T.C.

YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNE VARYASYON YAKLAŞIM

Ertem ÖZOĞLUÖZ

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2014

Ertem ÖZOĞLUÖZ tarafından **Yüksek Lisans** tezi olarak sunulan "**Optimal Kontrol Problemlerine Varyasyon Yaklaşım**" başlıklı bu çalışma Y.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile Y.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 18/07/2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğ~~u ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri			**İmza**
Jüri Başkanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM**	
Raportör Üye	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN**	
Üye	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL**	

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Optimal Kontrol Problemlerine Varyasyon Yaklaşım" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığının ve yararlandığım eserlerin "Kaynakça" bölümünde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

18/07/2014

Ertem ÖZOĞLUÖZ

ÖZET

OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNE VARYASYON YAKLAŞIM

ÖZOĞLUÖZ, Ertem

Matematik Bölümü Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM

Temmuz, 2014

Bu çalışmada, sınırlamalarla optimal kontrol problemi için gerekli optimalite koşulları oluşturulmuş ve bu şekilde soyut Euler denklemi kullanılmıştır. Hem düzgün hem de düzgün olmayan değer fonksiyonelliği (düzgün olmama durumu, quasidiferansiyel olarak minimizasyon fonksiyonelliğine eklendi) dikkate alınmıştır. Ayrık optimal kontrol problemi için amaçlanan fonksiyonel değerlendirilmiş ve bunun için optimallik gerek koşulları alınmıştır.

Anahtar Sözcükler : Değişim sistemi, optimalite koşulları, Frechet altdiferansiyel, optimal kontrol

ABSTRACT

VARIATION APPROACH TO THE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

ÖZOĞLUÖZ, Ertem

Master Thesis in Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Şahlar MEHERREM

July, 2014

In this study we establish necessary optimality conditions for the optimal control problem with the constraints. In this way we used abstract Euler equation. Both the smooth and nonsmoth cost functional (nonsmoothness posted on minimaziton functional as quasidifferential) are considered.

Key Words : Swithching system, optimality conditions, Frechet subdifferential, optimal control.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlarken bana rehberlik eden ve desteğini eksik etmeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM'e, yüksek lisans eğitimimde ders aldığım Prof. Dr. Mehmet TERZİLER, Prof. Dr. Rafail ALİZADE, Prof. Dr. Şaban EREN, Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR hocalarıma, ayrıca Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL'a hazırlık aşamasındaki katkılarından dolayı ve her zaman yanımda olan tüm sevdiklerime, özellikle eşim Didem ÖZOĞLUÖZ'e teşekkür ederim.

Ertem ÖZOĞLUÖZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. Giriş

Bu bölümde, Dubovitskii ve Milyutin tarafından önerilip formülize edilen metod ve düzgün olmayan analiz kullanılarak düzgün ve düzgün olmayan durumlar için (değişim değer fonksiyonelliği quasidiferansiyeldir) gerekli optimalite koşulları formulize edilmiştir (A.Y. Dubovitiskii and A.A. Milyutin, 1965; V. Girsanov, 1979; A.A. Milyutin and N.P. Osmolsvki, 1998; A.V. Dimtruk, 2009).

Dubovitskii – Milyutin yaklaşımı, extremal problem teorisinde fonksiyonel, analitik bir yaklaşımdır. Dubovitskii-Milyutin teorisinin geometrik biçimi Hahn-Banach teoremidir ve kısmen konveks setlerin ayrılma teoremlerinden gelmektedir. Araştırmalarının en başında Dubovitskii ve Milyutin konveks yapıları keşfettiler ve defalarca kullandılar. Konveks fonksiyonların maksimalinin alt diferansiyali konulu teorem olan konveks konilerin kesişmemesi konulu ünlü teorem de dahil olmak üzere konveks analizine gerekli katkıda bulundular. Optimal kontrol problemlerine uygulanması dahil olmak üzere Dubovitskii – Milyutin teoreminin çok geniş, ayrıntılı bir sunumu (V. Girsanov, 1979) de bulunabilir.

Dubovitskii ve Milyutin biçimselliği aşağıdaki üç temel bileşkeyi içerir:

a) Oluşturulan primal alandaki belirli yerel minimal kümelerin boş kesişmelerinden geçerek ilk değer koşuluyla verileri sınırlama,

b) kesişmeyen konveks konilerle bu yukarıdaki kümelere yaklaşma,

c) konveks ayrılmayı kullanarak soyut Euler denklemi biçiminde dual gerekli optimalite koşullarına ulaşmak.

Bu çalışmanın kalan bölümü aşağıdaki gibi organize edilmiştir. 2. bölüm bazı ön bilgileri, tanımları ve teoremleri içermektedir. Bu bölümde problem formülasyonlarını ve ayrık optimal kontrol problemini düzgün bir şekilde değiştirmek için (fonksiyonelliğin minimalleştirilmesi farklılaşabilir) gerekli optimalite koşullarını içermektedir. Bunun için minimalleşen fonksiyonel değerlendirilmiş ve ayrık kontrol sistemleri için maksimum prensibi ispat edilmiştir.

Bölüm 1

1.1. Ön Bilgiler

Gerekli optimal koşulları elde edebilmek için konveks koni ve Euler denklemleri ile bağlantılı bazı teoremleri verilmelidir.

Teorem 1.1. (A.Y. Dubovitiskii and A.A. Milyutin, 1965; A.A. Milyutin and N.P. Osmolsvki, 1998), *X* ve *Y* tamamen normlandırılmış uzaylar olsun. Dual uzay $Z=(X,Y)$ de alt uzay L:$Y=AX$ olsun. O zaman L^* (dual uzay); L-nin Y üzerinde tanımlanan herhangi bir fonksiyonel olduğu, L(y-Ax) formunda fonksiyonelleri içerir.

Teorem 1.2 (A.Y. Dubovitiskii and A.A. Milyutin, 1965) L_1 ve L_2 normlandırılmış *W* uzayının alt uzayları olsun.

O zaman, L_1+L_2 de bir alt uzaydır ve $(L_1 \cap L_2)^* = L^*_1 + L^*_2$ dir.

Teorem 1.3 (Soyut Euler denklemi, 4). $\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_n$ boş olmayan, açık konveks koniler ve *H* de boş olmayan bir konveks koni olsun. $\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega, ..., \Omega_n \cap H = \varnothing$ olması için gerek ve yeter koşul $p_0 + p_1 + ... + p_n + q = 0$ olacak şekilde en az bir tanesi sıfırdan farklı olmak üzere $p_i \in \Omega_i^*, i = 0,1,...,n,$ ve $q \in H^*$ olmasıdır. (1.1)

Tartışmaya başlarken düzgün olmayan analiz tekniklerine dair bazı bilgiler verilmelidir.

Eğer φ x etrafında alt yarı sürekli ise Frechet süperdiferansiyeli aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\widehat{\partial}^+ \varphi(x^0) := \left\{ x^* \in R^n \,\middle|\, \underset{x \to x_0}{Lim} \sup \frac{\varphi(x) - \varphi(x^0) - \langle x^*, x - x^0 \rangle}{|x - x^0|} \le 0 \right\}.$$

f fonksiyonunun aşağıdaki gibi bir limiti var ise, bu x noktasında g doğrultusunda f fonksiyonunun Hadamard üst türevi olarak adlandırılır.

$$f_H^{\uparrow} := \underset{[\alpha,g]\to[+0,g]}{Lim\sup}\frac{1}{\alpha}\left[f\left(x+\alpha g\right)-f\left(x\right)\right]$$

x_0 noktasındaki f fonksiyonunun Gateaux üst alt-diferansiyeli ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{\partial}_G^+ f\left(x_0\right)=\left\{v\in R^n \left| \underset{t\downarrow 0}{Lim}\sup\frac{f\left(x_0+tg\right)-f\left(x_0\right)}{t}\le\left(v,g\right),\forall g\in R^n\right.\right\}$$

(F.V. Demyanov and V.A. Roshcina'da Teorem 4'te de gözlemlendiği gibi, eğer f bir quasi-diferansiyel fonksiyon ise, onun x noktasındaki yönetici türevi aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$\underline{\partial}f\left(x\right)$ ve $\overline{\partial}f\left(x\right)$ konveks, kompakt kümeler olmak üzere (quasi-diferansiyellerdir).
$f'\left(x,g\right)=\max\limits_{v\in\underline{\partial}f(x)}\left(v,g\right)+\min\limits_{w\in\overline{\partial}f(x)}\left(w,g\right)$ dir. Öyle ki

$$f'\left(x,g\right)=\max_{v\in\underline{\partial}f(x)}\left(v,g\right)+\min_{w\in\overline{\partial}f(x)}\left(w,g\right)=\max_{v\in\overline{\partial}f(x)}\min_{v\in w\underline{\partial}f(x)}\left(v,g\right) \text{ dir.}$$

Küme:

$E_*\left(f'\left(x,g\right)\right)=\left\{C=v+\overline{\partial}f\left(x\right)\middle| v\in\underline{\partial}f\left(x\right)\right\}$ $f\left(x\right)$ için alt boşluk oluşturucu olarak adlandırılır.

Bir şekilde yukarı boşluk oluşturucunun tanımı yapılabilir. Genel olarak boşluk oluşturucuların tanımı (sadece quasidiferansiyel fonksiyon için değil) (B.S. Mordukhovich, 2006, p.43)te bulunabilir. Frechet üst alt diferansiyeli Hadamard'ın üst türevi ile aşağıdaki şekilde açıkça ifade edilebilmektedir. (B.S. Mordukhovich, 2006),

$\partial_F^+ f\left(x_0\right)=\partial_F^+ f_H^{\uparrow}\left(x_0,O_n\right),\quad O_n \; ise \, R^n$ de sıfır elementtir. Dolayısıyla:

Lemma 1.1 (Şahlar Meherrem, 2008, Lemma 3.8) Bir pozitif homojen fonksiyonunun sıfır noktasında Frechet üst ve Gateaux üst alt diferansiyeli eşittir.

Teorem 1.4 E_*, pozitif homojen fonksiyonun $h: R^n \to R$ alt boşluk oluşturucuları olsun. O zaman, $\widehat{\partial}^+ h$ 0_n de h nin bir Frechet üst altdiferansiyeli olduğunda $\bigcap_{C \in E_*} C = \widehat{\partial}^+ h\left(0_n\right)$ ve pozitif homojen fonksiyon için $h: R^n \to R$ Frechet süper-diferansiyeli sıfır noktasında aşağıdakini izler,

$$\widehat{\partial}^+ h\left(0_n\right) = \left\{ v \in R^n \middle| h\left(x\right) - \left(v, x\right) \leq 0 \right\}$$

Kanıt: İspat açıktır. (Şahlar Meherrem, 2008) deki teorem 3.3'ün kanıtı gibi benzer olarak kanıtlanabilir.

Üst alt diferansiyel (Frechet süper-diferansiyeli) ve aşağı alt-diferansiyel (Frechet alt-diferansiyeli) hakkında (V.F. Demyanov ve A.M. Rubinov) ve (B.S. Mordukhovich, 2008) de bulunabilir.

1.2. Problem formülasyonu

Problem optimizasyonunda aşağıdakiler göz önünde bulundurulur.

$$\dot{x}_k\left(t\right) = f_k\left(x_k\left(t\right), u_k\left(t\right), t\right), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, 2, ..., N \tag{1.2}$$

$x_1\left(t_0\right) = x_0$ (ilk durum)

$$M_k\left(x_k, t\right) \leq 0, t_{k-1} \leq + \leq t_k \tag{1.3}$$

$$F_v\left[x_N\left(t_N\right), t_N\right] = 0, \quad v = 1, 2, ..., E \text{ (sayılar)} \tag{1.4}$$

$$x_{k+1}\left(t_k\right) = D_k\left(x_k\left(t_k\right), t_k\right), k = 1, ..., N-1 \tag{1.5}$$

(burada t_1, t_2,….,t_{N-1} bilinmeyenler ve t_N ise sabit değildir).

$$S\left(u_k, t_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} L\left(x_k, u_k, t\right) \to \min \tag{1.6}$$

Bu problemde $f_k : RxR^n xR^r \to R^n, D_k \, ve \, F_v$ fonksiyonları sürekli (en azından kendi koordinatlarına göre sürekli) kısmi türevlenebilir vektör değerli fonksiyonlardır. L(.,.,.,) verilen integrallenebilir fonksiyon, $u_k(t): R \rightarrow u_k \in R^r$ ise kontrollerdir. u_k kümelerinin boş olmadığı ve sınırlı olduğu kabul edilir. Burada (1.5) değişimi gerçekleştiren koşullardır; yani (1.2) nolu denklemler (1.5) nolu ek bağlantılarla birlikte fonksiyonellik göstermekte olup burada k=1,…, N-1'dir. (3) ve (4) nolu koşullar eğrinin sonundaki sınırlardır.

Esas problem; kontrol u_k ve $t_1,t_2,\ldots,t_{N-1}$ değişim noktaları ile (1.2)-(1.5) ve (1.6)'yı doğrulayan uç nokta t_N yi (t_1, $t_2,\ldots,t_{N-1}$, t_N sabit değildir) yerini tutan durum x_k ile bulmak ve minimal değeri karşılamaktır. Bu problemin düzgün olan ve olmayan (değer fonksiyonelliğinin düzgün olup olmadığı durumlarda) versiyonlarını türetilecektir.

1.3. Optimallik İçin Gerek Koşulları

Teorem 1.5: 1.2-1.6 da tanımlanan problemdeki $\left(u_k^o(t), x_k^o\right)$ çiftlerinin optimizasyonunda aşağıdaki koşulları sağlayan $\alpha_k, \beta_k, k=1,2,\ldots,N; \lambda_v, v=1,2,\ldots,E$ ve vektör $\psi_k(t), k=1,2,\ldots,N$ fonksiyonlarının olması gereklidir.

i) $\left[t_{k-1}, t_k\right], k=1,2,\ldots,N$ aralığında aşağıdaki bağıntı

$$\frac{\partial H_k\left(t, x_k, u_k, \psi_k\right)}{\partial u_k}=0 \text{ sağlar.} \tag{1.7}$$

ii) $t_1,t_2,\ldots,t_N$ değişim noktalarındaki F_v ve D_k fonksiyonları arasındaki bağıntı

$H_k\left(t, x_k, u_k, \psi_k\right)=L\left(x_k, u_k, t\right)-\psi_k(t) f\left(x_k, u_k, t\right)$ Hamilton-Pontryagin fonksiyonu ve $\psi_k(.)$ vektörel fonksiyonu

$$\psi_k\left(t_k\right)=\psi_{k+1}\left(t_k\right) \frac{\partial D_k\left(x_k\left(t_k\right), t_k\right)}{\partial x_k} \qquad k=1,2,\ldots,N-1 ve$$

$$\psi_N\left(t_N\right)=-\frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right), t_N\right]}{\partial x}, \; v=1,2,\ldots,E \text{ durumunda ön koşulu ile}$$

aşağıdaki differansiyel denklemi (eşlenik sistem) sağlarken

$$\dot{\psi}_k(t) = -\alpha_k \frac{\partial L\left(u_k(t), x_k(t), t\right)}{\partial x_k} - \psi_k(t) \frac{\partial f_k\left(x_k(t), u_k(t), t\right)}{\partial x_k} -$$

$$\beta_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial M_k\left(\left(x_k, t\right)\right)}{\partial x_k} \Delta x_k\left(t_k\right) dt, \quad k = 1, 2, ..., N, t \in \left[t_{k-1}, t_k\right] \tag{1.8}$$

$$\sum_{v=1}^{E} \lambda_k \frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right), t_N\right]}{\partial t} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial D_k(x_k(t_k), t_k)}{\partial t} = 0 \text{ dır.} \tag{1.9}$$

Kanıt: $\left(u^o(t), x^o(t)\right)$nin bir optimal kontrol çift $\left(u(t), x(t)\right)$nin de (1.2)-(1.5) için kabul edilebilir, bir mümkün kontrol işlem olsun. Daha önce belirtildiği gibi Dubovitskii-Milyutin biçimselliği kullanılacaktır. Önce minimalleştirme fonksiyonelliğinin analizi ele alınsın.

$$S(x,u) - S\left(x^o, u^o\right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(L\left(x_k, u_k, t\right) - L\left(x_k^o, u_k^o, t\right)\right) dt \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial L}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial L}{\partial u_k} \Delta u_k \right) dt \right) + (.)$$

Değer fonksiyonelliği azalmasının yönü düşünülecek olunursa, Dubovitskii-Milyutin teorisi; eşitsizlik koşulları, eşitliğin kabul edilebilir yönü ve fonksiyonelliği minimalleştirme yönünün azalmasını doğrulayan kümeleri bulma ilkeleri üzerine dayalıdır. Böylece, kesişimi olmayan konveks koniler ile bu kümelere yaklaşmak mümkün olacaktır. Bu kümelerin boş kesişimi gerekli optimalite koşulu olacaktır. Kalan terimi (.) nazarı dikkate alınmazsa bir dizi engellenmiş varyasyon $\left(\Delta x_k, \Delta u_k\right)$ fonksiyonel (1.6) minimizasyonu için aşağıdakileri doğrulayacaktır.

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial L}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial L}{\partial u_k} \Delta u_k \right) dt \right) < 0. \tag{1.10}$$

Öncelikle, en azından $\frac{\partial L}{\partial x_k} ve \frac{\partial L}{\partial u_k}$ dan biri sıfırdan farklı olsun, dolayısıyla minimizasyon fonksiyonelliği için engellenmiş varyasyon kümesi boş olmayan ve konveks açık koni olacaktır. Bu koni Ω_0 sembolü ile gösterilsin. Dual uzay Ω_0^* (A.Y. Dubovitiskii and A.A. Milyutin, 1965) deki teorem 5.1 aracılığıyla aşağıdaki biçimde olacaktır.

$$-\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial L}{\partial x_k} \Delta x_k + . \frac{\partial L}{\partial u_k} \Delta u_k \right) dt$$ (burada α_k gerçek sayılardır)

$M_k\left(x_k(t),t\right) \leq 0, t \in [t_{k-1}, t_k], k = 1,2,...,N.$ sınırında eğer $M_k\left(x_k(t),t\right) < 0$ ise dolayısıyla bu sınır için kabul edilebilir varyasyon kümesi tam uzaydır. (M_k nın sürekliliği ile), eğer $M_k\left(x_k(t),t\right) = 0$ ise kabul edilebilir varyasyon kümesi $B_k\left(x_k,u_k\right) = \max_{t\in[t_{k-1},t_k]} M_k\left(x_k(t),t\right)$ problemini minimalleştirmenin engellenmiş bir varyasyon kümesi ile aynı olacaktır. (A.V. Dmitruk, 2009) daki teorem (4)ü kullanarak şu söylenebilir: Fonksiyonel $F(x_k,u_k)$ Lipschits süreklidir ve sublinear yönelici türev $B^1\left(x_k,\Delta_k\right) = \max_{t\in[t_{k-1},t_k]} \left[\frac{\partial M_k\left(x_k(t),t\right)}{\partial x_k} \Delta x_k(t) \right]$ e sahiptir.

Dolayısıyla $M_k\left(x_k(t),t\right) \leq 0$ için kabul edilebilir varyasyon

$$\max_{t\in T_k} \left[\frac{\partial M_k\left(x_k(t),t\right)}{\partial x_k} \Delta x_k(t) \right] < 0$$ eşitsizliği ile elde edilir.

Kabul edilebilir varyasyon kümesi boş olmayan konveks konidir ve Ω_1. sembolü ile gösterilir. Dual uzay Ω_1^* (A.V. Dimitruk, 2009, teorem 4) sayesinde

$$-\beta k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial M_k\left(\left(x_k,t\right)\right)}{\partial x_k} \Delta x_k\left(t_k\right) dt$$ biçimine sahiptir.

(1.3)-(1.4) koşulları için kabul edilebilir varyasyon kümesi bulalım. F_v fonksiyonlarının diferansiyelleştirilmesini kullanarak şu yazılabilir.

$$\sum_{v=1}^{E} \frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial x} \Delta x_N\left(t_N\right) + \sum_{v=1}^{E} \frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial t} = 0 \tag{1.11}$$

(1.4) nolu koşullar için kabul edilebilir varyasyonu bulundu ve sonrasında bunlar birleştirildi. $F_v\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]$ sürekli olduğundan (1.3) ün koşulları için kabul edilebilir varyasyonlar kümesi tüm uzaydır.

Şimdi (1.2) nolu koşullar için kabul edilebilir varyasyonları ele alınacaktır.

$\left(u_k^o\left(t\right),x_k^o\left(t\right)\right)$nin bir optimal kontrol işlem olduğunu ve $\left(u_k\left(t\right),x_k\left(t\right)\right)$ nin ise $x_1\left(t_0\right)=x_0$, ve (1.5) nolu koşullar için aynı koşulları sağlayan herhangi kontrol işlemleri olduklarını varsayalım. (1.2) numaradaki bu kontrol işlemi ve çıkartmaları birbirine eklenecek olursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$\Delta x_k = x_k - x_k^0,\ \Delta u_k = u_k - u_k^0$ iken

$$\Delta x^*_k = f_k\left(\Delta x_k,\Delta u_k,t\right)=\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\Delta x_k+\frac{\partial f_k}{\partial u_k}\Delta u_k,\Delta x_k\left(t_0\right)=0\,\text{dır.} \tag{1.12}$$

Son ilişki için kabul edilebilir varyasyon kümesi A_1. sembolü ile gösterilsin. (A.V. Dmitruk, 2009) daki teorem 3.4 kullanılarak A_1^* dual uzayı (lineer fonksiyoneller kümesi), $x_k^*\left(u_k\right)$ ve u_k (12) yi doğrularken $\ell\left(x_k - x_k^*\left(u\right)\right)$, şeklindedir. (4) nolu ilgi için kabul edilebilir varyasyonlar kümesi aşağıdaki ilişkiyi doğrulayan forma sahiptir.

$$\sum_{v=1}^{E}\frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial x}\Delta x_N\left(t_N\right)+\sum_{v=1}^{E}\frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial t}=0$$

Bu küme A_2. ile gösterilsin. Daha sonra (A.Y. Dubovitiskii and A.A. Milyutin, 195)deki teorem 5.1 i kullanılarak dual uzay A_2^* aşağıdaki formda yazılabilir.

$$-\sum_{v=1}^{E}\lambda_v\frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial x}\Delta x_N\left(t_N\right)-\sum_{v=1}^{E}\lambda_v\frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial t}=0$$

Eğer girişteki teorem 1.2 kullanılırsa genel formda lineer fonksiyonel $A_1^*+A_2^*$,

$$\ell\left(\overline{x}_k - x_k^l\left(\overline{u}\right)\right)-\sum_{v=1}^{E}\lambda_v\frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial x}\Delta x_N\left(t_N\right)-\sum_{v=1}^{E}\lambda_v\frac{\partial F_v\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial t}=0.\ \text{şeklindedir.}$$

Burada Lagrange artma miktarı formülü kullanılırsa ve formüldeki kalan terimin küçüklüğü göz önünde bulundurulursa aşağıdaki elde edilir.

$$\Delta\dot{x}_k(t) = \frac{\partial f_k(x_k(t),u_k(t),t)}{\partial x}\Delta x_k(t) + \frac{\partial f_k(x_k(t),u_k(t),t)}{\partial u_k}\Delta u_k(t)$$

Son ifadeyi bilinmeyen $\psi_k(t)$ ile çarpıp (sonrasında eşlenik sistem olacaktır) t_{k-1} den t_k ya kadar integralini alınırsa ve k=1,...,N için topladığında aşağıdaki elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\psi_k(t)\Delta\dot{x}_k(t)\right)dt\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\psi_k(t)\frac{\partial f_k(x_k(t),u_k(t),t)}{\partial x_k}\Delta x_k(t)\right)dt\right) +$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\psi_k(t)\frac{\partial f_k(x_k(t),u_k(t),t)}{\partial u_k}\Delta u_k(t)\right)dt\right) \tag{1.13}$$

(kısmi integrasyon, başlangıç koşulu ve değişim koşulları kullanarak) (1.13) üzerinde bazı hesaplamalar yapılsın.

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\psi_k(t)\Delta\dot{x}_k(t)\right)dt\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{N}\psi_k(t_k)\Delta x_k(t_k) - \sum_{k=1}^{N}\psi_k(t_{k-1})\Delta x_k(t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\dot{\psi}_k(t)\Delta x_k(t)dt =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N-1}\psi_k(t_k)\Delta x_k(t_k) + \psi_N(t_N)\Delta x_N(t_N)\right) - \left(\sum_{k=1}^{N-1}\psi_{k+1}(t_k)\Delta x_{k+1}(t_k) + \psi_1(t_0)\Delta x_1(t_0)\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\dot{\psi}_k(t)\Delta x_k(t)dt,$$

$\psi_1(t_0)\Delta x_1(t_0) = 0$ olursa diferansiyeli bulma bağıntıları (1.5)

$\Delta x_{k+1}(t_k) = \dfrac{\partial D_k(x_k(t_k),t_k)}{\partial x}\Delta x_k(t_k) + \dfrac{\partial D_k(x_k(t_k),t_k)}{\partial t}$ gibi kabul edilirse son denklemlerden aşağıdaki elde edilir:

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\dot{\psi}_k(t)\Delta x_k(t)dt = \sum_{k=1}^{N}\left(\psi_k(t_k) - \psi_{k+1}(t_k)\frac{\partial D_k(x_k(t_k),t_k)}{\partial x}\right)\Delta \dot{x}_k(t_k) -$$

$$\psi_{N+1}(t_N)\Delta x_N(t_N)-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial D_k\left(x_k(t_k),t_k\right)}{\partial x}-\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\dot{\psi}_k(t)\Delta x_k(t)\,dt \tag{1.14}$$

Dolayısıyla

$$-\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\psi_k(t)\frac{\partial f_k\left(x_k(t),\mathrm{u_k}(t),t\right)}{\partial x}\Delta\dot{x}_k(t)\right)dt\right)-$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\psi_k(t)\frac{\partial f_k\left(x_k(t),\mathrm{u_k}(t)t\right)}{\partial x}\Delta\dot{u}_k(t)\right)dt\right)+$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\psi_k(t_k)\Delta\dot{x}_k(t_k)-\psi_{k+1}(t_k)\frac{\partial D_k\left(x_k(t_k),t_\mathrm{k}\right)}{\partial x}\Delta x_k(t_k)\right)-\psi_N(t_N)\Delta x_N(t_N)-$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}+\frac{\partial D_k\left(x_k(t_k),t_\mathrm{k}\right)}{\partial t}-\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\dot{\Psi}_k(t)\Delta x_k(t)\,dt=0 \tag{1.15}$$

Euler denklemi ile

$$\Omega_0^*+\Omega_1^*+A_1^*+A_2^*=0. \tag{1.16}$$

$\Omega_0^*,\Omega_1^*,A_1^*\, ve\, A_2^*$ kümeleri kendi analitik ifadeleriyle değiştirilirse ve sonrasında elde edilen denkleme (1.15)’i eklenirse (yapılabilir çünkü (1.15)in toplamı sıfırdır) şu elde edilir:

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(-\alpha_k\frac{\partial L}{\partial x_k}\Delta x_k-\alpha_k\frac{\partial L}{\partial u_k}\Delta u_k\right)dt-\beta_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial M_k\left(\left(x_k,t\right)\right)}{\partial x_k}\Delta x_k(t_k)\,dt+l\left(\overline{x}_k-x_k^{\mathrm{l}}\left(\overline{u}\right)\right)$$

$$-\sum_{\upsilon=1}^{E}\lambda_k\frac{\partial F_\upsilon\left[x_N(t_N),t_N\right]}{\partial x}\Delta x_N(t_N)-\sum_{\upsilon=1}^{E}\lambda_\upsilon\frac{\partial F_\upsilon\left[x_N(t_N),t_N\right]}{\partial t}-$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\psi_k(t)\frac{\partial f_k\left(x_k(t),u_k(t),t\right)}{\partial x_k}\Delta x_k(t)\right)dt\right)-$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\psi_k(t)\Delta u_k\, f_k\left(x_k(t),u_k(t),t\right)\right)dt\right)+$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(\psi_k(t_k)\Delta x_k(t_k)-\psi_{k+1}(t_k)\frac{\partial D_k\left(x_k(t_k),t_k\right)}{\partial x}\Delta x_k(t_k)\right)-\psi_N(t_N)\Delta x_N(t_N)-$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial D_k\left(x_k\left(t_k\right),t_k\right)}{\partial x}-\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\dot{\psi}_k\left(t\right)\Delta x_k\left(t\right)\right)dt\right)=0$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(\psi_k\left(t_k\right)-\psi_{k+1}\left(t_k\right)\frac{\partial D_k\left(x_k\left(t_k\right),t_k\right)}{\partial x}\right)\Delta x_k\left(t_k\right)+\psi_N\left(t_N\right)\Delta x_N\left(t_N\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial D_k\left(x_k\left(t_k\right),t_k\right)}{\partial t}+l\left(x_k-x_k^*\left(\bar{u}\right)\right)$$

$L\left(x_k-x_k^*\left(\bar{u}\right)\right.$daki $x_k=x_k^*\left(\bar{u}\right)$yu olarak $\Delta x_k\left(t\right),\Delta x_N\left(t_N\right),\Delta x_k\left(t_k\right) ve\ u_k\left(t\right)$ yöndeş katsayılarının grubu oluşturulursa, sonrasında aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(-\alpha_k\frac{\partial L}{\partial x_k}-\psi_k\left(t\right)\frac{\partial f_k\left(x_k\left(t\right),u_k\left(t\right),t\right)}{\partial x_k}-\beta_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial M_k\left(\left(x_k,t\right)\right)}{\partial x_k}\dot{\psi}_k\left(t\right)\right)\Delta x_k\left(t\right)dt+$$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(-\alpha_k\frac{\partial L}{\partial u_k}-\psi_k\left(t\right)\frac{\partial f_k\left(x_k\left(t\right),u_k\left(t\right),t\right)}{\partial u_k}\right)\Delta x_k\left(t\right)+l\left(x_k-x_k^*\left(u\right)\right)+$$

$$\left(\sum_{\upsilon=1}^{E}-\lambda_k\frac{\partial F_\upsilon\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial x}-\psi_N\left(t_N\right)\right)\Delta x_N\left(t_N\right)-$$

$$\sum_{\upsilon=1}^{E}\lambda_\upsilon\frac{\partial F_\upsilon\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial t}-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial D_k\left(x_k\left(t_k\right),t_k\right)}{\partial t}$$

$$-\sum_{k=1}^{N-1}\left(\psi_k\left(t_k\right)-\psi_{k+1}\left(t_k\right)\frac{\partial D_k\left(x_k\left(t\right),t\right)}{\partial x}\right)\Delta x_k\left(t_k\right)$$

$$=0$$

ψ_k,

$\psi_k\left(t\right)=\psi_{k+1}\left(t_k\right)\dfrac{\partial D_k\left(x_k\left(t_k\right),u_k\left(t\right),t_k\right)}{\partial x}$ ile k=1,2,…,N-1 durumunda ve

$$\psi_N\left(t_N\right)=-\sum_{\upsilon=1}^{E}\lambda_k\frac{\partial F_\upsilon\left[x_N\left(t_N\right),t_N\right]}{\partial x}$$

başlangıç koşulları ile

$$\dot{\psi}_k(t) = -\alpha_k \frac{\partial L}{\partial x_k} - \psi_k(t) \frac{\partial f_k(x_k(t),t)}{\partial x_k} - \beta_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial M_k((x_k,t))}{\partial x_k} \Delta x_k(t_k)\,dt$$ diferansiyel

sistem denkleminin çözümü ve aşağıdaki bağıntı F_v ve D_k fonksiyonlarını açıklasın.

$$\sum_{\upsilon=1}^{E} \frac{\partial F_\upsilon[x_N(t_N),t_N]}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial D_k(x_k(t_k),t_k)}{\partial t} = 0.$$

O zaman

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x_k} - \psi_k(t) \frac{\partial f_k(x_k(t),u_k(t),t)}{\partial u_k} \right) \Delta x_k(t) \right) dt \right) = 0\,.$$

Pontryagin fonksiyonunu

$H_k(t,x_k,u_k,\psi_k) = -L(x_k,u_k,t) - \psi_k(t)\, f(x_k,u_k,t)$ olsun. $\Delta u_k(t)$ keyfi olarak seçilirse sonrasında teorem (1.5) elde edilir.

1.4. Düzgün Olmayan Durum (Düzgün olmama minimalleştirme fonksiyonelliğine eklenmiştir)

Minimalleştirme fonksiyonelliği (1.6) aşağıdaki formda olsun.

φ_k pozitif homojen ve yarı türevi alınabilen fonksiyon iken

$$S(u_k,t_k) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x_k(t)) \to \min \text{ dır.} \tag{1.17}$$

Teorem 1.6. Minimizasyon fonksiyonelliği $\varphi_k(.)$ pozitif homojen, $x_k^0(.)$ ile $(u_k^o(t),x_k^o)$ noktasında yarı türevi alınabilen ve kontrol problemi (1.2)-(1.5) ve (1.17) için optimal bir çözüm olsun. $x_k^* \in M(\varphi_k(.))$ olan konveks, yoğun sınırlı bir küme olsun ve $\alpha_k,\beta_k, k=1,2,....,N;$ $\lambda_v, v=1,2,...,E$ gibi sayılar ile $\psi_k(t), k=1,2,...N$ gibi vektör fonksiyonları oluşsun; teorem (1.5), (1.9) daki yerine koyma eşlenik sistemi ile aşağıda görüldüğü gibi doğrulamaktadır.

$$\dot{\psi}_k(t)=\alpha_k x_k^* - \psi_k(t)\frac{\partial f_k\left(x_k(t),u_k(t),t\right)}{\partial x_k} - \beta_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial M_k\left(\left(x_k,t\right)\right)}{\partial x_k}\Delta x_k\left(t_k\right)dt,$$

$$k=1,2,...,N,\ t\in\left[t_{k-1},t_k\right]$$

ve Pontryagin Hamilton fonksiyonu $H_k\left(t,x_k,u_k,\psi_k\right)=\psi_k(t)\, f\left(x_k,u_k,t\right)$ şeklindedir.

Kanıt: Eğer minimalleştirme fonksiyonelliği $\varphi_k(.)$, pozitif homojen ve $x_k^o(.)$ noktasında yarı türevi alınabilen ise, o zaman $\varphi_k(.)$ için tamamen sınırlı, $E_{*,k}$ alt boşluk oluşturucuları meydana gelir (V.F. Demyanov and V.A. Roscina, 2008, teorem 4). $E_{*,k}$ dan bir eleman, örneğin $M\left(\varphi_k(.)\right)\in E_{*k}$ (ki bu boşluk oluşturucunun bir kümeler ailesi olmasından dolayıdır) ve herhangi bir $x_k^*\in M\left(\varphi_k\right)$ elemanı, daha sonra da $x_k^*\in \bigcap_{c_k\in E_{*,k}} C_k$ alınsın.

Sonrasında teorem 1.4 ü kullanarak şu yazılabilir; $x_k^*\in\hat{\partial}^+\varphi_k\left(x_k^0(.)\right)$. Bu çalışmanın giriş bölümündeki Frechet süperdiferansiyelinin tanımıyla

$\varphi_k\left(x_k(.)\right)-\varphi_k\left(x_k^0(.)\right)\le\left\langle x_k^*, x_k(.)-x_k^0(.)\right\rangle+(.)=\left\langle x_k^*,\Delta x_k(.)\right\rangle+(.)$ dır (1.18)

Ve minimizasyon fonksiyoneli (1.17) için bir küme engellenmiş Δx_k değişimi $\sum_{k=1}^{N}\left\langle x_k^*,\Delta x_k(.)\right\rangle\le 0$ ‘ı doğrular. Bu konidir ve bu çalışmanın giriş bölümündeki fonksiyonel analize ait bilgi ile Dubavitskii-milutin teorisi kullanarak α_k gerçek sayılar iken çifte koninin $-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\left\langle x_k^*,\Delta x_k(.)\right\rangle$ formunda olduğu söylenilebilir. Teorem 1.5 için yapılmış tanım, fonksiyonel (1.17)nin yerini aldığı minimizasyon fonksiyoneli (1.6) kullanılarak teorem (1.6)’i (1.9) daki değişen eşlenik sistem aşağıdaki formuyla kanıtlanabilir.

$$\dot{\psi}_k(t)=\alpha_k x_k^* - \psi_k(t)\frac{\partial f_k\left(x_k(t),u_k(t),t\right)}{\partial x_k} - \beta_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial M_k\left(\left(x_k,t\right)\right)}{\partial x_k}\Delta x_k\left(t_k\right)dt,$$

$$k=1,2,...,N,\ t\in\left[t_{k-1},t_k\right]$$

ve Pontryagin – Hamilton $H_k(t, x_k, u_k, \psi_k) = \psi_k(t) f(x_k, u_k, t)$ olarak fonksiyon göstermektedir.

Sonuç 1.6 Teorem 1.6, minimizasyon fonksiyonelinin Gateaux üst türevi alınabilen fonksiyon olması durumunda, minimizasyon fonksiyoneli $\varphi_k(.)$nın pozitif homojen olduğu açıklanmaktadır ve Gateaux türevi alınabilen fonksiyon $x_k^0(.)$ noktasındadır.

Kanıt: Kanıt açıktır. Aynen teorem 1.6'daki gibi, mevcut çalışmadaki Lemma 1.1 deki Frechet üst türevi alınabilen fonksiyon ile Gateaux üst türevi alınabilen fonksiyon arasındaki bağıntılar kullanılarak kanıtlanabilir.

Bölüm 2

2. Ayrık Optimal Kontrol Sistemleri İçin Maksimum Prensibi

2.1. Problemin Önerilmesi Ayrık zaman aralığı [t_0,t_0+1,…,t_1,t_1+1,…, T=t_0+N] kontrol edilmiş işleminin aşağıdaki gecikmeli fark denklemleri sistemi ile tanımlansın.

$$x(t+1) = f\left(t, x(t), x(t-h), u(t)\right), t \in Q_1 = \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1\}, \tag{2.1}$$

$$x(t_0 - h) = x_{t_0-h}, \ldots, x(t_0)\mathrm{x}_0, \tag{2.2}$$

$$y(t+1) = g\left(t, y(t), y(t-h), v(t)\right), t \subset Q_2 = \{t_1, \ldots, t_1+1, T-1\}, \tag{2.3}$$

$$y(t) = G\left(x(t)\right), \mathrm{t} \in E_{t_1} = \{t_1 - h, t_1 + h + 1, \ldots, t_1\}, \tag{2.4}$$

Burada $f\left(t, x, \alpha, u\right)\left(g\left(t, u, \beta, v\right)\right)$ verilen bir $n(m)-$ boyutsal vektör fonksiyonu süreklidir ve ikinci mertebeden dar $t_0\left(x, \alpha\right)\left(\left(y, \beta\right)\right)$e göre sürekli kısmi türevleri vardır. $\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1, \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{x}_{\mathrm{t}_0-h}, \ldots, x_0$ verilen gerçek sayılar, *h* gecikme, *N* doğal bir sayı, *G*(*x*) verilen m-boyutlu sürekli türevi alınabilen vektör fonksiyonu, *u*(*t*), *v*(*t*)-*r* ve *q*- ise boyutlu vektör fonksiyonlarıdır ve bu fonksiyonlar ile boş olmayan sınırlı kümeler *U* ve *V* nin değerleri sırasıyla:

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in Q_1, \tag{2.5}$$

$$v(t) \in V \subset R^q, t \in Q_2 \tag{2.6}$$

Yukarıda belirtilen koşulları doğrulayan bir çift (*u*(*t*),*v*(*t*)), kabul edilebilir çift (kabul edilebilir kontrol) olarak adlandırılacaktır. Amaç terminal fonksiyoneli

$$S(u, v) = \varphi_1\left(x(t_1)\right) + \varphi_2\left(y(T)\right) \tag{2.7}$$

minimize etmek olup bu terminal fonksiyonel, bütün kabul edilebilir kontroller ile çizilen sistemin çözümleri (2.1)-(2.4) te tanımlanmıştır. Burada, $\varphi_1\left(x(t_1)\right) + \varphi_2\left(y(T)\right)$ verilen sürekli türevi alınabilen rakamlarla ifade edilebilen fonksiyonlardır.

İleride, (2.1)-(2.6) nolu sınırlamalı, fonksiyonelliği minimalleştirme problemi (2.7) bir problem olarak (2.1)-(2.7) de dikkate alınacaktır.

Problem (2.1)-(2.7)nin çözümü olan kabul edilebilir çift (kabul edilebilir kontrol) (u (t), v (t)) optimal çift olarak adlandırılır ve yöndeş işlem (u (t), v (t), x (t), y (t)) ise optimal işlem olarak isimlendirilir.

Amaç, problem (2.1)-(2.7) için Pontryagin'in maksimum prensip [67] tipi gerekli optimalite koşullarını türetmektir.

Bu amaçla, kalite fonksiyonelliği (2.7)nin artma miktarı formülünü oluşturulsun.

2.2. Fonksiyonelin Artma Miktarı Formülü

$\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ sabit olsun

$\left(\bar{u}(t) = u^0(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^0(t) + \Delta v(t)\right)$ herhangi kabul edilebilir bir kontrol olsun.

$\left(x^0(t), y^0(t)\right)$, $\left(\bar{x}(t) = x^0(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^0(t) + \Delta y(t)\right)$ ile problem (2.1)-(2.4) ün yöndeş çözümünü gösterilebilir.

Dolayısıyla, fonksiyonel kalite (2.7) nin artma miktarı formülünün aşağıdaki gibi olacağı açıktır.

$$\Delta S\left(u^0, v^0\right) = S\left(\bar{u}, \bar{v}\right) - S\left(u^0, v^0\right) = \left[\varphi_1\left(\bar{x}(t_1)\right) - \varphi_1\left(x^0(t_1)\right)\right] + \left[\varphi_2\left(y(T)\right) - \varphi_2\left(y^0(T)\right)\right]. \quad (2.8)$$

Diğer taraftan $\left(\Delta x(t), \Delta y(t)\right)$, aşağıdaki bağıntıyı doğrulamaktadır:

$$\Delta x(t+1) = f\left(t, \bar{x}(t), \bar{\alpha}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t, x^0(t), \alpha^0(t), u^0(t)\right), \quad (2.9)$$

$$\Delta x(t_0 - h) = 0, \ldots, \Delta x(t_0) = 0, \quad (2.10)$$

$$\Delta y(t+1) = g\left(t, \bar{y}(t), \bar{\beta}(t), \bar{v}(t)\right) - g\left(t, y^0(t), \beta^0(t), v^0(t)\right), \quad (2.11)$$

$$\Delta y(t) = \Delta G\left(x^0(t)\right) = G\left(\bar{x}(t)\right) - G\left(x^0(t)\right), t \in E_{t_1}, \quad (2.12)$$

$$\left(\alpha(t) = x(t-h), \beta(t) = y(t-h)\right).$$

Ancak $\psi^0(t)$ ve $p^0(t)$ bilinmeyenler, n ile m ise sırasıyla vektör fonksiyonlarıdır.

(2.9) (2.10) nun her iki kenarını bu vektörler ile çarpıp sonuç bağıntısını t_0 *dan* $t_1 - 1$ e kadarki genliğe göre toplandığında aşağıdaki elde edilir.

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}(t)\Delta x(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}(t)\left[f\left(t, \overline{x}(t), \overline{\alpha}(t), \overline{\mathrm{u}}(t)\right) - f\left(t, x^0(t), \alpha^0(t), \mathrm{u}^0(t)\right)\right], \tag{2.13}$$

$$\sum_{t=t_1}^{T-1} p^{0'}(t)\Delta y(t+1) = \sum_{t=t_1}^{T-1} p^{0'}(t)\left[g(t), \overline{y}(t), \overline{\beta}(t), \overline{v}(t) - g\left(t, y^0(t), \beta^0(t), v^0(t)\right)\right], \tag{2.14}$$

Kabul edelim ki

$$H\left(t, x, \alpha, u, \psi^0\right) = \psi^{0'} f\left(t, x, \alpha, u\right),$$

$$M\left(t, y, \beta, v, \rho^0\right) = \rho^{0'} g\left(t, y, \beta, v\right), \text{ olsun}$$

ve (2.13)(2.14) özdeşlikleri hesaba katıldığında, artma miktarı formülü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Delta S\left(u^0, v^0\right) = \left[\varphi_1\left(\overline{x}(t_1)\right) - \varphi_1\left(x^0(t_1)\right)\right] + \left[\varphi_2\left(\overline{y}(T)\right) - \varphi_2\left(y^0(T)\right)\right]$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}(t)\Delta x(t+1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}\left[H\left(t, \overline{x}(t), \overline{\alpha}(t), \overline{u}(t), \psi^0(t)\right) - H\left(t, x^0(t), \alpha^0(t), u^0(t), \psi^0(t)\right)\right] +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{T-1} p^{0'}(t)\Delta y(t+1) - \sum_{t=t_1}^{T-1}\left[M\left(t, \overline{y}(t), \overline{\beta}(t), \overline{v}(t), p^0(t)\right) - M\left(t, y^0(t), \beta^0(t), v^0(t), p^0(t)\right)\right] \tag{2.15}$$

Eğer s yerine t+1 değişkeni alınırsa aşağıdaki gibi bir kanıtlama kolay olacaktır.

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}(t)\Delta x(t+1) = \psi^{0'}(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}(t-1)\Delta x(t), \tag{2.16}$$

$$\sum_{t=t_0}^{T-1} p^{0'}(t)\Delta y(t+1) = p^{0'}(T-1)\Delta y(T) - p^{0'}(t_1 - 1)\Delta y(t_1) + \sum_{t=t_1}^{T-1} p^{0'}(t-1)\Delta y(t) \tag{2.17}$$

Son bağıntılar göz önüne alınırsa (2.15) ten aşağıdakiler yazılabilir

$$\Delta S\left(u^0,v^0\right)=\left[\varphi_1\left(\overline{x}\left(t_1\right)\right)-\varphi_1\left(x^0\left(t_1\right)\right)\right]+\left[\varphi_2\left(\overline{y}\left(T\right)\right)-\varphi_2\left(y^0\left(T\right)\right)\right]+\psi^{0'}\left(t_1-1\right)\Delta x\left(t_1\right)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^{0'}\left(t-1\right)\Delta x\left(t\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\left(t,x^0\left(t\right),\alpha^0\left(t\right),\overline{u}\left(t\right),\psi^0\left(t\right)\right)-H\left(t,x^0\left(t\right),\alpha^0\left(t\right),u^0\left(t\right),\psi^0\left(t\right)\right)\right]-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\left(t,\overline{x}\left(t\right),\overline{\alpha}\left(t\right),\overline{u}\left(t\right),\psi^0\left(t\right)\right)-H\left(t,x^0\left(t\right),\alpha^0\left(t\right),\overline{u}\left(t\right),\psi^0\left(t\right)\right)\right]+p^{0'}\left(T-1\right)\Delta y\left(T\right)-$$

$$-p^{0'}\left(t_1-1\right)\Delta y\left(t_1\right)+\sum_{t=t_1}^{T-1}p^{0'}\left(t_1-1\right)\Delta y\left(t\right)-\sum_{t=t_1}^{T-1}\left[M\left(t,\overline{y}\left(t\right),\overline{\beta}\left(t\right),\overline{v}\left(t\right),p^0\left(t\right)\right)-\right.$$

$$\left.-M\left(t,y^0\left(t\right),\beta^0\left(t\right),\overline{v}\left(t\right),p^0\left(t\right)\right)\right]-\Big)-\sum_{t=t_1}^{T-1}\left[M\left(t,y^0\left(t\right),\beta^0\left(t\right),\overline{v}\left(t\right),p^0\left(t\right)\right)-\right.$$

$$\left.-M\left(t,y^0\left(t\right),\beta^0\left(t\right),v^0\left(t\right),p^0\left(t\right)\right)\right] \tag{2.18}$$

Uygunluk için aşağıdaki gibi bir gösterim yazılabilir;

$$\Delta_{\overline{u}(t)}H\left[t\right]\equiv H\left(t,x^0\left(t\right),\alpha^0\left(t\right),\overline{u}\left(t\right),\psi^0\left(t\right)\right)-H\left(t,x^0\left(t\right),\alpha^0\left(t\right),u^0\left(t\right),\psi^0\left(t\right)\right),$$
$$H_x\left[t\right]\equiv H_x\left(t,x^0\left(t\right),\alpha^0\left(t\right),\overline{u}\left(t\right),\psi^0\left(t\right)\right),$$
$$M_y\left[t\right]\equiv H_y\left(t,y^0\left(t\right),\beta^0\left(t\right),v^0\left(t\right),p^0\left(t\right)\right)$$
$$\Delta_{\overline{v}(t)}M\left[t\right]\equiv M\left(t,y^0\left(t\right),\beta^0\left(t\right),\overline{v}\left(t\right),p^0\left(t\right)\right)-M\left(t,y^0\left(t\right),\beta^0\left(t\right),v^0\left(t\right),p^0\left(t\right)\right),$$

Bu denklem kümelerini göz önünde bulundurur, Taylor'un formülü ve

$\Delta y\left(t\right)=\Delta G\left(x^0\left(t\right)\right)\equiv G\left(\overline{x}\left(t\right)\right)-G\left(x\left(t\right)\right)$, gerçeğini kullanılırsa artma miktarı formülü (2.18) aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\Delta S\left(u^0,v^0\right)=\frac{\partial\varphi_1'\left(x^0\left(t_1\right)\right)}{\partial x}\Delta x\left(t_1\right)+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^0\left(T\right)\right)}{\partial y}\Delta y\left(T\right)+\psi^{0\prime}\left(t_1-1\right)\Delta x\left(t_1\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^{0\prime}\left(t-1\right)\Delta x\left(t\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_x'\left[t\right]\Delta x\left(t\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\overline{u}}H'\left[t\right]-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\overline{u}}H_x'\left[t\right]\Delta x\left(t\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_\alpha'\left[t\right]\Delta x\left(t-h\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\overline{u}}H_\alpha'\left[t\right]\Delta x\left(t-h\right)+$$

$$+p^{0'}\left(T-1\right)\Delta y\left(T\right)-p^{0'}\left(t_1-1\right)G_x\left(x^0\left(t_1\right)\right)\Delta x\left(t_1\right)+\sum_{t=t_1}^{T-1}p'\left(t-1\right)\Delta y\left(t\right)-\sum_{t=t_1}^{T-1}M_y'\left[t\right]\Delta y\left(t\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{T-1}M_\beta'\left[t\right]\Delta y\left(t-h\right)-\sum_{t=t_1}^{T-1}\Delta_{\overline{v}}M\left[t\right]-\sum_{t=t_1}^{T-1}\Delta_{\overline{v}}M_y'\left[t\right]\Delta y\left(t\right)-\sum_{t=t_1}^{T-1}\Delta_{\overline{v}}M_\beta'\left[t\right]\Delta y\left(t-h\right)+o_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|\right)+$$

$$+o_2\left(\left\|\Delta y(T)\right\|\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_3\left\|\Delta a(t)\right\|-\sum_{t=t_1}^{T-1}o_4\left(\left\|\Delta b(t)\right\|\right)-p^{0'}(t-1)o_5\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|\right) \tag{2.19}$$

Burada

$$a=\begin{pmatrix}x\\ \alpha\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}y\\ \beta\end{pmatrix},$$

$o_1(.)$, $i=\overline{1,5}$ değerleri sırasıyla aşağıdaki açılımlardan elde edilmiştir.

$$\varphi_1\left(\overline{x}(t_1)\right)-\varphi_1\left(x^0(t_1)\right)=\frac{\partial\varphi_1'\left(x^0(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1)+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|\right),$$

$$\varphi_2\left(\overline{y}(T)\right)-\varphi_2\left(y^0(T)\right)=\frac{\partial\varphi_2'\left(y^0(T)\right)}{\partial x}\Delta y(T)+o_2\left(\left\|\Delta y(T)\right\|\right),$$

$$\mathrm{H}\left(t,\overline{x}(t),\overline{\alpha}(t),\overline{u}(t),\psi^0(t)\right)-\mathrm{H}\left(t_1,x(t),\alpha(t),\overline{u}(t),\psi(t)\right)=\mathrm{H}_x'\left(t,x^0(t),\alpha^0(t),\overline{u}(t),\psi^0(t)\right)\Delta x(t)+$$

$$+\mathrm{H}_\alpha'\left(t,x^0(t),\alpha^0(t),\overline{u}(t),\psi^0(t)\right)\Delta x(t-h)+o_3\left(\left\|\Delta a(t)\right\|\right),$$

$$\mathrm{M}\left(t,\overline{y}(t),\overline{\beta}(t),p^0(t)\right)-\mathrm{M}\left(t,y(t),\beta(t),\overline{u}(t),\overline{v}(t),p^0(t)\right)=M_x'\left(t,y(t),\beta(t),\overline{v}(t),p^0(t)\right)\Delta y(t)+$$

$$+M_\beta'\left(t,y(t),\beta(t),\overline{v}(t),p^0(t)\right)\Delta y(t-h)+o_4\left(\left\|\Delta b(t)\right\|\right),$$

$$\mathrm{G}\left(\overline{x}(t)\right)-G\left(x^0(t)\right)=G_x\left(x^0(t)\right)\Delta x(t)+o_5\left(\left\|\Delta x(t)\right\|\right)$$

Dahası, aşağıdaki özdeşlikleri ispatlamak kolaydır:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_\alpha'[t]\Delta x(t-h)=\sum_{t=t_0-h}^{t_0-1}H_\alpha'[t+h]\Delta x(t)+\sum_{t=t_0}^{t_0-1-h}H_\alpha'[t+h]\Delta x(t)$$

$$\sum_{t=t_1}^{T-1}M_\beta'[t]\Delta y(t-h)=\sum_{t=t_1-h}^{t_1-1}M_\beta'[t+h]\Delta y(t)+\sum_{t=t_1}^{T-h-1}M_\beta'[t+h]\Delta y(t) \tag{2.20}$$

(2.19) tan verilmiş özdeşlikler (2.20) (2.21) ile gösterilecekler aşağıdakilerdir.

$$\Delta S\left(u^0,v^0\right)=\left[\frac{\partial\varphi_1'\left(x^0(t_1)\right)}{\partial x}+\psi^0(t_1-1)-G_x'\left(x(t_1)\,p^0(t_1-1)\right)\right]'\Delta x(t_1)+$$

$$+\left[\frac{\partial\varphi_2\left(y^0(T)\right)}{\partial y}+p^0(T-1)\right]'\Delta y(T)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1-h}\left[\psi^0(t-1)-H_x[t]-H_\alpha[t+h]\right]'\Delta x(t)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1-h}\left[\psi^0(t-1)-H_x[t]\right]'\Delta x(t)+\sum_{t=t_0}^{T-1-h}\left[p^0(t-1)-M_y[t]-M_\beta[t+h]\right]'\Delta y(t)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{T-1}\left[p^0(t-1)M_y[t]\right]'\Delta y(t)-\sum_{t=t_1-h}^{t_1-h}M'_\beta\,[t+h]\Delta y(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar u}H[t]-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar v}M[t]+$$

$$+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(T)\right\|\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_3\left(\left\|\Delta a(t)\right\|\right)-\sum_{t=t_1}^{T-1}o_4\left(\left\|\Delta b(t)\right\|\right)+p^{0'}(t_1-1)\,x$$

$$xo_5\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta_{\bar u}H'_x[t]\Delta x(t)+\Delta_{\bar u}H'_\alpha[t]\Delta x(t-h)\right]-\sum_{t=t_0}^{T-1}\left[\Delta_{\bar v}M'_y[t]\Delta y(t)+\Delta_{\bar u}M'_\beta[t]\Delta y(t-h)\right] \quad (2.21)$$

$t\in E_{t_1}$ olduğu için

$$\Delta y(t)=G\left(\bar x(t)\right)-G\left(x^0(t)\right), \quad (2.22)$$

O halde,

$$\sum_{t=t_1-h}^{t_1-h}M'_\beta[t+h]\Delta y(t)=\sum_{t=t_1-h}^{t_1-1}M'_\beta[t+h]G_x[t]\Delta x(t)+\sum_{t=t_1-h}^{t_1-1}M'_\beta[t+h]o_5\left(\left\|\Delta x(t)\right\|\right)$$

Dolayısıyla, (2.22) den elde edilen aşağıdaki gibidir.

$$\Delta S(u^0,v^0)=\left[\frac{\partial\varphi_1\left(x^0(t_1)\right)}{\partial x}+\psi^0(t_1-1)-G'_x+\left(x^0(t_1)\right)p^0(t_1-1)\right)\right]'\Delta x(t_1)+$$

$$\left[\frac{\partial\varphi_2\left(y^0(T)\right)}{\partial y}+p^0(T-1)\right]'\Delta y(T)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1-h}\left[\psi^0(t-1)-H_x[t]-H_\alpha[t+h]\right]'\Delta x(t)+$$

$$\sum_{t=t_1-1}^{t_1-1}\left[\psi^0(t-1)-H_x[t]-G'_x[t]M_\beta[t+h]\right]'\Delta x(t)+\sum_{t=t_1}^{T-1-h}\left[p^0(t-1)-M_y[t]-M_\beta[t+h]\right]'\Delta y(t)-$$

$$\sum_{t=T-h}^{T-1}\left[p^0(t-1)-M_y[t]\right]'x\Delta y(t)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar u}H[t]-\sum_{t=t_0}^{T-1}\Delta_{\bar v}M[t]+\eta_1\left(u^0,v^0;\Delta u,\Delta v\right) \quad (2.24)$$

ve aşağıdaki tanımla

$$G_x[t]=G_x\left(x^0(t)\right),$$

$$\eta_1\left(u^0,v^0;\Delta u,\Delta v\right)=o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(T)\right\|\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_3\left(\left\|\Delta a(t)\right\|\right)-\sum_{t=t_1}^{T-1}o_4\left(\left\|\Delta b(t)\right\|\right)+p'(t_1-1)$$

$$o_5\left(\left\|\Delta x(t)\right\|\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta_{\bar{u}}H'_x\,[t]\Delta x(t)+\Delta_{\bar{u}}H'_\alpha\,[t]\Delta x(t-h)\right]-\sum_{t=t_1}^{T-1}\left[\Delta_{\bar{v}}M'_y[t]\Delta y(t)+\Delta_{\bar{v}}M'_\beta\,[t]\Delta y(t-h)\right]-$$

$$\sum_{t=t_1-h}^{t_1-1}\left[M'_\beta[t+h]o_5\left(\left\|\Delta x(t)\right\|\right)\right] \tag{2.25}$$

Şimdi $\psi^0(t)$ ve $p^0(t)$ aşağıdaki fark denklemleri sisteminin çözümü olsun.

$$\psi^0(t-1)=H_x[t]+H_\alpha[t+h],t=t_0,t_0+1,...,t_1-1-h$$

$$\psi^0(t-1)=H_x[t]+G'_x[t]\mathrm{M}_\beta[t+h],t=t_1-h,...,t_1-1, \tag{2.26}$$

$$p^0(t-1)=M_y[t]+M_\beta[t+h],t=t_1,...,T-1-h, \tag{2.27}$$

$$p^0(t-1)=M_y[t],t=T-h,...,T-1,$$

$$\psi^0(t_1-1)=-\frac{\partial\varphi_1\left(x^0(t_1)\right)}{\partial x}+G'_x\left(x^0(t_1)\right)p^0(t_1-1) \tag{2.28}$$

$$p^0(T-1)=-\frac{\partial\varphi_2\left(y^0(T)\right)}{\partial y} \tag{2.29}$$

Sistem (2.26) – (2.29) problem (2.17) için eşlenik denklemler olarak adlandırılır. Bu varsayımların ışığı altında, artma miktarı formülü (2.24) aşağıdaki formu almaktadır.

$$\Delta S\left(u^0,v^0\right)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar{u}}H[t]-\sum_{t=t_0}^{T-1}\Delta_{\bar{v}}M[t]+\eta_1\left(u^0,v^0;\Delta u,\Delta v\right) \tag{2.30}$$

Artma miktarı formülü (1.30), birinci sıra tip maksimum prensibin gerekli optimalite koşullarını elde etmeye yardımcı olmaktadır.

2.3. Eğrinin Artma Miktarının Değerlendirilmesi

$\left(\Delta x(t),\Delta y(t)\right)$ için artma miktarı tahmin edilsin. Şunu görmek çok basit olacaktır:

$$\Delta x(t+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left(\Delta x(\tau+1)-\Delta x(\tau)\right),t\in Q_1, \tag{2.31}$$

$$\Delta y(t+1)=\sum_{\tau=t_1}^{t}\left(\Delta y(\tau+1)-\Delta y(\tau)\right)+\Delta y(t_1),t\in Q_2, \tag{2.32}$$

(2.9) ve (2.10) u hesaba katmak suretiyle, (2.31) den şunu elde edilir.

$$\left\|\Delta x(t+1)\right\| = \left\|\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[f\left(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{\alpha}(\tau)\right) - f\left(\tau,x^0(\tau),\alpha^0(\tau),u^0(\tau)\right) - \Delta x(\tau)\right]\right\| \le$$

$$\le \sum_{\tau=t_0}^{t}\left\|\Delta_{\bar{u}} f(\tau)\right\| + \sum_{\tau=t_0}^{t}\left\|\Delta x(\tau)\right\| + Z_1\sum_{\tau=t_0}^{t}\left\{\left\|\Delta x(\tau)\right\| + \left\|\Delta x(\tau-h)\right\|\right\} \tag{2.33}$$

Burada Z_1 bir Lipschits sabitidir.

$\sum_{\tau=t_0}^{t}\left\|\Delta x(\tau-h)\right\| = \sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1}\left\|\Delta x(\tau)\right\| + \sum_{\tau=t_0}^{t-h}\left\|\Delta x(\tau)\right\| \le \sum_{\tau=t_0}^{t}\left\|\Delta x[\tau]\right\|$ için dolayısıyla (1.33) ün gerektirdiği

$$\left\|\Delta x(t+1)\right\| \le \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left\|\Delta_{\bar{u}} f[\tau]\right\| + Z_2\sum_{\tau=t_0}^{t}\left\|\Delta x(\tau)\right\| \tag{2.34}$$

Z_2=sabit > 0 dır.

Gronwall-Bellman Lemma ([13], p [110]'a bakınız) nın son eşitsizlik artma miktarı kıyaslamasını uygulamak suretiyle

$\left\|\Delta x(t)\right\| \le Z_3\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left\|\Delta_{\bar{u}} f[\tau]\right\|, \mathrm{t} \in \mathrm{Q}_1, \cup \mathrm{t}_1, Z_3 = \mathrm{sabit} > 0.$ elde edilir.

(2.32) den aynı zamanda

$\left\|\Delta y(t+1)\right\| \le \left\|\Delta y(t_1)\right\| + \sum_{\tau=t_0}^{t}\left\|\Delta y(\tau+1) - \Delta y(\tau)\right\|$ dur.

Bu eşitsizlik kullanılarak (2.34) deki eşitsizliğin kanıtıyla yapılacak bir kıyaslama sayesinde aşağıdaki kanıtlanabilir:

$$\left\|\Delta y(t)\right\| \le Z_4\left[\left\|\Delta y(t_1)\right\| + \sum_{\tau=t_0}^{T-1}\left\|\Delta_{\bar{v}} g(\tau)\right\| + \sum_{\tau=t_0}^{T-1}\left\|\Delta x(\tau)\right\|\right], t \in Q_2 \cup T, \tag{2.35}$$

Burada Z_4 = sabit > 0 dır.

Ama

$\Delta y(t_1) = G\left(x^0(t_1) + \Delta x(t_1)\right) - G\left(x(t_1)\right),$ için

Şu kolaylıkla görülebilir:

$$\left\|\Delta y\left(t_1\right)\right\| \le Z_5 \left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|,$$
$$Z_5 = sabit > 0$$

Dolayısıyla (2.34) tahminlerini göz önünde bulundurup (2.35) te yerine konursa ve basit dönüşümlerden sonra şu elde edilir:

$$\left\|\Delta y(t)\right\| \le Z_6 \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left\|\Delta_{\bar{u}} f\left[\tau\right]\right\| + \sum_{\tau=t_0}^{T-1}\left\|\Delta_{\bar{v}} g\left[\tau\right]\right\|\right], t \in Q_2 \cup T, \tag{2.36}$$

$Z_6 = sabit > 0\, dır.$

2.4. Ayrık Optimal Kontrol Problemi İçin Maksimum Prensibi

Kabul edelimki açılım, (2.30) şöyle olsun: $\Delta u\left(t\right) \ne 0,\ \left(\Delta v\left(t\right) = 0\right),\ \ \Delta v\left(t\right) \ne 0,$

$\left(\Delta u\left(t\right) = 0\right)$ bu durumda elde edilen aşağıdaki gibidir:

$$\Delta_{\bar{u}} S\left(u^0, v^0\right) = S\left(\bar{u}, v^0\right) - S\left(u^0, v^0\right) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar{u}} H\left[t\right] + \eta_1\left(u^0, v^0; \Delta u, 0\right) \tag{2.37}$$

$$\Delta_{\bar{v}} S\left(u^0, v^0\right) = S\left(u^0, \bar{v}\right) - S\left(u^0, v^0\right) = -\sum_{t=t_1}^{T-1}\Delta_{\bar{v}} M\left[t\right] + \eta_1\left(u^0, v^0; 0, \Delta v\right) \tag{2.38}$$

Kabul edilebilir işlemler $\left(u^0\left(t\right) + v^0\left(t\right) x^0\left(t\right), y^0\left(t\right)\right)$ boyunca, (2.1) (2.3) sistemlerinin kabul edilebilir hızlar kümesi örneğin aşağıdaki kümeler

$$f\left(t, x^0\left(t\right), x^0\left(t-h\right), U\right) = \left\{\alpha_1 : \alpha_1 = f\left(t, x^0\left(t\right), x^0\left(t-h\right), u\right), u \in U\right\}, \tag{2.39}$$

$$g\left(t, y^0\left(t\right), y^0\left(t-h\right), v\right) = \left\{\alpha_2 : \alpha_2 = g\left(t, y^0\left(t\right), y^0\left(t-h\right), v\right), v \in V\right\}, \tag{2.40}$$

konveks olsun. Böylece:

Teorem 2.1. Eğer (2.39)(2.40) kümeleri konveks ise, problem (2.1)-(2.7) için kabul edilebilir $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ kontrollerinin optimalitesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

1) $\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H[t] \leq 0,$ (2.41)

Her $u(t) \in U, t \in Q_1$ için.

2) $\sum_{t=t_1}^{T-1} \Delta_{v(t)} M[t] \leq 0,$ (2.42)

Her $v(t) \in V, t \in Q_2$ için.

Bağıntılar (2.41) ve (2.42), yukarıda belirtilen problem için ayrık maksimum prensip olarak adlandırılır.

Kanıt: Şimdi eşitsizlik (2.41) kanıtlansın.

$\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ optimal kontrol ve onun ani artış varyansı aşağıdaki formüller ile ifade edilebiliyor olsun.

$\varepsilon \in [0,1],\ a \quad u(t;\varepsilon) \in U, \qquad t \in Q_1$ ise bir keyfi vektör ve doğruladığı denklem ise

$\Delta u_{(t;\varepsilon)} f[t] \equiv \varepsilon \Delta_{u(t)} f[t]$

$u(t) \in U,\ t \in Q_1$ *iken.*

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon(t) = u(t;\varepsilon) - u^0(t), t \in Q_1, \\ \Delta u_\varepsilon(t) = 0, \qquad\qquad t \in Q_2, \end{cases} \tag{2.43}$$

Bu, (2.39) un dışbükeyliği nedeniyle mümkündür.

$\left(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t)\right)$ bize özel bir artırma miktarı olan $\left(x^0(t), y^0(t)\right)$yi göstersin ki gösterdiği aynı zamanda bir diğer özel artma miktarı olan (2.43) kontrolü doğruluyor.

(2.43) ten, (2.36) aşağıdakini gerektirmektedir.

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \le Z_7\varepsilon,\ t\in Q_1\cup t_1,$$
$$\|\Delta y_\varepsilon(t)\| \le Z_8\varepsilon,\ t\in Q_2\cup T. \tag{2.44}$$
$$(Z_7, Z_8 = sabit > 0)$$

(2.43) ve (2.44) tahminleri hesaba katıldığında (2.37) den

Böylece $\varepsilon\in[0,1]$in gelişigüzelliğinden, $-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{u(t)}H[t]+o(\varepsilon)\ge 0$ eşitsizlik (2.41)'e indirgendiği elde edilir.

Eşitsizlik (2.42) aynı benzerliği kurarak benzer şekilde kanıtlanabilir.

Sadece bu durumda $(u^0(t), v^0(t))$ için ani artış aşağıdaki formüllere saptanmaktadır.

$$\Delta u_\varepsilon(t)=0, t\in Q_1$$
$$\Delta v_\varepsilon(t)=v(t;\varepsilon)-v^0, t\in Q_2 \tag{2.45}$$

Burada $v(t)\in V, t\in Q_2$ için

$\Delta_{v(t;\varepsilon)}g[t]=\varepsilon\Delta_{v(t)}g[t]$ olacak şekilde $\varepsilon\in[0,1], v(t;\varepsilon)\in V$ dir.

Sonuç Teorem 2.1. (2.39)(2.40) kümeleri konveks olsun. Sonra problem (2.1)-(2.7)deki kabul edilebilir kontrol $(u^0(t), v^0(t))$ nin optimalitesi aşağıdaki eşitsizlikleri doğrulamak için gerekli olacaktır.

1) $\Delta_u H[\theta]\le 0,$ (2.46)

$her\ \ \theta\in Q_1,\ u\in U\ için,$

2) $\Delta_v M[\theta]\le 0,$ (2.47)

$her\ \theta\in Q_2,\ v\in V\ için,$

(2.46) ve (2.47) eşitsizlikleri problem (2.1) – (2.7) için ayrık nokta tabanlı maksimum prensipler [68] olarak adlandırılır. (2.41), (2.42), (2.46) ve (2.47) deki optimalite koşullarının denk olduğu gösterilebilir.

2.4.1. özel durum Şimdi gecikmenin olmaması durumu ele alınsın.

Örneğin,

$S(u,v)=\varphi_1(x(t_1))+\varphi_2(y(T))$ nin minimalleştirme problemi çalışılsın (2.48)

Aşağıdaki sınırlamalar

$u(t)\in U\subset R^r, t\in Q_1,$

$v(t)\in V\subset R^q, t\in Q_2,$ (2.49)

$\mathrm{x}(t+1)=f(t,x(t),u(t)), t\in Q_1,$ (2.50)

$\mathrm{x}(t_0)=x_0,$

$y(t+1)=g(t,x(t),u(t)), t\in Q_2,$

$y(t_1)=G(x(t_1))$, ile çalışın (2.51)

sabit bir kabul edilebilir kontrol $(u^0(t),v^0(t))$ yi varsayarak

$(\psi^0=\psi^0(t),\mathrm{p}^0=\mathrm{p}^0(t))$ iken $\begin{matrix} H(t,x,\mathrm{u},\psi^0)=\psi^{0\prime}f(t,x,u), \\ M(t,y,v,p^0)=p^{0\prime}g(t,y,v), \end{matrix}$ aşağıdaki eşlenik sistemin

bir çözümüdür.

(2.26) – (2.29) için

$$\psi^0(t-1)=H_x[t], t=t_0,t_0+1,...,t_1-1, \tag{2.52}$$

$$\psi^0(t_1-1)=-\frac{\partial\varphi_1(x^0(t_1))}{\partial x}+G_x^{'}(x^0(t_1))\,p^0(t_1-1) \tag{2.53}$$

$$p^0(t-1)=-M_y[t], t=t_1,t_1+1,...,T-1,$$

$$p^0(T-1)=-\frac{\partial\varphi_2(y^0(T))}{\partial y}$$

Teorem 2.1 bunu izler:

Teorem 2.2. Eğer aşağıdaki kümeler

$$f\left(t,x^0\left(t\right),U\right)=\left\{\alpha_1:\alpha_1=f\left(t,x^0\left(t\right),u\right)\mathrm{u}\in \mathrm{U},\right\}$$
$$g\left(t,y^0\left(t\right),V\right)=\left\{\alpha_2:\alpha_2=g\left(t,y^0\left(t\right),v\right)v\in V,\right\}$$

konveks ise, problem (2.48) – (2.51) deki optimal kabul edilebilir kontrol $\left(u^0\left(t\right),v^0\left(t\right)\right)$ aşağıdaki bağıntıları doğrulamak için gerekli olacaktır.

1) $\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{u(t)}H\left[t\right]\le 0,$ (2.54)

her $u\left(t\right)\in U$, $\mathrm{t}\in Q_1$ için

2) $\sum_{t=t_1}^{T-1}\Delta_{u(t)}M\left[t\right]\le 0,$ (2.55)

her $v\left(t\right)\in V$, $\mathrm{t}\in Q_2$ için

2.5. Doğrusallaştırılmış Maksimum Prensip

Problemin formulasyonu ve minimalleştirme fonksiyoneli için çizim artırımı formülü U,V kümelerinin konveks olduğu, $f(t,x,\alpha,u)(g(t,x,\beta,\mathrm{v}))$ nin sürekli oluşu ve $(x,\alpha,u)((\mathrm{y},\beta,\mathrm{v}))$ değişkenlerine göre sürekli birinci sıra kısmi türevleri olduğu varsayımıyla, bu bölümde problem (2.1) – (2.7) yi incelemeye devam edilecektir.

$\left(u^0\left(t\right),v^0\left(t\right),x^0\left(t\right),y^0\left(t\right)\right)H\left(\overline{u}\left(t\right)=u^0\left(t\right)+\Delta u\left(t\right),\overline{v}\left(t\right)=v^0\left(t\right)+\Delta v\left(t\right),\right.$

$\left.\overline{x}\left(t\right)=x^0\left(t\right)+\Delta x\left(t\right),\overline{y}\left(t\right)=y^0\left(t\right)+\Delta y\left(t\right)\right)$ nin herbiri ayrı ayrı sabit ve keyfi kabul edilebilir işlemler olsun. Kalite kriterinin artırımının aşağıdaki gibi yazılabileceği biliniyor (formül (2.18)'e bakınız).

$$\Delta S\left(u^0,v^0\right)=\left[\varphi_1\left(\overline{x}\left(t_1\right)\right)-\varphi_1\left(x^0\left(t_1\right)\right)\right]+\left[\varphi_2\left(\overline{y}\left(T\right)\right)-\varphi_2\left(y^0\left(T\right)\right)\right]+\psi^{0'}\left(t_1-1\right)\Delta x\left(t_1\right)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^{0'}(t-1)\Delta x(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[H\big(t,\overline{x}(t),\overline{\alpha}(t),\overline{u}(t),\psi^0(t)\big)-H\big(t,x^0(t),\alpha^0(t),u^0(t),\psi^0(t)\big)\Big]-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{T-1}\Big[M\big(t,\overline{y}(t),\overline{\beta}(t),\overline{v}(t),p^0(t)\big)-M\big(t,y^0(t),\beta^0(t),v^0(t),p^0(t_1)\big)\Big]+p^{0'}(T-1)\Delta y(T)-$$

$$-p^{0'}(t_1-1)\Delta y(t_1)+\sum_{t=t_1}^{T-1}p^{0'}(t-1)\Delta y(t) \qquad (2.56)$$

Böylece Taylor'ın formülü kullanılarak şu elde edilir.

$\Delta c=\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta\alpha\\ \Delta u\end{pmatrix}$, $\Delta c=\begin{pmatrix}\Delta y\\ \Delta\beta\\ \Delta v\end{pmatrix}$ tanımı ve $o_6(.)$, $o_7(.)$ değerlerinin herbiri ayrı ayrı

$$H\big(t,\overline{x}(t),\overline{\alpha}(t),\overline{u}(t),\psi^0(t)\big)-H\big(t,x^0(t),\alpha^0(t),u^0(t),\psi^0(t)\big)=H_x^{'}[t]\Delta x(t)+$$

$$+H_\alpha^{'}[t]\Delta x(t-h)+H_u^{'}[t]\Delta u(t)+o_6\big(\|\Delta c(t)\|\big),$$

$$M\big(t,\overline{y}(t),\overline{\beta}(t),\overline{v}(t),p^0(t)\big)-M\big(t,y^0(t),\beta^0(t),v^0(t),p^0(t)\big)=M_y^{'}[t]\Delta y(t)+$$

$+M'_\beta\,[t]\Delta y(t-h)+M'_v\,[t]\Delta u(t)+o_7\big(\|\Delta d(t)\|\big).$ açılımlarından belirlenmek üzere (2.57)

$$\Delta S(u^0,v^0)=\frac{\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1)+\frac{\partial\varphi_2'(y^0(T))}{\partial y}\Delta y(T)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^{0'}(t-1)\Delta x(t)+\psi^{0'}(t_1-1)\Delta x(t_1)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{T-1}p^{0'}(t-1)\Delta y(t)+p^{0'}(T-1)\Delta y(T)-p^{0'}(t_1-1)\Delta y(t_1)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[H'_x\,[t]\Delta x(t)+H'_\alpha\,[t]\Delta x(t-h)+$$

$$+H_u^{'}[t]\Delta u(t)\Big]-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_6\big(\|\Delta c(t)\|\big)-\sum_{t=t_1}^{T-1}\Big[M_y^{'}[t]y(t)+M_\beta^{'}[t]\Delta y(t-h)+M_v^{'}[t]\Delta v(t)\Big]-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{T-1}o_7\big(\|\Delta d(t)\|\big)+o_1\big(\|\Delta x(t_1)\|\big)+o_2\big(\|\Delta y(T)\|\big) \qquad (2.58)$$

Şimdi eğer $\big(\psi^0(t),p^0(t)\big)$ nin eşlenik sistem (2.26) – (2.29) un çözümü olduğu kabul edilirse akabinde artırım formülü (2.58) bazı dönüşümlerden sonra aşağıdaki biçimi alacaktır:

$$\Delta S(u^0,v^0)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u^{'}[t]\Delta u(t)-\sum_{t=t_1}^{T-1}M_v^{'}[t]\Delta v(t)+\eta_2\big(u^0,v^0,\Delta u,\Delta v\big) \qquad (2.59)$$

ve aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\eta_2\left(u^0,v^0,\Delta u,\Delta v\right)=o_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|\right)+o_2\left(\left\|\Delta y\left(T\right)\right\|\right)-p^{0'}\left(t_1-1\right)o_5\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|\right)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_6\left(\left\|\Delta c\left(t\right)\right\|\right)-\sum_{t=t_1}^{T-1}o_7\left(\left\|\Delta d\left(t\right)\right\|\right)-\sum_{t=t_1-h}^{t_1-1}M_\beta^{'}\left[t+\beta\right]o_5\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|\right)$$

2.5.1. Artırım eğrisinin değerlendirilmesi ve optimalite koşulu

(2.1) – (2.4) sisteminden

$$\Delta x\left(t+1\right)=f\left(t,\overline{x}\left(t\right),\overline{\alpha}\left(t\right),\overline{u}\left(t\right)\right)-\left(t,x\left(t\right),\alpha\left(t\right),u\left(t\right)\right),\ t\in Q_{1,} \tag{2.60}$$

$$\Delta y\left(t+1\right)=g\left(t,\overline{y}\left(t\right),\overline{\beta}\left(t\right),\overline{v}\left(t\right)\right)-g\left(t,y\left(t\right),\beta\left(t\right),v\left(t\right)\right),\ t\in Q_{2,} \tag{2.61}$$

$\Delta y\left(t\right)=G\left(x\left(t\right)\right),\ t\in E_{t_1}$. dır.

Diğer taraftan önceden de bilindiği üzere

$$\left\|\Delta x\left(t+1\right)\right\|=\left\|\sum_{\tau=t_0}^{t}\left(\Delta x\left(\tau+1\right)-\Delta x\left(\tau\right)\right)\right\|,t\in Q_1,$$

$$\left\|\Delta y\left(t+1\right)\right\|=\left\|\sum_{\tau=t_1}^{t}\left(\Delta y\left(\tau+1\right)-\Delta y\left(\tau\right)\right)+\Delta y\left(t_1\right)\right\|,t\in Q_2\text{ dır.}$$

Bu özdeşlik ve (2.60) ile (2.61) nolu bağıntıları ele alındığında;

$$\left\|\Delta x\left(t+1\right)\right\|\le Z_9\left[\sum_{\tau=t_1}^{t_1-1}\left\|\Delta u\left(\tau\right)\right\|+\sum_{\tau=t_0}^{t}\left\|\Delta x\left(\tau\right)\right\|\right], \tag{2.62}$$

$$\left\|\Delta y\left(t+1\right)\right\|\le\left\|\Delta y\left(t+1\right)\right\|+Z_{10}\left[\sum_{\tau=t_1}^{T-1}\left\|\Delta v\left(\tau\right)\right\|+\sum_{\tau=t_1}^{t}\left\|\Delta y\left(\tau\right)\right\|+\sum_{\tau=t_1}^{t}\left\|\Delta y\left(\tau-h\right)\right\|\right]. \tag{2.63}$$

$Z_9, Z_{10}\cong sabit>0.$

Bronwall – Bellman lemma’nın ayrık analoğunu kullanarak bazı dönüşümlerden sonra bu eşitsizliklerden

$$\|\Delta x(t)\| \le Z_{11}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\|\Delta u(\tau)\|,\ t\in Q_1\cup t_1, \tag{2.64}$$

$$\|\Delta y(t)\| \le Z_{12}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\|\Delta u(\tau)\|+\sum_{\tau=t_1}^{T-1}\|\Delta v(\tau)\|\right],\ t\in Q_2\cup T. \tag{2.65}$$

$\left(Z_{11}, Z_{12} = sabit > 0\right)$. elde edilir.

Teorem 2.3. (Doğrusallaştırılmış maksimum prensibi)

Eğer U ve V kümeleri konveks ise, problem (2.1) – (2.7) deki kabul edilebilir kontrol $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ nin optimalitesi için aşağıdaki bağıntıların açıklamaları gerekmektedir:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u^{'}[t]\left(u(t)-u^0(t)\right)\le 0, \tag{2.66}$$

her $u(t)\in U$, $\mathrm{t}\in Q_1$ için.

$$\sum_{t=t_1}^{T-1} M_v^{'}[t]\left(v(t)-v^0(t)\right)\le 0, \tag{2.67}$$

her $v(t)\in V$, $\mathrm{t}\in Q_2$ için.

Şimdi eşitsizlik (2.66) kanıtlansın.

$\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ optimal kontrol olsun. Özel artırım aşağıdaki formül ile belirlensin:

$\varepsilon\in[0,1]$, $\mathrm{u}(\mathrm{t})\in U$, $t\in Q_1$, keyfi vektör kontrolü iken.

$$\Delta u(t:\varepsilon) = \varepsilon\left[u(t)-u^0(t)\right],\ t\in Q_1 \tag{2.68}$$

$$\Delta v(t:\varepsilon) = 0,\ \ t\in Q_2 \tag{2.69}$$

Sonrasında (2.64), (2.65) nolu tahminler şunu gerektirecektir:

$$\|\Delta x(t:\varepsilon)\|\le Z_{13}\varepsilon,\ \ t\in Q_1\cup t_1, \qquad (1.70)$$

$$\|\Delta y(t:\varepsilon)\|\le Z_{14}\varepsilon,\ \ t\in Q_2\cup T. \qquad (1.71)$$

$Z_{13}, Z_{14} = sabit > 0.$

Dolayısıyla, (2.59) nolu bağıntıdan aşağıdaki eşitsizlik elde edilmektedir:

$$\Delta_u S\left(u^0, v^0\right) = S\left(u^0(t) + \Delta u(t;\varepsilon), v^0(t)\right) - S\left(u^0(t), v^0(t)\right) = \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u^{'}[t]\left(u(t) - u^0(t)\right) + o(\varepsilon) \geq 0$$

Böylece, $\varepsilon \in [0,1]$nin gelişigüzelliği sayesinde (2.66) nolu eşitsizlik doğrulanmaktadır. Eşitsizlik (2.67) benzer bir şekilde kanıtlanır. Ama bu durumda kabul edilebilir kontrol $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$nin özel artırımı şu formül ile belirlenmelidir:

$$\Delta u(t;\varepsilon) = 0, \ t \in Q_1,$$

$$\Delta v(t;\varepsilon) = \varepsilon\left[v(t) - v^0(t)\right],$$
$$\varepsilon \in [0,1], \ v(t) \in V, \ t \in Q_2, \ \text{gelişigüzel kontroldür}.$$

Teorem 2.3 kanıtlanmıştır.

Teorem 2.3'ün kanıtında da görüleceği üzere, (2.39) ve (2.40) nolu kümelerin dışbükeyliliği gerekmektedir. Dolayısıyla, sürekli durum [26] dan farklı olarak doğrusallaştırılmış ayrık maksimum prensip, ayrık maksimum prensibin bir sonucu değildir ve bağımsız bir önemi, anlamı vardır.

Sonuç Teorem 2.2. Eğer U ve V kümeleri konveks, ise problem (2.1) – (2.7) deki $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ optimal kabul edilebilir kontrolü için aşağıdaki koşulların doğrulanması gerekmektedir.

1) $H_u^{'}[\theta]\left(u - u^0(\theta)\right) \leq 0,$ (2.72)

her $u \in U$, $\theta \in Q_1$ için.

2) $M_u^{'}[\theta]\left(v - v^0(\theta)\right) \leq 0$ (2.73)

her $v \in V$, $\theta \in Q_2$ için.

Özel durum

Problem (2.48) – (2.51) ele alalım. Teorem 2.3 ten.

Teorem 2.4. Özel durum için (Doğrusallaştırılmış maksimum prensip)

Eğer problem (2.48) – (2.51) deki U ve V kümeleri konveks ise, akabinde bu problemdeki kabul edilebilir kontrol $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ nin optimalitesi için aşağıdaki sınırlamaların doğrulanması gerekmektedir:

1) $$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H'[t]}{\partial u}\left(u(t)-u^0(t)\right) \le 0, \tag{2.74}$$

her $u(t) \in U$, $t \in Q_1$ için.

2) $$\sum_{t=t_1}^{T-1} \frac{\partial M'[t]}{\partial v}\left(v(t)-v^0(t)\right) \le 0, \tag{2.75}$$

her $v(t) \in V$, $t \in Q_2$ için. $\left(\psi^0(t), p^0(t)\right)$, dual sistem (2.52) – (2.53) ün çözümü iken.

Örnek 2.1.

$S(u,v) = y_2^2(4)$ terminalini minimalleştirme problemini aşağıdaki sınırlamaları göz önünde bulundurulursa

$|u(t)| \le 1, t = 0,1.$

$|v(t)| \le 1, t = 2,3,$

$x_1(t+1) = x_2(t),$

$x_2(t+1) = u(t),\ t = 0,1$

$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,$

$y_1(t+1) = y_2(t),$

$y_2(t+1) = v(t) - y_1(t),\ t = 2,3$

$y_1(2) = x_1(2),$

$y_2(2) = x_2(2) + 1.$

Hamilton – Pontryagin fonksiyonları tanıtılsın.

$H(t, x, u, \psi) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u,$

$M(t, y, v, p) = p_1 y_2 + p_2 v, -p_2\, \mathrm{y}_1,$

Ve yukarıdaki problem için aşağıdaki bitişik sistemi yazılsın.

$\psi_1(t-1) = 0,$

$\psi_2(t-1) = \psi_1(t),$

$\psi_1(t) = p_1(1),$

$\psi_2(t) = p_2(1),$

$\mathrm{P}_1(t-1) = -p_2(t),$

$\mathrm{P}_2(t-1) = p_1(t),$

$\mathrm{P}_1(3) = 0,\ p_2(3) = -2y_2(4),$

Kabul edilebilir kontrol $\{u(t), v(t)\} = \{u(0), u(1); v(2), v(3)\} =$

$= \{(0,1), (-1,0)\}$ ele alınsın.

Bu kontrole yöndeş olarak, yukarıdaki sistemin aşağıdaki formda bir çözümü bulunmaktadır:

$x_1(t) = (x_1(0), x_1(1), x_1(2)) = (1,0,0),$

$x_2(t) = (x_2(0), x_2(1), x_2(2)) = (0,0,1),$

$y_1(t) = (y_1(2), y_1(3), y_1(4)) = (0,2,-1),$

$y_2(t) = (y_2(2), y_1(3), y_1(4)) = (2,-1,-2).$

Bitişik sistem çözülerek aşağıdaki elde edilir.

$$\psi_1(t) = (\psi_1(0), \psi_1(1)) = (0,0),$$
$$\psi_2(t) = (\psi_2(0), \psi_2(1)) = (0,-4),$$
$$p_1(t) = (p_1(2), p_1(3)) = (-4,0),$$
$$p_2(t) = (p_2(2), p_1(3)) = (0,4).$$

Verilen örnek için, doğrusallaştırılmış maksimum koşullar (2.74),(2.75) in formları aşağıdadır:

$$\sum_{t=0}^{1} \psi_2(t)\left(u - u^0(t)\right) \le 0, \mathrm{t} = 0,1,$$
$$\sum_{t=2}^{3} p_2(t)\left(v - v^0(t)\right) \le 0, \mathrm{t} = 2,3,$$

Ve bu formlar aşağıdaki nedenden dolayı maksimum prensibi doğrulamazlar.

$$-4(u-1) \le 0, \quad u \in [-1,1],$$
$$4v \le 0; \ v \in [-1,1].$$

Sonuç olarak, çalışılan problemdeki kabul edilebilir kontrol optimal değildir.

SONUÇ

Bu çalışmada, değişim sistemlerinin optimal kontrolü için sonuçlar rapor edilmiştir. Optimal kontrol problemi için (A.Y. Dubovitiskii and A.A. Milyutin, 1965; V. Girsanov, 1979; A.A. Milyutin and N.P. Osmolovskii, 1998) te önerilen yaklaşıma dayandırmak suretiyle, yaklaşımın uygulanma aşamasında daha etkili, gerekli, optimalite koşullarına ulaştıracak bir metod önerilmiştir. Bu metod, düzgün olmayan minimalleştirme fonksiyonelli, doğrusal olmayan optimal değişim kontrol sistemlerinin özel yapısından faydalanmaktadır. Fonksiyoneli minimalleştirme durumunda Clarke ve Michael-Penot alt türevi alınabilen fonksiyonun olması açık bir problemdir.

Değişken yapılı, belirli ayrık sistem sınıfları için, Pontryagin maksimum prensip kontrollerinin algılanmasında tekil optimalite için gerekli koşullar sağlanması gerekmektedir. Değiştiren yapılı, bir ayrık kontrol sistemleri sınıfı için tekil kontrollerin optimalleştirilmesinde gerekli koşullar sağlanmalıdır.

KAYNAKÇA

Dubovitiskii, A.Y. and Milyutin, **A.A.,** 1965, Extremum Problems in the Presence of Restriction, *U.S.S.R Comput. Math. and Math. Phys*., 5(3), 1-80.

Girsanov, V., 1979, .*Lecture of Mathematical Theory of Extremum Problems*, Springer.

Milyutin, A.A. and Osmolvskii, N.P., 1998, Calculus of Variation and optimal Control, American Math. Society,

Dmitruk, A.V., 2009, *On the development of Pontryagin's Maximum principle in the works of A. Ya. Dubovitskii and A. A Milyutin*, Control and Cybernetics, Vol. 38, No.A4.

Demyanov, V. F. and Roshcina, V. A., 2008, *Exhausters, optimailty conditions and related problems*. *J. Global Optimization*, 4, no. 1-3, 71-83.

Demyanov, V.F. and Rubinov, V.A., 1995, *Exhausters and subdifferentials in non-smoth analysis*, Optimization, 57:1, 41-56.

Mordukhovich, B. S., 2006, *Variational Analysis and Generalized Differentation I*, *Basic Theory*, Springer, Berlin.

Maharramov Sh. F. (Şahlar, Meherrem), 2008, *Optimality Condition of a Nonsmooth Switching Control System*, Automotic Control and Computer Science, 42(2), 94-101.

Maharramov, Sh. (Şahlar Meherrem) and Mansimov, K.B., 2001, *Optimization of a class of discrete step control systems*, (Russian, English)- Comput. Math. Math. Phys. 41(3) 360-366.

Maharramov, Sh. F. (Şahlar Meherrem), 2010, *Necessary opimality conditions for switching control problem*, American Institute of mathematical sciences, Journal of industrial and management optimization, 6(1), 47-57.

Demyanov, V.F. and Rubinov, A. M., 1995, *Constructive Nonstmooth Anlysis*, Frankfurt: Verlag Peter lang.

Gabasov, R. F. Kirillova M. and Pavlenok, N.S., 2007, An Optimal Control of a Hybrid System, *Doklady Mathematics*, 3, 976-982.

Kostyukova, O. and Kostina, E., 2006, *Robust optimal control feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances*, Mathematical Programming val. 107, issue 1-2, 131-153.