin^{2n-1}\theta\ \ d\theta$$

$$= 2\int_0^\infty r^{2(m+n)-1}\ e^{-r^2}\ \ dr\ \ 2\int_0^\infty cos^{2m-1}\theta\ \ sin^{2n-1}\theta\ \ d\theta \qquad (3.53)$$

olarak bulunur. Buradaki birinci ifadedeki çarpan $\Gamma(m+n)$ dir. Şimdi de (3.51) bağıntısında $x = cos^2\theta$ değişken dönüşümünü uygularsak,

$$1 - x = 1 - cos^2\theta = sin^2\theta \quad ; \quad dx = -2sin\theta\, cos\theta\, d\theta$$

olur, bunları da yerine yazarsak,

$$B(m,n) = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} (cos^2\theta)^{m-1}\ (sin^2\theta)^{n-1}\, 2sin\theta\, cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} cos^{2m-1}\theta\ \ sin^{2n-1}\theta\ \ d\theta$$

olarak elde edilir. Bu da (3.53) bağıntısındaki ikinci çarpandır.

Bunları kullanarak,

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n)\, B(m,n)$$

eşitliğini göstermiş oluruz. Bu bağıntıda (3.52) bağıntısı olmaktadır. Görüleceği gibi B fonksiyonu için $B(m,n) = B(n,m)$ özelliği de bulunmaktadır. [24]

3.5 Birinci Cins Volterra İntegral Denkleminin Gama-Beta Fonksiyonlarından Yararlanarak Çözülmesi

$$\int_0^x (x-t)^n\, u(t)\, dt = x^m \qquad (3.54)$$

Volterra integral denklemini alalım. Bu denklem birinci cins Volterra integral denklemidir. Bu tür denklemlerin çözümlerinin (3.1) de diferansiyel denkleme dönüştürülerek bulunabileceğine değinilmişti. Bu tür denklemlerin şimdi de başka bir çözüm yöntemi verilecektir.

Alınan integral denklemde, $m \geq 0$, $n > -1$ olup m ve n reel sayılardır. (3.54) denkleminde eşitliğin iki tarafını da, $r > -1$ ve reel sayı olmak üzere $(z-x)^r$ ile çarpalım. Daha sonra da x' e göre 0 ile z arasında integralini alalım;

$$\int_0^z (z-x)^r \left[\int_0^x (x-t)^n\, u(t)\, dt\right] dx = \int_0^z x^m (z-x)^r\, dx \qquad (3.55)$$

olur. $x = vz$ yazarsak, sağ taraftaki integral;

$$\int_0^z x^m (z-x)^r\, dx = z^{m+r+1} \int_0^1 v^m (1-v)^r\, dv = z^{m+r+1}\ B(m+1, r+1)$$

$$= z^{m+r+1} \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)} \quad ; \ (m+r+1 > m \geq 0) \qquad (3.56)$$

biçiminde olacaktır. Şimdi de (3.55) teki eşitliğin sol tarafını hesaplayalım;

$$\int_0^z (z-x)^r \left[\int_0^x (x-t)^n\, u(t)\, dt\right] dx = \int_0^z \left[\int_0^x (z-x)^r\, (x-t)^n\, u(t)\, dt\right] dx$$

$$\int_0^z \left[\int_t^z (z-x)^r\, (x-t)^n\, dx\right] u(t)\, dt \qquad (3.57)$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Burada $x = t + v(z-t)$ alalım. İç kısımdaki integral,

$$\int_t^z (z-x)^r\, (x-t)^n\, dx = (z-t)^{n+r+1} \int_0^1 v^n (1-v)^r\, dv$$

$$= (z-t)^{n+r+1}\, B(n+1, r+1) = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)} (z-t)^{n+r+1} \qquad (3.58)$$

olacaktır. (3.56), (3.57), (3.58) deki bağıntıları inceleyip uygun biçimde düzenlersek (3.55) bağıntısı;

$$\int_0^z \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)}\ (z-t)^{n+r+1}\, u(t)\, dt = z^{m+r+1} \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)}$$

olur.

$$\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)}$$

çarpanı sabit olacağından, integral dışına atılır eşitliğin iki tarafı da $\Gamma(r+1)$ ile sadeleştirilirse,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+r+2)}\int_0^z (z-t)^{n+r+1}\,u(t)\,dt = z^{m+r+1}\,\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+r+2)}$$

olarak bulunur. $n+r+1=h$ olacak şekilde bir negatif olmayan h sayısı bulunacaktır. Buna göre,

$$\Gamma(n+r+2)=\Gamma(h+1)$$

olacaktır. Diğer taraftan, $r=h-n-1$ olacağından, $m+r+2=m+h-n+1$

olup,

$$\Gamma(m+r+2)=\Gamma(m+h-n+1)$$

demektir. Bunlar göre, ifade yeniden düzenlenirse,

$$\int_0^z (z-t)^h\,u(t)\,dt = z^{m+h-n}\,\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(h+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)}$$

olarak elde edilir. (3.47) bağıntısına göre,

$$\Gamma(h+1)=h!$$

olur. İşlem kolaylığı olarak, bunu eşitliğin sol tarafına alırsak,

$$\int_0^z \frac{(z-t)^h}{h!}u(t)\,dt = \frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)}\;z^{m+h-n}$$

biçimine dönüşmüş olur. z ye göre iki tarafında $h+1$ kez türevi alındığında da,

$$u(z) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n)}\, z^{m-n-1} \tag{3.59}$$

bağıntısı bulunur. Bu sonuç ise (3.54) ile verilen denklemin çözümüdür. Bu şekilde verilen bir Volterra integral denkleminin de Γ fonksiyonu yardımıyla çözülebileceği görülmektedir. Bu yönteme aşağıdaki gibi örnekler verebiliriz.

Örnek 3.11.

$$\int_0^x (x-t)\, u(t)\, dt = x^2 \tag{3.60}$$

integral denkleminin çözümünü araştıralım.

İntegral denklem (3.54) ile verilen denklemin özelliklerini taşımakta olup, karşılaştırılırsa, n=1, m=2 olduğu görülebilir. (3.59) çözümünü yazabilmek için gerekli işlemler yapılırsa;

$\Gamma(m+1) = \Gamma(3) = 2! = 2$; $\Gamma(n+1) = \Gamma(2) = 1! = 1$; $\Gamma(m-n) = \Gamma(1) = 1$

ve $m-n-1 = 2-1-1 = 0$ olur, bu bulunanlar yerine yazılırsa,

$$u(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2).\Gamma(1)}\, x^0 = 2$$

olur. Buradan da (3.60) Volterra integral denkeminin çözümü

$u(x) = 2$ olarak bulunur.

Örnek 3.12.

$$\int_0^x (x-t)^2\, u(t)\, dt = x^3 \tag{3.61}$$

integral denkleminin çözümünü araştıralım.

Birinci örnekte olduğu gibi, karşılaştırma yapıldığında, $n = 2$, $m = 3$ olduğu görülebilir. Gerekli işlemler yapıldığında da;

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(4) = 3! = 6 \quad ; \quad \Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(1) = 1 \qquad ; \quad m - n - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$$

olur. Bunlar (3.59) çözüm ifadesinde yazılırsa

$$u(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3).\Gamma(1)} \; x^0 = 3$$

olur. (3.61) Volterra integral denkleminin çözümü

$$u(x) = 3$$

olarak bulunur.

Örnek 3.13.

$$\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} \, u(t) \, dt = \pi x \qquad (3.62)$$

integral denkleminin çözümünü araştıralım.

$n = \frac{1}{2}$, $m = 1$ olduğuna göre,

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(2) = 1! = 1 \quad ; \quad \Gamma(n+1) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad ; \qquad m - n - 1 = -\frac{1}{2}$$

olur. (3.59) da yerine konulursa,

$$u(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}} \pi \; x^{-\frac{1}{2}}$$

olarak bulunur. Buradan da integral denklemin çözümü olarak

$$u(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

bulunur.

Örnek 3.14.

$$\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \; u(t) \; dt = cosx - 1 + \frac{x^2}{2} \qquad (3.63)$$

integral denkleminin çözümünü araştıralım.

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \; ...$$

olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$cosx - 1 + \frac{x^2}{2!} = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \; ...$$

yazılabilir. Bundan yararlanarak (3.63) integral denkleminin

$$\int_0^x (x-t)^2 \; u(t) \; dt = \frac{2}{4!}x^4 - \frac{2}{6!}x^6 + \frac{2}{8!}x^8 - \; ...$$

biçiminde yazılabileceği görülür. Böylece ikinci taraf cebirsel bir toplam biçimine dönüştürülmüş olup, bunun her terimi için ayrı ayrı çözüm araştırılacaktır. Terimlerin sırasına göre ara çözümler $u_1(x)$, $u_2(x)$ ... ise, (3.63) integral denkleminin çözümü

$$u(x) = \frac{2}{4!}u_1(x) - \frac{2}{6!}u_2(x) + \frac{2}{8!}u_3(x) - \ \dots \qquad (3.64)$$

toplamı ile bulunabilecektir.

Ara çözümler tek tek bulunacak olursa:

$$u_1(x) \quad \text{için} \quad : \quad n = 2 \ , \qquad m = 4$$

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(5) = 4! \quad , \quad \Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2!$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(2) = 1! \quad ; \quad m-n-1 = 4-2-1 = 1$$

olur. Buradan da;

$$u_1(x) = \frac{4!}{2!\,1!}\ x$$

bulunur.

$$u_2(x) \quad \text{için} \quad : \quad n = 2 \ , \qquad m = 6$$

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(7) = 6! \quad , \quad \Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2!$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(4) = 3! \quad ; \quad m-n-1 = 6-2-1 = 3$$

olur. Buradan da;

$$u_2(x) = \frac{6!}{2!\,3!}\ x^3$$

bulunur.

$$u_3(x) \quad \text{için} \quad : \quad n = 2 \ , \qquad m = 8$$

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(9) = 8! \quad , \quad \Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2!$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(6) = 5! \quad ; \quad m-n-1 = 8-2-1 = 5$$

olur. Buradan da;

$$u_3(x) = \frac{8!}{2!\,5!}\,x^5$$

bulunur.

$$u_4(x) \quad \text{için} \quad : \quad n = 2 \;, \qquad m = 10$$

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(11) = 10! \quad , \quad \Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2!$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(8) = 7! \quad ; \quad m-n-1 = 10-2-1 = 7$$

olur. Buradan da;

$$u_4(x) = \frac{10!}{2!\,7!}\,x^7$$

bulunur.

Burada kesip (3.64) toplamına gidilirse,

$$u(x) = \frac{2}{4!}\frac{4!}{2!\,1!}\,x - \frac{2}{6!}\frac{6!}{2!\,3!}\,x^3 + \frac{2}{8!}\frac{8!}{2!\,5!}\,x^5 - \frac{2}{10!}\frac{10!}{2!\,7!}\,x^7 + \ \ldots$$

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \ldots$$

$$u(x) = sinx$$

olarak bulunur[24].

4 KUADRATİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN AZALMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bu bölümde, Volterra tipi ikinci derece integral denklemleri ele alınmıştır.

$$x(t) = g\big(t, x(t)\big) + \left(h(t) + \int_0^t k(s,t) f\big(s, x(\lambda s)\big) \mathrm{ds} \right) \quad t \in I = [0,1] \qquad (4.1)$$

Burada $g,\ f: I \times R \to R$ bir fonksiyon ve $\lambda \in (0,1]$ dir.

İkinci derece integral denklemlerin günlük hayatta çok sayıda uygulaması bulunmaktadır. Örnek olarak bu tür denklemler genellikle yayılıcı transferlerde, gazların kinetik teorisinde ve nötron transferi/trafiği teorsinde [1-5] kullanılabilir. Özellikle Chandrasekher tipi ikinci derece denklemler fazla sayıda uygulamada karşımıza çıkabilirler [6-8].

İkinci derece denklemlerle ilgili çalışmalar son otuz yıllık süreçte çok fazla dikkat çekmiştir. Örnek olarak; Cahlon ve Eskin [9] bir Chandrasekhar H-denkleminin integral denkleminin bozunumuyla $C[0,1]$ ve $C^{\alpha}[0,1]$ boşluğundaki pozitif çözümlerin varlığını kanıtlamıştır. Argyros[10] ise eğrisel bozunumlu bir ikinci derece denklem sınıfını araştırmıştır. Banas et al. [11] bazı ikinci derece integral fonksiyonların varlığını kanıtlamıştır. Banas ve Rzepka;[12] sınırsız aralıkta Volterra ikinci derece integral denklemi üzerinde çalışmıştır. Banas ve Sadarangani [13] ise Volterra–Stieltjes integral denkeminin çözünülebilmesiyle uğraşmıştır. [14-16] arasındaki bölümde yazarlar ikinci derece integral denklemlerdeki azalmayan çözümlerin varlığını kanıtlamışlardır. Dhage [19] bu şekilde bazı doğrusal olmayan fonksiyonel integral denklemlerin varlığını kanıtlamıştır. Bu çalışmanın amacı adı geçen yazarların [14-16] üzerinde çalışmaya devam etmektir. Darboaux sabit nokta teoremi ve kompakt olmama ölçümünü kullanarak Volterra tipi ikinci dereceden integral denklemlerin çözümlerinin varlığını kanıtlayacağız.

$C(I)$, $I = [0,1]$ aralığında tanımlanan tüm sürekli fonksiyonları göstersin. $C(I)$ uzayının standart normu $\|x\| = \max\{|x(t)|: t \in I\}$ olsun.

$X, C(I)$ kümesinin boş olmayan sınırlı bir alt kümesi ve $\varepsilon > 0$ olsun $x \in X$ için

$$w(x,\varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)|: t,s \in I, |t-s| \leq \varepsilon\}$$

ile tanımlansın. Ayrıca aşağıdaki tanımları gözönüne alalım.

$$w(X,\varepsilon) = \sup\{w(x,\varepsilon), x \ \in X\},$$

$$w_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} w(X,\varepsilon).$$

$$d(x) = sup\{|x(t) - x(s)| - [x(t) - x(s)]: t,s \in I, s \leq t\},$$

$$d(X) = sup\{d(x): x \in X\}.$$

Kolayca görülebilir ki, $d(X) = 0$ olduğunda ancak ve ancak X'e ait tüm fonksiyonlar I da azalmayandır.

Son olarak

$$\mu(X) = w_0(X) + d(X)$$

Bu fonksiyon $C(I)$ uzayında bir kompakt olmama ölçümüdür [23]. Ek olarak çekirdek $(ker\mu)$ $C(I)$ 'nın tüm boş olmayan, sınırlı X alt kümelerini içersin öyle ki X'den tanımlanan fonksiyonlar aynı dereceden sürekli ve I üzerinde azalmayan olsun.

Bu bölümde, bölüm 2.9 da tanımlanan kompakt olmama ölçüsünü kullanarak, (4.1) kuadratik denklemin çözümünün varlığını ispatlayacağız. Aşağıdaki koşullar sağlandğını kabul edelim:

(C1) $h: I \to \mathfrak{R}^+$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon, $a = \max\{|h(t)| : t \in I\}$.

(C2) $g: I \times \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ sürekli bir fonksiyon, $k \geq 0$ sabit ve $ak < 1$ öyle ki her $t \in I$ ve $x,y \ \in R$ için

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leq k|x-y|.$$

(C3) Keyfi $x \in \Re$ için $t \to g(t,x)$, I da azalmayan ve keyfi $t \in I$ için $x \to g(t,x)$, $\Re$ de azalmayan fonksiyon olsun.

(C4) $k: I \times I \to \Re^+$. Her $t \in I$ için; $k(t,s)$, $[0,t]$ üzerinde ölçülebilir ve $k(t) = essup|k(t,s)|\,, 0 \le s \le t$ $[0,1]$ de sınırlı, $K = \sup_{0 \le t \le 1}|k(x,t)|$ olsun. $t \to k_t$, $[0,1]$ de sürekli ve $L^\infty[0,1]$, burada $k_t(s) = k(t,s)$ olur. Ek olarak, keyfi $s \in I$, $t \to k(t,s)$ I da azalmayan.

(C5) $f: I \times \Re \to \Re$ Caratheodory tip koşulları sağlayan yani $t \to f(t,x)$ her $x \in \Re$ için hemen hemen her yerde ölçülebilir, $x \to f(t,x)$ $t \in I$ için sürekli bir fonksiyon olsun. Ek olarak, eğer $x \ge 0$ ve $t \in I$ ise $f(t,x) \ge 0\ olsun.$

(C6) $L \in L^1(0,1;\ \Re)$ ve azalmayan sürekli bir fonksiyon $\Omega: \Re^+ \to \Re^+$ öyle ki

$$|f(t,x)| \le L(t)\Omega(|\mathrm{x}|)$$

her $x \in \Re$ ve $t \in I$ (hhh) dir.

Lemma 4.1. (C2) ve (C3) varsayımları altında, herhangi bir $x \in C(I)$ fonksiyonu için

$$d(Gx) \le kd(x)$$

dir. Burada, $(Gx)(t) = g\big(t, x(t)\big)$ ve k (C2) koşulundaki sabittir.

İspat Herhangi bir $x \in C(I)$ fonksiyonu alalım ve keyfi $t_1, t_2 \in I\ (t_1 < t_2)$ seçelim.

Eğer $x(t_2) \ge x(t_1)$ ise, biliyoruz ki

$$\begin{aligned} &|(Gx)(t_2) - (Gx)(t_1)| - [(Gx)(t_2) - (Gx)(t_1)] \\ &\qquad = \big|g\big(t_2, x(t_2)\big) - g\big(t_1, x(t_1)\big)\big| - \big[g\big(t_2, x(t_2)\big) - g\big(t_1, x(t_1)\big)\big] = 0 \\ &\qquad \le k(|x(t_2) - x(t_1)| - [x(t_2) - x(t_1)])\,, \end{aligned}$$

ve eğer $x(t_2) < x(t_1)$ ise, biliyoruz ki

$$|(Gx)(t_2)-(Gx)(t_1)|-[(Gx)(t_2)-(Gx)(t_1)]$$
$$=\left|g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_1,x(t_1)\big)\right|-\left[g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_1,x(t_1)\big)\right]$$

$$\leq \left|g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_2,x(t_1)\big)\right|+\left|g\big(t_2,x(t_1)\big)-g\big(t_1,x(t_1)\big)\right|$$
$$-\left\{\left[g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_2,x(t_1)\big)\right]+\left[g\big(t_2,x(t_1)\big)-g\big(t_1,x(t_1)\big)\right]\right\}$$

$$=\left|g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_2,x(t_1)\big)\right|-\left[g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_2,x(t_1)\big)\right]$$

$$=2\left|g\big(t_2,x(t_1)\big)-g\big(t_2,x(t_2)\big)\right|=k(|x(t_2)-x(t_1)|-[x(t_2)-x(t_1)]).$$

Buradan da

$$d(Gx)\leq kd(x)$$

elde edilir. Bu şekilde kanıtlanmış olur.

Teorem 4.2. (C1)-(C6) koşulları sağlansın. , (4.1) denkleminde $x\in C(I)$ ve a R de sabit olmak üzere en az bir azalmayan çözüm

$$b=\max\{|g(t,0)|:t\in I\}.$$

olmak üzere

$$\int_0^1 L(s)ds<\frac{1}{K(kR+b)}\int_{a(kR+b)}^{R}\frac{1}{\Omega(\mathrm{s})}ds \qquad (4.2)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda (4.1) denkleminin en az bir azalmayan $x\in C(I)$ çözümü vardır.

İspat $C(I)$ ta tanımlı T

$$(Tx)(t)=g\big(t,x(t)\big)\big(h(t)\big)+\int_0^t k(t,s)f\big(s,x(\lambda\mathrm{s})\big)\mathrm{ds}).$$

operatörünü göz önüne alalım.

(C1)-(C6) kabulleri dikkate alınırsa, anlaşılır ki her $x \in C(I)$ için Tx, I da süreklidir. Yani T operatörü $C(I)$ uzayını kendine dönüştürür.

(4.2) kabulünden anlaşılır ki

$$A = \frac{1}{K(kR+b)}, \qquad T = a(kR+b).$$

olmak üzere

$$\int_0^1 L(s)ds = A \int_{T+\in}^{R} \frac{1}{\Omega(s)} ds,$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sabiti vardır.

Bu durumda,

$$A \int_{T+\in}^{T+n\epsilon} \frac{1}{\Omega(s)} ds < \int_0^1 L(s)ds \leq A \int_{T+\in}^{T+(n+1)\epsilon} \frac{1}{\Omega(s)} ds .$$

olacak şekilde n tamsayısı vardır.

Bu durumda,

$$\int_0^{t_1} L(s)ds = A \int_{T+\in}^{T+2\in} \frac{1}{\Omega(s)} ds,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} L(s)ds = A \int_{T+2\in}^{T+3\in} \frac{1}{\Omega(s)} ds,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ..,$$

$$\int_{t_n-2}^{t_n-1} L(s)ds = A \int_{T+(n-1)\in}^{T+n\in} \frac{1}{\Omega(\mathrm{s})} ds,$$

$$\int_{t_n-1}^{1} L(s)ds \leq A \int_{T+n\in}^{T+(n+1)\in} \frac{1}{\Omega(\mathrm{s})} ds,$$

denklemlerini sağlayan

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1\,,$$

olacak şekilde

$$\{t_0\,, t_1\,, t_2\,, \ldots, t_{n-1}\,, t_n\}$$

dizisi vardır.

$$W = \{x \in C(I) : x(t) \geq 0, \text{için } t \in I, \|x_i\| = \sup\{|x(t)| : t \in [t_{i-1}, t_i]\} \leq T + i\epsilon, i = 1,2, \ldots, n.\}.$$

kümesini tanımlayalım. W kümesi boş olmayan, kapalı, sınırlı ve $C(I)$ ' nın konveks alt kümesidir.

Herhangi bir $x \in W$ için

$$|Tx(t)| = \left| g\big(t, x(t)\big)(h(t) + \int_0^t k(s,t) f\big(s, x(\lambda \mathrm{s})\big)\mathrm{ds} \right|$$

$$\leq \big(\left|g\big(t, x(t)\big) - g(t,0)\right| + |g(t,0)|\big) \left| h(t) + \int_0^t k(t,s) f\big(s, x(\lambda \mathrm{s})\big)\mathrm{ds} \right|$$

$$\leq (k|x(t)| + b)\left(a + K \int_0^t L(s)\, \Omega(|x(\lambda s)|) ds \right)$$

$$\leq (k(a+n\in)+b)(a+K\int_0^t L(s)\,\Omega(|x(\lambda s)|)ds)$$

$$\leq (kR+b)\left(a+K\int_0^t L(s)\,\Omega(|x(\lambda s)|)ds\right)$$

$$\leq T+(kR+b)K\int_0^t L(s)\,\Omega(|x(\lambda s)|)ds),$$

ve

$$\begin{aligned}\|Tx\|_i = sup\,\{|(Tx)(t)|: t\in[t_{i-1},t_i]\}\\ \leq sup\,\{T+K(kR+b)\int_0^t L(s)\,\Omega(|x(\lambda s)|)ds: t\in[t_{i-1},t_i]\end{aligned}$$

$$\leq T+K(kR+b)\int_0^t L(s)\,\Omega(|x(\lambda s)|)ds$$

$$\leq T+\ K(kR+b)[\int_0^{t_1} L(s)\,\Omega(|x(\lambda s)|)ds+\int_{t_1}^{t_2} L(s)\,\Omega(|x(\lambda s)|)ds+\cdots$$
$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i} L(s)\,\Omega(|x(\lambda s)|)ds$$

$$\leq T+\ K(kR+b)[\int_0^{t_1} L(s)ds\,\Omega(T+\epsilon)+\int_{t_1}^{t_2} L(s)ds\,\Omega(T+2\epsilon)+\cdots$$
$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i} L(s)\,\Omega(T+i\epsilon)ds]$$

$$\leq T + K(kR+b)A\left[\int_{T+\epsilon}^{T+2\epsilon} \frac{1}{\Omega(s)}\, ds\Omega(T+\epsilon) + \int_{T+2\epsilon}^{T+3\epsilon} \frac{1}{\Omega(s)}\, ds\Omega(T+2\epsilon) + \dots + \int_{T+i\epsilon}^{T+(i+1)\epsilon} \frac{1}{\Omega(s)}\, ds\Omega(T+i\epsilon)\right]$$

$$\leq T + K(kR+b)Ai\epsilon \leq T + i\epsilon$$

elde edilir. Bu da $T: W \to X$ sınırlı bir operatör olduğunu gösterir.

$X \subseteq W$ olacak şekilde boş olmayan bir alt küme alalım. $x \in X$ ve keyfi $t_1, t_2 \in I (t_1 < t_2)$ seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| &\\ &\leq \left|g\big(t_2, x(t_2)\big)h(t_2) - g\big(t_1, x(t_1)\big)h(t_1)\right| \\ &+ \left|g\big(t_2, x(t_2)\big)\int_0^{t_2} k(t_2,s)f\big(s, x(\lambda s)\big)ds - g\big(t_1, x(t_1)\big)\right. \\ &\left.\times \int_0^{t_1} k(t_1,s)f\big(s, x(\lambda s)\big)ds\right|\end{aligned}$$

$$\leq \left|g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_1,x(t_2)\big)\right||h(t_2)|+\left|g\big(t_1,x(t_2)\big)-g\big(t_1,x(t_1)\big)\right||h(t_2)|$$
$$+\left|g\big(t_1,x(t_1)\big)|h(t_2)-h(t_1)|\right|$$
$$+\left|g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_1,x(t_2)\big)\right|\left|\int_0^{t_2} k(t_2,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)ds\right|$$
$$+\left|g\big(t_1,x(t_2)\big)-g\big(t_1,x(t_1)\big)\right|\left|\int_0^{t_2} k(t_2,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)ds\right|$$
$$+\left|g\big(t_1,x(t_1)\big)\right|\left|\int_0^{t_2} k(t_2,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)ds\right.$$
$$\left.-\int_0^{t_1} k(t_2,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)ds\right|\left|g\big(t_1,x(t_1)\big)\right|\left|\int_0^{t_1} k(t_2,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)ds\right.$$
$$\left.-\int_0^{t_1} k(t_1,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)ds\right|$$

$$\leq a\left|g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_1,x(t_2)\big)\right|+ak|x(t_2)-x(t_1)|$$
$$+\left|g\big(t_1,x(t_1)\big)\right||h(t_2)-h(t_1)|$$
$$+\left|g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_1,x(t_2)\big)\right|\int_0^{t_2}\left|k(t_2,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)\right|ds$$
$$+k|x(t_2)-x(t_1)|\int_0^{t_2}\left|k(t_2,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)\right|ds$$
$$+\left|g\big(t_1,x(t_1)\big)\right|\int_{t_1}^{t_2}\left|k(t_2,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)\right|ds$$
$$+\left|g\big(t_1,x(t_1)\big)\right|\left|\int_0^{t_1} k(t_2,s)-k(t_1,s)f\big(s,x(\lambda s)\big)\,ds\right|$$

$$\leq \left|g\big(t_2,x(t_2)\big)-g\big(t_1,x(t_2)\big)\right|\left(a+K\int_0^1 L(s)\,ds\,\Omega(R)\right)+k|x(t_2)-x(t_1)|$$

$$\left(a + K\int_0^1 L(s)\ \Omega(|x(\lambda s)|)\,ds\right) + (kR+b)|h(t_2) - h(t_1)|$$

$$+ (kR+b)K\int_{t_1}^{t_2} L(s)\ ds\,\Omega(R) + (kR$$

$$+ b)|k(t_2,.) - k(t_1,.)|_{L^\infty}\int_0^1 L(s)\,ds\,\Omega(R)$$

ve

$$\int_0^1 L(s)\ \Omega(|x(\lambda s)|)\,ds$$

$$= \int_0^{t_1} L(s)\ \Omega(|x(\lambda s)|)\,ds + \int_{t_1}^{t_2} L(s)\ \Omega(|x(\lambda s)|)\,ds + \cdots$$

$$+ \int_{t_{n-1}}^{1} L(s)\ \Omega(|x(\lambda s)|)\,ds$$

$$\leq \int_0^{t_1} L(s)\,ds\ \Omega(T+\epsilon) + \int_{t_1}^{t_2} L(s)\,ds\ \Omega(T+2\epsilon) + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{1} L(s)\,ds\ \Omega(T+n\epsilon)$$

$$\leq A\int_{T+\epsilon}^{T+2\epsilon} \frac{1}{\Omega(s)}\,ds\,\Omega(T+\epsilon)$$

$$+ A\int_{T+2\epsilon}^{T+3\epsilon} \frac{1}{\Omega(s)}\,ds\,\Omega(T+2\epsilon) + \cdots$$

$$+ A\int_{T+n\epsilon}^{T+(n+1)\epsilon} \frac{1}{\Omega(s)}\,ds\,\Omega(T+n\epsilon) \leq An\epsilon\,.$$

(C1)-(C6) varsayımlarının ve g 'nin, $I \times [-R, R]$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu kullanarak

$$w_0(TX) \leq (ka + kKAn\epsilon)w_0(X) \qquad (4.3)$$

bulunur.

Ayrıca (4.2) ve teoremin şartlarını gözönüne alarak

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| - [(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)] \\
\leq \left|g\big(t_2, x(t_2)\big)h(t_2) - g\big(t_1, x(t_1)\big)h(t_1)\right| \\
+ \left| g\big(t_2, x(t_2)\big)\int_0^{t_2} k(t_2, s)f\big(s, x(\lambda s)\big)ds \right. \\
\left. - g\big(t_1, x(t_1)\big)\int_0^{t_1} k(t_1, s)f\big(s, x(\lambda s)\big)ds \right| \\
- \left[g\big(t_2, x(t_2)\big)h(t_2) - g\big(t_1, x(t_1)\big)h(t_1)\right] \\
- [g\big(t_2, x(t_2)\big)\int_0^{t_2} k(t_2, s)f\big(s, x(\lambda s)\big)ds \\
- g\big(t_1, x(t_1)\big)\int_0^{t_1} k(t_1, s)f\big(s, x(\lambda s)\big)ds]
\end{aligned}
$$

$$\leq h(t_2)\{|g(t_2,x(t_2)) - g(t_1,x(t_1))| - [g(t_2,x(t_2)) - g(t_1,x(t_1))]\}$$

$$+ |g(t_2,x(t_2)) - g(t_1,x(t_1))| \left| \int_0^{t_2} k(t_2,s) f(s,x(\lambda s)) ds \right|$$

$$+ |g(t_1,x(t_1))| \left| - \int_0^{t_1} k(t_2,s) f(s,x(\lambda s)) ds \right|$$

$$+ |g(t_1,x(t_1))| \left| \int_0^{t_1} k(t_2,s) f(s,x(\lambda s)) ds \right.$$

$$\left. - \int_0^{t_1} k(t_1,s) f(s,x(\lambda s)) ds \right|$$

$$- [g(t_2,x(t_2)) - g(t_1,x(t_1))] \int_0^{t_2} k(t_2,s) f(s,x(\lambda s)) ds$$

$$- g(t_1,x(t_1))$$

$$\times \left[\int_0^{t_2} k(t_2,s) f(s,x(\lambda s)) ds - \int_0^{t_1} k(t_2,s) f(s,x(\lambda s)) ds \right]$$

$$- g(t_1,x(t_1))$$

$$\times \left[\int_0^{t_1} k(t_2,s) f(s,x(\lambda s)) ds - \int_0^{t_1} k(t_1,s) f(s,x(\lambda s)) ds \right]$$

$$\leq \{|g(t_2,x(t_2)) - g(t_1,x(t_1))| - [g(t_2,x(t_2)) - g(t_1,x(t_1))\}$$

$$(a + \int_0^{t_2} k(t_2,s) f(s,x(\lambda s)) ds \leq d(Gx)(a + K \int_0^1 L(s) \;\; \Omega(|x(\lambda s)|) ds)$$

$$\leq (ka + kKAn\epsilon) d(x)$$

elde ederiz. Bu ise

$$d(TX) \leq (ka + kKAn\epsilon) d(X) \qquad (4.4)$$

sonucuna vardırır. O halde

$$\begin{aligned}\mu(TX) = w_0(TX) + d(TX) &\leq (ka + kKAn\epsilon)\big(w_0(X) + d(X)\big)\\ &< \left(ka + k\frac{R-T}{kR+b}\right)\big(w_0(X) + d(X)\big)\\ &\leq \left(ka + k\frac{R-a(kR+b)}{kR+b}\right)\big(w_0(X) + d(X)\big)\\ &\leq \left(\frac{kR}{kR+b}\right)\big(w_0(X) + d(X)\big) \leq \left(\frac{kR}{kR+b}\right)\mu(X)\end{aligned}$$

bulunur. Yani T operatörü bir daraltan operatördür. Ayrıca T operatörü $W = \{x \in C(I), x(t) \geq 0, \text{için } t \in I, \|x_i\| = \sup\{|x(t)|: t \in [t_{i-1}, t_i]\} \leq T + i\epsilon, i = 1,2, \dots, n.\}$ olmak üzere, boştan farklı sınırlı, kapalı ve konveks kümesi üzerinde bir operatördür. O halde Darboux sabit noktası gereği T nin sabit noktası vardır. Bu durumda (4.1) denkleminin azalmayan bir çözümü vardır.

Teorem 4.3. (C1)-(C6) koşulları sağlansın. (4.1) denklemi en az bir azalmayan çözümünün $x \in C(I)$ de bir R sabiti olduğu sağlanmıştır.

$$a(kR+b) + K(kR+b)\,\Omega R \int_0^1 L(s))ds \leq R. \qquad (4.5)$$

koşulunu sağlayan R sabiti varsa (4.1) denkleminin en az bir çözümü vardır.

İspat (4.5) göz önüne alındığında

$$\int_0^1 \mathrm{L(s))ds} \leq \frac{\mathrm{R - a(kR+b)}}{\mathrm{K(kR+b)\Omega R}} < \frac{1}{\mathrm{K(kR+b)}} \int_{\mathrm{a(kR+b)}}^{\mathrm{R}} \frac{1}{\Omega(\mathrm{s})}\mathrm{ds}$$

elde edilir. (4.3) uygulandığında ise istenen sonuca varılır.

Örnek 4.4. Aşağıdaki ikinci derece integral denklemi alalım

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}tarctanx(t) + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3} + \int_{0}^{t} x(\lambda s)\, ds\right), t \in I. \quad (4.6)$$

Bu denklemin (4.1) denkleminin özel bir durumu olduğu açıktır. Burada

$$g\big(t, x(t)\big) = \frac{1}{2}tarctanx(t) + \frac{1}{2}\ , h(t) = \frac{1}{3}\ , f\big(s, x(t)\big) = x(t).$$

Sabit bir $R = 1$ sayısı için

$$1 < \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{s}\, ds = ln3$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (4.3) 'e göre, (4.6) denkleminin azalmayan bir çözümü olduğu sonucuna varabiliriz.

Uyarı 4.5. Yukarıdaki denklem için

$$\left(\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3} + R\right) \leq R.$$

Şartını sağlayan R sabiti bulamayız. Bu nedenle (4.5) i kullanarak (4.1) denkleminin çözümü olup olmadığını bilmiyoruz. Bu yüzden (4.3), (4.5) e göre daha geneldir.

Örnek 4.6

Aşağıdaki diferansiyel denklemi gözönüne alalım

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x(t)}{g(t, x(t))}\right)' = f\big(t, x(t)\big), \qquad hhh\ \in I, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \qquad (4.6)$$

Burada g (C2),(C3) koşullarını sağlar ve her $t \in I$ ve $x \in \Re$ için $g(t, x) \neq 0$ (C5) ve (C6) koşullarını sağlar. O halde (4.6) denklemi

$$x(t) = g\big(t, x(t)\big)(a + \int_0^t f\big(s, x(t)\big)\, ds)\ , t \in I = [0,1], \quad (4.7)$$

integral denklemine denktir.

$$a = \frac{x_0}{g(0, x_0)}$$

olmak üzere

$$\int_0^1 L(s)ds < \frac{1}{kR + b} \int_{|a|+(kR+b)}^{R} \frac{1}{\Omega(s)}\ ds.$$

eşitsizliğini sağlayan R sabiti varsa (4.6) denklemini $C(I)$ üzerinde en az bir azalmayan çözümü vardır.

REFERANSLAR

[1] V.C. Boffi, G. Spiga, An Equation of Hammerstein type arising in particle transport theory, J. Math. Phys. 24 (6) (1983) 1625-1629.

[2] J. Caballero D. ORegan, Sadarangani, On solutions of an integral equation related to traffic flow on unbounded domains, Arch. Math. (Basel) 82 (6) (2004) 551-563.

[3] S. Chandrasekher, Radiative Transfer, Dover Publications, New York, 1960.

[4] S. Hu, M. Khavani, W. Zhuang, Integral equations arrising in the kinetic theory ofa gases, Appl. Anal. 34 (1989) 261-266.

[5] C.T. Kelly, Approximation of solutions of some quadratic integral equations in transport theory, J. Integral Equ. 4 (1982) 221-237.

[6] R.W. Legget, A new approach to the H-equation of Chandrasekhar, SIAM. Math. 7 (1976) 542-550.

[7] I.K. Argyros, Quadratic equations and applications to Chandrasekhars ad related equations, Bull. Aust. Math. Soc. 32 (1985) 275-292.

[8] C.A. Stuart, Existence theorems for a class of nonlinear integral equations, Math. Z. 137 (1974) 49-66.

[9] B. Cahlon, M. Eskin, Existence theorems for an integral equation of the Chandrasekhar H-equation for perturbation, J. Math. Anal. Appl. 83 (1981) 159-171.

[10] I.K. Argyros, on a class of quadratic integral equations with perturbations, Func. Approx, 20 (1992) 51-63.

[11] J. Banas, M. Lecko, W. El-Sayed, Existence theorems for some quadratic integral equations, J. Math. Anal. Appl. 222 (1998) 276-285.

[12] J. Banas, B. Rzepka, On existence and asymptotic stability of solutions of a nonlinear integral Equation, J. Math. Anal. Appl. 284 (2003) 165-173.

[13] J. Banas, K. Sadarangani, Solvability of Volterra-Stielties operator integral equations and their applications, Comput. Math. Appl. 41 (2001) 1535-1544.

[14] W.G. El Sayed, B. Rzepka, Nondecreasing solutions of a quadratic integral equation of Urysohn type, Comput. Math. Appl. 51 (2006) 1065-1074.

[15] J. Caballero, J. Rocha, K. Sadarangani, On monotonic solutions of an integral equation of Volterra type, J. Comput. Appl. Math. 174 (2005) 119-133.

[16] J. Caballero, B. Lopez, K. Sadarangani, On monotonic solutions of an integral equation of Volterra type with supremum, J. Comput. Math. Anal. 305 (2005) 304-315.

[17] B.C. Dhage, Mutivalued operators and fixed point theorems in Banach space (2), Comput. Appl. Math. Appl. 48 (2004) 1461-1476.

[18] D.C. Dhage, Multivalued operators and fixed point theorems in Banach space (1), Taiwenese J.Math. 10 (4) (2006) 1025-1045.

[19] B.C. Dhage Oan a fixed point theorems in Banach algebras with applications, Appl. Math. Lett. 18 (2005) 273-280.

[20] J. Banas, K. Goebel, in: Measures of Noncompactness in Banach Space, Lecture Notes in Pure ant Applied Math, vol. 60, Marcel Dekker, New York, 1980.

[21] R.P. Akhmerow, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadowskii, Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Nauka, Novosibirsk, 1986.

[22] G. Darbo, Punti Uniti in transformazioni a condominio non compatto, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 24 (1955) 84-92.

[23] J.Banas, L. Olszowy, Measure of noncompactness related to monotonicy, Comment. Math. 41 (2001) 13-23.

[24] Aksoy Y. İntegral Denklemler, Cilt I. Y.T.Ü Yayınları, İstanbul, (1983).

[25] Ekici M. Lineer ve Singüler Olmayan İntegra Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri Üzerine Bir Çalışma: Fracture Mekanik Y.L. Gazi Üniv., Ankara,(2010).

[26] Cerit C. İntegral Denklemler, İstanbul, (1976)

ÖZGEÇMİŞ

1969 yılında Manisa Turgutlu da doğan yazar, ilk ve orta öğrenimini Turgutlu da tamamladı. 1987 yılında Ege Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek öğrenimine devam etti. Mezun olduktan sonra bir süre özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği yapmıştır. 2002 yılından itibaren de Milli Eğitim Bakanlığında matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.