YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEKİL VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Rasim TOPRAKTEPE

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Bornova-İZMİR
2014

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç.Dr. F.Serap TOPAL

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr.Şahlar MEHERREM

Prof. Dr. Behzat GÜRKAN
Enstitü Müdürü

ABSTRACT

POSITIVE SOLUTIONS OF SINGULAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

Integral equations play important role in applied sciences. It has may applications ranging from electromagnetic theory, thermaoellastics, mechanics and quantum Dynamics.

In this thesis we study the sinqular integral equation

$$x(t) = f_1(t, x(t), x(a(t))) + (Gx)(t)\int_0^t f_2(t,s)(Qx)(s)ds$$

and obtain the sufficient conditions for the existence solutions. The measure of noncompactnes and Darbou fixed point theorem are the main tools for the result.

Rasim TOPRAKTEPE

MScin Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ahmet YANTIR

July 2014, 53 pages

Keywords: Volterra İntegral equations, Fredholm İntegral Equations, Singular Volterra İntegral Equtions

ÖZET

TEKİL VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Rasim TOPRAKTEPE
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR
Temmuz 2014, 53 sayfa

İntegral denklemler uygulamalı bilimlerde çok önemli bir yere sahiptir. Elektromanyetik teorisinden termo elastikitiye, mekanikten quantum dinamiğine kadar bir çok alanda uygulaması vardır.

Bu tezde

$$x(t) = f_1(t, x(t), x\big(a(t)\big)) + (Gx)(t) \int_0^t f_2(t, s)(Qx)(s)ds$$

tekil integral denklemi çalışılmış ve çözümlerin varlığı için yeter koşullar bulunmuştur. Ana sonuç için Darboux Sabit Nokta teoremi ve kompakt olmama ölçümü kullanılmıştır.

Anahtar sözcükler: Volterra İntegral Denklemelri, Fredholm İntegral Denklemleri, Tekil İntegral Denklemleri

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesinde ve yürütülmesinde yardımlarını esirgemeyen sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR'a teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda bu çalışmamda beni daima destekleyen sevgili eşim Nilay TOPRAKTEPE'ye ve kızım Duru TOPRAKTEPE'ye teşekkür ederim.

Rasim TOPRAKTEPE
İzmir 2014

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Tekil Volterra İntegral Denklemlerinin Pozitif Çözümleri” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

22.07.2014
Rasim TOPRAKTEPE

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

Sembol	Açıklama
$C(I)$	I aralığında sürekli fonksiyonların kümesi
R	Reel sayılar kümesi
R_+	$[0,\infty)$ aralığı
$\bar{X}$	X'in kapanışı
$Conv\ X$	X kümesinin konveks genişlemesi
M_E	E'nin boştan farklı, sınırlı alt kümelerinin ailesi
Z	Tam sayılar
N	Doğal sayılar
$\frac{d^n y}{dx^n}$	y'nin x'e göre n. mertebedn türevi
$\int \dots (n) \dots \int$	Katlı integrallerde (n) katlılık metebesi
N_E	E'nin boştan farklı, bağıl kompakt alt kümelerinin aileleri
$(E, \|\ \ \|)$	Normlu Banach uzayı

1 GİRİŞ

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmakla birlikte, bu tanım yetersiz kalmaktadır. Bir başka deyişle, bu tanımdan hareket ederek, integral denklemlerin bütün türlerini kapsayacak teoriyi kurmak olanaksızdır. Bu nedenle, birbirinden ayrı nitelikteki integral denklemleri tek tek incelemek gerekmektedir. Böylece geniş bir araştırma sahası açılmış olmakta ve konu bu oranda dağınık bir inceleme tarzı göstermektedir.

İntegral denklemlerle ilk uğraşılar 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve bir takım sonuçların alınmaya başlandığı izlenmektedir. Abel 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak **İntegral Denklem** terimini Du Bois Reymond'un (1888)'de yayınlanan bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır (Bocher, M., 1913).

Fizik ve mühendislik uygulamalarda zaman zaman bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olan denklemlerle karşılaşılır. Bu tür denklemlere integral denklemler denir. Genellikle karşılaşılan diferansiyel denklemler ise, bilinmeyen fonksiyonun değişik türevlerinden oluşurlar. Türev, bir fonksiyonun bir nokta ve hemen yakınındaki değerleri kullanarak bulunduğundan, diferansiyel denklemler lokal (yerel) denklemlerdir.

Bilindiği gibi tabiat kanunları diferansiyel denklemler yardımı ile ifade edilebilirler. Bundan, yakın çevre incelendiğinde evrenin tamamında geçerli tabiat kanunlarının bulunabileceği sonucu çıkarılabilir.

İntegral denklemler ise bütün uzay üzerinden integral alınması gerektirdiklerinden global (evrensel) denklemlerdir. Bu da aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. İntegral denklemler genel olarak çözülmesi çok daha zor denklemlerdir.

Diferansiyel denklemlerin önemli bir özelliği, tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmemeleridir. Onlara sınır şartlarının da ilave edilmesi gerekir. İntegral denklemler ise, bir problemin tam tanımını verirler. İlave şartlara gerek yoktur. Ancak, sınır şartları da uzayın bütününde onların ilgilenilen bölgeye etkisinin dolaylı yoldan denklemlere dahil edilmesi olarak yorumlanabileceğinden, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasında yakın bir ilişki olması da doğaldır. Bu çalışmada görülebileceği gibi diferansiyel denklemler temelde integral denklemler olarak da ifade edilebilirler.

Uygulamalı bilim dallarında bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilemezler, ancak onun yerine birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların kombinasyonundan oluşan integrodiferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ifade edilirler. Bu tip diferansiyel denklem sistemleri, bilhassa parçalı olanlar, birçok fizik ve mühendislik dalında ortaya çıkmaktadır. Örneğin, diferansiyel denklem sistemleri; Elastikiyet teorisi (Ezechias, J., 1988), Dinamik (Kant, T., Varaiya, J. & Arora, H.C.P., 1990), Akışkanlar mekaniği (Agarwal, R.S. & Bhargava, R., Balaji, A.V.S., 1990), Devre problemleri (Zimmerman, W.R., 1996), Salınım problemleri (Pesterev, A.V., Bergman, L.A., 1997 ; Gürgöze, M., 1992), Kuantum dinamiği (Greenspan, D., 1998) gibi konularda, integral ve integrodiferansiyel denklem sistemleri ise Elektromanyetik teori (Bloom, F., 1980), Termoelastikiyet (Kopeikin, I.D. & Shiskin, V.P., 1984), Biyoloji (Holmaker, K., 1993), Mekanik (Yue, Z.Q. & Selvadurai, A.P.S., 1995, Abadzadeh, F. & Pak, R.Y.S., 1995), Dalgaların kırınımı (Büyükaksoy, A. & Alkumru, A., 1995) gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır.

Sistemlerin çözümü için şu ana kadar sunulmuş genel bir yöntem yoktur. Sabit katsayılı diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü bulunabilmekte; fakat değişken katsayılı diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü ile ilgili literatürde pek fazla çalışma yoktur. Bu nedenle fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan bu tip sistemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasının faydalı olacağı düşünülmüştür.

İki ve daha yüksek mertebede değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak oldukça güçtür. Bu yüzden yaklaşık çözümlere gerek duyulmaktadır. Çoğu zaman bu tip denklemler normal formdaki diferansiyel denklem sistemlerine dönüştürülerek çözümleri araştırılmıştır. Bu nedenle sistemler konusunda yapılan çalışmaların hemen hemen hepsi birinci mertebeden sistemlere ilişkindir.

Bunların çözümü için Euler, Runge-Kutta yöntemi gibi birkaç standart yöntem mevcuttur. Ancak yüksek mertebeden diferansiyel denklem sistemleri ile ilgili çözüm yöntemleri mevcut değildir. Bu tür sistemler için yapılan araştırmalarda sadece birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemleri için sayısal yöntemlerden bahsedilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER

$u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt$$

denklemine integral denklemi denir. Burada $K(x,t)$ iki değişkenli fonksiyonuna çekirdek fonksiyonu denir.

2.1 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

2.1.1 Doğrusallığa Göre Sınıflandırma

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t) g(u(t)) dt \tag{2.1}$$

biçimindeki bir integral denklemde, $g(x)$ fonksiyonun doğrusal olması halinde, integral denklem de *Doğrusal İntegral Denklem* adını alır.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t).u^n(t) dt \tag{2.2}$$

İntegral denklemde ise $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun n. kuvveti bulunduğundan lineer olmayan bir integral denklem olmaktadır. Daha genel olarak ifade edersek;

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \emptyset[x,t,u(t)] dt \tag{2.3}$$

integral denklemi de *doğrusal olmayan integral denklem* olmaktadır.

Birden çok değişkeni bulunan,

$$u(x,y) = f(x,y) + \int_a^b \int_c^d K(x,y;t_1t_2).u(t_1t_2)dt_1dt_2 \qquad (2.4)$$

şeklindeki integral denklemlerin de doğrusal olanı ve doğrusal olmayanı bulunmaktadır [32].

2.1.2 Tekilliğe Göre Sınıflandırma

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da *K(x,t)* çekirdek fonksiyonunun sürekliliği ile ilgilidir. $K(x,t)$ fonksiyonu , $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise, integral denklem tekil (singüler) olmayan bir integral denklemdir. $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değil ise, integral denklem tekil (singüler) integral denklem sınıfına girer.

Örneğin, $0 < \propto < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\propto}} dt \qquad (2.5)$$

şeklindeki bir integral denklemi *tekil integral* denklemdir. İntegral sınırlarının en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, *tekil integral* denklemdir.

$$\mathrm{f(x)} = \int_0^\infty \mathrm{cosx(t).u(t)dt} \qquad (2.6)$$

$$\varphi(x) = k. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}.\varphi(t)dt \qquad (2.7)$$

2.1.3 İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemler yapılarına göre üç sınıfa ayrılır. Bilinmeyen fonksiyonun $u(x)$ çekirdek fonksiyonu $K(x,t)$ olduğu,

$$\emptyset(x) = \int_a^b K(x,t).u(t)dt \tag{2.8}$$

şeklindeki bir integral denkleme de *1. Cins integral denklem* denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur.

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

integral denklemi 1.cins integral denklemlere bir örnektir. Diğer taraftan bilinmeyen fonksiyonun hem integral içerisinde hem de integral dışında bulunuyorsa

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.9}$$

veya

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.10}$$

şeklindeki integral denklemler ise *2. cins İntegral Denklemler* denir.

$$\emptyset(x).u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.11}$$

şeklindeki integral denklemlere ise *3. cins integral denklem* denilmektedir.

$$x.u(x) = 1 - e^{-x} + \int_0^1 x^2.t^2.u(t)dt$$

denklemi 3. cins bir integral denklemdir.

2.1.4 Homojenliklerine Göre Sınıflandırma

İntegral denklemler bir de bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmadıkları açısından sınıflandırılmaktadır. 2. Cins denklemler için söz konusu böyle bir sınıflandırmada, (2.9) ile verilen,

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denklemi, homojen integral denklem olarak adlandırılmaktadır. Homojenliği bozucu bir $f(x)$ fonksiyonunun bulunduğu , (2.10) ile verilen

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

gibi denklemlere ise *homojen olmayan integral denklemler* denir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

homojen integral denkleminin $u(x) = 0$ olan bir çözümü vardır. Buna aşikar çözüm denir [32].

2.2 Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da, integral sınırlarının değişken veya sabitlerden oluşmasına göre yapılmaktadır. Doğrusal ve homojen olup olmadıklarına bakılmaksızın,

$$\emptyset(x) = \int_a^x K(x,t).u(t)dt \qquad (2.12)$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t).u(t)dt \qquad (2.13)$$

$$\mathrm{u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t).u(t)dt} \qquad (2.14)$$

$$\emptyset(x).u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t).u(t)dt \qquad (2.15)$$

gibi integral denklemlere *Volterra integral denklemleri* denir. Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında veya alt sınırında x değişkeni bulunmaktadır. x değişkeninin, $x = b$ gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek

$$\emptyset(x) = \int_a^b K(x,t).u(t)dt \qquad (2.16)$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t).u(t)dt \qquad (2.17)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t).u(t)dt \qquad (2.18)$$

$$\emptyset(x).u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t).u(t)dt \qquad (2.19)$$

şeklindeki denklemlere ise *Fredholm integral denklemleri* denir.

2.3 Parametreli İntegral Denklemler

$\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olan bir parametre olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t).u(t)dt \tag{2.20}$$

ve

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).u(t)dt \tag{2.21}$$

biçimindeki integral denklemlere *parametreli integral denklemler* denir.

2.4 İntegral Denkleminin Çözümü

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).u(t)dt$$

denklemini göz önüne alalım. Burada bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ olup, bu integral denklemi çözmek demek , bağıntıyı sağlayan $u(x)$ fonksiyonunu belirlemek demektir.

Örnek 2.1.

$$u(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

fonksiyonunun;

$$u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}u(t)dt$$

integral denkleminin çözümü olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}.\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}.\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$1+t^2=u$, $2tdt=du$ olur.

$$u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}\int_1^{1+x^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

$$u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.\left(\frac{u^{\frac{-3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1}\Big|_1^{1+x^2}\right)$$

$$u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}\left(-2.\frac{1}{\sqrt{u}}\Big|_1^{1+x^2}\right)$$

$$u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.\left(-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{1}\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.(-)\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.2$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

Örnek 2.2.

$$u(x) = sinx$$

fonksiyonunun;

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.t.u(t)dt$$

integral denkleminin çözümü olduğunu görelim.

Çözüm **:**

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.t.sintdt$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.sintdt$$

$t = u \quad , \quad sintdt = dv$

kısmi integral uygulayalım.

$dt = du \quad , \quad -cost = v$

olur.

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.[\left(-t.cost - \int -costdt\right)]|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.[(-t.cost + sint)]|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.[\left(-\frac{\pi}{2}.cos\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} + 0.cos0 - sin0\right)]$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.[\left(-\frac{\pi}{2}.0 + 1 + 0.1 - 0\right)]$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.x.(1)$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{x}{4}$$

$$u(x) = sinx$$

integral denkleminin çözümü olduğu görülür.

2.5 İntegral Denklemler ile Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki

Başlangıç koşullarıyla verilmiş, bir diferansiyel denklem, Volterra tipinde bir integral denkleme dönüştürülebildiği gibi, bir integral denklem de bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir.

2.5.1 Diferansiyel Denklemin İntegral Denkleme Dönüştürülmesi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x).y = f(x) \quad (2.22)$$

doğrusal diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Burada ($i = 1,2,3,\ldots,n$) olmak üzere $a_i(x)$ fonksiyonları için bir başlangıç noktası, bir düzgün noktadır. Ayrıca sayıları n tane olan,

$$y(0) = c_0 \quad , \quad y'(0) = c_1 \ , \ \ldots \ , y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad (2.23)$$

başlangıç koşullarının da verilmiş olduklarını farz edelim.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x) \quad (2.24)$$

dönüşümünü uygulayalım. Bu ifade,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = u(x)$$

$$\int_0^x d\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = \int_0^x u(x)dx$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(x)dx + c_{n-1}$$

şeklinde hesaplanarak türev mertebesi bir mertebe düşürülmüş olur. Benzer şekilde hareket edilerek,

$$\int_{o}^{x} d\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = \int_{0}^{x}\left[\int_{0}^{x} u(x)\,dx + c_{n-1}\right]dx$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{0}^{x}\int_{0}^{x} u(x)dxdx + c_{n-1}\int_{0}^{x} dx + c_{n-2}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse,

....

....

$$\frac{dy}{dx} = \int_{0}^{x} \dots (n-1) \dots \int_{0}^{x} u(x)dx \dots dx + \frac{1}{(n-2)!}.c_{n-1}.x^{n-2} + \frac{1}{(n-3)!}.c_{n-2}.x^{n-3} + \dots + c_1$$

elde edilir. Bir kez daha integral alınarak,

$$y = \int_{0}^{x} \dots (n) \dots \int_{0}^{x} u(x)dx \dots dx + \frac{1}{(n-1)!}.c_{n-1}.x^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}.c_{n-2}.x^{n-2} + \dots + c_1 + c_0$$

bulunur.

Burada da görüldüğü gibi sık sık çok katlı (n katlı) integrallerle işlem yapmak zorunda kalınacaktır. Bunu göstermek üzere,

$$\int \dots (\, n\,) \dots \int$$

şeklindeki notasyonun kullanılması uygun bulunmuştur. İntegraller arasındaki (n) katlılık mertebesini belirtmektedir.

Yukarı da bulduğumuz ifadeleri (2. 22) diferansiyel denkleminde yerine yazdığımızda, gerekli işlemlerden sonra aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$[\int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(t)dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.u(t)dt\,] \qquad (2.25)$$

Tek katlı integral yardımıyla ifade edebiliriz. Buna göre,

$$u(x) + a_1(x).\int_0^x u(x)dx + \dots + a_n(x).\int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x)dx \dots dx = F(x) \qquad (2.26)$$

bağıntısı, (2.25) yardımıyla ,

$$u(x) + a_1(x)\int_0^x u(x) + a_2(x)\int_0^x (x-t)u(t)dt + \dots + a_n(x)\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt = F(x)$$

şeklinde ifade edilebilecektir. Bu ise, belirli integral özelliklerinden yararlanılarak,

$$u(x) + \int_0^x [\,a_1(x) + a_2(x)(x-t) + a_3(x)\frac{(x-t)^2}{2!} + .. + a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}]\,u(t)dt = F(x)$$

olarak yazılabilir. Burada köşeli parantez içindeki ifade $K(x,t)$ fonksiyonu gözönüne alınırsa,

$$K(x,t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t) + \dots + a_n(x).\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

olur. Bu çekirdek fonksiyon olup, yerine yazılarak,

$$u(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt = F(x)$$

şeklindeki, 2. cins bir Volterra integral denklemine varılır. Böylece (2.22) ile verilen diferansiyel denklem , bir integral denkleme dönüşmüş olmaktadır [32].

Örnek 2.3.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5.\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \;,\; y'(0) = 0 \tag{2.27}$$

diferansiyel denklemini , başlangıç koşullarını da gözönüne alarak integral denkleme dönüştürelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)$$

olsun.

$$y'(x)|_0^x = \int_0^x u(x)dx$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(x)dx \quad , \quad y'(x) = \int_0^x u(x)dx$$

$$\int_0^x y'(x)dx = \int_0^x \int_0^x u(x)\, dxdx \quad , \quad y(x)|_0^x = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

bulduklarımızı (2.27) de yerine yazalım;

$$u(x) - 5.\int_0^x u(x)\,dx - 4.\int_0^x (x-t)u(t)dt = 4$$

$$u(x) = 5.\int_0^x u(x)\,dx + 4.\int_0^x (x-t)u(t)dt + 4$$

$$u(x) = 4 + \int_0^x [\,5 + 4.(x-t)]u(t)dt$$

gibi 2. cins bir Volterra integral denklem elde edilir.

Örnek 2.4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - sinx.\frac{dy}{dx} + e^x y = x \quad , \qquad y(0) = 1 \;\; , \quad y'(0) = -1$$

diferansiyel denklemini , başlangıç koşullarını da göz önüne alarak integral denkleme dönüştürelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)$$

olsun.

$$y'(x)|_0^x = \int_0^x u(x)dx$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(x)\,dx$$

$$y'(x) - (-1) = \int_0^x u(x)\,dx$$

$$y'(x) = \int_0^x u(x)\,dx - 1$$

$$\int_0^x y'(x)dx = \int_0^x \int_0^x u(x)\,dxdx - \int_0^x dx$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x (x-t)u(t)dt - x$$

$$y(x) = \int_0^x (x-t)u(t)dt - x + 1$$

$$u(x) - sinx.\left[\int_0^x u(x)dx - 1\right] + e^x.\left[\int_0^x (x-t)u(t)dt - x + 1\right] = x$$

$$u(x) - sinx.\int_0^x u(x)dx + sinx + e^x.\int_0^x (x-t)\,u(t)dt - x.e^x + e^x = x$$

$$u(x) = x - sinx + e^x.(x-1) + \int_0^x \{\,sinx - e^x.(x-t)\}\,u(t)dt$$

2.5.2 İntegral Denklemin Diferansiyel Denkleme Dönüştürülmesi

Yukarıda sözü edildiği gibi bir integral denklemin bir diferansiyel denkleme dönüştürülmesi de olanaklıdır. Bunu için Leibnitz formülü'nün uygulanması yeterlidir. Bu formül, integral işareti altında türev alma işlemini gerçekleştirir. Leibnitz formülü,

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} F(x,t)dt = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt + F\{x,B(x)\}\frac{dB}{dx} - F\{x,A(x)\}\frac{dA}{dx} \qquad (2.28)$$

olup burada $A(x)$ve $B(x)$ in sabitler olması halinde,

$$\frac{dA}{dx} = 0, \quad \frac{dB}{dx} = 0$$

olacağından formül,

$$\frac{d}{dx}\int_A^B F(x,t)dt = \int_A^B \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dt$$

olarak kullanılır.

Örnek 2.5.

$$u(x) - \int_0^x u(t)\cot t\, dt = sinx \tag{2.29}$$

integral denklemi veriliyor. Başlangıç koşulunun $x = 0$ için $u(x) = 0$ olduğu bilindiğine göre, bu integral denklemi bir diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Çözüm: Verilen integral denklemin her iki tarafın türevi alınırsa;

$$\frac{du(x)}{dx} - \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)cot\ t\ dt = \frac{d(sinx)}{dx}$$

$$u'(x) - \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)\cot t\, dt = cosx$$

olup, Leibnitz formülüne göre,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)\cot t\,dt = \int_0^x 0.\,dt + u(x)\cot x.1 = u(x)\cot x$$

bulunacağından (2.29) integral denkleminin,

$$u'(x) - u(x)\cot x = \cos x$$

şeklindeki, birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denkleme dönüştüğü görülür.

Örnek 2.6.

$$u(x) = x + \int_0^x xu(t)dt \qquad (2.30)$$

integral denklemini, diferansiyel denkleme dönüştürelim.

***Çözüm*:** Her iki tarafın türevini alırsak,

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}x + \lambda\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt$$

$$u'(x) = 1 + \lambda\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt$$

olup , Leibnitz formülü uygulayarak,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt = \int_0^x u(t)dt + xu(x)$$

bulunacağından

$$u'(x) = 1 + \lambda\left[\int_0^x u(t)dt + xu(x)\right]$$

olur. İfadenin içinde henüz integral bulunduğundan, tekrar türev alarak kurtulmaya çalışalım

$$\frac{du'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(1) + \lambda\ \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt + \lambda\frac{d}{dx}\{x\,u(x)\}$$

$$u''(x) = 0 + \lambda\,u(x) + \lambda\,\{u(x) + x\,u'(x)\}$$

ve bu da düzenlenerek, (2.30) denklemine uyan diferansiyel denklemin,

$$u''(x) - \lambda\,x\,u'(x) - 2\,\lambda\,u(x) = 0$$

biçiminde olacağı görülmektedir.

Örnek 2.7.

$$u(x) = arctanx - \int_0^x x.t.u(t)dt \qquad (2.31)$$

integral denklemini, diferansiyel denklemine dönüştürelim.

Çözüm:

$$u'(x) = \frac{1}{1+x^2} - [\int_0^x t.u(t)dt + x.x.u(x)]$$

$$u'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x t.u(t)dt - x^2.u(x)$$

$$u'(x) + x^2.u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x t.u(t)dt$$

$$u''(x) + 2x.u(x) + u'(x).x^2 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} - x.u(x)$$

$$u''(x) + u'(x).x^2 + 3x.u(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

2.6 İntegral Denklem Sistemleri

Uygulamalarda çoğu zaman, integral denklem sistemleri ile karşılaşılabilir. Böyle bir sistem , $i = 1,2, \dots, n$ olmak üzere

$$u_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b K_{ik}(x,t)u_k(t)dt \tag{2.32}$$

yapısındadır.

Tek bir integral denklemi çözmek için kullandığımız teori ve çözüm yöntemlerini, integral denklem sistemleri için de aynen kullanabiliriz. Nitekim,

$$\int_a^b |K_{ik}(x,t)|^2 dt$$

integrali mevcut ise λ parametresi,

$$|\lambda| < \left[\begin{matrix} Max \\ 1 \leq i \leq n \end{matrix} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K_{ik}(x,t)|^2 dx\, dt} \right]^{-1}$$

eşitsizliği ile belirtilecek şekilde yeterince küçük seçilebiliyorsa, ardışık yaklaştırma, yakınsak olacaktır.

Eğer $K_{ik}(x,t)$ çekirdeği dejenere tipinde ise (2.32) sistemi, bir lineer cebirsel denklem sistemine indirgenebilir. Genel olarak, (2.32) sistemi dejenere çekirdekli bir sisteme indirgenebildiği zaman bu çekirdek tipi için uygulanan yöntem, burada da kullanılabilecektir.

Bir integral denklem sistemi, izlenen yöntem yardımıyla, tek bir denkleme dönüştürülebilir. Göz önüne alınan x ve t değişkenleri, başlangıç aralığı $[a,b]$ nin $(b-a)$ olan uzunluğunun n katı uzunlukta olan bir aralıkta da bulunacaklardır. Bu aralığı $[a, nb-(n-1)a]$ olarak seçelim.

$$nb-(n-1)a-a = nb-na+a-a$$

$$nb-na = n(b-a)$$

olarak, yukarıda sözü edilen uzunlukta bir aralık olduğu görülmektedir. Bu yeni aralığa göre,

$$a+(i-1)(b-a) \leq x < a+i(b-a)$$

$$a + (k-1)(b-a) \le t < a + k(b-a)$$

olacak şekilde; $u_i(x), f_i(x)$ ve $K_{ik}(x,t)$ fonksiyonları

$$\Phi(x) = u_i\{x-(i-1)(b-a)\}$$
$$F(x) = f_i\{x-(i-1)(b-a)\}$$
$$K(x,t) = K_{ik}\{x-(i-1)(b-a), t-(k-1)(b-a)\}$$

Fonksiyonları yardımıyla tek türlü ifade edilebilirler. Bu tanımlamalara göre (2.32) sistemi

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_a^{nb-(n-1)a} K(x,t)\Phi(t)dt$$

integral denklemi yardımıyla, tek bir denklem olarak gösterilebilecektir.

2.7 Temel Tanım ve Teoremler

$(E, \|\ \ \|)$ bir Banach uzayı olsun. $\bar{X}$ ve $Conv\, X$ ile sırasıyla X in kapanışını ve konveks genişlemesini gösterelim. M_E , E'nin boştan farklı sınırlı alt kümelerinin ailesi ve N_E de E'nin boştan farklı, bağıl kompakt alt kümelerinin ailelerini göstersin.

Tanım 2.8. [23] $\mu: M_E \to R$ dönüşümü, aşağıdaki şartları sağlıyorsa, E üzerinde kompakt olmama ölçümü denir.

1. $ker\, \mu = \{ X \epsilon M_E : \mu(X) = 0 \} \neq \emptyset$ *ve* $ker \mu \subset M_E$
2. $X \subseteq Y \Rightarrow \mu(X) \le \mu(Y)$
3. $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$
4. $\mu(Conv X) = \mu(X)$
5. $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$, $\lambda \in [0,1]$
6. *Eğer* $(X_n) \subset M_E$, $X_{n+1} \subset X_n$, $n = 1,2,3, \ldots$ *ve* $lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$ şartlarını sağlayan kapalı kümeler dizisi ve $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.

Teorem 2.9. " Darbo sabit nokta teoremi"

$\Omega,\ E$'nin boş olmayan, sınırlı kapalı ve konveks alt kümesi ve $F: \Omega \ \rightarrow \Omega$, Ω'nin herhangi bir X alt kümesi için

$$\mu(FX) \leq k\mu(X)\ ,\ \exists k \in [0,1)$$

şartını sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda F nin Ω' da sabit noktası vardır.

3 VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

3.1 Tanım ve Temel Kavramlar

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t).u(t)dt \tag{3.1}$$

şeklinde bir bağıntıya, *ikinci cins doğrusal Volterra integral denklemi* denir. λ bir parametredir. Eğer $f(x) \equiv 0$ ise

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t).u(t)dt \tag{3.2}$$

şeklindeki denkleme ise, *ikinci cins lineer homojen Volterra integral denklemi* denir.

$$\int_a^x K(x,t).u(t)dt = \varphi(x) \tag{3.3}$$

şeklindeki denkleme ise, *birinci cins Volterra integral denklemi* denir.

Bu tür denklemleri, Fredholm integral denklemlerinden ayıran fark, başta da değinildiği gibii integral sınırlarından birinin x olmasıdır. Genel olarak sınırlar yukarıdaki denklemlerde olduğu gibidir. Ayrıca x in alt sınırlar olarak verilmesi halinde

$$\int_x^b K(x,t).u(t)dt = -\int_b^x K(x,t)u(t)dt$$

yazılabileceğinden, bu durumda da genel ifade bozulmayacaktır. Bu nedenle incelemeleri yukarıdaki denklemlerde olduğu gibi yapacağız. (3.3) şeklindeki denklemler, genellikle bir diferansiyel denkleme dönüştürülmek suretiyle çözülürler.

Örnek 3.1.

$$2x^3 = \int_0^x \{1 - 5(x-t) + 2(x-t)^2\} u(t)dt \tag{3.4}$$

integral denklemi, (3.3) yapısında olup, bu denklemi çözmek için ardarda türev alınırsa

$$6x^2 = u(x) - 5\int_0^x u(t)dt + 4\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$12x = u'(x) - 5u(x) + 4\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$12 = u''(x) - 5u'(x) + 4u(x)$$

şeklinde sabit katsayılı ikinci mertebeden doğrusal lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözülürse, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$u(x) = c_1.e^x + c_2.e^{4x} + 3$$

elde edilir. c_1 ve c_2 keyfi sabitlerini belirtmek üzere, başlangıç koşullarını (3.4) denkleminden bulmağa çalışalım. $x = 0$ için, $u(0) = 0$; $u'(0) = 0$ olduğu görülmektedir. Bunlarla gerekli hesaplamalar yapılırsa, $c_1 = 1$, $c_2 = -4$ bulunacaktır. O halde diferansiyel denklemin çözümü

$$u(x) = e^x - 4.e^{4x} + 3$$

olup, bu aynı zamanda (3.4) denkleminin de çözümüdür. [32]

3.2 Volterra İntegral Denklemlerinde Resolvant

İkinci cins Volterra integral denkleminin

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t).\,u(t)dt \tag{3.5}$$

şeklinde olan ifadesinde $K(x,t)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq a$; $0 \leq t \leq x$ ve $f(x)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq a$ aralıklarında süreklidirler. Bu denklemin aşağıda olduğu gibi, bir tam seri şeklinde olan çözümünü araştıralım:

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \cdots + \lambda^n u_n(x) + \cdots \tag{3.6}$$

Bu seri, λ parametresine göre bir kuvvet serisidir. Bu seriyi (3.5) denkleminde $u(x)$ yerine yazalım:

$$u_0(x) + \lambda u_1(x) + \cdots + \lambda^n u_n(x) + \cdots$$
$$= f(x) + \lambda \int_{0}^{x} K(x,t)\{u_0(t) + \lambda u_1(t) + \quad \ldots + \lambda^n u_n(t) + \cdots\}dt.$$

eşitliğin sağ yanını λ' ya göre düzenler ve λ'nın aynı kuvvvetli terimleri için eşitliğin her iki yanındaki terimleri karşılıklı olarak eşit yazarsak,

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \int_{0}^{x} K(x,t)u_0(t)dt$$

$$u_2(x) = \int_{0}^{x} K(x,t)u_1(t)dt$$

……………………..

$$u_n(x) = \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt$$

bulunur. $u_0(x) = f(x)$ olduğundan bununla ikinci bağıntıya gidilirse,

$$u_1(x) = \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt = \int_0^x K(x,t)f(t)dt$$

olur. Benzer şekilde, $u_2(x)$ için

$$u_2(x) = \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt = \int_0^x K(x,t)\,[\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1]dt$$

$$= \int_0^x f(t_1)dt_1 \int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt$$

$$= \int_0^x K_2(x,t_1)f(t_1)dt_1$$

yazılabilir. Burada

$$K_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt$$

demektir. İşlemleri böylece sürdürürsek, genel olarak

$$u_n(x) = \int_0^x K_{(n)}(x,t)f(t)dt \qquad (\, n = 1,2,3, \dots) \qquad (3.7)$$

olduğu görülecektir.

$K_{(n)}(x,t)$ fonksiyonları *İtere Çekirdekler* olarak adlandırılmıştır. Bu fonksiyonlar

$$K_{(1)}(x,t) = K(x,t) \tag{3.8}$$

$$K_{(n+1)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_{(n)}(z,t)dz \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

rekürans bağıntıları yardımıyla tanımlanmıştır.

(3.6) ile gösterilen seri, (3.7) ve (3.8) bağıntıları vasıtasıyla

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_0^x K_{(i)}(x,t)f(t)dt$$

şeklinde yazılabilir.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K_{(i+1)}(x,t)$$

serisi, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu sürekli farzedildiğinden, mutlak ve düzgün yakınsak olup buna *Resolvant* veya *Çözücü* Çekirdek denir. Fredholm integral denklemlerinde olduğu gibi $\Gamma(x,t;\lambda)$ ile göstereceğiz. Buna göre,

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K_{(i+1)}(x,t) \tag{3.9}$$

yazılabilecektir.

İtere çekirdekler ve çözücü çekirdek, integral denklemdeki integralin alt sınır değerinden bağımsızdırlar.

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x K(x,s)\Gamma(s,t;\lambda)ds. \qquad (3.10)$$

$\Gamma(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeği hesaplanabildiği takdirde (3.5) Volterra integral denkleminin çözümü,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x,t;\lambda)f(t)dt \qquad (3.11)$$

olarak bulunacaktır.

Örnek 3.2. Çekirdek fonksiyonu $K(x,t) = 1$ olan bir Volterra integral denklemine ait resolvantı bulalım:

***Çözüm*:** $K(x,t) = K_1(x,t)$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda $K_1(x,t) = 1$ dir. Diğer İtere çekirdekleri (3.8) reküarans bağıntıları yardımıyla hesaplayabiliriz.

$$K_{(n+1)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_n(z,t)dz$$

olup, $n = 1$ için,

$$K_{(2)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_{(1)}(z,t)dz = \int_t^x dz = x - t \qquad ;$$

$n = 2$ için,

$$K_{(3)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_{(2)}(z,t)dz = \int_t^x 1.(z-t)dz = \frac{(x-t)^2}{2} \ ;$$

$n = 3$ için,

$$K_{(4)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_{(3)}(z,t)dz = \frac{1}{2}\int_t^x 1.(z-t)dz = \frac{(x-t)^3}{2.3} \;;$$

ve böyle devam edilirse, n yerine $n-1$ konularak,

$$K_{(n)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_{(n-1)}(z,t)dz = \int_t^x \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

bulunur. (3.9) gereğince resolvant,

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{(n+1)}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{\lambda(x-t)\}^n}{n!}$$

olarak elde edilir. Bu ise,

$$\Gamma(x,t;\lambda) = e^{\lambda(x-t)}$$

demektir.

Örnek 3.3.

$$u(x) = x + \int_0^x u(t)dt \tag{3.12}$$

integral denkleminin çözümünü araştıralım.

***Çözüm*:** Verilen integral denklemde $K(x,t) = 1$ olduğundan, bir önceki örneklerden yararlanarak, resolvantın

$$\Gamma(x,t;\lambda) = e^{x-t}$$

olduğunu yazabiliriz. (3.11) bağıntısı yardımıyla da denklemin çözümü araştırılabilir. Buna göre,

$$u(x) = x + \int_0^x e^{x-t}\, t\, dt$$

$$u(x) = e^x - 1$$

bulunur.

Örnek 3.4.

$$u(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} u(t) dt \tag{3.13}$$

integral denkleminin çözümünü, resolvant yardımıyla bulmaya çalışalım.

Çözüm **:** Bu integral denklemde

$K(x,t) = e^{x^2-t^2}$ olup $\lambda = 1$ dir. İtere çekirdekleri hesaplayalım:

$K_{(1)}(x,t) = K(x,t) = e^{x^2-t^2}$;

$$K_{(2)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_{(1)}(z,t) dz = \int_t^x e^{x^2-z^2} . e^{z^2-t^2} dz$$

$$= \int_t^x e^{x^2-t^2} dz = e^{x^2-t^2} \int_t^x dz = (x-t). e^{x^2-t^2} \quad ;$$

$$K_{(3)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\,K_{(2)}(z,t)dz = \int_t^x e^{x^2-z^2}.(z-t).e^{z^2-t^2}dz$$

$$= e^{x^2-t^2}\int_t^x (z-t)dz = \frac{(x-t)^2}{2}.e^{x^2-t^2} \qquad ;$$

$$K_{(4)}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\,K_{(3)}(z,t)dz = \int_t^x e^{x^2-z^2}.\frac{(z-t)^2}{2}.e^{z^2-t^2}dz$$

$$= \frac{1}{2}.e^{x^2-t^2}\int_t^x (z-t)^2dz = \frac{(x-t)^3}{2.3}.e^{x^2-t^2}$$

ve böylece devam edilirse,

$$K_{(n+1)}(x,t) = \frac{(x-t)^n}{n!}.e^{x^2-t^2}$$

olarak bulunur. (3.9) denklemi gereğince bu problem için resolvant,

$$\Gamma(x,t;1) = \sum_0^\infty \frac{(x-t)^n}{n!}.e^{x^2-t^2}$$

veya

$$\Gamma(x,t;1) = e^{x-t}.e^{x^2-t^2}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Resolvant bu şekilde belirtildiğine göre (3.11) bağıntısı yardımıyla integral denklem,

$$u(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t}.e^{x^2-t^2}.e^{t^2}dt$$

$$u(x) = e^{x^2} + e^{x^2+x}\int_0^x e^{-t}dt$$

şeklini alır. Bu da hesaplanırsa, (3.13) denkleminin çözümü,

$$u(x) = e^{x^2+x}$$

olarak bulunacaktır.

4 LİNEER OLMAYAN VOLTERRA TEKİL İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Tekil integral denklemleri problem çözümünde önemli bir role sahiptir. Matematiksel Fizik, mekanik ve mühendislikteki pek çok teorisi ile tekil integral denklemler bağlantılıdır. Birkaç araştırma çalışmasında da integral denklemler çalışılmıştır.

Bu tezde aşağıdaki doğrusal olmayan Volterra Tekil integral denklemini

$$x(t) = f_1(t, x(t), x\big(a(t)\big)) + (Gx)(t)\int_0^t f_2(t,s)(Qx)(s)ds \tag{4.1}$$

ele alacağız. Burada, $t \in I = [0,1]$, $a: I \to I$ sürekli bir fonksiyon, $G, Q \subset C(I)$ üzerinde tanımlı sürekli operatörlerdir. $C(I)$, I aralığında sürekli reel fonksiyonlar kümesidir. Ayrıca, f_2 fonksiyonunu aşağıdaki gibi çarpım formunda

$$f_2(t,s) = k(t,s).\, g(t,s) \tag{4.2}$$

varsayacağız. Burada $k: \Delta \to R$ sürekli ve g birinci değişkene göre monoton ve

$$\Delta = \{(t,s):\ 0 \le s \le t \le 1\}$$

üçgensel bölgede süreksiz olabilir.

$$f_1(t,x,y) = b(t) \quad , \quad f_2(t,s) = \frac{k(t,s)}{(t-s)^{1-\propto}} \quad (0 < \propto < 1)$$

ve $(Gx)(t) = f(t,x)$, için (4.1) denklemi Banas ve Rzepka [16] ve

$f_1(t,x,y) = f(t,x)$, $f_2(t,s) = k(t,s)/(t-s)^{1-\propto}$, $(0 < \propto < 1)$ için Darwish ve Ntouyas [7] tarafından çalışılmıştır.

Son zamanlarda birçok yazar çok çeşitli fonksiyonel integral denklemleri için çözümlerin varlığını ispat etmek için Tanım 2.8 ile verilen kompakt olmama ölçümü kavramını kullanmıştır.

(4.1) denkleminin çözümlerinin varlığını göstermek için biz de kompakt olmama ölçümü ve Darbo sabit nokta teoremini kullanacağız.

Maksimum normu ile normlanmış $C(I)$ Banach uzayını ele alalım. $x \in M_{C(I)}$, $x \in X$, ve $\varepsilon > 0$ için, $C(I)$ uzayındaki uygun kompakt olmama ölçümü aşağıda sunulduğu gibi tanımlanabilir [23].

$$\omega(x, \varepsilon) = sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in I, |t - s| \leq \varepsilon\},$$

$$\omega(X, \varepsilon) = sup\{\omega(x, \varepsilon) : x \in X\},$$

$$\omega_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(X, \varepsilon). \qquad (4.3)$$

$\omega_0 = \omega_0(X)$ dönüşümünün $C(I)$ uzayında kompakt olmama ölçümü olduğu gösterilebilir. Bu ölçüm ekstradan özellikler sağlar. Örneğin, $\omega_0(\lambda X) = |\lambda|\omega_0(X)$ ve $\omega_0(X + Y) \leq \omega_0(X) + \omega_0(Y)$, $X, Y \in M_{C(I)}$ ve $\lambda \in R$ [23]

Bu bölümde, $C(I)$ uzayında fonksiyonel integral denklemi (4.1) denkleminin çözülebilirliğini inceleyeceğiz.

(i) $a : I \to I$ sürekli bir fonksiyon,

(ii) $f_1 : I \times R \times R \to R$ fonksiyonu sürekli, her $t \in I$ ve $x_1, y_1, x_2, y_2 \in R$ için

$$| f_1(t, x_1, y_1) - f_1(t, x_2, y_2)| \leq p. max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\},$$

olacak şekilde $p \geq 0$ vardır.

(iii) G operatörü $C(I)$ uzayını sürekli kendine dönüştürür $X \in M_{C(I)}$ kümesi için aşağıdaki

$$\omega_0(GX) \leq q\omega_0(X)$$

eşitsizliğini sağlayan $q \geq 0$ sayısı vardır.

(iv) Herhangi $x \in C(I)$ için $||Gx|| \leq \varphi(||x||)$ eşitsizliğini sağlayan azalmayan $\varphi: R_+ \to R_+$ fonksiyonu vardır.

(v) Q operatörü $C(I)$ uzayını kendisine dönüştürür ve her $x \in C(I)$ için $||Qx|| \leq \varphi(||x||)$ olacak şekilde azalmayan $\varphi: R_+ \to R_+$ fonksiyonu vardır.

(vi) $f_2: \Delta \to R$ (4.2) formundadır, $k: \Delta \to R$ fonksiyonun süreklidir.

(vii) (4.1) deki $g(t,s)$ fonksiyonu t'ye göre monotondur herhangi bir sabit $t \in I$ için, $s \to g(t,s)$ fonksiyonu [0,t] üzerinde Lebesgue integrallenebilir. Ayrıca her bir $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ vardır, öyle ki $t_1 < t_2$ ve $t_2 - t_1 \leq \delta$ olacak şekildeki $t_1, t_2 \in I$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\left| \int_0^1 [g(t_2,s) - g(t_1,s)]ds \right| \leq \varepsilon, \tag{4.4}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t_2,s)ds \leq \varepsilon. \tag{4.5}$$

Devamında, değerlendirmelerimizde önemli bir rol oynayan (vii) deki varsayımımızla ilgili birkaç gerçekten bahsedelim. Öncelikle, $h: I \to R_+$ fonksiyonun aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$h(t) = \int_0^t g(t,s)\, ds \tag{4.6}$$

(vii)' den h'nin iyi tanımlı olduğu açıktır.

Lemma 4.1. h fonksiyonu (vii) varsayımı altında I da süreklidir.

İspat: (vii) varsayımına göre $\varepsilon > 0$ için öyle $0 < \delta < \varepsilon/2$ sayısı seçelim. $|t_2 - t_1| \leq \delta$ şartını sağlayan keyfi $t_1, t_2 \in I$ alalım. Genelliği kaybetmeden $t_1 < t_2$ olduğunu varsayabiliriz. Buradan

$$| h(t_2) - h(t_1)| = | \int_0^{t_2} g(t_2, s)ds - \int_0^{t_1} g(t_1, s)ds |$$

$$= | \int_0^{t_1} g(t_2, s)ds - \int_0^{t_1} g(t_1, s)ds + \int_{t_1}^{t_2} g(t_2, s)ds |$$

$$\leq | \int_0^{t_1} [g(t_2, s) - g(t_1, s)ds]ds| + \int_{t_1}^{t_2} g(t_2, s)ds \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir.

Uyarı 4.2. Varsayım (vii) nin farklı yollarla formüle edilebileceğini gözlemleyelim. Böylece *g(t,s)* fonksiyonu (4.3) şartını sağlar. Gerçekten, $\varepsilon > 0$ alalım ve $t_1, t_2 \in I$ için $t_1 < t_2$ ve $t_1 - t_2 \leq \delta_1$ olacak şekilde $\delta_1 > 0$ seçelim. Bu durumda h sürekli olduğundan

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t_2, s)ds \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Daha sonra h fonksiyonunun I aralığındaki sürekliliğinden $o < \delta_2 < \varepsilon/2$ seçelim. $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. $t_1 < t_2$ ve $t_1 - t_2 \leq \delta$ şartlarını sağlayan keyfi $t_1, t_2 \in I$ için

$$| \int_0^{t_1} [g(t_2, s) - g(t_1, s)]ds| = | \int_0^{t_2} g(t_2, s)ds - \int_{t_1}^{t_2} g(t_2, s)ds - \int_0^{t_1} g(t_1, s)ds |$$

$$\leq | \int_0^{t_2} g(t_2, s)ds - \int_0^{t_1} g(t_1, s)ds | + | \int_{t_1}^{t_2} g(t_1, s)ds|$$

$$= | h(t_2) - h(t_1)| + \int_{t_1}^{t_2} g(t_2, s)ds \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir bu da ispatı tamamlar.

Son olarak, “herhangi bir sabitlenmiş $s \in I$ için $t \to g(t,s)$ fonksiyonu $[s,1]$ aralığı üzerinde azalmayandır.” (vii) varsayımı daha elverişli bir formda formüle edilebilir.

Lemma 4.3. $g(t,s) = g : \Delta \to R_+$ fonksiyonu t ye göre azalmayan ve herhangi bir $t \in I$ için $s \to g(t,s)$ fonksiyonunun $[0,t]$ aralığında Lebesque integrallenebilir olduğunu varsayalım. Ayrıca, (4.6) ile tanımlanan $h = h(t)$ fonksiyonu I üzerinde sürekli olsun. Bu durumda g fonksiyonu (4.4) ve (4.5) koşullarını sağlar.

***İspat* :**h sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ve $t_1, t_2 \in I$, öyle ki $t_1 < t_2$ ve $t_2 - t_1 \leq \delta$ için

$$|\, h(t_2) - h(t_1)| \leq \varepsilon \tag{4.7}$$

sağlayan $\delta > 0$ vardır.

O halde

$$|\, h(t_2) - h(t_1)| = |\int_0^{t_2} g(t_2,s)ds - \int_0^{t_1} g(t_1,s)ds \,|$$

$$= |\int_{t_1}^{t_2} g(t_2,s)ds + \int_0^{t_1} [g(t_2,s) - g(t_1,s)]ds \,| \tag{4.8}$$

elde ederiz.

$t \to g(t,s)$ fonksiyonunun I üzerinde azalmayan olduğu gerçeğinden hareketle

$$\int_0^{t_1} [g(t_2,s)ds - g(t_1,s)]ds \geq 0 \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

g, Δ üçgensel bölgesinde pozitif olduğundan,

$$\int_{t_1}^{t_1} g(t_2,s)\, ds \geq 0 \tag{4.10}$$

(4.7) ve (4.8) denklemlerinden

$$| h(t_2) - h(t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} g(t_2,s)ds + \int_{0}^{t_2} [g(t_2,s) - g(t_1,s)]ds \ \leq \ \varepsilon$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) eşitsizliklerinin ışığında, *g(t,s)* fonksiyonunun hem (4.4) hem de (4.5) şartlarını yerine getirdiği sonucuna ulaşırız.

(4.1) denklemi ile ilgili olan son varsayımı formüle etmek için aşağıdaki sabitleri tanımlayalım.

$\bar{k} = sup\{\, |k(t,s)|: (t,s) \in \Delta\}$,

$\bar{f_1} = sup\{\, |f_1(t,0,0)|: t \in I\}$,

$\bar{h} = sup\{\, h(t): t \in I\}$.

(vi) ve (ii) varsayımlarından $\bar{k}$ ve $\bar{f_1}$ sabitleri sonludur. $\bar{h}$ ın sonlu olması ise (vii) ve Lemma 4.1 in bir sonucudur. Bu durumda aşağıdaki varsayıma ulaşırız.

$pr + \bar{f_1} + \overline{kh}\varphi(r)\psi(r) \leq r$, eşitsizliğinin $p + \overline{kh}q\psi(r_0) < 1$ şartını sağlayan r_0 pozitif çözümü vardır.

(4.1) denklemine karşılık gelen aşağıdaki operatörleri gözönüne alalım. *F* operatörünün sabit noktasının varlığı (4.1) denkleminin çözümünün varlığına denktir.

$$(F_1x)(t) = f_1\Big(t, x(t), x\big(a(t)\big)\Big)$$

$$(F_2x)(t) = \int_0^t f_2\,(t,s)(Qx)(s)ds$$

$$(Fx)(t) = (F_1x)(t) + (Gx)(t)(F_2x)(t) \quad , \qquad t \in I$$

M ve N aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$M(\varepsilon) = sup\left\{ \ \left| \int_0^{t_1} [g(t_2,s) - g(t_1,s)ds \right| : \ t_1, t_2 \in I \, , t_2 - t_1 \leq \ \varepsilon \right\}$$

$$N(\varepsilon) = \sup \{ \int_{t_1}^{t_2} g(t_2, s)ds \ : \ t_1, t_2 \in I \ , \ t_1 < t_2 \ , \qquad t_2 - t_1 \leq \varepsilon \}$$

(vii) varsayımından, $\varepsilon \to 0$ limit durumunda $M(\varepsilon) \to 0$ ve $N(\varepsilon) \to 0$, Böylece aşağıdaki Lemma'yı elde ederiz.

Lemma 4.4. (i) - (vii) varsayımları altında F operatörü $C(I)$ kümesini kendine dönüştürür.

İspat : Keyfi $x \in C(I)$ seçelim. Süperposition prensibine göre [24], $F_1 x \in C(I)$ olur. Diğer taraftan keyfi $x, y \in C(I)$ fonksiyonları ve sabit bir için $t \in I$ için (ii) varsayımı kullanarak

$$| (F_1 x)(t) - (F_1 y)(t)| = |f_1\left(t, x(t), x\big(a(t)\big)\right) - f_1(t, y(t), y(a(t)))|$$

$$\leq p \, max\{|x(t) - y(t)|, \ |x\big(a(t)\big) - y\big(a(t)\big)|\}$$

elde edilir. (i) varsayımından ve yukarıdaki eşitsizlikten

$$\big||F_1 x - F_1 y|\big| \leq p \, \big||x - y|\big| \tag{4.11}$$

bulunur. Bundan dolayı F_1 in sürekliliği $C(I)$ kümesini kendisine dönüştürdüğü sonucuna varılır.

Genelliği bozmadan $t_1 < t_2$ alabiliriz. Yukarıdaki kabullerden $x \in C(I)$ ve $\varepsilon > 0$ seçelim. $t_2 - t_1 \leq \varepsilon$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in I$ alalım.

$$| (F_2 x)(t_2) - (F_2 x)(t_1)|$$

$$\leq | \int_0^{t_2} k(t_2, s) g(t_2, s)(Qx)(s)ds - \int_0^{t_1} k(t_2, s) g(t_2, s)(Qx)(s)ds \, |$$

$$+ | \int_0^{t_1} k(t_2, s) g(t_2, s)(Qx)(s)ds - \int_0^{t_1} k(t_1, s) g(t_2, s)(Qx)(s)ds \, |$$

$$+ | \int_0^{t_1} k(t_1, s) g(t_2, s)(Qx)(s)ds - \int_0^{t_1} k(t_1, s) g(t_1, s)(Qx)(s)ds \, |$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} |k(t_2,s)|g(t_2,s)|(Qx)(s)|ds + \int_0^{t_1} |k(t_2,s) - k(t_1,s)|g(t_2,s)|(Qx)(s)|ds$$

$$+ \int_0^{t_1} |k(t_1,s)||g(t_2,s) - g(t_1,s)||(Qx)(s)|ds$$

$$\leq \bar{k}\psi(||x||) \int_{t_1}^{t_2} g(t_2,s)ds + \omega_1(k,\varepsilon)\psi(||x||)\int_0^{t_1} g(t_2,s)ds$$

$$+\bar{k}\psi(||x||)\int_0^{t_1} |g(t_2,s) - g(t_1,s)|ds \ ,$$

sonucuna varırız. Burada

$$\omega_1(k,\varepsilon) = sup\{|k(t_2,s) - (k,t_1)| : \ (t_1,s),(t_2,s) \in \Delta, |t_2 - t_1| \leq \varepsilon\}.$$

(vii) varsayımına göre, $t \to g(t,s)$ fonksiyonu monoton olduğu için

$$\int_0^{t_1} |g(t_2,s) - g(t_1,s)\,|ds = |\int_0^{t_1} [g(t_2,s) - g(t_1,s)]ds\,|$$

olduğu kolayca görülebilir.. Bu gerçeği dikkate alarak

$$\begin{aligned} |\,(F_2x)(t_2) - (F_2x)| \\ &\leq \bar{k}\omega\big(\big||x|\big|\big)N(\varepsilon) + \omega_1(k,\varepsilon)\psi\big(\big||x|\big|\big)h(t_2) \\ &+ \bar{k}\psi\big(\big||x|\big|\big)\,|\int_0^{t_1} [g(t_2,s) - g(t_1,s)]ds\,| \end{aligned}$$

sonucuna varırız. Burada $M(\varepsilon)$ ve $N(\varepsilon)$ daha önce tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere

$$\omega(F_2x,\varepsilon) \leq \bar{k}\psi\big(\big||x|\big|\big)N(\varepsilon) + \bar{h}\psi\big(\big||x|\big|\big)\omega_1(k,\varepsilon) + \bar{k}\psi\big(\big||x|\big|\big)M(\varepsilon) \quad (4.12)$$

bulunur. k fonksiyonu Δ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan $\varepsilon \to 0$ ise $\omega_1(k,\varepsilon) \to 0$ bulunur.

F_2 nin sürekliliği $N(\varepsilon)$ ve $M(\varepsilon)$'nun yukarıda elde edilen özelliklerden ve bu sonuçtan elde edilir. Ayrıca F_2 $C(I)$ yı kendine dönüştürür.

Şimdi F operatörünün $C(I)$ aralığında sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi $x_0 \in C(I)$ ve $\varepsilon > 0$ seçelim. $||x - x_0|| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $x \in C(I)$ alalım. $t \in I$ için

$$|(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| \leq |(F_1x)(t) - (F_1x_0)(t)|$$

$$+|\,(Gx)(t)(F_2x)(t) - (Gx_0)(t)(F_2x_0)(x)|$$

$$\leq ||F_1x - F_1x_0||$$

$$+|(Gx)(t)||(F_2x)(t) - (F_2x_0)(t)|$$

$$+|(F_2x_0)(t)||(Gx)(t) - (Gx_0)(x)|$$

$$\leq ||F_1x - F_1x_0|| + ||Gx|||(F_2x)(t) - (F_2x_0)(t)|$$

$$+ ||F_2x_0||||Gx - Gx_0||. \tag{4.13}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$|(F_2x)(t) - (Fx_0)(t)|$$

$$= \left|\int_0^t k(t,s)g(t,s)(Qx)(s)ds - \int_0^t k(t,s)g(t,s)(Qx_0)(s)ds\right|$$

$$\leq \int_0^t |k(t,s)|g(t,s)|(Qx)(s) - (Qx_0)(s)|ds$$

$$\leq \bar{k}\left(\int_0^t g(t,s)ds\right)||Qx - Qx_0||$$

$$\leq \overline{kh}||Qx - Qx_0||. \tag{4.14}$$

elde edilir. Benzer bir şekilde keyfi $t \in I$ için,

$$|\,(F_2x_0)(t)| = \left|\int_0^t k(t,s)g(t,s)(Qx_0)(s)ds\right|$$

$$\leq \bar{k} \left(\int_0^t g(t,s)ds \right) ||Qx_0|| \leq \overline{kh}||Qx_0||.$$

olduğundan

$$||F_2x_0|| \leq \overline{kh}||Qx_0||. \qquad (4.15)$$

elde ederiz. (4.12) – (4.14) ve (4.10) eşitsizliklerini birleştirerek

$$||Fx - Fx_0|| \leq p||x - x_0|| + ||Gx||\overline{kh}||Qx - Qx_0|| + \overline{kh}||Qx_0||||Gx - Gx_0||$$

bulunur. (iv) ve (v) varsayımlardan yukarıdaki eşitsizliğin şartları dahilinde, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$||Fx - Fx_0|| \leq p\varepsilon + \varphi(||x_0|| + \varepsilon)\overline{kh}||Qx - Qx_0|| + \overline{kh}\psi(||x_0||)||Gx - Gx_0||.$$

Yukarıdaki eşitsizlikten G ve Q operatörlerinin sürekliliğinden F operatörü $C(I)$ aralığında sürekli olduğu sonucuna geliriz. İspat biter.

Bu tezin ana sonucu aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.5. (i) – (viii) arası varsayımları altında (4.1) denkleminin $C(I)$ kümesinde en az bir çözümü vardır.

***İspat*:** Herhangi bir $x \in C(I)$ ve $t \in I$ alalım. Varsayımlarımızı uygulayarak ve Lemma 4.4 ispatına benzer bir şekilde

$$|(Fx)(t)| \leq \left|f_1\left(t, x(t), x(a(t))\right) - f_1(t,0,0)\right| + |f_1(t,0,0)|$$
$$+ |(Gx)(t)| \left| \int_0^t k(t,s)g(t,s)(Qx)(s)ds \right|$$

$$\leq p||x|| + \overline{f_1} + ||Gx||\overline{kh}||Qx||$$

$$\leq \overline{f_1} + p||x|| + \overline{kh}\varphi(||x||)\psi(||x||)$$

elde ederiz. Bu ise

$$||Fx|| \leq \overline{f_1} + p||x|| + \overline{kh}\varphi(||x||)\psi(||x||)$$

sonucunu doğurur. Yukarıdaki sonuçtan ve (viii) varsayımından $p + \overline{kh}q\psi(r_0) < 1$ olacak şekilde $r_0 > 0$ vardır öyle ki $F : Br_0 \to Br_0$. Ayrıca Lemma 4.4'e göre F operatörü Br_0 yuvarı üzerinde süreklidir.

Br_0 yuvarının boş olmayan bir X alt kümesini ve $\varepsilon > 0$ sayısını alalım. Herhangi bir $x \in X$ ve $|t_2 - t_1| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in I$ için , (4.15) denklemine göre

$$
\begin{aligned}
|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)| \leq\ & \left| f_1\big(t_2, x(t_2)\big), x\big(a(t_2)\big)\big) - f_1\Big(t_1, x(t_2), x\big(a(t_2)\big)\Big) \right| \\
& + \left| f_1\Big(t_1, x(t_2), x\big(a(t_2)\big)\Big) - f_1\Big(t_1, x(t_1), x\big(a(t_1)\big)\Big) \right| \\
& + |(F_2x)(t_2)||(Gx)(t_2) - (Gx)(t_1)| \\
& + |(Gx)(t_1)||(F_2x)(t_2) - (F_2x)(t_1)| \\
\leq\ & \omega_{r_0}(f_1, \varepsilon) + p\, max\Big\{|x(t_2) - x(t_1)|, \big|x\big(a(t_2)\big) - x\big(a(t_1)\big)\big|\Big\} \\
& + \overline{kh}\psi(r_0)\omega(Gx, \varepsilon) + \varphi(r_0)\omega(F_2x, \varepsilon),
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Burada

$$
\omega_{r_0}(f_1, \varepsilon) = sup\{|f_1(t_2, x, y) - f_1(t_1, x, y)| : t_1, t_2 \in I, |t_2 - t_1| \leq \varepsilon, x, y \in [-r_0, r_0]\}
$$

ile gösterilir. Böylece (4.12) denklemine göre

$$
\begin{aligned}
\omega(Fx, \varepsilon) \leq\ & \omega_{r_0}(f_1, \varepsilon) + p\, max\Big\{\omega(x, \varepsilon), \omega\big(x, \omega(a, \varepsilon)\big)\Big\} \\
& + \overline{kh}\psi(r_0)\omega(Gx, \varepsilon) + \varphi(r_0)\psi(r_0)\big[\bar{k}N(\varepsilon) + \bar{h}\omega_1(k, \varepsilon) + \bar{k}M(\varepsilon)\big],
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

Şimdi, $I\ x\ [-r_0, r_0]^2$ kümesindeki f_1 fonksiyonunun düzgün sürekliliği $k(t,s)$, $a(t), M(\varepsilon)$ ve $N(\varepsilon)$ fonksiyonlarının özelliklerini hesaba katarak

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \omega_1(k, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(a, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega_{r_0}(f_1, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) = 0.
$$

sonucunu elde ederiz.

Bu ifadeleri yukarıdaki (4.3) denklemi bağlayarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$
\omega_0(FX) \leq p\omega_0(X) + \overline{kh}\psi(r_0)\omega_0(GX).
$$

Böylece, (iii) varsayımına göre,

$$\omega_0(FX) \leq (p + \overline{kh}q\psi(r_0))\omega_0(X).$$

elde edilir.

O halde Darbo sabit nokta teoriminden (Teorem 2.9) sabit noktası vardır. Dolayısıyla (4.1) denkleminin çözümü vardır.

Örnek 4.6.

$$x(t) = \frac{1}{6}[te^{-t} + t^2x(t) + x(1-t)] + \frac{1}{2}\sin(t - x(t))\int_0^t \left[t - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right] g(t,s)(Qx)(s)ds,$$

$$t \in I \ , \qquad (4.16)$$

tekil Volterra denklemini ele alalım. Burada

$$g(t,s) = \begin{cases} \frac{-1}{(t-s)ln^3(t-s)} & 0 \leq s < t \leq e^{-3} \\ \frac{1}{18}e^3 & e^{-3} \leq s < t \leq 1 \\ 0 \qquad (t,s) \in \Delta \quad , & t = s, \end{cases}$$

ve Q operatörü $C(I)$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$(Qx)(t) = \int_0^t x(\tau)tanh\,(|x(\tau)|)d\tau.$$

(4.16) denklemi (4.1) denkleminin özel bir durumudur. Burada

$$f_1(t,x,y) = \frac{1}{6}[te^{-t} + t^2x + y],$$

$$a(t) = 1 - t \ ,$$

$$(Gx)(t) = \frac{1}{2}sin\big(t - x(t)\big),$$

$$k(t,s) = t - (s - \frac{1}{2})^2$$

$f_1 = \frac{1}{6e}$ ve $\bar{k} = 1$ olduğu kolayca görülebilir. Ek olarak

$$|f_1(t,x_1,y_1) - f_1(t,x_2,y_2)| \leq \frac{1}{3}\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

bulunur. Dolayısıyla f_1 fonksiyonu $p=\frac{1}{3}$ ile (ii) varsayımını sağlar. Ayrıca, $q=\frac{1}{2}$, $\varphi(r)=\frac{1}{2}$ ve $\psi(r)=r^2$ için (i), (ii), (vi) varsayımlarının sağlandığı doğrulanabilir. Bu bir yana standart diferansiyel denklemler araçları kullanılarak herhangi bir sabit $s\in I$ için $[s,1]$ aralığında $t\to g(t,s)$ fonksiyonunun artmayan olduğunu kontrol etmek kolaydır. $(t,s)\in\Delta$ için $g(t,s)\geq 0$ olduğundan $s\to g(t,s)$ fonksiyonunun $[0,t]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir olduğunu kontrol etmek için, klasik mantıkta $\int_0^t g(t,s)ds$ integralinin varlığını göstermek yeterli olacaktır. Ayrıca (4.6) denklemi tarafından tanımlanmış $h=h(t)$ fonksiyonunu ifade etmemize yarayacak formülü elde ederiz.

$$h(t)=\begin{cases} 0 & t=0 \\ \frac{1}{2ln^2t} & 0<t\leq e^{-3} \\ \frac{1}{18}e^3t & e^{-3}<t\leq 1. \end{cases}$$

Açıkçası h fonksiyonu I üzerinde süreklidir ve $\bar{h}=\frac{e^3}{18}$’ dir.

Sonra, $t_1,t_2\in I$, $t_1<t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t_2,s)ds=\begin{cases} \frac{1}{2ln^2(t_2-t_1)} & 0<t_2\leq e^{-3} \\ \frac{e^3}{18}(t_2-t_1) & e^{-3}<t_2\leq 1. \end{cases}$$

hesaplayabiliriz.

Bundan dolayı, (vii) varsayımının (4.5) şartı sağlar. Bu ile I aralığındaki h fonksiyonunun sürekliliği ile bağlayarak ve Uyarı 4.2. yi dikkate alarak (vii) varsayımın sağlandığını elde ederiz.

Son olarak (viii) varsayımında görünen ilk eşitsizliği ele alalım. Yukarıdaki hesapları temel alarak bizim durumumuzdaki bahsedilen eşitsizliğin

$$\frac{1}{6e}+\frac{1}{3}r+\frac{1}{36}e^3r^2\leq r$$

veya eşdeğer olarak,

$$e^3r^2-24r+\frac{6}{e}\leq 0$$

formunda olduğu sonucuna varırız.

$r_0 = (12 - \sqrt{144 - 6e^2}/e^3$ sayısının bu eşitsizlikteki minimal çözüm olduğunu kolaylıkla görürüz. Dahası, r_0 , (viii) varsayımının ikinci bölümünde ortaya çıkan

$$p + \overline{kh}q\psi(r_0) \leq 1,$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece, yukarıdaki bilgilere ve Teorem 4.5 e göre (4.16) denkleminin $C(I)$ aralığında B_{r_0} yuvarına ait en az bir çözümü vardır.

REFERANSLAR

[1] R. Estreda, R.P. Kanwal, Singular Integral Equtions, Brikhauser, Boston, 1999.

[2] I.K. Lifanov, L.N. Poltavskii, G.M. Vainikko, Hypersingular Integral Equations and their Applications, CRC, Press, LLc, 2004.

[3] N.I. Muskhelishvilli, Singular Integral Equtions: Boundary Problems of Fonction Theory and their Applications to Mathematical Physics, Dover Publications, 1992.

[4] R.P. Agarwal, M.Benchohra, D. Seba, On the application of measure of noncompactness to the existence of solutions for fractional differential equtations, Results Math. 55(2009) 221-230.

[5] R.P. Agarwal, D. O'Regan, P.I.Y. Wong, Constant-sign solutions for systems of singular integral equtions of Hammerstein type, Math. Comput. Modelling 50 (2009) 999-1025.

[6] J. Banas, T. Zajac, A new approach to the theory of functional integral equtions of fractional order, J. Math. Anal. Appl. 375 (2011) 375-387

[7] M.A. Darwish, S.K. Ntouyas. Monotonic solutions of a perturbed quadratic fractional integral equation, Nonlinear Anal. 71 (2009) 5513-5521.

[8] M.A. Darwish, On monotonic solutions of a quadratic integral equation with supremum, Dynam. Systems Appl. 17 (2008) 539-550.

[9] M.A. Darwish, On a singular quadratic integral equation of Volterra type with supremum, IC/2007/071, Trieste, Italy, 2007, pp. 1-13.

[10] T. Diago, Collocation and iterated collocation method for a class of weakly singular Volterra integral equations, J. Comput. Appl. Math. 229 (2009) 363-372.

[11] L. Liu, F. Guo, C. Wu, Y. Wu, Existence theorems of global solutions for nonlinear Volterra type integral equations in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 309 (2005) 638-649.

[12] B. Rzepka, On attractivity and asymptotic stability of solutions of a quadratic Volterra integral equation of fractional order, Topol. Methods Nonlinear Anal. 32 (2008) 89-102.

[13] B. Rzepka, K. Sadarangani, On solutions of an infinite system of singular equations, Math. Comput. Modelling 45 (2007) 1265-1271.

[14] L. Tao, H. Yong, Extrapolation method for solving weakly singular nonlinear Volterra integral equations of the second kind, J.Math. Anal. Appl. 324 (2006) 225-237.

[15] L. Tao, H. Yong, A generalization of discrete Gronwall inequality and its application to weakly singular Volterra integral equations of the second kind, J. Math. Anal. Appl. 282 (2003) 56-62.

[16] J. Banas, B. Rzepka, Nondecreasing solutions of a quadratic singular Volterra integral equation, Math. Comput. Modelling 49 (2009) 488-496

[17] J. Banaś, A. Chlebowicz, On integrable solutions of a nonlinear Volterra integral equation under Carathéodory conditions, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009) 1073–1084.

[18] M. Benchohra, J.R. Graef, S. Hamani, Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, Appl. Anal. 87 (2008) 851–863.

[19] M.A. Darwish, J. Henderson, Existence and asymptotic stability of solutions of a perturbed quadratic fractional integral equation, Fract. Calc. Appl. Anal. 12 (2009) 71–86.

[20] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elcevier Science B. V., Amsterdam, 2006.

[21] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[22] R.K. Saxena, S.I. Kalla, On a fractional generalization of free electron laser equation, Appl. Math. Comput. 143 (2003) 89–97.

[23] J. Banaś, K. Goebel, Measures of Noncompactness in Banach Spaces, in: Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 60, Marcel Dekker, New York and Basel, 1980.

[24] J. Appell, P.P. Zabrejko, Nonlinear Superposition Operators, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[25] I.K. Argyros, On a class of quadratic integral equations with perturbations, Funct. Approx. Comment. Math. 20 (1992) 51–63.

[26] J. Banaś, M. Lecko, W.G. El-Sayed, Existence theorems for some quadratic integral equations, J. Math. Anal. Appl. 222 (1998) 276–285.

[27] B. Cahlon, M. Eskin, Existence theorems for an integral equation of the Chandrasekhar H-equation with perturbation, J. Math. Anal. Appl. 83 (1981)

[28] S. Chandrasekhar, Radiative Transfer, Oxford Univ. Press, London, 1950.

[29] S. Hu, M. Khavani, W. Zhuang, Integral equations arising in the kinetic theory of gases, Appl. Anal. 34 (1989) 261–266.

[30] I.P. Natanson, Theory of Functions of a Real Variable, Ungar, New York, 1960.

[31] J. Banaś, J.R. Rodriguez, K. Sadarangani, On a class of Urysohn–Stietjes quadratic integral equations and their applications, J. Comput. Appl. Math. 113 (2000) 35–50.

[32] Y. AKSOY, İntegral Denklemleri, İstanbul, 1983

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Manisa Turgutlu'da doğan yazar, ilk ve orta öğrenimini Turgutlu da tamamladı. 1994 yılında Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümün'nde yüksek öğrenimine devam etti. 1998 yılında mezun olup aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmenlik yapmaya başladı. Halen Manisa Sosyal Bilimler Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.